MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ FAKULTA
Univerzita Karlova

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Matyáš Maleček

Spektrum cesàrovských operátorů

Katedra matematické analýzy

Vedoucí bakalářské práce: prof. RNDr. Jiří Spurný, Ph.D., DSc.
Studijní program: Matematika
Studijní obor: Obecná matematika

Praha 2024

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů. Tato práce nebyla využita k získání jiného nebo stejného titulu.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V .... dne ....

Podpis autora

Rád bych poděkoval vedoucímu mé bakalářské práce, panu profesorovi Jiřímu Spurnému, za vždy věcné a cenné připomínky, stejně jako za jeho přívětivý a lidský přístup.

Název práce: Spektrum cesàrovských operátorů

Autor: Matyáš Maleček

Katedra: Katedra matematické analýzy

Vedoucí bakalářské práce: prof. RNDr. Jiří Spurný, Ph.D., DSc., Katedra matematické analýzy

Abstrakt: Tato práce pojednává o hledání spektra cesàrovského operátoru na klasických prostorech posloupností, tedy c_0, c, ℓ^∞ a ℓ^p.

Klíčová slova: cèsarovský operátor spektrum klasické prostory posloupností

Title: Spectrum of cesàro operators

Author: Matyáš Maleček

Department: Department of Mathematical Analysis

Supervisor: prof. RNDr. Jiří Spurný, Ph.D., DSc., Department of Mathematical Analysis

Abstract: This thesis focuses on finding the spectrum of cesàro operator on classic sequence spaces, namely c_0, c, ℓ^∞ and ℓ^p.

Keywords: cèsaro operator spectrum classic sequence spaces

Obsah

Úvod

V této práci budeme zkoumat spektrum cesàrovského operátoru na klasických prostorech posloupností. V první kapitole shrneme základní informace o spektrální teorii na Banachových prostorech a uvedeme důležitá tvrzení, která budou nezbytná k dobrému pochopení celého textu. V druhé kapitole ukážeme jednoduché vlastnosti cesàrovského operátoru na $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, které následně využijeme ve zbytku práce. Ve třetí kapitole vyšetříme spektrum na prostorech c_0, ℓ^∞ a c. V této kapitole budeme čerpat výhradně z článku [1]. Ve čtvrté kapitole určíme spektrum na prostorech ℓ^p, pro $p \in (1, \infty)$. V této kapitole budeme čerpat z článku [2] v části pro obecné p a z článku [3] v poslední části pro ℓ^2 .

Přínos této práce spočívá hlavně v pečlivém a srozumitelném rozepsání důkazů z výše zmiňovaných článků. V některých případech, například lemma 4.6, jsou tvrzení dokonce zobecněné a u některých důkazů, například lemma 3.7, jsou náznaky důkazů dovedené do zdárného konce. Nezanedbatelným přínosem je také fakt, že nemalá část problematiky vyšetřování spektra cesàrovského operátoru na prostorech posloupností je shrnuta do jedné koherentní práce.

1. Základní pojmy

Při zkoumání lineárních operátorů je přirozené se zajímat o jejich spektrum. V konečnědimenzionálním případě se jedná pouze o vlastní čísla, avšak v nekonečné dimenzi dostáváme cosi navíc. Pro dobré pochopení této práce je tedy vhodné si připomenout definici spektra operátoru:

Definice 1 (Spektrum operátoru)**.** *Nechť X je lineární prostor a T lineární operátor na X.* Vlastní čísla *operátoru T definujeme, jako množinu takových komplexních čísel λ, že* $\operatorname{Ker}(\lambda I - T) \neq \{0\}$*.*

Je-li navíc X normovaný prostor a T spojitý, tak spektrem operátoru T *myslíme množinu*

$$\sigma T = \{\lambda \in \mathbb{C} : (\lambda I - T) \text{ není invertovatelný}\},$$

kde „není invertovatelnýw“ *znamená, že nemá spojitou inverzi.*

Pozorování. Je-li λ vlastní číslo spojitého lineárního operátoru T na normovaném lineárním prostoru, tak náleží i do spektra operátoru T.

V této práci se budeme zajímat o spektrum cesàrovského operátoru, který je definovaný následovně:

Definice 2 (Cesàrovský operátor)**.** *Nechť X je prostor posloupností na $\mathbb{C}$, pak* cesàrovským operátorem *nazveme operátor C definovaný vztahem*

$$C\,x = \left(x_1, \frac{1}{2}(x_1 + x_2), \frac{1}{3}(x_1 + x_2 + x_3), \dots\right), \quad x = (x_1, x_2, \dots) \in X.$$

Pozorování. Cesàrovský operátor lze přirozeně reprezentovat maticí

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \cdots \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Při hledání spektra je podstatný prostor X, na kterém je operátor definovaný. My se budeme zabývat klasickými prostory posloupností na $\mathbb{C}$.

Definice 3 (Klasické prostory posloupností)**.** *Definujeme prostory*

- $(c_0, \|.\|_\infty)$*, kde* $c_0 = \{\{x_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathbb{C} : \lim_{n\to\infty} x_n = 0\}$*,*
- $(\ell^p, \|.\|_p)$*,* $p \in [1,\infty)$*, kde* $\ell^p = \{\{x_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathbb{C} : \|\{x_n\}_{n=1}^\infty\|_p < \infty\}$*,*
- $(\ell^\infty, \|.\|_\infty)$*, kde* $\ell^\infty = \{\{x_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathbb{C} : \|\{x_n\}_{n=1}^\infty\|_\infty < \infty\}$*,*
- $(c, \|.\|_\infty)$*, kde* $c = \{\{x_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathbb{C} : \lim_{n\to\infty} x_n \in \mathbb{C}\}$*.*

Zmíněné normy jsou, pro libovolnou posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathbb{C}$, definovány předpisy

$$\|x\|_\infty = \sup\{|x_n|; n \in \mathbb{N}\},$$

$$\|x\|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Všechny tyto prostory budeme uvažovat nad tělesem $\mathbb{C}$. V jednotlivých kapitolách ukážeme, že na všech těchto prostorech, vyjímaje ℓ^1, je C spojitý lineární operátor. Navíc jsou všechny tyto prostory Banachovy, tedy úplné lineární normované prostory, díky čemuž budeme moci využít následující tvrzení:

Věta 1.1. *Nechť T je spojitý lineární operátor na Banachově prostoru X. Potom je spektrum T kompaktní množina v $\mathbb{C}$.*

Věta 1.2. *Nechť T je spojitý lineární operátor na Banachově prostor X. Potom je spektrum T obsaženo v kouli se středem v nule a poloměrem $\|T\|$.*

Věta 1.3 (Banachova-Steinhausova)**.** *Nechť X je Banachův prostor, Y je normovaný lineární prostor a $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost spojitých lineárních operátorů z X do Y taková, že pro každé $x \in X$ existuje $Tx = \lim_{n\to\infty} T_n x$. Potom je T spojitý lineární operátor.*

Důkaz. Lze najít například v [4]. Pro věty 1.1 a 1.2 se jedná o kapitolu 10, věta 10.13. Důkaz věty 1.3 se nachází v kapitole 2, věta 2.4.

□

Hledání spektra není vždy přímočaré a není tomu jinak ani v našem případě. V určitých případech si můžeme práci ulehčit převedením těžkého problému na problém jednodušší. V našem případě to bude převedení problému hledání spektra operátoru C na hledání spektra jeho duálního operátoru C^*.

Definice 4 (Duální operátor)**.** *Nechť X je Banachův prostor a T spojitý lineární operátor na X.* Duálním operátorem *k T myslíme spojitý lineární operátor T^* na X^* splňující, že pro každé $x \in X$ a každé $\varphi \in X^*$ platí*

$$(T^* \varphi)\, x = \varphi\,(T\, x).$$

Zde X^* značí duální prostor k prostoru X. Platí totiž toto velmi užitečné lemma:

Lemma 1.4. *Nechť T je spojitý lineární operátor na Banachově prostoru X a T^* jeho duální operátor na X^*, potom $\sigma T = \sigma T^*$.*

Důkaz. Například v [4], kapitola 4, věta 4.25.

□

Při vyšetřování vlastních čísel C na ℓ^∞ budeme potřebovat následující větu:

Věta 1.5. *Nechť $\{u_j\}_{j=1}^{\infty}$ je posloupnost komplexních čísel, pak nekonečný součin $\prod_{j=1}^{\infty}(1+u_j)$ jest absolutně konvergentní tehdy a jen tehdy, je-li řada $\sum_{j=1}^{\infty} u_j$ absolutně konvergentní.*

Důkaz. Například v [5], 7. kapitola věta 50.

□

Naopak při vyšetřování vlastních čísel C^* se nám bude hodit Raabeovo kritérium.

Lemma 1.6 (Raabeovo kritérium). *Je-li* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *řada s kladnými členy, pak*

1. *existuje-li* $r > 1$ *a* $m \in \mathbb{N}$ *tak, že pro všechna* $n \geq m$ *jest*

$$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) \geq r$$

   je řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konvergentní.*

2. *Existuje-li* $m \in \mathbb{N}$ *tak, že pro všechna* $n \geq m$ *jest*

$$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) \leq 1$$

   je řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *divergentní.*

Důkaz. Například v [5] 6. kapitola věta 46.

□

V několika lemmatech či větách budeme využívat komplexní verzi funkce signum, kterou definujeme následovně:

Definice 5. Komplexním signum *rozumíme funkci* sgn : $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *definovanou vztahem*

$$\operatorname{sgn}(z) = \begin{cases} \dfrac{\bar{z}}{|z|}, & z \neq 0, \\ 0, & z = 0. \end{cases}$$

Pozorování. Pro libovolné $z \in \mathbb{C}$ platí $z \operatorname{sgn}(z) = |z|$.

Budeme též užívat standardní konvenci, kde prázdná suma je rovna 0 a prázdný součin roven 1. Pro libovolnou komplexní posloupnost $\{a_n\}$ a N, M přirozené, splňující $N > M$, označíme

$$\sum_{n=N}^{M} a_n = 0, \quad \prod_{n=N}^{M} a_n = 1.$$

Nakonec zmíníme, že je-li x posloupnost komplexních čísel, tak $|x|$ značí posloupnost absolutních hodnot členů x, tedy

$$x = (x_1, x_2, \dots), \quad |x| = (|x_1|, |x_2|, \dots).$$

2. Cesàrovský operátor na $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$

V této kapitole budeme zkoumat základní vlastnosti cesàrovského operátoru na lineární prostoru $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. Zřejmě se jedná o dobře definovaný lineární operátor na $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, jelikož je reprezentován dolní trojúhelníkovou maticí, a tak dává smysl se bavit o jeho vlastních číslech. V příštích kapitolách také využijeme výpočty, které provedeme v následujících dvou lemmatech.

Lemma 2.1. *Vlastní čísla C na $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ jsou tvaru $\frac{1}{N}$, kde N je přirozené číslo. Odpovídající vlastní vektor $x \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ vlastního čísla $\frac{1}{N}$ je ve tvaru*

$$x_n = \begin{cases} 0, & n < N, \\ c \prod_{k=N}^{n-1} \frac{k}{k+1-N}, & N \leq n, \end{cases} \qquad n \in \mathbb{N},$$

kde c je nenulové komplexní číslo.

Důkaz. Nechť $\lambda \in \mathbb{C}$ je vlastní číslo C a $x \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ jeho vlastní vektor. Najdeme nejmenší přirozené číslo N takové, že $x_N \neq 0$. Při řešení rovnice $(\lambda I - C)x = 0$ dostáváme pro N-tou složku

$$\lambda x_N - \frac{1}{N} x_N = 0.$$

Čili $\lambda = \frac{1}{N}$, čímž je dokázána první část lemmatu.

Nyní řešíme soustavu rovnic ve tvaru

$$-\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} x_k + \left(\frac{1}{N} - \frac{1}{n} \right) x_n = 0, \quad n \in \{N, N+1, \dots\}.$$

Po jednoduché úprávě dospějeme ke tvaru

$$\frac{n-N}{N} x_n = \sum_{k=1}^{n-1} x_k.$$

Zvolme $n \in \{N, N+1, \dots\}$ pevné. Pak

$$\begin{aligned} x_{n+1} = \frac{N}{n+1-N} \sum_{k=1}^{n} x_k &= \frac{N}{n+1-N} \left(\sum_{k=1}^{n-1} x_k + x_n \right) \\ &= \frac{N}{n+1-N} \left(\frac{n-N}{N} x_n + x_n \right) = \frac{n}{n+1-N} x_n. \end{aligned}$$

Nyní rekurzí dospějeme k výrazu

$$x_n = x_N \prod_{k=N}^{n-1} \frac{k}{k+1-N}.$$

Označíme-li $c = x_N$, tak získáváme zbytek lemmatu.

□

Lemma 2.2. *Nechť* $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}$ *nenulové. Pak existuje inverze operátoru* $\lambda I - C$ *a je reprezentovaná maticí* A *s prvky*

$$a_{st} = \begin{cases} \frac{1}{s\lambda^2 \prod_{k=t}^{s} \left(1 - \frac{1}{k\lambda}\right)}, & t < s, \\ -\frac{s}{1-s\lambda}, & s = t, \\ 0, & s < t, \end{cases} \qquad s, t \in \mathbb{N}.$$

.

Důkaz. Nejprve si uvědomme, že operátor reprezentovaný maticí A je dobře definovaný lineární operátor na $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, jelikož se jedná o dolní trojúhelníkovou matici.

Nechť $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}$ nenulové a buď $y \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ libovolné. Hledáme vektor $x \in \mathbb{C}^n$ takový, že $(\lambda I - C)x = y$. Řešíme soustavu rovnic ve tvaru

$$\lambda x_n - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k = y_n, \; n \in \mathbb{N}.$$

Vidíme, že $x_1 = -\frac{1}{1-\lambda} y_1$ a $x_2 = \frac{1}{2\lambda^2 \left(1 - \frac{1}{2\lambda}\right)\left(1 - \frac{1}{\lambda}\right)} y_1 - \frac{1}{1-2\lambda} y_2$. Tvrdíme, že

$$x_n = \frac{1}{n\lambda^2} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{y_k}{\prod_{j=k}^{n} \left(1 - \frac{1}{j\lambda}\right)} - \frac{n}{1-n\lambda} y_n, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{2.1}$$

Pro $n = 1, 2$ rovnost (2.1) platí. Platnost pro obecné přirozené n dokážeme indukcí. Předpokládejme její platnost do nějakého $N \in \mathbb{N}$. Máme

$$\lambda x_{N+1} - \frac{1}{N+1} \sum_{k=1}^{N+1} x_k = y_{N+1}$$

$$\lambda x_{N+1} - \frac{1}{N+1} \sum_{k=1}^{N+1} x_k - \frac{N}{N+1} \left(\lambda x_N - \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} x_k \right) = y_{N+1} - \frac{N}{N+1} y_N$$

$$-\frac{1}{N+1} x_{N+1} + \lambda \left(x_{N+1} - \frac{N}{N+1} x_N \right) = y_{N+1} - \frac{N}{N+1} y_N.$$

Upravíme:

$$x_{N+1} = \frac{N}{(N+1)\lambda \left(1 - \frac{1}{(N+1)\lambda}\right)} (\lambda x_N - y_N) - \frac{N+1}{1-(N+1)\lambda} y_{N+1}.$$

Využijeme indukční předpoklad

$$\begin{aligned} \lambda x_N - y_N &= \left(\frac{1}{N\lambda} \sum_{k=1}^{N-1} \frac{y_k}{\prod_{j=k}^{N} \left(1 - \frac{1}{j\lambda}\right)} - \frac{N\lambda}{1-N\lambda} y_N \right) - y_N \\ &= \frac{1}{N\lambda} \sum_{k=1}^{N-1} \frac{y_k}{\prod_{j=k}^{N} \left(1 - \frac{1}{j\lambda}\right)} - \frac{y_N}{1-N\lambda} \\ &= \frac{1}{N\lambda} \sum_{k=1}^{N-1} \frac{y_k}{\prod_{j=k}^{N} \left(1 - \frac{1}{j\lambda}\right)} + \frac{y_N}{N\lambda(1 - \frac{1}{N\lambda})} \\ &= \frac{1}{N\lambda} \sum_{k=1}^{N} \frac{y_k}{\prod_{j=k}^{N} \left(1 - \frac{1}{j\lambda}\right)}. \end{aligned}$$

Dosadíme:

$$
\begin{aligned}
x_{N+1} &= \frac{N}{(N+1)\lambda\left(1-\frac{1}{(N+1)\lambda}\right)}\left(\frac{1}{N\lambda}\sum_{k=1}^{N}\frac{y_k}{\prod_{j=k}^{N}\left(1-\frac{1}{j\lambda}\right)}\right)-\frac{N+1}{1-(N+1)\lambda}y_{N+1}\\
&= \frac{1}{(N+1)\lambda^2}\sum_{k=1}^{N}\frac{y_k}{\prod_{j=k}^{N+1}\left(1-\frac{1}{j\lambda}\right)}-\frac{N+1}{1-(N+1)\lambda}y_{N+1}.
\end{aligned}
$$

Tudíž rovnost (2.1) platí. Z této rovnosti je již tvar matice reprezentující inverzi $(\lambda I - C)$ zřejmý.

$\square$

3. Spektrum na c, c_0 a ℓ^∞

3.1 Prostor c_0 a ℓ^∞

3.1.1 Spojitost operátoru

Lemma 3.1. *Nechť $(a_{st})_{s,t\geq 1}$ je matice, která splňuje:*

1. *Všechny řádky matice jsou prvky ℓ^1 a jejich ℓ^1 normy jsou stejně omezené,*
2. *všechny sloupce jsou prvky c_0.*

Potom je operátor A, který je reprezentován touto maticí, lineární spojitý operátor na c_0 s normou rovnou supremu ℓ^1 norem řádků.

Důkaz. Nejprve ukážeme spojitost operátoru.
Položme $L = \sup\{\sum_{t=1}^\infty |a_{st}| : s \in \mathbb{N}\}$. Dle první podmínky platí $L < \infty$. Nyní nechť $x \in c_0$. Pro $s \in \mathbb{N}$ máme

$$|(Ax)_s| \leq \sum_{t=1}^\infty |a_{st}x_t| \leq \|x\|_\infty \sum_{t=1}^\infty |a_{st}| \leq L\|x\|_\infty.$$

Pak již $\|Ax\|_\infty \leq L\|x\|_\infty$, tedy A je skutečně spojitý operátor a $\|A\| \leq L$.

Nyní ukážeme, že A je operátor na c_0. Nechť opět $x \in c_0$ a zvolme $\varepsilon > 0$. Najdeme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \geq n_0$ přirozené platí $|x_n| < \varepsilon$. Zároveň z druhé podmínky víme, že pro libovolné $t \in \mathbb{N}$ patří posloupnost $\{a_{st}\}_{s=1}^\infty$ do c_0. Najdeme tedy takové $s_0 \in \mathbb{N}$, že pro $t \in \{1, \ldots, n_0\}$ a pro všechny $s \geq s_0$ přirozené platí $|a_{st}| < \frac{\varepsilon}{n_0}$. Nyní již pro všechny přirozené $s \geq s_0$ máme

$$\begin{aligned}|(Ax)_s| \leq \sum_{t=1}^\infty |a_{st}x_t| &= \sum_{t=1}^{n_0} |a_{st}x_t| + \sum_{t=n_0+1}^\infty |a_{st}x_t| \\ &\leq \|x\|_\infty \sum_{t=1}^{n_0} \frac{\varepsilon}{n_0} + \sum_{t=n_0+1}^\infty |a_{st}|\varepsilon \leq \|x\|_\infty\varepsilon + L\varepsilon = (\|x\|_\infty + L)\,\varepsilon.\end{aligned}$$

Takže skutečně $Ax \in c_0$ a operátor reprezentovaný maticí A je tak dobře definovaný. Linearita daného operátoru je zřejmá.

Zbývá se přesvědčit o tom, že $\|A\| = L$. Nechť $\varepsilon \in (0, 2L)$ dáno. Najdeme takové s přirozené, že ℓ^1 norma s-tého řádku matice A je v intervalu $\left(L - \frac{\varepsilon}{2}, L\right]$, tedy

$$L - \frac{\varepsilon}{2} < \sum_{t=1}^\infty |a_{st}| \leq L.$$

Pro n přirozené buď e^n posloupnost definována jako $e_t^n = \operatorname{sgn} a_{st}$ pro $t \leq n$ a jinak 0. Tato posloupnost zřejmě náleží do c_0 a $\|e^n\|_\infty = 1$. Navíc

$$\sum_{t=1}^n |a_{st}| \leq \|Ae^n\|_\infty.$$

Nyní najdeme $N \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\sum_{t=1}^\infty |a_{st}| - \frac{\varepsilon}{2} \leq \sum_{t=1}^N |a_{st}|.$$

Pak již
$$L - \varepsilon < \sum_{t=1}^{\infty} |a_{st}| - \frac{\varepsilon}{2} \leq \|Ae^N\|_\infty \leq L.$$
A jelikož ε bylo voleno libovolně, tak už $\|A\| = L$.

$\square$

Důsledek. Cesàrovský operátor je lineární spojitý operátor na prostoru c_0, jehož norma je rovna jedné.

Poznámka. Platí i opačná implikace, tedy je-li T operátor na c_0, který je reprezentován určitou maticí, tak již tato matice nutně splňuje podmínky 1 a 2 z lemmatu 3.1.

V této kapitole budeme používat standardní reprezentace prvního a druhého duálu c_0, tedy $(c_0)^* \cong \ell^1$ a $(c_0)^{**} \cong \ell^\infty$, které jsou dány předpisem
$$x(y) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n,$$
kde $x \in \ell^1$, $y \in c_0$ pro první duál a $x \in \ell^\infty$, $y \in \ell^1$ pro druhý duál.

Lemma 3.2. *Duální operátor C^* k operátoru C na c_0 je reprezentován maticí*
$$C^T = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$
a druhý duální operátor C^{**} je cesàrovský operátor na ℓ^∞.

Důkaz. Nechť $x \in c_0$, $y \in \ell^1$. Potom i $|x| \in c_0$ a $|y| \in \ell^1$. Jelikož C^* je dobře definovaný operátor na ℓ^1, tak
$$\sum_{n=1}^{\infty} |y_n| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} |x_k| = |y| \left(C|x|\right) = \left(C^*|y|\right)|x| < \infty.$$
Potom z Fubiniovy věty plyne, že
$$\sum_{\substack{k \leq n, \\ k,n \in \mathbb{N}}} \frac{1}{n} |x_k||y_n| < \infty,$$
a tak i
$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k| \sum_{n=k}^{\infty} \frac{1}{n} |y_n| = \left(C^T|y|\right)|x| < \infty.$$
Opětovaným použitím Fubiniovy věty, nyní již na řadu $\sum_{\substack{k \leq n, \\ k,n \in \mathbb{N}}} \frac{1}{n} x_k y_n$, dostáváme
$$\left(C^* y\right) x = \sum_{n=1}^{\infty} y_n \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k = \sum_{\substack{k \leq n, \\ k,n \in \mathbb{N}}} \frac{1}{n} x_k y_n = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \sum_{n=k}^{\infty} \frac{1}{n} y_n = \left(C^T y\right) x,$$
čímž jsme dokázali první část lemmatu. Identickým postupem bychom ukázali i druhou část tvrzení.

$\square$

Důsledek. Cesàrovský operátor je spojitý lineární operátor na ℓ^∞ jehož norma je rovna jedné.

3.1.2 Spektrum operátoru

Věta 3.3. *Operátor C na c_0 nemá žádná vlastní čísla.*

Důkaz. Pro spor ať $\lambda \in \mathbb{C}$ je vlastním číslem C. Obdobně jako v lemmatu 2.1 zjistíme, že existuje N přirozené, že $\lambda = \frac{1}{N}$ a jeho odpovídající vlastní vektor je ve tvaru

$$x_n = \begin{cases} 0, & n < N, \\ c\prod_{k=N}^{n-1} \frac{k}{k+1-N}, & N \le n, \end{cases} \qquad n \in \mathbb{N},$$

kde c je nenulové komplexní číslo. Potom pro přirozená $n \ge N$ platí

$$\frac{|x_{n+1}|}{|x_n|} = \frac{n}{n+1-N} \ge 1.$$

To znamená, že $\{|x_n|\}$ je neklesající posloupnost, přičemž $|x_N| = |c| > 0$. To je ale spor s tím, že $x \in c_0$.

□

Věta 3.4. *Operátor C na ℓ^∞ má právě jedno vlastní číslo* 1.

Důkaz. Nejprve se přesvědčíme, že 1 je vlastní číslo C. To je ale zřejmé, neboť pro posloupnost $e = (1,1,\dots) \in \ell^\infty$ platí $Ce = e$.

Buď tedy $\lambda \in \mathbb{C}$ vlastní číslo C na ℓ^∞ a pro spor uvažujme, že $\lambda \ne 1$. Obdobně jako v lemmatu 2.1 zjistíme, že existuje přirozené N různé od jedné, že $\lambda = \frac{1}{N}$ a jeho odpovídající vektor je ve tvaru

$$x_n = \begin{cases} 0, & n < N, \\ c\prod_{k=N}^{n-1} \frac{k}{k+1-N}, & N \le n, \end{cases} \qquad n \in \mathbb{N},$$

kde $c \in \mathbb{C}$ a $c \ne 0$. Ukážeme, že

$$\prod_{k=N}^{\infty} \left| \frac{k}{k+1-N} \right| = \prod_{k=N}^{\infty} \left| 1 + \frac{N-1}{k+1-N} \right| = \infty,$$

potom již $x \notin \ell^\infty$, což vede ke sporu. Z věty 1.5 víme, že tomu tak je, pakliže řada $\sum_{k=N}^{\infty} \frac{N-1}{k+1-N}$ diverguje. To ihned plyne z limitního srovnávacího kritéria, neb

$$\lim_{k\to\infty} \left| \frac{\frac{N-1}{k+1-N}}{\frac{1}{k}} \right| = \lim_{k\to\infty} (N-1) \left| \frac{k}{k+1-N} \right| = N-1 \in (0,\infty).$$

A tak skutečně $x \notin \ell^\infty$, což je spor.

Tím jsme ukázali, že jediným vlastním číslem C na ℓ^∞ je jedna.

□

Věta 3.5. *Čísla* $\lambda \in \mathbb{C}$ *splňující* $|\lambda - \frac{1}{2}| < \frac{1}{2}$ *jsou vlastní čísla* C^* *na* ℓ^1.

Důkaz. Obecnější verzi věty si dokážeme v části pro spektrum cesàrovského operátoru na ℓ^p. Přesněji ve větě 4.6.

$\square$

Důsledek. Vlastní čísla C^* z definice spadají do spektra C^*. Z věty 1.1 tam padne i jejich uzávěr. Nakonec z věty 1.4 spadají i do spektra C. Dostáváme důležitý důsledek: $\left\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda - \frac{1}{2}| \leq \frac{1}{2}\right\} \subseteq \sigma C$.

Pro dopočtení spektra budeme potřebovat dvě velmi technická lemmata:

Lemma 3.6. *Nechť* $n \in \mathbb{N}$, *potom*

$$\ln(n) \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

Je-li navíc $a \in \mathbb{R}$, *tak*

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{a}{k} \leq a\Big(\ln(n) + \operatorname{sgn}(a)\Big).$$

Důkaz. Uvažujme posloupnost $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$, jejíž členy jsou $f_n = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right) - \ln(n)$. Tvrdíme, že se jedná o klesající posloupnost. Máme

$$\begin{aligned} f_n - f_{n-1} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n) - \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} + \ln(n+1) \\ &= \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) - \frac{1}{n+1} \\ &= \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \frac{\frac{1}{n}}{1 + \frac{1}{n}} > 0, \end{aligned}$$

kde $n \in \mathbb{N}$. Poslední nerovnost platí, protože pokud pro x nezáporná uvažujeme funkci $f(x) = \ln(1+x) - \frac{x}{1+x}$, tak splňuje, že $f(\frac{1}{n}) = f_n - f_{n-1}$ a $f(0) = 0$. Navíc je pro kladná x rostoucí, protože

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} - \frac{1}{(1+x)^2} > 0, \quad x > 0.$$

Takže f_n je skutečně klesající posloupnost. Navíc $f_1 = 1$, takže $f_n \leq 1$ pro n přirozené. Je také známo, že $\lim_{n\to\infty} f_n = \gamma > 0$, kde γ je Eulerova konstanta, tudíž $0 < f_n \leq 1$ pro libovolné $n \in \mathbb{N}$. Z toho již vyplývá první nerovnost.

Nechť $a \in \mathbb{R}$ dáno, potom

$$af_n \leq |af_n| = a \operatorname{sgn}(a) f_n \leq a \operatorname{sgn}(a).$$

Po dosazení za f_n již dostáváme druhou nerovnost.

$\square$

Lemma 3.7. *Nechť je $\lambda \in \mathbb{C}$ splňující $\operatorname{Re}\frac{1}{\lambda} < 1$, potom existují takové konstanty $K, L > 0$, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí*

1. $$\prod_{k=1}^{n} \left|1 - \frac{1}{k\lambda}\right| \leq K \frac{1}{n^a},$$

2. $$L \frac{1}{n^a} \leq \prod_{k=1}^{n} \left|1 - \frac{1}{k\lambda}\right|.$$

Důkaz. Položme $\frac{1}{\lambda} = a + bi$, kde $a, b \in \mathbb{R}$.

Pro první nerovnost zvolme $n \in \mathbb{N}$ libovolné. Využitím nerovnosti $1 + x \leq e^x$, platnou pro všechna $x \in \mathbb{R}$, a lemmatu 3.6 získáme

$$\begin{aligned}
(*) \prod_{k=1}^{n} \left|1 - \frac{1}{k\lambda}\right| &= \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{2a}{k} + \frac{a^2 + b^2}{k^2}\right)^{\frac{1}{2}} \leq \exp\left(\sum_{k=1}^{n} -\frac{a}{k} + \frac{a^2 + b^2}{2k^2}\right) \\
&= \exp\left(\sum_{k=1}^{n} -\frac{a}{k} + \sum_{k=1}^{n} \frac{a^2 + b^2}{2k^2}\right) \\
&\leq \exp\left(-a(\ln n + \operatorname{sgn}(-a)) + \frac{a^2 + b^2}{2} \cdot \frac{\pi^2}{6}\right) \\
&= \exp\left(|a| + \frac{\pi^2(a^2 + b^2)}{12}\right) \frac{1}{n^a}.
\end{aligned}$$

Položíme-li $K = \exp\left(|a| + \frac{\pi^2(a^2+b^2)}{12}\right)$, tak získáváme první nerovnost.

Nyní k druhé nerovnosti. Budeme odhadovat převrácenou hodnotu součinu v $(*)$, abychom opět mohli využít nerovnosti $1 + x \leq e^x$. To můžeme, jelikož $\operatorname{Re}\frac{1}{\lambda} < 1$, a tak $\left|1 - \frac{1}{k\lambda}\right| > 0$ pro všechna $k \in \mathbb{N}$. Nejprve najdeme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro všechna přirozená $k \geq n_0$ platí

$$\left|\frac{2a}{k} - \frac{a^2 + b^2}{k^2}\right| < 1 - 2^{-\frac{2}{5}}$$

a označme

$$P = \prod_{k=1}^{n_0 - 1} \left|1 - \frac{1}{k\lambda}\right|^{-1}.$$

Pomocí Taylorova rozvoje v nule a Lagrangeova tvaru zbytku vyjádříme hodnotu funkce $f(x) = (1 - x)^{-\frac{1}{2}}$ pro $x \in (-\infty, 1)$.

$$\begin{aligned}
f(x) &= T_1^{f,0}(x) + \frac{1}{2!} f''(\xi) x^2 \\
(1 - x)^{-\frac{1}{2}} &= 1 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}(1 - \xi)^{-\frac{5}{2}} x^2,
\end{aligned}$$

kde ξ je určitá hodnota v intervalu $(0,x)$, respektive v $(x,0)$. Nyní pro $k \geq n_0$

dosadíme

$$\begin{aligned}\left(1-\left(\frac{2a}{k}-\frac{a^2+b^2}{k^2}\right)\right)^{-\frac{1}{2}} &= 1+\frac{a}{k}-\frac{a^2+b^2}{2k^2}+\frac{3}{8}(1-\xi)^{-\frac{5}{2}}\left(\frac{2a}{k}-\frac{a^2+b^2}{k^2}\right)^2\\ &\leq 1+\frac{a}{k}+\frac{3}{8}(1-(1-2^{-\frac{2}{5}}))^{-\frac{5}{2}}\frac{1}{k^2}\left(2a-\frac{a^2+b^2}{k}\right)^2\\ &= 1+\frac{a}{k}+\frac{3}{4k^2}\left(2a-\frac{a^2+b^2}{k}\right)^2,\end{aligned}$$

kde první nerovnost platí, jelikož $\xi \in \left(0, \frac{2a}{k} - \frac{a^2+b^2}{k^2}\right)$, resp. $\xi \in \left(\frac{2a}{k} - \frac{a^2+b^2}{k^2}, 0\right)$, a tudíž $|\xi| < |\frac{2a}{k} - \frac{a^2+b^2}{k^2}| < 1 - 2^{-\frac{2}{5}}$. Nahlédneme, že výraz $\left(2a - \frac{a^2+b^2}{k}\right)^2$ konverguje k $4a^2$, a tak existuje $A \geq 0$, že $\left(2a - \frac{a^2+b^2}{k}\right)^2 \leq A$ pro všechna $k \in \mathbb{N}$. Dostáváme tedy

$$\left(1-\left(\frac{2a}{k}-\frac{a^2+b^2}{k^2}\right)\right)^{-\frac{1}{2}} \leq 1+\frac{a}{k}+\frac{3A}{4k^2}.$$

Teď jsme již připraveni provést odhad. Nejprve ať $n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$, pak

$$\begin{aligned}\prod_{k=1}^{n}\left|1-\frac{1}{k\lambda}\right|^{-1} &= P\prod_{k=n_0}^{n}\left(1-\left(\frac{2a}{k}-\frac{a^2+b^2}{k^2}\right)\right)^{-\frac{1}{2}} \leq P\prod_{k=n_0}^{n}\left(1+\frac{a}{k}+\frac{3A}{4k^2}\right)\\ &\leq P\exp\left(\sum_{k=n_0}^{n}\frac{a}{k}+\sum_{k=n_0}^{n}\frac{3A}{4k^2}\right)\\ &= P\exp\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{a}{k}-\sum_{k=1}^{n_0-1}\frac{a}{k}+\frac{3A}{4}\sum_{k=n_0}^{n}\frac{1}{k^2}\right)\\ &\leq P\exp\left(a(\ln(n)+\operatorname{sgn}(a))-\sum_{k=1}^{n_0-1}\frac{a}{k}+\frac{3A}{4}\frac{\pi^2}{6}\right)\\ &= P\exp\left(|a|-\sum_{k=1}^{n_0-1}\frac{a}{k}+\frac{A\pi^2}{8}\right)n^a.\end{aligned}$$

Položme $L_0 = \left(P\exp\left(|a| - \sum_{k=1}^{n_0-1}\frac{a}{k} + \frac{A\pi^2}{8}\right)\right)^{-1}$.

Nyní ať $n \in \mathbb{N}$, $n < n_0$, potom pro každé takové n najdeme $L_n > 0$ splňující

$$L_n\frac{1}{n^a} \leq \prod_{k=1}^{n}\left|1-\frac{1}{k\lambda}\right|.$$

Těch je ale konečně mnoho. Položme tedy $L = \min\{L_n; n \in \{0,1,\ldots,n_0-1\}\}$. Potom již pro $n \in \mathbb{N}$ libovolné platí

$$L\frac{1}{n^a} \leq \prod_{k=1}^{n}\left|1-\frac{1}{k\lambda}\right|.$$

□

Věta 3.8 (Spektrum C na c_0)**.** *Spektrum cesàrovského operátoru C na c_0 je rovno množině* $\left\{\lambda \in \mathbb{C} : \left|\lambda - \frac{1}{2}\right| \leq \frac{1}{2}\right\}$.

Důkaz. Z důsledku pod větou 3.5 rovnou získáváme první inkluzi

$$\left\{\lambda \in \mathbb{C} : \left|\lambda - \frac{1}{2}\right| \leq \frac{1}{2}\right\} \subseteq \sigma C.$$

Ukážeme, že pro $\lambda \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re}\frac{1}{\lambda} < 1$, tedy $\left|\lambda - \frac{1}{2}\right| > \frac{1}{2}$ (viz výpočet ve větě 4.6), je operátor $\lambda I - C$ invertibilní a tak $\lambda \notin \sigma C$.

Nechť $\lambda \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re}\frac{1}{\lambda} < 1$. Pokud je operátor $\lambda I - C$ invertovatelný, tak stejným výpočtem jako ve větě 2.2, dospějeme k tomu, že je nutně reprezentován maticí A s prvky

$$a_{st} = \begin{cases} \frac{1}{s\lambda^2 \prod_{k=t}^{s}\left(1-\frac{1}{k\lambda}\right)}, & t < s, \\ -\frac{s}{1-s\lambda}, & s = t, \\ 0, & s < t, \end{cases} \qquad s,t \in \{1,\ldots,n\}.$$

Ukážeme, že $(\lambda I - C)^{-1}$ je spojitý lineární operátor na c_0.

Chceme ověřit, že matice A reprezentuje spojitý lineární operátor na c_0. K tomu použijeme lemma 3.1. Ověříme jeho první předpoklad, tedy že řádky matice A jsou prvky ℓ^1.

Nechť $s \in \mathbb{N}$ a položme $a = \operatorname{Re}\frac{1}{\lambda}$. Potom pro přirozené $n \geq s$ je suma absolutních hodnot prvních n prvků s-tého řádkového vektoru rovna

$$\sum_{t=1}^{n} |a_{st}| = \frac{1 + \left|1 - \frac{1}{\lambda}\right| + \cdots + \prod_{k=1}^{s-1}\left|1 - \frac{1}{k\lambda}\right|}{s|\lambda|^2 \prod_{k=1}^{s}\left|1 - \frac{1}{k\lambda}\right|} + \left|\frac{s}{1 - s\lambda}\right|. \tag{3.1}$$

Nejprve odhadneme první sčítanec pravé strany rovnice (3.1).

Z lemmatu 3.7 najdeme taková $K,L > 0$, že

$$\frac{1 + \left|1 - \frac{1}{\lambda}\right| + \cdots + \prod_{k=1}^{s-1}\left|1 - \frac{1}{k\lambda}\right|}{s|\lambda|^2 \prod_{k=1}^{s}\left|1 - \frac{1}{k\lambda}\right|} \leq \frac{1 + K\sum_{k=1}^{s-1} k^{-a}}{L|\lambda|^2 s^{1-a}}.$$

Nejprve ať $a \leq 0$, potom

$$\frac{1 + K\sum_{k=1}^{s-1} k^{-a}}{L|\lambda|^2 s^{1-a}} \leq \frac{1 + K(s-1)^{1-a}}{L|\lambda|^2 s^{1-a}} = \frac{1}{L|\lambda|^2 s^{1-a}} + \frac{K}{L|\lambda|^2}\left(1 - \frac{1}{s}\right)^{1-a}.$$

Posloupnost $\frac{1}{L|\lambda|^2 s^{1-a}}$ je nerostoucí, a tak ji seshora odhadneme číslem $\frac{1}{L|\lambda|^2}$. Posloupnost $\left(1 - \frac{1}{s}\right)^{1-a}$ konverguje k 1 zdola a tak ji odhadneme shora číslem 1. Dostáváme

$$\frac{1 + K\sum_{k=1}^{s-1} k^{-a}}{L|\lambda|^2 s^{1-a}} \leq \frac{1 + K}{L|\lambda|^2}.$$

Nyní ať $a \in (0,1)$. Spočteme

$$\frac{1 + K\sum_{k=1}^{s-1} k^{-a}}{L|\lambda|^2 s^{1-a}} \leq \frac{1 + K\int_1^s \frac{1}{(x-1)^a}\,dx}{L|\lambda|^2 s^{1-a}} = \frac{1 + K\frac{1}{(1-a)}(s-1)^{1-a}}{L|\lambda|^2 s^{1-a}}.$$

Stejným argumentem jako v případě $a \leq 0$ platí

$$\frac{1 + K\sum_{k=1}^{s-1} k^{-a}}{L|\lambda|^2 s^{1-a}} \leq \frac{1}{L|\lambda|^2} + \frac{K}{L(1-a)|\lambda|^2}.$$

Nyní k druhému sčítanci pravé strany rovnice (3.1), to je jednodušší. Posloupnost $\left\{\left|\frac{n}{1-n\lambda}\right|\right\}$ je konvergentní a tudíž i omezená. Tedy existuje $P > 0$ takové, že

$$\left|\frac{n}{1-n\lambda}\right| \leq P, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Z toho všeho již vyplývá

$$\sum_{t=1}^{\infty} |a_{st}| \leq \max\left\{\frac{1K}{L|\lambda|^2}, \frac{(1-a)+K}{L(1-a)|\lambda|^2}\right\} + P.$$

Tedy jsme ukázali, že řádky matice A jsou prvky ℓ^1.

Druhá podmínka je, opět s pomocí lemmatu 3.7, na ověření lehčí, neb pro jistou konstantu $L > 0$ a libovolné $t \in \mathbb{N}$ platí

$$\left|\frac{1}{s\lambda^2 \prod_{k=t}^{s}\left(1 - \frac{1}{k\lambda}\right)}\right| = \left|\frac{\prod_{k=1}^{t-1}\left(1 - \frac{1}{k\lambda}\right)}{s\lambda^2 \prod_{k=1}^{s}\left(1 - \frac{1}{k\lambda}\right)}\right| \leq \left|\frac{\prod_{k=1}^{t-1}\left(1 - \frac{1}{k\lambda}\right)}{L\lambda^2 s^{1-a}}\right| \xrightarrow[s\to\infty]{} 0.$$

A tak jsou sloupce matice A prvky c_0. Čili A je omezený lineární operátor na c_0, a z toho důvodu $\lambda \notin \sigma C$. Tím již získáváme druhou inkluzi

$$\sigma C \subseteq \left\{\lambda \in \mathbb{C} : \left|\lambda - \frac{1}{2}\right| \leq \frac{1}{2}\right\}.$$

Společně s první inkluzí tak získáváme rovnost

$$\sigma C = \left\{\lambda \in \mathbb{C} : \left|\lambda - \frac{1}{2}\right| \leq \frac{1}{2}\right\}.$$

□

Důsledek. Z lemmatu 1.4 plyne rovnost $\sigma C = \sigma C^{**}$. Z lemmatu 3.2 plyne, že spektrum cesàrovského operátoru na ℓ^∞ je také množina $\left\{\lambda \in \mathbb{C} : \left|\lambda - \frac{1}{2}\right| \leq \frac{1}{2}\right\}$.

3.2 Prostor c

Prostor c je úzce spojený s prostory c_0 a ℓ^∞, jak uvidíme v této sekci. Není tak překvapivé, že cesàrovský operátor na c bude mít stejné spektrum jako na c_0 a ℓ^∞.

V celé této sekci budeme písmenem e značit konstantní posloupnost jedniček. Všimněme si, že $Ce = e$. Tato vlastnost bude vysoce podstatná ve výpočtu spektra.

Lemma 3.9. *Nechť $x \in c$, potom existuje právě jedno $a \in \mathbb{C}$ a jediný vektor $y \in c_0$, že $x = y + ae$.*

Důkaz. Položme $a = \lim_{n\to\infty} x_n$. Posloupnost $y = x - ae$ zřejmě konverguje k nule, tedy $y \in c_0$, a $x = y + ae$. Navíc je-li $z \in c_0$, $b \in \mathbb{C}$ takové, že $x = z + be$, tak

$$0 = x - x = (y - z) + (a - b)e.$$

Všimneme si, že

$$0 = \lim_{n\to\infty} (y_n - z_n) + (a - b)e_n = a - b,$$

a tak $a = b$. Z toho již zřejmě vyplývá i $y = z$. Tedy a i y jsou určené jednoznačně.

□

Věta 3.10. *Cesàrovský operátor je spojitý lineární operátor na c a jeho norma je rovna jedné.*

Důkaz. Nechť $x \in c$, potom dle lemmatu 3.9 existuje jediné $a \in \mathbb{C}$ a právě jeden vektor $y \in c_0$, že $x = y + ae$. Z linearity cesàrovského operátoru na $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ máme

$$Cx = Cy + C(ae) = Cy + ae.$$

Z minulé sekce víme, že cesàrovský operátor je dobře definovaný lineární operátor na c_0, takže $Cy \in c_0$. Potom ale $Cx \in c$. Linearita operátoru je zřejmá.

Nyní ověříme spojitost. Buď $x \in c$, potom

$$\|Cx\|_\infty \le \sup_{n\in\mathbb{N}} \left\{ \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} |x_k| \right\} \le \sup_{n\in\mathbb{N}} \left\{ \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \|x\|_\infty \right\} = \|x\|_\infty.$$

Takže $\|C\| \le 1$. Dosadíme-li za $x = e$, tak již

$$\|Ce\|_\infty = \|e\|_\infty = 1,$$

tudíž $\|C\| = 1$ a jedná se tak o spojitý lineární operátor.

□

Pozorování. Cesàrovský operátor C na c zobrazuje prvky c_0 do c_0.

Věta 3.11. *C má na c právě jedno vlastní číslo* 1.

Důkaz. Jelikož $Ce = e$, tak je 1 skutečně vlastní číslo.

Nechť $\lambda \in \mathbb{C}$ je vlastní číslo C na c různé od 1 a $x \in c$ je jeho vlastní vektor. Z lemmatu 3.9 existuje jediné $a \in \mathbb{C}$ a právě jeden vektor $y \in c_0$, že $x = y + ae$. Dostáváme rovnice

$$\begin{aligned} Cx &= \lambda x \\ C(y + ae) &= \lambda(y + ae) \\ Cy + aCe &= \lambda y + a\lambda e \\ Cy + ae &= \lambda y + a\lambda e \\ (C - \lambda I)y &= a(\lambda - 1)e. \end{aligned}$$

Levá strana je prvkem c_0, a tudíž i pravá strana musí být prvkem c_0. Jelikož $\lambda \neq 1$, tak nutně $a = 0$. Dostáváme rovnici

$$(C - \lambda I)y = 0.$$

Jelikož $y \in c_0$, tak lze dle lemmatu 3.9 pohlížet na C jako na cesàrovský operátor na c_0. Z věty 3.3 však víme, že cesàrovský operátor na c_0 nemá žádná vlastní čísla, což vede ke sporu. Tím jsme ukázali, že jediné vlastní číslo C na c je 1.

□

Věta 3.12 (Spektrum C na c)**.** *Spektrum cesàrovského operátoru C na c je rovno množině* $\left\{\lambda \in \mathbb{C} : \left|\lambda - \frac{1}{2}\right| \leq \frac{1}{2}\right\}$.

Důkaz. Označme C' cesarovský operátor na c_0. Z lemmatu 3.9 víme, že $C' = C$ na c_0. Ukážeme, že $\sigma C = \sigma C'$, neboli $\lambda \in \sigma C$, právě když $\lambda \in \sigma C'$.

Nejprve buď $\lambda \in \sigma C'$ a pro spor ať $\lambda \notin \sigma C$. Speciálně platí $\lambda \neq 1$. Operátor $\lambda I - C$ zřejmě zobrazuje c_0 do c_0. Ukážeme, že dokonce platí

$$\operatorname{Rng}\left\{(\lambda I - C)\left|_{c_0}\right.\right\} = \operatorname{Rng}\left\{(\lambda I - C')\right\} = c_0,$$

a tedy, že je $(\lambda I - C')$ bijekce. To je již spor s tím, že $(\lambda I - C')$ není invertovatelný.

Zvolme $z \in c_0$ nenulový a označme $x = (\lambda I - C)^{-1} z$. Z lemmatu 3.9 najdeme $a \in \mathbb{C}$ a $y \in c_0$, že $x = y + ae$. Poté

$$\begin{aligned}
(\lambda I - C)\, x &= z \\
(\lambda I - C)\, y + (\lambda I - C)\,(ae) &= z \\
(\lambda I - C)\, y + (\lambda - 1)ae &= z.
\end{aligned}$$

Pravá strana poslední rovnosti je prvkem c_0 a tudíž je i levá strana prvkem c_0. To ale nutně znamená, že $a = 0$, jelikož $\lambda \neq 1$, a tak $x = y \in c_0$. Tím jsme ukázali, že $\lambda I - C'$ je bijekce, čímž docházíme ke sporu. Takže skutečně $\lambda \in \sigma C$.

Nyní nechť $\lambda \notin \sigma C'$. Speciálně máme $\lambda \neq 1$, jelikož 1 je vlastní číslo C'. Uvažujme operátor D daný předpisem

$$Dx = (\lambda I - C')^{-1}\, y + \frac{1}{\lambda - 1} ae,$$

kde $a \in \mathbb{C}$, $y \in c_0$ a $x = y + ae$. Z lemmatu 3.9 plyne, že D je dobře definovaný spojitý lineární operátor na c. Tvrdíme, že $D = (\lambda I - C)^{-1}$.

Nechť $x \in c$. Nalezneme $a \in \mathbb{C}$ a $y \in c_0$ takové, že $x = y + ae$. Nyní

$$\begin{aligned}
D(\lambda I - C)x &= (\lambda I - C')^{-1}\,(\lambda I - C')y + \frac{1}{\lambda - 1}(\lambda I - C)(ae) \\
&= y + \frac{1}{\lambda - 1} a(\lambda - 1)e \\
&= y + ae \\
&= x.
\end{aligned}$$

Obdobně

$$
\begin{aligned}
(\lambda I - C)Dx &= (\lambda I - C')\left(\lambda I - C'\right)^{-1} y + (\lambda I - C)\frac{1}{\lambda - 1} ae \\
&= y + (\lambda - 1)\frac{1}{\lambda - 1} ae \\
&= y + ae \\
&= x.
\end{aligned}
$$

Takže opravdu $D = (\lambda I - C)^{-1}$, tedy $\lambda \notin \sigma C$. Tím jsme dokázali, že spektrum C na c je shodné se spektrem C na c_0, tudíž

$$
\sigma C = \left\{ \lambda \in \mathbb{C} : \left| \lambda - \frac{1}{2} \right| \leq \frac{1}{2} \right\}.
$$

□

4. Spektrum na ℓ^p

V celé této kapitole budeme uvažovat $p \in (1, \infty)$ a $q \in (1, \infty)$ takové, že $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, nebude-li řečeno jinak. Pro základní manipulaci s čísly p a q se hodí znát základní vztahy, jakožto $p = \frac{q}{q-1}$, $q = \frac{p}{p-1}$, $\frac{p}{q} = 1 - p$ a $\frac{q}{p} = 1 - q$.

4.1 Spojitost operátoru

Věta 4.1 (AG nerovnost)**.** *Nechť $a_1, a_2, \ldots, a_n$ je posloupnost nezáporných čísel. Poté platí*

$$\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \ldots a_n} \leq \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}.$$

Jsou-li navíc $r, r_1, r_2, \ldots, r_n$ kladná reálná čísla taková, že $r_1 + \ldots r_n = r$, tak platí

$$\sqrt[r]{a_1^{r_1} \cdot a_2^{r_2} \ldots a_n^{r_n}} \leq \frac{r_1 a_1 + r_2 a_2 + \cdots + r_n a_n}{r}.$$

Důkaz. Například v [6] stránka 17, věta 9.

□

Věta 4.2. *Nechť $p \in (1, \infty)$, poté je C spojitý lineární operátor na ℓ^p a platí $\|C\| \leq q$.*

Důkaz. Nechť $x \in \ell^p$ je nenulová posloupnost. Pro n přirozené položme

$$\alpha_n = \frac{|x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n|}{n}.$$

Všimněme si, že $|x_n| = n\alpha_n - (n-1)\alpha_{n-1}$ a $|(Cx)_n| \leq \alpha_n$. Pro $n > 1$ uvažujme nerovnost:

$$\begin{aligned}
\alpha_n^p - \frac{p}{p-1}\alpha_n^{p-1}|x_n| &= \alpha_n^p - \frac{p}{p-1}\alpha_n^{p-1}(n\alpha_n - (n-1)\alpha_{n-1}) \\
&= \left(1 - \frac{np}{p-1}\right)\alpha_n^p + \frac{(n-1)p}{p-1}\alpha_n^{p-1}\alpha_{n-1} \\
&= \left(1 - \frac{np}{p-1}\right)\alpha_n^p + \frac{(n-1)p}{p-1}\sqrt[p]{(\alpha_n^p)^{p-1} \cdot (\alpha_{n-1}^p)} \\
&\leq \left(1 - \frac{np}{p-1}\right)\alpha_n^p + \frac{(n-1)p}{p-1} \cdot \frac{(p-1)\alpha_n^p + \alpha_{n-1}^p}{p} \\
&= \left(1 - \frac{np}{p-1}\right)\alpha_n^p + \frac{(n-1)(p-1)}{p-1}\alpha_n^p + \frac{n-1}{p-1}\alpha_{n-1}^p \\
&= -\frac{n}{p-1}\alpha_n^p + \frac{n-1}{p-1}\alpha_{n-1}^p \\
&= \frac{1}{p-1}\left((n-1)\alpha_{n-1}^p - n\alpha_n^p\right),
\end{aligned}$$

kde jsme na čtvrtém řádku použili AG nerovnost. Položíme-li $\alpha_0 = 0$, tak lze danou nerovnost rozšířit i pro $n = 1$, neb $\alpha_1 = |x_1|$. Nechť nyní $N \in \mathbb{N}$, poté

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N} \alpha_n^p - \frac{p}{p-1} \sum_{n=1}^{N} \alpha_n^{p-1} |x_n| &\leq \frac{1}{p-1} \sum_{n=1}^{N} ((n-1)\alpha_{n-1}^p - n\alpha_n^p) \\ &= \frac{1}{p-1} (\alpha_0 - N\alpha_N^p) \\ &= \frac{-N\alpha_N^p}{p-1} \leq 0.\end{aligned}$$

Tudíž

$$\sum_{n=1}^{N} \alpha_n \leq \frac{p}{p-1} \sum_{n=1}^{N} \alpha_n^{p-1} |x_n| = q \sum_{n=1}^{N} \alpha_n^{p-1} |x_n|.$$

Nyní z Hölderovy nerovnosti dostáváme

$$\sum_{n=1}^{N} \alpha_n^p \leq q \sum_{n=1}^{N} \alpha_n^{p-1} |x_n| \leq q \left(\sum_{n=1}^{N} \alpha_n^p \right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{n=1}^{N} |x_n|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Převedením sumy posloupnosti $\{\alpha_n^p\}$ z pravé strany na levou pak již dostaneme

$$\left(\sum_{n=1}^{N} \alpha_n^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq q \left(\sum_{n=1}^{N} |x_n|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Limitním přechodem získáváme nerovnost

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq q \|x\|_p.$$

Pro poslední krok důkazu stačí použít nerovnost $|(Cx)_n|^p \leq \alpha_n^p$:

$$\|Cx\|_p \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq q \|x\|_p.$$

Z toho dostáváme, že C je dobře definovaný spojitý lineární operátor na ℓ^p, jehož norma je menší nebo rovna q. Linearita je zřejmá.

□

Poznámka. Cesàrovský operátor není definovaný na ℓ^1. Jako protipříklad postačí kanonický vektor $e_1 = (1, 0, 0, \dots)$. Zřejmě $e_1 \in \ell^1$, ale $Ce_1 = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\right) \notin \ell^1$.

4.2 Prostor ℓ^p

Věta 4.3. *Cesàrovský operátor na ℓ^p nemá žádná vlastní čísla.*

Důkaz. Identický s důkazem věty 3.3.

□

V této kapitole budeme uvažovat standardní reprezentaci duálu ℓ^p, tedy $(\ell^p)^* \cong \ell^q$, která je daná předpisem

$$x(y) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n, \quad x \in \ell^q,\, y \in \ell^p.$$

Lemma 4.4. *Duální operátor C^* k operátoru C na ℓ^p, je reprezentován maticí*

$$C^T = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Důkaz. Obdobný důkazu lemmatu 3.2. Pro $x \in \ell^p$ a $y \in \ell^q$ platí, že $|x| \in \ell^p$ a $|y| \in \ell^q$. Poté z konečnosti $(C^*|y|)\,|x|$ plyne z Fubiniovy věty konvergence zobecněné řady

$$\sum_{\substack{k \le n,\\ k,n \in \mathbb{N}}} \frac{1}{n}|x_k||y_n|.$$

Potom již

$$(C^* y)\, x = \sum_{n=1}^{\infty} y_n \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k = \sum_{\substack{k \le n,\\ k,n \in \mathbb{N}}} \frac{1}{n} x_k y_n = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \sum_{n=k}^{\infty} \frac{1}{n} y_n = \left(C^T y\right) x,$$

čímž je důkaz dokonán.

□

Věta 4.5. *Norma C na ℓ^p je rovna q.*

Důkaz. Ukážeme, že $\|C^*\| \ge q$, potom již $\|C\| \ge q$. Zároveň z věty 4.2 plyne nerovnost $\|C\| \le q$, a tak $\|C\| = q$.

Pro $\alpha > \frac{1}{q}$ položme posloupnost x^α definovou vztahem $x_k^\alpha = \frac{1}{k^\alpha}$ pro $k \in \mathbb{N}$. Jelikož $\alpha > \frac{1}{q}$, tak $x^\alpha \in \ell^q$. Máme

$$\begin{aligned} \|C^* x^\alpha\|^q &= \sum_{n=1}^{\infty} \left| \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k} \frac{1}{k^\alpha} \right|^q = \sum_{n=1}^{\infty} \left| \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^{\alpha+1}} \right|^q \ge \sum_{n=1}^{\infty} \left| \int_n^\infty \frac{1}{y^{\alpha+1}}\, dy \right|^q \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{1}{\alpha n^\alpha} \right|^q = \frac{1}{\alpha^q} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^\alpha} \right)^q = \frac{1}{\alpha^q} \|x^\alpha\|^q. \end{aligned}$$

A jelikož $\alpha > \frac{1}{q}$ libovolné, tak limitním přechodem, kdy $\alpha \to \left(\frac{1}{q}\right)^+$, dostáváme $\|C^*\| \ge q$, a tudíž i $\|C\| \ge q$.

Z předchozí diskuze tak vyplývá, že $\|C\| = q$.

□

Věta 4.6. *Čísla $\lambda \in \mathbb{C}$ splňující $|\lambda - \frac{q}{2}| < \frac{q}{2}$ jsou vlastní čísla C^* na ℓ^q, $q \in [1, \infty)$.*

Důkaz. Nechť λ splňuje nerovnost ve znění věty. Označme $\lambda = \alpha + \beta i$, poté

$$\begin{aligned} \left|\lambda - \frac{q}{2}\right| = \sqrt{(\alpha - \frac{q}{2})^2 + \beta^2} &< \frac{q}{2} \\ \left(\alpha - \frac{q}{2}\right)^2 + \beta^2 &< \frac{q^2}{4} \\ \alpha^2 - q\alpha + \beta^2 &< 0 \\ \frac{1}{q} &< \frac{\alpha}{\alpha^2 + \beta^2} = \operatorname{Re} \frac{1}{\lambda}, \end{aligned}$$

tudíž $\operatorname{Re}\frac{1}{\lambda} > \frac{1}{q}$. Dělení čtvercem normy λ, tedy $\alpha^2 + \beta^2$, je dobře definované, jelikož $\lambda \neq 0$.

Hledáme takové $x \in \ell^q, x \neq 0$ splňující $C^*x = \lambda x$. Řešíme soustavu rovnic

$$\begin{aligned} x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \ldots &= \lambda x_1 \\ \frac{1}{2}x_2 + \ldots &= \lambda x_2 \\ &\vdots \quad . \end{aligned}$$

Zafixujme $x_1 \in \mathbb{C}$ nenulové. Ať $n > 1$ přirozené, pak

$$\begin{aligned} \lambda x_n &= \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k} x_k = \sum_{k=n-1}^{\infty} \frac{1}{k} x_k - \frac{1}{n-1} x_{n-1} = \lambda x_{n-1} - \frac{1}{n-1} x_{n-1}, \\ x_n &= \left(1 - \frac{1}{(n-1)\lambda}\right) x_{n-1}. \end{aligned}$$

Snadno nahlédneme, že platí nasledující rekurzivní vztah

$$x_n = \left(1 - \frac{1}{(n-1)\lambda}\right) x_{n-1} = x_1 \prod_{k=1}^{n-1} \left(1 - \frac{1}{k\lambda}\right).$$

Jelikož $x_1 \neq 0$, tak ani $x \neq 0$.

Pomocí Raabeova kritéria ukážeme, že $x \in \ell^q$. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $\frac{1}{\lambda}$ není přirozené číslo. Kdyby totiž bylo, tak je x od určité složky nulový, a tak i prvkem ℓ^q.

Položme $\frac{1}{\lambda} = a + bi$, kde $a > \frac{1}{q}$ a $b \in \mathbb{R}$. Nechť $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro všechna $n \geq n_0$ přirozená platí: $\left|\frac{2a}{n} - \frac{a^2+b^2}{n^2}\right| < 1$. Poté z Taylorova rozvoje funkce $(1+x)^q$ plyne:

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{2a}{n} + \frac{a^2+b^2}{n^2}\right)^q &= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{q}{k} \left(-\frac{2a}{n} + \frac{a^2+b^2}{n^2}\right)^k \\ &= 1 + q\left(-\frac{2a}{n} + \frac{a^2+b^2}{n^2}\right) + K_n, \end{aligned}$$

kde $K_n = \sum_{k=2}^{\infty} \binom{q}{k} \left(-\frac{2a}{n} + \frac{a^2+b^2}{n^2}\right)^k$. Všimněme si, že $\lim_{n\to\infty} nK_n = 0$. To platí z následujícího odstavce.

Ukážeme, že řada $\sum_{k=1}^{\infty} \binom{q}{k} n \left(-\frac{2a}{n} + \frac{a^2+b^2}{n^2}\right)^k$ je vzhledem k $n \in \mathbb{N}$ na určitém okolí nekonečna stejnoměrně cauchyovská, a tak i stejnoměrně konvergentní. Nechť $\varepsilon > 0$ dáno. Řada $\sum_{k=1}^{\infty} \binom{q}{k} x^k$ je absolutně lokálně stejnoměrně konvergentní, a tedy i absolutně lokálně stejnoměrně cauchyovská pro $x \in (-1, 1)$. Najdeme tedy $\delta > 0$ a $m_0 \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\forall x \in (-\delta, \delta), \forall m_1, m_2 \in \mathbb{N},\ m_0 \leq m_1 \leq m_2 : \sum_{k=m_1}^{m_2} \left|\binom{q}{k} x^k\right| < \varepsilon. \tag{4.1}$$

Nyní nechť $n_1 \geq m_0$ přirozené takové, že pro každé přirozené $n \geq n_1$ platí

$$\left|-\frac{2a}{n^{\frac{1}{2}}} + \frac{a^2+b^2}{n^{2-\frac{1}{2}}}\right| < \delta.$$

Všimněme si, že pro každé přirozené $k \geq 2$ a každé přirozené n platí

$$\left|-\frac{2a}{n^{\frac{1}{2}}} + \frac{a^2+b^2}{n^{2-\frac{1}{2}}}\right| = n^{\frac{1}{2}}\left|-\frac{2a}{n} + \frac{a^2+b^2}{n^2}\right| \geq n^{\frac{1}{k}}\left|-\frac{2a}{n} + \frac{a^2+b^2}{n^2}\right|.$$

Nechť tedy m_1, m_2 přirozené, $n_1 \leq m_1 \leq m_2$. Potom

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=m_1}^{m_2}\binom{q}{k} n\left(-\frac{2a}{n} + \frac{a^2+b^2}{n^2}\right)^k\right| &\leq \sum_{k=m_1}^{m_2}\left|\binom{q}{k}\right|\left(n^{\frac{1}{k}}\left|-\frac{2a}{n} + \frac{a^2+b^2}{n^2}\right|\right)^k \\ &\leq \sum_{k=m_1}^{m_2}\left|\binom{q}{k}\right|\left|-\frac{2a}{n^{\frac{1}{2}}} + \frac{a^2+b^2}{n^{2-\frac{1}{2}}}\right|^k \\ &< \varepsilon,\end{aligned}$$

kde poslední nerovnost platí z (4.1) a volby n_1.

Potom již ze stejnoměrné konvergence vyplývá

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} nK_n &= \lim_{n\to\infty} n\sum_{k=2}^{\infty}\binom{q}{k}\left(-\frac{2a}{n} + \frac{a^2+b^2}{n^2}\right)^k \\ &= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=2}^{\infty}\binom{q}{k}\left(-\frac{2a}{n^{1-\frac{1}{k}}} + \frac{a^2+b^2}{n^{2-\frac{1}{k}}}\right)^k \\ &= \sum_{k=2}^{\infty}\lim_{n\to\infty}\binom{q}{k}\left(-\frac{2a}{n^{1-\frac{1}{k}}} + \frac{a^2+b^2}{n^{2-\frac{1}{k}}}\right)^k = 0.\end{aligned}$$

Nyní ověříme, že $\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{|x_n|^q}{|x_{n+1}|^q}\right) > 1$, potom již z Raabeova kritéria (lemma 1.6) vyplývá konvergence řady $\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^q$. Máme

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{|x_n|^q}{|x_{n+1}|^q} - 1\right) &= \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{1}{\left|1-\frac{1}{n\lambda}\right|^q} - 1\right) \\ &= \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{1}{\left(1-\frac{2a}{n}+\frac{a^2+b^2}{n^2}\right)^{\frac{q}{2}}} - 1\right) \\ &= \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{1-\left(1-\frac{2a}{n}+\frac{a^2+b^2}{n^2}\right)^{\frac{q}{2}}}{\left(1-\frac{2a}{n}+\frac{a^2+b^2}{n^2}\right)^{\frac{q}{2}}}\right) \\ &= \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{1-\left(1-\frac{2a}{n}+\frac{a^2+b^2}{n^2}\right)^{q}}{\left(1-\frac{2a}{n}+\frac{a^2+b^2}{n^2}\right)^{\frac{q}{2}}\left(1+\left(1-\frac{2a}{n}+\frac{a^2+b^2}{n^2}\right)^{\frac{q}{2}}\right)}\right) \\ &= \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{1-\left(1+q\left(-\frac{2a}{n}+\frac{a^2+b^2}{n^2}\right)+K_n\right)}{\left(1-\frac{2a}{n}+\frac{a^2+b^2}{n^2}\right)^{\frac{q}{2}}\left(1+\left(1-\frac{2a}{n}+\frac{a^2+b^2}{n^2}\right)^{\frac{q}{2}}\right)}\right) \\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{2qa - q\frac{a^2+b^2}{n} - nK_n}{\left(1-\frac{2a}{n}+\frac{a^2+b^2}{n^2}\right)^{\frac{q}{2}}\left(1+\left(1-\frac{2a}{n}+\frac{a^2+b^2}{n^2}\right)^{\frac{q}{2}}\right)} \\ &= \frac{2qa}{1\cdot 2} = qa > 1.\end{aligned}$$

Tudíž $x \in \ell^q$, a tak je λ vlastní číslo.

$\square$

Poznámka. Obdobným využitím Raabeova kritéria lze ukázat, že čísla $\lambda \in \mathbb{C}$ splňující $|\lambda - \frac{q}{2}| > \frac{q}{2}$ nejsou vlastní čísla C^* v ℓ^q.

K dokončení výpočtu spektra budeme potřebovat jedno technické lemma.

Lemma 4.7. *Nechť $1 < p_1 \leq p_2 < \infty$ a a, b jsou posloupnosti s nezápornými členy. Buď A nekonečná matice dána prvky*

$$a_{n,k} = \begin{cases} a_n b_k, & k \leq n, \\ 0, & k > n, \end{cases} \qquad n,k \in \mathbb{N}.$$

Pak jsou následující tvrzení ekvivalentní:

1. *A zobrazuje ℓ^{p_1} do ℓ^{p_2}.*
2. *Existuje $N > 0$ takové, že pro každé m přirozené platí*

$$\sum_{n=1}^{m} \left(a_n \sum_{k=1}^{n} b_k^{\frac{p_1}{p_1-1}} \right)^{p_2} \leq N \left(\sum_{k=1}^{m} b_k^{\frac{p_1}{p_1-1}} \right)^{\frac{p_2}{p_1}}.$$

Důkaz. Například v [7], tvrzení 2, strana 407.

$\square$

Věta 4.8 (Spektrum C na ℓ^p)**.** *Spektrum cesàrovského operátoru C na ℓ^p je rovno množině $\left\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda - \frac{q}{2}| \leq \frac{q}{2}\right\}$.*

Důkaz. Z věty 4.6 víme, že množinu $\left\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda - \frac{q}{2}| < \frac{q}{2}\right\}$ tvoří vlastní čísla C^* a náleží tak do spektra C^*. Navíc z věty 1.4 náleží i do spektra C, a jelikož dle věty 1.1 je spektrum kompaktní množina, tak i její uzávěr je obsažen v spektru C. Z toho získáváme první inkluzi

$$\left\{\lambda \in \mathbb{C} : \left|\lambda - \frac{q}{2}\right| \leq \frac{q}{2}\right\} \subseteq \sigma C.$$

Druhou inkluzi získáme tak, že ukážeme, že čísla $\lambda \in \mathbb{C}$ splňující nerovnost $\left|\lambda - \frac{q}{2}\right| > \frac{q}{2}$ do spektra nepatří, tedy že operátor $(\lambda I - C)$ je invertovatelný na ℓ^p. Obdobným výpočtem jako ve větě 4.6 zjistíme, že taková λ jsou právě taková čísla, pro které platí $\operatorname{Re} \frac{1}{\lambda} < \frac{1}{q}$. Označme $\alpha = \operatorname{Re} \frac{1}{\lambda}$.

Všimněme si, že $\lambda \neq \frac{1}{n}$ pro žádné n přirozené. Stejným výpočtem jako ve větě 2.2 získáváme, že má-li $(\lambda I - C)$ inverzi, tak je nutně reprezentována maticí A s prvky

$$a_{st} = \begin{cases} \frac{1}{s\lambda^2 \prod_{k=t}^{s} \left(1 - \frac{1}{k\lambda}\right)}, & t < s, \\ -\frac{s}{1-s\lambda}, & s = t, \\ 0, & s < t, \end{cases} \qquad s, t \in \mathbb{N}.$$

Rozdělme A na součet dvou matic D, E, kde matice D má prvky

$$d_{st} = \begin{cases} -\frac{s}{1-s\lambda}, & s = t, \\ 0, & \text{jinak}, \end{cases} \qquad s, t \in \mathbb{N}$$

a matice E má prvky

$$e_{st} = \begin{cases} \frac{1}{s\lambda^2 \prod_{k=t}^{s}\left(1-\frac{1}{k\lambda}\right)}, & t < s, \\ 0, & \text{jinak}, \end{cases} \qquad s, t \in \mathbb{N}.$$

Jelikož $A = D + E$, tak stačí ověřit, že lineární operátory dané maticemi D a E jsou spojité na ℓ^p.

Operátor reprezentovaný maticí D je zřejmě spojitý lineární operátor na ℓ^p, jelikož posloupnost $\left\{-\frac{s}{1-s\lambda}\right\}_{s=1}^{\infty}$ je konvergentní a tak omezená nějakým kladným číslem T. Potom již pro libovolné $x \in \ell^p$ platí

$$\|Dx\|_p = \left(\sum_{s=1}^{\infty}\left|-\frac{s}{1-s\lambda}x_s\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq T\left(\sum_{s=1}^{\infty}|x_s|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq T\|x\|_p.$$

Skutečně se jedná o spojitý lineární operátor na ℓ^p.

Nyní se přesvědčíme o spojitosti operátoru daného maticí E. Nejprve z lemmatu 3.7 najdeme taková $K, L > 0$, že pro libovolné přirozené n platí

$$L\frac{1}{n^{\alpha}} \leq \prod_{k=1}^{n}\left|1-\frac{1}{k\lambda}\right| \leq K\frac{1}{n^{\alpha}}.$$

Jelikož $\lim_{n\to\infty}\frac{n^{\alpha}}{(n+1)^{\alpha}} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^{\alpha}}{n^{\alpha}} = 1$, tak z omezenosti konvergentních posloupností existují kladné konstanty K', L', že

$$L'\frac{1}{(n+1)^{\alpha}} \leq \prod_{k=1}^{n}\left|1-\frac{1}{k\lambda}\right| \leq K'\frac{1}{(n+1)^{\alpha}}.$$

Nechť nyní $s, t \in \mathbb{N}$, $t \leq s$. Poté platí následující podstatný odhad:

$$\frac{1}{\prod_{k=t}^{s}\left|1-\frac{1}{k\lambda}\right|} = \frac{\prod_{k=1}^{t-1}\left|1-\frac{1}{k\lambda}\right|}{\prod_{k=1}^{s}\left|1-\frac{1}{k\lambda}\right|} \leq \frac{\frac{K'}{t^{\alpha}}}{\frac{L}{s^{\alpha}}} = \frac{K'}{L}\frac{s^{\alpha}}{t^{\alpha}}.$$

Buď $s \in \mathbb{N}$ a $x \in \ell^p$. Poté

$$\begin{aligned} |(Ex)_s| \leq \sum_{t=1}^{s-1}\frac{|x_t|}{s\lambda^2\prod_{k=t}^{s}\left|1-\frac{1}{k\lambda}\right|} &\leq \sum_{t=1}^{s-1}\frac{|x_t|}{s\lambda^2}\frac{K'}{L}\frac{s^{\alpha}}{t^{\alpha}} \\ &= \frac{K'}{\lambda^2 L}\frac{1}{s^{1-\alpha}}\sum_{t=1}^{s-1}\frac{|x_t|}{t^{\alpha}} \leq \frac{K'}{\lambda^2 L}\left(\frac{1}{s^{1-\alpha}}\sum_{t=1}^{s}\frac{|x_t|}{t^{\alpha}}\right). \end{aligned}$$

Uvažujme operátor F pro $y \in \ell^p$ daný předpisem

$$(Fy)_n = \frac{1}{n^{1-\alpha}}\sum_{k=1}^{n}\frac{y_k}{k^{\alpha}}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Vrátíme-li se k minulé nerovnosti, tak získáváme

$$|(Ex)_s| \leq \frac{K'}{\lambda^2 L}(F|x|)_s.$$

Z toho vidíme, že pro spojitost E je postačující ukázat spojitost lineárního operátoru F.

Všimneme si, že F je reprezentováno dolní trojúhelníkovou maticí danou prvky

$$f_{nk} = \begin{cases} \frac{1}{n^{1-\alpha}} \frac{1}{k^\alpha} & n \leq k, \\ 0, & \text{jinak}, \end{cases} \qquad n, k \in \mathbb{N}.$$

Z lemmatu 4.7 plyne, že F je dobře definovaný operátor z ℓ^p do ℓ^p právě tehdy, když existuje $N > 0$ takové, že pro každé $m \in \mathbb{N}$ platí

$$\sum_{n=1}^{m} \left(\frac{1}{n^{1-\alpha}} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^{\alpha q}} \right)^p \leq N \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k^{\alpha q}}. \tag{4.2}$$

Volba N bude závislá na hodnotě α. Zvolme $N = 1$ pro $\alpha \leq 0$ a $N = \frac{1}{(1-\alpha q)^p}$ pro $\alpha \in \left(0, \frac{1}{q}\right)$. Platnost (4.2) dokážeme indukcí podle $m \in \mathbb{N}$.

Všimněme si, že v obou případech platí, že $N \geq 1$. Potom pro $m = 1$ nerovnost (4.2) triviálně platí. Předpokládejme tedy platnost do nějakého přirozeného m. Nejprve dokážeme, že

$$\frac{1}{(m+1)^{1-\alpha}} \sum_{k=1}^{m+1} \frac{1}{k^{\alpha q}} \leq N^{\frac{1}{p}} \frac{1}{(m+1)^{\alpha q \frac{1}{p}}} = N^{\frac{1}{p}} \frac{1}{(m+1)^{\alpha(q-1)}}. \tag{4.3}$$

Buď $\alpha \leq 0$. Pro každé přirozené $k \leq m+1$ platí nerovnost $\frac{1}{k^{\alpha q}} \leq \frac{1}{(m+1)^{\alpha q}}$. Z toho již máme

$$\begin{aligned} \frac{1}{(m+1)^{1-\alpha}} \sum_{k=1}^{m+1} \frac{1}{k^{\alpha q}} &\leq (m+1)^{\alpha-1} \sum_{k=1}^{m+1} \frac{1}{(m+1)^{\alpha q}} \\ &= (m+1)^{\alpha-1} (m+1)^{1-\alpha q} \\ &= 1^{\frac{1}{p}} (m+1)^{\alpha(1-q)} = N^{\frac{1}{p}} \frac{1}{(m+1)^{\alpha(q-1)}}. \end{aligned}$$

Tudíž (4.3) platí.

Nechť nyní $\alpha \in \left(0, \frac{1}{q}\right)$. Máme

$$\begin{aligned} \frac{1}{(m+1)^{1-\alpha}} \sum_{k=1}^{m+1} \frac{1}{k^{\alpha q}} &\leq \frac{1}{(m+1)^{1-\alpha}} \left(1 + \int_1^{m+1} \frac{1}{x^{\alpha q}} dx \right) \\ &= \frac{1}{(m+1)^{1-\alpha}} \left(1 + \frac{1}{(1-\alpha q)} \frac{1}{(m+1)^{\alpha q - 1}} - \frac{1}{1-\alpha q} \right) \\ &= N^{\frac{1}{p}} \frac{1}{(m+1)^{\alpha(q-1)}} - \frac{1}{(m+1)^{1-\alpha}} \left(N^{\frac{1}{p}} - 1 \right) \\ &\leq N^{\frac{1}{p}} \frac{1}{(m+1)^{\alpha(q-1)}}, \end{aligned}$$

kde platnost první nerovnosti je možno ověřit podobně jako v lemmatu 3.6. Tedy i v tomto případě platí (4.3).

V této chvíli již za použití indukčního předpokladu a nerovnosti (4.3) v obou případech získáváme

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{m+1} \left(\frac{1}{n^{1-\alpha}} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^{\alpha q}} \right)^p &= \sum_{n=1}^{m} \left(\frac{1}{n^{1-\alpha}} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^{\alpha q}} \right)^p + \left(\frac{1}{(m+1)^{1-\alpha}} \sum_{k=1}^{m+1} \frac{1}{k^{\alpha q}} \right)^p \\ &\leq N \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k^{\alpha q}} + \left(N^{\frac{1}{p}} \frac{1}{(m+1)^{\alpha q \frac{1}{p}}} \right)^p = N \sum_{k=1}^{m+1} \frac{1}{k^{\alpha q}} \end{aligned}$$

a máme vyhráno. Tím jsme dokázali, že F je lineární operátor na ℓ^p.

Nyní stačí ukázat, že je F spojitý operátor. Pro $n \in \mathbb{N}$ položme operátor F_n definovaný pro $y \in \ell^p$ předpisem

$$(F_n y)_m = \begin{cases} (Fy)_m, & m \leq n, \\ 0, & n < m, \end{cases} \quad m \in \mathbb{N}.$$

Jedná se zřejmě o spojitý lineární operátor na ℓ^p, jelikož je reprezentován maticí, která je na prvních n řádcích shodná s maticí reprezentující operátor F a na zbylých je nulová. Navíc pro libovolný $y \in \ell^p$ konverguje $F_n y$ k Fy v ℓ^p, což plyne z faktu, že $Fy \in \ell^p$ a $F_n y$ je jen projekce Fy na prvních n složek. Jelikokž $F_n y$ konverguje k Fy pro libovolné $y \in \ell^p$, tak z věty 1.3 (Banachova-Steinhausova) platí, že F je spojitý lineární operátor. Důsledkem toho je i operátor E spojitý neb

$$\|Ex\|_p = \sum_{s=1}^{\infty} |(Ex)_s| \leq \sum_{s=1}^{\infty} \frac{K'}{\lambda^2 L} (F|x|)_s = \frac{K'}{\lambda^2 L} \|F|x|\|_p \leq \frac{K'}{\lambda^2 L} \|F\| \, \|x\|_p.$$

U poslední nerovnosti využíváme faktu, že $\||x|\|_p = \|x\|_p$.

Z toho všeho pro libovolné $x \in \ell^p$ máme:

$$\|Ax\|_p \leq \|Dx\|_p + \|Ex\| \leq \|D\| \|x\|_p + \|E\| \|x\|_p = (\|D\| + \|E\|) \, \|x\|_p.$$

Tedy A je skutečně lineární spojitý operátor na ℓ^p, a tak $\lambda \notin \sigma C$. Takže skutečně

$$\sigma C = \left\{ \lambda \in \mathbb{C} : \left| \lambda - \frac{q}{2} \right| \leq \frac{q}{2} \right\},$$

což bylo dokázati.

$\square$

4.3 Prostor ℓ^2

Spektrum cesàrovského operátoru na ℓ^2 jsme sice již vypočítali, ale jak to často bývá, tak ℓ^2 je čímsi speciální. Díky tomu, že pro $p = 2$ je taktéž $q = 2$, dostáváme jednodušší a kratší důkaz.

Lemma 4.9. *Norma operátoru $I - C$ na ℓ^2 je rovna jedné.*

Důkaz. Nejprve uvažujme operátor $D = C + C^* - C \circ C^*$ na ℓ^2. Heuristicky odvodíme tvar operátoru za pomoci matic, jež reprezentují operátory C a C^*:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \cdots \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \cdots \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{3} & \cdots \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Nyní se formálně přesvědčíme, že lze D reprezentovat touto diagonální maticí. Nechť $x \in \ell^2$ a $n \in \mathbb{N}$, chceme zjistit vyjádření n-tého prvku vektoru

$$D\,x = C\,x + C^*\,x - C\,(C^*\,x)\,.$$

Učiníme pomocné výpočty pro $n \in \mathbb{N}$:

$$(C\,x + C^*\,x)_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k + \sum_{k=n}^{\infty}\frac{x_k}{k},$$

$$\begin{aligned}
(C\,(C^*\,x))_n &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=k}^{\infty}\frac{x_j}{j} \\
&= \frac{1}{n}\begin{pmatrix}
x_1 & + & \frac{x_2}{2} & + & \cdots & + & \frac{x_n}{n} & + \cdots \\
 & & \frac{x_2}{2} & + & \cdots & + & \frac{x_n}{n} & + \cdots \\
 & & & \ddots & & & & \\
 & & & & \ddots & & & \\
 & & & & & & \frac{x_n}{n} & + \cdots
\end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k + \sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{x_k}{k}.
\end{aligned}$$

A tak

$$(D\,x)_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k + \sum_{k=n}^{\infty}\frac{x_k}{k} - \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k + \sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{x_k}{k}\right) = \frac{x_n}{n},$$

což jsme chtěli.

Nyní lehce nahlédneme, že

$$\|I - D\| = \left\|\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}\right\| = 1.$$

A z faktu, že $I - D = (I - C) \circ (I - C^*)$ již plyne

$$1 = \|I - D\| = \|(I - C)(I - C^*)\| = \|I - C\|^2,$$

neboli $\|I - C\| = 1$.

$\square$

Věta 4.10 (Spektrum C na ℓ^2)**.** *Spektrum cesàrovského operátoru C na ℓ^2 je rovno množině* $\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda - 1| \leq 1\}$.

Důkaz. Stejným argumentem jako na počátku věty 4.8 získáváme, že

$$\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda - 1| \leq 1\} \subseteq \sigma C.$$

Ukážeme, že platí i druhá inkluze, a tedy rovnost.

Z lemmatu 4.9 víme, že $\|C - I\| = 1$, a tak je dle věty 1.2 spektrum operátoru $C - I$ obsaženo v množině $\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq 1\}$. Tvrdíme, že

$$\sigma C = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda - 1 \in \sigma(C - I)\}.$$

Jinak řečeno, operátor $\lambda I - C$ je invertovatelný právě tehdy, když je operátor $[(\lambda - 1)I - (C - I)]$ invertovatelný. Jenže

$$(\lambda - 1)I - (C - I) = \lambda I - C,$$

tudíž je ekvivalence triviální. Pak

$$\sigma C = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda - 1 \in \sigma(C - I)\} \subseteq \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda - 1| \leq 1\}.$$

Takže skutečně $\sigma C = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda - 1| \leq 1\}$.

$\square$

Závěr

V této práci jsme ukázali, jaká jsou spektra cesàrovského operátoru na klasických prostorech posloupností na $\mathbb{C}$, tedy na c_0, c, ℓ^∞ a ℓ^p, kde $p \in (1, \infty)$.

Pro c_0, c a ℓ^∞ vychází stejné spektrum a to uzavřený kruh se středem v jedné polovině a s poloměrem jedna polovina, tedy množina

$$\left\{\lambda \in \mathbb{C} : \left|\lambda - \frac{1}{2}\right| \leq \frac{1}{2}\right\}.$$

Pro prostory ℓ^p jsme získali, že spektrum je rovné kruhu se středem v $\frac{q}{2}$ a s poloměrem $\frac{q}{2}$, kde $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, tedy množině

$$\left\{\lambda \in \mathbb{C} : \left|\lambda - \frac{q}{2}\right| \leq \frac{q}{2}\right\}.$$

Na tuto práci by se dalo navázat například vyšetřením spektra na vážených ℓ^p prostorech, tedy prostorech posloupností omezených a vybavených normou

$$\|x\| = \left(\sum_{n=1}^{\infty} w_n \left|x_n\right|^p\right)^{\frac{1}{p}},$$

kde $\{w_n\}_{n=1}^{\infty}$ je omezená posloupnost s kladnými členy. Jiné možné směřování by mohlo být například vyšetření spektra podobných průměrovacích operátorů na klasických prostorech posloupností.

Seznam použité literatury

[1] J. B. Reade. On the spectrum of the cesaro operator. *Bulletin of the London Mathematical Society*, 17(3):263–267, 05 1985.

[2] Guillermo Curbera and Werner Ricker. Spectrum of the cesàro operator in l p. *Archiv der Mathematik*, 100, 03 2013.

[3] A. L. Shields A. Brown, P. R. Halmos. Cesàro operators. *Acta Scientiarum Mathematicarum*, 26(1-2):125–137, 1964.

[4] W. Rudin. *Functional Analysis*. International series in pure and applied mathematics. McGraw-Hill, 1991.

[5] Vojtěch Jarník. *Diferenciální počet II*. Nakladatelsví Československé akadamie věd, 1956.

[6] G. Hardy, J.E. Littlewood, and G. Pólya. *Inequalities*. Second Edition. Cambridge University Press 1934, 1952, 2001.

[7] Grahame Bennett. Some elementary inequalities. *The Quarterly Journal of Mathematics*, 38(4):401–425, 1987.