



**MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ
FAKULTA**
Univerzita Karlova

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Štěpán Postava

Magnetooptika jako narušení symetrie materiálu

Katedra chemické fyziky a optiky

Vedoucí bakalářské práce: doc. RNDr. Tomáš Ostatnický,
Ph.D.

Studijní program: Fyzika

Studijní obor: FP

Praha 2024

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval(a) samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů. Tato práce nebyla využita k získání jiného nebo stejného titulu.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V dne

Podpis autora

Název práce: Magnetooptika jako narušení symetrie materiálu

Autor: Štěpán Postava

Katedra: Katedra chemické fyziky a optiky

Vedoucí bakalářské práce: doc. RNDr. Tomáš Ostatnický, Ph.D., Katedra chemické fyziky a optiky

Abstrakt: Optická odezva materiálu je ovlivněna mnoha věcmi, mimo jiné i magnetizací. Experimentálně se magnetooptická část dá dobře měřit, pro vyhodnocení experimentálních dat je důležité umět změřená data kategorizovat, to můžeme pro nějaké konkrétní geometrie (např. Faradayův jev, Voigtův jev). Základem práce bylo poruchové řešení vlnové rovnice, jeho principem je rozložení permittivity materiálu na neporuchovou část a poruchovou část, poruchová část zde odpovídá příspěvku k tenzoru permittivity způsobeného magnetizací. Dále jsme hledali jak provést rozklad poruchy permittivity na složky, kterými bychom mohli magnetooptický jev charakterizovat. Hlavním výsledkem práce je, že jsme pomocí poruchového řešení vlnové rovnice ukázali, že při kolmém dopadu světla na magnetický materiál, s magnetizací mířící do libovolného směru, můžeme tuto magnetizaci rozložit na složku kolmou a rovnoběžnou se směrem šíření světla.

Klíčová slova: magnetooptika, poruchová metoda, magnetizace

Title: Magneto-optics as a material symmetry breaking

Author: Štěpán Postava

Department: Department of Chemical Physics and Optics

Supervisor: doc. RNDr. Tomáš Ostatnický, Ph.D., Department of Chemical Physics and Optics

Abstract: The optical response of a material is affected by many things, including magnetization. Experimentally, the magnetooptical part can be measured well, for the evaluation of experimental data it is important to be able to categorize the measured data, which we can do for some specific geometries (e.g. Faraday effect, Voigt effect). The basis of the work was the perturbation solution of the wave equation, its principle is the distribution of the permittivity of the material into a non-perturbed part and a perturbed part, the perturbed part here corresponds to the contribution to the permittivity tensor caused by magnetization. Furthermore, we were looking for how to decompose the permittivity perturbation into components that could be used to characterize the magnetooptical effect. The main result of the thesis is that, using the perturbation solution of the wave equation, we have shown that when light is incident perpendicularly on a magnetic material, with magnetization pointing in any direction, we can decompose this magnetization into a component perpendicular and parallel to the direction of light propagation.

Keywords: magnetooptics, perturbation method, magnetization

Obsah

Úvod	2
1 Teoretický úvod	3
1.1 Základní pojmy	3
1.2 Polarizace	3
1.3 Magnetooptické jevy	5
1.3.1 Faradayův jev a magnetický kruhový dichroismus	6
1.3.2 Magnetooptické Kerrovy jevy	6
2 Poruchové řešení vlnové rovnice, ověření pro jednoduché případy	8
2.1 Poruchové řešení vlnové rovnice	8
2.2 Poruchová metoda pro kolmý dopad	8
2.2.1 Faradayův jev	12
2.2.2 Polární Kerrův jev, kolmý dopad	12
3 Obecný problém nekolmého dopadu a rozklad poruchy	14
3.1 Poruchová metoda pro průchod a odraz na rozhraní	14
3.2 Poruchová metoda pro druhé rozhraní	17
3.3 Rozklad změn natočení a elipticity na příspěvky jednotlivých poruch	20
3.3.1 Výpočet změny polarizace v důsledku poruchy permitivity	21
3.3.2 Rozložení poruchy permitivity	24
3.4 Rozklad poruchové části tenzoru permitivity	25
4 Diskuze	29
Závěr	32
Seznam použité literatury	33

Úvod

Magnetooptika je součástí optiky zabývající se jevy, které vznikají při interakci světla s magnetickou látkou. Při průchodu nebo odrazu od látky magnetizace ovlivní polarizaci výsledného světla.

Magnetooptické jevy se dají klasifikovat, pokud magnetizace v materiálu míří do nějakého speciálního směru, například rovnoběžně či kolmo ke směru šíření světla. Máme tak Faradayův jev pro magnetizaci mířící ve směru šíření světla, Voigtův jev pro magnetizaci kolmou na směr šíření světla, apod. Pokud magnetizace míří do libovolného směru, tak se sice dá její magnetooptická odezva spočítat, není však jasné jak takový jev kategorizovat.

Využijeme poruchového řešení vlnové rovnice, které spočívá v tom, že rozdělíme permitivitu látky nemagnetickou část a magnetickou část, která je řádově menší než nemagnetická část. Magnetickou část vezmeme jako poruchu a budeme poruchově řešit vlnovou rovnici s okrajovou podmínkou. Potom se pokusíme využít toho, že dostaneme poruchové řešení lineární v poruše permitivity k tomu, abychom provedli rozklad poruchy permitivity, kterým bychom dosáhli nějaké kategorizace magnetooptický jevů.

1. Teoretický úvod

1.1 Základní pojmy

Světlo je elektromagnetické vlnění, popsané vektory elektrické intenzity \mathbf{E} , magnetické indukce \mathbf{B} , elektrické indukce \mathbf{D} , magnetické intenzity \mathbf{H} . Tyto veličiny splňují Maxwellovy rovnice

$$\nabla \times \mathbf{H} - \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \mathbf{j}, \quad (1.1)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0, \quad (1.2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho, \quad (1.3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (1.4)$$

kde ρ je nábojová hustota a \mathbf{j} je proudová hustota. Dále jsou tyto veličiny svázány materiálovými vztahy

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}, \quad (1.5)$$

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}, \quad (1.6)$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}, \quad (1.7)$$

kde σ je vodivost, ε je permitivita, μ je permeabilita. Na rozhraní dvou prostředí veličiny \mathbf{E} , \mathbf{H} , \mathbf{D} , \mathbf{B} vždy splňují okrajové podmínky. Ty jsou, že složky \mathbf{E} , \mathbf{H} tečné k rozhraní a normálové složky \mathbf{D} , \mathbf{B} musí být na tomto rozhraní spojité.

Pro prostředí bez nábojů a s nulovou vodivostí splňují \mathbf{E} , \mathbf{H} vlnovou rovnici, kterou lze odvodit z Maxwellových rovnic

$$\Delta \mathbf{E} - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0. \quad (1.8)$$

Další důležitá veličina, hlavně v magnetooptice, je magnetizace \mathbf{M} . Při vnější magnetické intenzitě \mathbf{H} vykazuje materiál magnetizaci danou vztahem

$$\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H}, \quad (1.9)$$

kde χ_m je tenzor magnetické susceptibility.

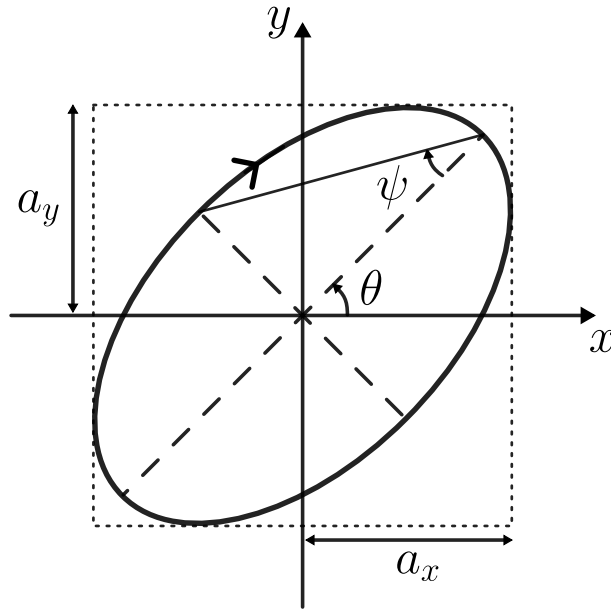
1.2 Polarizace

Při šíření světla může být v daném bodě směr vektoru \mathbf{E} náhodný v čase, v takovém případě mluvíme o nepolarizovaném světle. Pokud však tento směr náhodný není, říkáme, že takové světlo je polarizované.

Vezmeme světlo šířící se ve směru osy z v izotropním prostředí (z -ová složka \mathbf{E} je tedy nulová). Pokud \mathbf{E} opisuje v daném bodě z v rovině xy úsečku, mluvíme o lineárně polarizovaném světle. Pokud \mathbf{E} opisuje v daném bodě z v rovině xy

elipsu (nebo ve speciálním případě kružnici), mluvíme o elipticky (kruhově) polarizovaném světle.

Pro popis polarizace světla napíšeme elektrickou intenzitu světla šířícího se ve směru osy z ve tvaru $\mathbf{E}(t, z) = E_x \mathbf{x} + E_y \mathbf{y}$, kde $E_x = a_x \cos(\omega t - kz + \varphi_x)$, $E_y = a_y \cos(\omega t - kz + \varphi_y)$, kde a_x, a_y jsou amplitudy jednotlivých složek a φ_x, φ_y jsou jejich fáze. Polarizační stav světla je dán čtyřmi reálnými parametry, většinou nás ale nezajímá počáteční fáze, ale jen fázový rozdíl $\varphi_y - \varphi_x$. Pokud nás navíc nezajímá intenzita světla, tak můžeme popsat polarizaci pomocí dvou parametrů: natočení (mezi osou x a hlavní osou elipsy) θ a elipticita ψ . Úhel θ může nabývat hodnot $0 \leq \theta \leq \pi$, úhel ψ může nabývat hodnot $-\pi/4 \leq \psi \leq \pi/4$. Pokud je $\psi > 0$, tak mluvíme o pravotočivé polarizaci, pokud je $\psi < 0$, tak mluvíme o levotočivé polarizaci. Schéma pravotočivé eliptické polarizaci je znázorněno na Obrázku 1.1.



Obrázek 1.1: Schéma pravotočivé eliptické polarizace

Pro určení natočení a elipticity se zavádí komplexní parametr χ definovaný jako

$$\chi = \frac{E_y}{E_x}. \quad (1.10)$$

Z něj můžeme spočítat úhel natočení θ a elipticitu ψ polarizovaného světla pomocí vztahů [1]

$$\tan(2\theta) = \frac{2 \operatorname{Re} \chi}{1 - |\chi|^2}, \quad (1.11)$$

$$\sin(2\psi) = \frac{2 \operatorname{Im} \chi}{1 + |\chi|^2}. \quad (1.12)$$

Pokud $|\chi| \ll 1$, tak platí i $\theta \ll 1$, $\psi \ll 1$ a předchozí vztahy se zredukují na

$$\theta \approx \operatorname{Re} \chi, \quad \psi \approx \operatorname{Im} \chi. \quad (1.13)$$

1.3 Magnetooptické jevy

Magnetooptika se zabývá tím, jak magnetizace v látce změní její optické vlastnosti. Přítomnost magnetizace ovlivní permitivitu látky, což vede k optické anizotropii a ke změně polarizace světla, které takovou látkou prošlo, nebo se od ní odrazilo.

Základní magnetooptické jevy můžeme klasifikovat podle vzájemné orientace vlnového vektoru \mathbf{k} a magnetizace \mathbf{M} a taky podle toho, jestli se zajímáme o prošlou nebo odraženou vlnu. Při odrazu mluvíme o magnetooptických Kerrových jevech (MOKE). Při průchodu pokud jsou \mathbf{k} a \mathbf{M} rovnoběžné, tak je nazýváme Faradaův jev, neboli magnetický kruhový dvojlom (MCB) a magnetický kruhový dichroismus (MCD). Pokud jsou \mathbf{k} a \mathbf{M} kolmé, tak jevy nazýváme Voigtův jev, neboli magnetický lineární dvojlom (MLB) a magnetický lineární dichroismus (MLD). [2]

Tenzor permitivity látky, jak jsme uvedli, závisí na magnetizaci. Rozdělíme ho na tři části: část která na magnetizaci nezávisí $\varepsilon^{(0)}$, část která závisí na magnetizaci lineárně $\varepsilon^{(1)}$ a část která závisí na magnetizaci kvadraticky $\varepsilon^{(2)}$. Příspěvky v tenzoru permitivity závisící na vyšších mocninách magnetizace neuvažujeme.

$$\varepsilon = \varepsilon^{(0)} + \varepsilon^{(1)} + \varepsilon^{(2)} \quad (1.14)$$

V této práci se budeme zabývat pouze případem, kdy část permitivity nezávisící na magnetizaci je izotropní, platí tedy $\varepsilon^{(0)} = \varepsilon_0 \varepsilon_r$, kde ε_0 je permitivita vakua a ε_r je relativní permitivita látky v případě, že v látce není magnetizace.

Tenzor relativní permitivity se v takovém případě dá zapsat jako [3]

$$\begin{aligned} \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} = & \begin{pmatrix} \varepsilon_r & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_r & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_r \end{pmatrix} - i\alpha_1 \begin{pmatrix} 0 & M_z & -M_y \\ -M_z & 0 & M_x \\ M_y & -M_x & 0 \end{pmatrix} + \beta_1 \begin{pmatrix} M^2 & 0 & 0 \\ 0 & M^2 & 0 \\ 0 & 0 & M^2 \end{pmatrix} \\ & + \beta_2 \begin{pmatrix} M_y^2 + M_z^2 & 0 & 0 \\ 0 & M_z^2 + M_x^2 & 0 \\ 0 & 0 & M_x^2 + M_y^2 \end{pmatrix} - \beta_2 \begin{pmatrix} 0 & M_x M_y & M_x M_z \\ M_y M_x & 0 & M_y M_z \\ M_z M_x & M_z M_y & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (1.15)$$

kde α_1 , β_1 , β_2 jsou konstanty úměrnosti. Konstanta β_2 závisí na směru magnetizace, konstanty α_1 , β_1 na směru magnetizace nezávisí.

Dále budeme brát zjednodušený případ: opticky izotropní feromagnet s magnetizací mířící do směru z , jeho relativní permitivita je pak [1]

$$\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & -ig & 0 \\ ig & \varepsilon_1 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_r & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_r & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_r \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b & -ig & 0 \\ ig & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.16)$$

Zde b je úměrné druhé mocnině velikosti magnetizace a g je úměrné první mocnině velikosti magnetizace. V tomto případě tedy neuvažujeme vliv toho, jak je materiál natočen vůči magnetizaci, což například u krystalů nějaký vliv má. V dalších dvou podsekcích si ukážeme nějaké konkrétní magnetooptické jevy odvozené pomocí permitivity (1.16)

1.3.1 Faradayův jev a magnetický kruhový dichroismus

Faradayův jev je o tom, že světlo při průchodu látkou, jejíž magnetizace je rovnoběžná se směrem šíření světla, stáčí svoji polarizaci. MCD nastává taky při průchodu světla látkou ve směru rovnoběžném s magnetizací, při něm se navíc mění elipticita světla. V této podsekcí se budeme zabývat pouze efekty při šíření zmagnetizovaným materiálem, neuvažujeme tedy co se stane se světlem při průchodu rozhraním do zmagnetizovaného prostředí.

Vezmeme světlo šířící se ve směru osy z , v bodě $z = 0$ je světlo lineárně polarizované ve směru x a magnetizace míří ve směru osy z . Tensor permitivity materiálu je tedy dán rovnicí (1.16).

Výpočet elektrické intenzity po průchodu prostředím v bodě z je ukázán v [1]. Tato intenzita je

$$\mathbf{E}(z) = E_0 \begin{pmatrix} \cos(k_0 \Delta n z) \\ -\sin(k_0 \Delta n z) \end{pmatrix} e^{-i(\omega t - k_0 n_0 z)}, \quad (1.17)$$

kde $\Delta n = (n_+ - n_-)/2$, $n_0 = (n_+ + n_-)/2$ a n_{\pm} dány jako $n_{\pm}^2 = \varepsilon_1 \pm g$ jsou indexy lomu pravotočivé a levotočivé kruhové polarizace.

Pokud b a g jsou reálné, potom z dosazení do rovnic (1.10), (1.11), (1.12) plyne

$$\theta = -k_0 \Delta n z, \quad \psi = 0. \quad (1.18)$$

Pro b, g reálné tedy máme čistě Faradayův efekt a nedochází ke stáčení elipticity. Pokud navíc platí $b, g \ll 1$, tak můžeme odmocninu v $n_{\pm} = \sqrt{\varepsilon_1 \pm g}$ rozvinout do Taylorovy řady, dostaneme $n_{\pm} \approx \sqrt{\varepsilon_r} [1 + (b \pm g)/2\varepsilon_r]$ a tedy $\Delta n \approx g/2\sqrt{\varepsilon_r}$, $n_0 \approx \sqrt{\varepsilon_1}$. Máte tedy přibližný vztah

$$\theta = -\frac{k_0 g z}{2\sqrt{\varepsilon_r}}. \quad (1.19)$$

Pro absorbuující prostředí jsou koeficienty b, g komplexní a dochází k Faradayově jevu i k MCD, pro úhel natočení a elipicitu platí vztahy [1]

$$\theta = \frac{k_0 g' z}{2n_0}, \quad (1.20)$$

$$\psi = \frac{k_0 g'' z}{2n_0}, \quad (1.21)$$

kde $g = g' + ig''$, tedy g' , g'' jsou reálná a komplexní část g .

1.3.2 Magnetooptické Kerrovy jevy

Magnetooptické jevy při odraze se nazývají magnetooptické Kerrovy jevy (MOKE). Dochází při nich k stáčení roviny polarizace a ke změně elipticity. Dělí se na polární, podélný, příčný Kerrův jev. Polární MOKE nastává pokud je magnetizace v materiálu kolmá k rozhraní, ze kterého se odráží světlo. Podélný MOKE nastává pokud je magnetizace rovnoběžná s rozhraním a leží v rovině dopadu. Příčný MOKE nastává pokud je magnetizace rovnoběžná s rozhraním a je kolmá na rovinu dopadu.

Ukážeme si zde jak se změní polarizace pro polární MOKE při kolmém dopadu. Vezmeme, že na rozhraní kolmo dopadá lineárně polarizovaná vlna ve směru osy x a šířící se proti směru osy z . V materiálu na který dopadá uvažujeme magnetizaci mířící ve směru osy z . Elektrická intenzita odražené vlny je pak opět odvozena v [1] a je ve tvaru

$$\mathbf{E}_r = E_i \left(\frac{\frac{n-1}{n+1}}{\frac{ig}{n(n+1)^2}} \right) e^{-i(\omega t - k_0 z)}. \quad (1.22)$$

Použitím vzorců (1.10), (1.13) za předpokladu, že $|g| \ll 1$ dostaneme o jaký úhel se při odrazu stočila polarizace a jaká vznikla elipticita.

$$\theta = -\text{Im} \left\{ \frac{g}{n(n^2 - 1)} \right\}, \quad \psi = -\text{Re} \left\{ \frac{g}{n(n^2 - 1)} \right\}. \quad (1.23)$$

Ještě zde uvedeme vztahy pro parametry χ pro odraženou vlnu při polárním Kerrově jevu, při dopadající s a p polarizaci, pro případ kdy je člen b z rovnice (1.16) nulový. Ty pak využijeme pro porovnání s elektrickými intenzitami získanými poruchovou metodou. [3]

$$\chi_s = \frac{ig \cos \phi}{(\cos \phi - n_{z0})(n_{z0} + \varepsilon_r \cos \phi)} \quad (1.24)$$

$$\chi_p = \frac{-ig \cos \phi}{(\cos \phi + n_{z0})(n_{z0} - \varepsilon_r \cos \phi)} \quad (1.25)$$

Zde ϕ je úhel dopadu světla z vakua na materiál s relativní permitivitou ε_r . Člen n_{z0} je určen vztahem $n_{z0} = (\varepsilon_r - n_x^2)^{1/2}$, kde $n_x = k_{0x}/k_0$, k_0 je velikost vlnového vektoru a k_{0x} velikost jeho x -ové komponenty.

2. Poruchové řešení vlnové rovnice, ověření pro jednoduché případy

2.1 Poruchové řešení vlnové rovnice

V této kapitole si představíme poruchové řešení vlnové rovnice, které pak budeme využívat v kapitolách 3.1, 3.2. Jeho použitím se nám zlinearizují elektrické intenzity světla po průchodu (nebo odrazu) prostředím, jehož tenzor permitivity je důsledkem něčeho (v našem případě důsledkem magnetizace) změněn o malou poruchu $\bar{\epsilon}$.

Principem řešení je v první řadě rozdělení tenzoru permitivity na neporuchovou a poruchovou část, pak také rozdělení elektrických intenzit na poruchovou a neporuchovou část s tím, že porucha, ať už permitivity nebo elektrické intenzity, je malá oproti neporušené části. V našem případě si neporuchovou část permitivity můžeme představit jako permitivitu, kterou by materiál měl, pokud by v něm nebyla žádná magnetizace. Porucha permitivity pak odpovídá tomu, jak magnetizace změnila zmíněnou neporušenou část permitivity. My zde budeme dělat pouze případ kdy je neporuchová část permitivity izotropní, bude tedy odpovídat relativní permitivitě ϵ_r .

Význam neporušené části elektrické intenzity je takový, že odpovídá elektrické intenzitě, kterou bychom dostali, pokud by permitivita materiálu obsahovala pouze neporušenou část permitivity. Porucha elektrické intenzity pak odpovídá změně elektrické intenzity, když v materiálu kromě neporušené permitivity uvažujeme i poruchu.

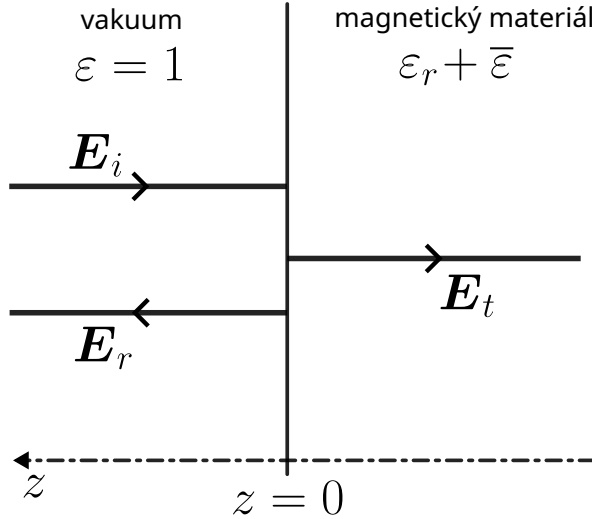
Dalším krokem je dosazení permitivity a elektrické intenzity, které máme rozložené na neporuchové a poruchové části, do vlnové rovnice. Rovnici si zjednodušíme zanedbáním členů které jsou druhého řádu poruchy (např. pokud působí porucha permitivity na poruchu elektrické intenzity) a vyřešíme. Zbylé neznámé složky porušených elektrických intenzit určíme z okrajových podmínek na rozhraní pro \mathbf{E} , \mathbf{H} , \mathbf{D} , \mathbf{B} .

2.2 Poruchová metoda pro kolmý dopad

Abychom si ověřili, že poruchové řešení vlnové rovnice dává rozumné výsledky, tak ho v této sekci použijeme na jednoduchý případ, kterým je kolmý dopad a zkusíme pomocí něj spočítat základní magnetooptické jevy jako je Faradayův jev, nebo polární Kerrův jev.

Uvažujme, že na rozhraní v bodě $z = 0$ vakua a magnetického materiálu s permitivitou $\epsilon_0(\epsilon_r + \bar{\epsilon})$ dopadá kolmo rovinná monochromatická vlna, proti směru osy z , viz. Obrázek 2.1. ϵ_r je relativní permitivita materiálu, pokud bychom v něm neuvažovali žádnou magnetizaci, $\bar{\epsilon}$ je porucha permitivity.

Rozdělíme si elektrické intenzity na neporušené a porušené části. Dopadající vlna se šíří pouze ve vakuu, takže ji neovlivní kdybychom v materiálu neuvažovali



Obrázek 2.1: Schéma kolmého dopadu světla na materiál s poruchou permitivity.

poruchu permitivity, proto obsahuje jen neporušenou část. Odražená vlna poruchu elektrické intenzity obsahovat bude, protože ale porucha permitivity ovlivní jenom to jak se vlna odrazí a ne to jak se dále šíří, tak nebude porucha odražené vlny záviset na poloze. Porucha elektrické intenzity prošlé vlny bude záviset i na poloze (ze symetrie případu jenom na souřadnici z), protože se šíří prostředím jehož permitivita obsahuje poruchu, takže se porušená část elektrické intenzity může měnit. Můžeme tedy vypsát elektrické intenzity dopadající, odražené a prošlé vlny (pro zjednodušení u nich nevypisujeme časovou závislost $e^{-i\omega t}$)

$$\begin{aligned}
 \mathbf{E}_i &= \mathbf{E}_{i0} e^{-ik_0 z}, \\
 \mathbf{E}_r &= \mathbf{E}_{r1} e^{ik_0 z} + \mathbf{E}_{r2} e^{ik_0 z}, \\
 \mathbf{E}_t &= \mathbf{E}_{t1} e^{-ik_1 z} + \mathbf{E}_{t2}(z) e^{-ik_1 z}.
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

Kde \mathbf{E}_{r1} , \mathbf{E}_{t1} jsou elektrické intenzity neporušených vln, \mathbf{E}_{r2} , $\mathbf{E}_{t2}(z)$ jsou elektrické intenzity porušených vln, k_0 , $k_1 = \sqrt{\varepsilon_r} k_0$ jsou velikosti vlnových vektorů v materiálu s relativní permitivitou ε_r . Zde je nutno podotknout, že uvažujeme, že se porušená část prošlé vlny šíří s vlnovým vektorem \mathbf{k}_1 , který odpovídá neporušené prošlé vlně. Tím, že použijeme toto zanedbání, bude výsledek prošlé vlny platný jen pro malé vzdálenosti uražené v prostředí s poruchou permitivity.

Neporušené elektrické intenzity \mathbf{E}_{r1} , \mathbf{E}_{t1} určíme z Fresnelových vzorců. Předpokládáme, že je dopadající vlna lineárně polarizovaná a vezmeme Fresnelovy vzorce pro TE vlnu, máme tedy

$$\begin{aligned}
 \mathbf{E}_{r1} &= \frac{1-n}{1+n} \mathbf{E}_{i0}, \\
 \mathbf{E}_{t1} &= \frac{2}{1+n} \mathbf{E}_{i0},
 \end{aligned} \tag{2.2}$$

kde $n = \sqrt{\varepsilon_r}$ je index lomu.

Dosadíme $\varepsilon = \varepsilon_0(\varepsilon_r + \bar{\varepsilon})$ a \mathbf{E}_t do vlnové rovnice a upravíme, dostaneme

$$\frac{d^2}{dz^2} \mathbf{E}_{t2}(z) - 2ik_0 \sqrt{\varepsilon_r} \frac{d}{dz} \mathbf{E}_{t2}(z) + k_0^2 \bar{\varepsilon} \mathbf{E}_{t1} + k_0^2 \bar{\varepsilon} \mathbf{E}_{t2}(z) = 0 \tag{2.3}$$

Člen $\bar{\epsilon}\mathbf{E}_{t2}(z)$ zanedbáme jako poruchu druhého řádu. Ukážeme, že i člen $\frac{d^2}{dz^2}\mathbf{E}_{t2}(z)$ můžeme v rovnici (2.3) zanedbat. Rovnici (2.3) bez členu $\bar{\epsilon}\mathbf{E}_{t2}(z)$ jednou zintegrujeme, dostaneme

$$\frac{d}{dz}\mathbf{E}_{t2}(z) - 2ik_0\sqrt{\epsilon_r}\mathbf{E}_{t2}(z) = -(z - z_0)k_0^2\bar{\epsilon}\mathbf{E}_{t1}. \quad (2.4)$$

Tuto rovnici vyřešíme tak, že ji přenásobíme faktorem e^{-2ik_1z} , tím dostaneme

$$\frac{d}{dz}\left(\mathbf{E}_{t2}(z)e^{-2ik_1z}\right) = -(z - z_0)k_0^2\bar{\epsilon}\mathbf{E}_{t1}e^{-2ik_1z}. \quad (2.5)$$

Znova zintegrujeme, dostaneme výsledek pro porušenou elektrickou intenzitu

$$\mathbf{E}_{t2}(z) = k_0^2\frac{\bar{\epsilon}\mathbf{E}_{t1}}{2k_1^2}ik_1(z - z_0) + k_0^2\bar{\epsilon}\mathbf{E}_{t1}Ke^{2ik_1z}, \quad (2.6)$$

kde K , z_0 jsou integrační konstanty. Dosazením výsledného \mathbf{E}_{t2} do rovnice (2.1) si všimneme, že člen obsahující integrační konstantu K odpovídá vlně šířící se v opačném směru. Jelikož ale uvažujeme polonekonečný vzorek, a tedy neuvažujeme zpětné odrazy, tak můžeme vlnu šířící se v opačném směru zanedbat. Položíme tedy $K = 0$ a dostaneme

$$\mathbf{E}_{t2}(z) = k_0^2\frac{\bar{\epsilon}\mathbf{E}_{t1}}{2k_1^2}ik_1(z - z_0). \quad (2.7)$$

Platí nám tedy $\frac{d^2}{dz^2}\mathbf{E}_{t2}(z) = 0$. Dosazením do rovnice (2.3) tedy dostáváme diferenciální rovnici prvního řádu pro poruchu elektrické intenzity prošlé vlny.

$$\frac{d}{dz}\mathbf{E}_{t2}(z) = -\frac{ik_0}{2\sqrt{\epsilon_r}}\bar{\epsilon}\mathbf{E}_{t1} \quad (2.8)$$

Ze které zintegrováním dostaneme

$$\mathbf{E}_{t2}(z) = -\frac{ik_0z}{2\sqrt{\epsilon_r}}\bar{\epsilon}\mathbf{E}_{t1} + \mathbf{E}_{t3}, \quad (2.9)$$

kde \mathbf{E}_{t3} je integrační konstanta. Složky \mathbf{E}_{t3} a \mathbf{E}_{r2} určíme z podmínek spojitosti na rozhraní. Neporušené části \mathbf{E}_{i0} , \mathbf{E}_{r1} , \mathbf{E}_{t1} splňují podmínky spojitosti automaticky, stačí tedy aby je splňovaly i \mathbf{E}_{r2} , \mathbf{E}_{t2} . Při počítání podmínek spojitosti na rozhraní budeme dosazovat $z = 0$, protože to je poloha rozhraní. Ze spojitosti tečných složek \mathbf{E} ihned dostáváme $E_{r2x} = E_{t3x}$, $E_{r2y} = E_{t3y}$. Z toho, že odražená vlna musí být příčná a ze spojitosti normálové složky \mathbf{D} dostáváme $E_{r2z} = E_{t3z} = 0$. \mathbf{H} spočítáme ze vztahu $\mathbf{H} = \frac{1}{i\omega\mu_0}\nabla \times \mathbf{E}$, který obdržíme kombinací Maxwellových rovnic a materiálových vztahů. Na rozhraní tedy musí být spojitě tečné složky $\nabla \times \mathbf{E}$. Jejich spočítáním a dosazením $z = 0$ dostaneme

$$\begin{aligned}
\nabla \times (\mathbf{E}_{r2} e^{ik_0 z}) &= ik_0 \begin{pmatrix} -E_{r2y} \\ E_{r2x} \\ 0 \end{pmatrix}, \\
\nabla \times (\mathbf{E}_{t3} e^{-ik_1 z}) &= -ik_1 \begin{pmatrix} -E_{t3y} \\ E_{t3x} \\ 0 \end{pmatrix}, \\
\nabla \times \left(-\frac{ik_0 z}{2\sqrt{\varepsilon_r}} \bar{\varepsilon} \mathbf{E}_{t1} e^{-ik_1 z} \right) &= -\frac{ik_0}{2\sqrt{\varepsilon_r}} \begin{pmatrix} -[\bar{\varepsilon} \mathbf{E}_{t1}]_y \\ [\bar{\varepsilon} \mathbf{E}_{t1}]_x \\ 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{2.10}$$

Ze spojitosti tečných složek \mathbf{H} tedy dostáváme

$$\begin{aligned}
E_{r2x} &= -\sqrt{\varepsilon_r} E_{t3x} - \frac{1}{2\sqrt{\varepsilon_r}} [\bar{\varepsilon} \mathbf{E}_{t1}]_x, \\
E_{r2y} &= -\sqrt{\varepsilon_r} E_{t3y} - \frac{1}{2\sqrt{\varepsilon_r}} [\bar{\varepsilon} \mathbf{E}_{t1}]_y.
\end{aligned} \tag{2.11}$$

Dosazením $E_{r2x} = E_{t3x}$, $E_{r2y} = E_{t3y}$, $E_{r2z} = E_{t3z} = 0$ do (2.11), pro \mathbf{E}_{t1} použitím vztahů (2.2), tedy dostáváme

$$\mathbf{E}_{t3} = \mathbf{E}_{r2} = -\frac{1}{2\sqrt{\varepsilon_r}(1 + \sqrt{\varepsilon_r})} \begin{pmatrix} [\bar{\varepsilon} \mathbf{E}_{t1}]_x \\ [\bar{\varepsilon} \mathbf{E}_{t1}]_y \\ 0 \end{pmatrix} = -\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_r}(1 + \sqrt{\varepsilon_r})^2} \begin{pmatrix} [\bar{\varepsilon} \mathbf{E}_{i0}]_x \\ [\bar{\varepsilon} \mathbf{E}_{i0}]_y \\ 0 \end{pmatrix} \tag{2.12}$$

Dále předpokládejme, že platí $[\bar{\varepsilon} \mathbf{E}_{t1}]_z = 0$. Tím se nám zjednoduší zápis \mathbf{E}_{t3} a \mathbf{E}_{r2} . V následujících podsekcích 2.2.1, 2.2.2 kdy výsledek této sekce použijeme na spočítání Faradayova jevu a polárního MOKE při kolmém dopadu bude podmínka $[\bar{\varepsilon} \mathbf{E}_{t1}]_z = 0$ splněna.

$$\mathbf{E}_{t3} = \mathbf{E}_{r2} = -\frac{1}{2\sqrt{\varepsilon_r}(1 + \sqrt{\varepsilon_r})} \bar{\varepsilon} \mathbf{E}_{t1} = -\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_r}(1 + \sqrt{\varepsilon_r})^2} \bar{\varepsilon} \mathbf{E}_{i0} \tag{2.13}$$

Z rovnice (2.1) tedy dostáváme vztahy pro celkovou elektrickou intenzitu odražené a prošlé vlny při kolmém dopadu lineárně polarizované vlny.

$$\mathbf{E}_t = \left[\frac{2}{1+n} - \frac{1}{n(1+n)^2} \bar{\varepsilon} + \frac{ik_0 z}{n(1+n)} \bar{\varepsilon} \right] \mathbf{E}_{i0} e^{-ik_1 z} \tag{2.14}$$

$$\mathbf{E}_r = \left[\frac{1-n}{1+n} - \frac{1}{n(1+n)^2} \bar{\varepsilon} \right] \mathbf{E}_{i0} e^{ik_0 z} \tag{2.15}$$

Porucha elektrické intenzity odražené vlny obsahuje pouze jeden člen, nezávislý na poloze z . Původ tohoto členu je v odraze vlny od povrchu materiálu s poruchou permitivity, proto tento člen označíme jako povrchový. Porucha prošlé vlny obsahuje kromě povrchového členu ještě další člen, který závisí na uražené vzdálenosti v materiálu s poruchou permitivity, tento člen označíme jako objemový.

2.2.1 Faradayův jev

V této podsekcí zkusíme spočítat Faradayův jev pro stejné podmínky, pro jaké byl Faradayův jev řešen v podsekcí 1.3.1, za pomoci výsledků, které jsme získali poruchovou metodou pro kolmý dopad. Magnetizace tedy míří do stejného směru jako je směr šíření světla. Hlavně ale máme lineárně polarizovanou vlnu do směru x v bodě $z = 0$, která se šíří ve směru osy z materiálem s permitivitou (1.16), to znamená, že zde neuvažujeme povrchový člen poruchy elektrické intenzity, ani přenásobení dopadající elektrické intenzity Fresnelovým koeficientem. Poruchu elektrické intenzity dostaneme z rovnice (2.9) zanedbáním povrchového členu (musíme zde otočit znaménko u z , protože jsme to odvozovali s osou z mířící ven ze zmagnetizovaného materiálu). Dostáváme tedy vztah

$$\mathbf{E}_t = \left(\mathbf{E}_{t1} + \frac{ik_0z}{2n} \bar{\varepsilon} \mathbf{E}_{t1} \right) e^{ik_1z}, \quad (2.16)$$

kde $\mathbf{E}_{t1} = (E_0, 0, 0)$ je počáteční elektrická intenzita vlny v místě $z = 0$. Poruchu tenzoru permitivity máme z rovnice (1.16).

$$\bar{\varepsilon} = \begin{pmatrix} b & -ig & 0 \\ ig & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.17)$$

Dosadíme do rovnice (2.16) počáteční elektrickou intenzitu $\mathbf{E}_{t1} = (E_0, 0, 0)$ a $\bar{\varepsilon} \mathbf{E}_{t1} = E_0(b, ig, 0)$. Dostáváme

$$\mathbf{E}_t = \begin{pmatrix} 2n + ik_0zb \\ -gk_0z \\ 0 \end{pmatrix} \frac{E_0}{2n} e^{ik_1z}. \quad (2.18)$$

Pomocí rovnic (1.10), (2.18) dostaneme

$$\chi = -\frac{gk_0z}{2n + ik_0zb} = \frac{-2ngk_0z + ik_0^2z^2bg}{4n^2 + (k_0zb)^2} \approx -\frac{k_0zg}{2n} + i\frac{k_0^2z^2bg}{4n^2}, \quad (2.19)$$

ve jmenovateli jsme zde zanedbali člen $(k_0zb)^2$ oproti $4n^2$, protože jak jsme uvedli tak poruchová metoda je platná jen pro z malé a zároveň i porucha (a tedy b) musí být malá. Proto taky platí $|\chi| \ll 1$, pro určení natočení polarizace tedy můžeme použít vzorec (1.13), za předpokladu, že g je reálné dostaneme

$$\theta = -\frac{k_0zg}{2n}. \quad (2.20)$$

Tento výsledek se shoduje s teoretickým vzorcem (1.19).

2.2.2 Polární Kerrův jev, kolmý dopad

V této podsekcí se pokusíme odvodit polární Kerrův jev pro kolmý dopad použitím výsledků, které jsme získali poruchovou metodou pro kolmý dopad. Na rozhraní materiálu s permitivitou (1.16) dopadá kolmo vlna lineárně polarizovaná ve směru x , šířící se proti směru z (tentokrát tedy je osa z orientována stejně tak,

jak jsme počítali). Magnetizace mívá ve směru z , porucha permitivity je tedy stejná jako v předchozím případě (2.17).

Dosadíme $\mathbf{E}_{i0} = (E_0, 0, 0)$, $\bar{\epsilon}\mathbf{E}_{i0} = E_0(b, ig, 0)$ do rovnice (2.15) a vyjádříme χ z rovnice (1.10).

$$\mathbf{E}_r = \begin{pmatrix} n(1 - n^2) - b \\ -ig \\ 0 \end{pmatrix} \frac{E_0}{n(1 + n)^2} e^{-ik_0 z}. \quad (2.21)$$

$$\chi = \frac{-ig}{n(1 - n^2) - b} \quad (2.22)$$

Protože b, g jsou malé, tak $|\chi| \ll 1$, k určení úhlu natočení a elipticity použijeme tedy vzorec (1.13).

$$\theta = -\text{Im} \left\{ \frac{g}{n(1 - n^2) - b} \right\} \approx -\text{Im} \left\{ \frac{g}{n(1 - n^2)} \right\} \quad (2.23)$$

$$\psi = -\text{Re} \left\{ \frac{g}{n(1 - n^2) - b} \right\} \approx -\text{Re} \left\{ \frac{g}{n(1 - n^2)} \right\} \quad (2.24)$$

Tyto výsledky se shodují se vztahy (1.23).

Vidíme, že pomocí poruchového řešení vlnové rovnice jsme pro Faradayův jev a polární Kerrův jev při kolmém dopadu dostali výsledky, které se shodují s teoretickými vztahy. Proto usuzujeme, že má smysl tuto metodou využít pro počítání elektrické intenzity světla, které interaguje se zmagnetizovaným materiálem. V další kapitole aplikujeme tuto metodu na nekolmý dopad a zkusíme využít toho, že se tím porucha elektrické intenzity zlinearizuje, k tomu abychom rozložili magnetooptickou odezvu k polarizaci na několik členů, který by každý měl nějaký jasný fyzikální význam.

3. Obecný problém nekolmého dopadu a rozklad poruchy

Hlavní cíl této kapitoly bude stejný jako cíl celé této bakalářské práce, tedy nalézt postup jak rozložit poruchu permitivity tak, aby magnetooptické odezvy jednotlivých členů rozkladu daly dohromady celkovou magnetooptickou odezvu.

Nejprve v kapitolách 3.1, 3.2 spočítáme pomocí poruchové metody popsané v kapitole 2.1 elektrické intenzity vlny odražené od zmagnetizovaného materiálu a vlny prošlé zmagnetizovaným materiálem pro dva speciální případy. Výsledného tvaru porušené elektrické intenzity využijeme v další kapitole 3.3 k tomu, abychom ukázali, že poruchu $\bar{\epsilon}$ můžeme rozložit na libovolné členy (členy $\bar{\epsilon}_i$ ovšem musí pořad splňovat, že jsou malé vůči neporušené části permitivity) $\bar{\epsilon} = \bar{\epsilon}_1 + \bar{\epsilon}_2 + \dots + \bar{\epsilon}_m$ a, že celková odezva poruchy $\bar{\epsilon}$ ke změně polarizace se rovná součtu odezev od jednotlivých členů $\bar{\epsilon}_i$ ke změně polarizace. V kapitole 3.4 se pak pokusíme najít rozklad poruchy permitivity, která odpovídá magnetizaci v materiálu, mířící do daného směru. Vyzkoušíme například jestli lze rozložit magnetizaci do polárního, podélného a příčného směru.

3.1 Poruchová metoda pro průchod a odraz na rozhraní

V této kapitole budeme pomocí poruchového řešení vlnové rovnice počítat elektrickou intenzitu prošlé a odražené vlny na rozhraní vakua a zmagnetizovaného materiálu o kterém předpokládáme, že bez přítomnosti magnetizace je opticky izotropní.

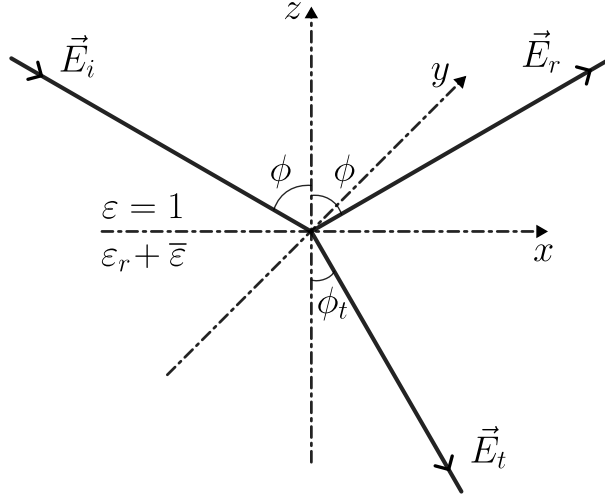
Relativní permitivitu materiálu napíšeme ve tvaru $\epsilon_r + \bar{\epsilon}$, kde ϵ_r je relativní permitivita, kterou by materiál měl, pokud by v něm nebyla žádná magnetizace, $\bar{\epsilon}$ je porucha permitivity způsobená magnetizací (výpočet níže je však platný, i pokud je porucha permitivity způsobená něčím jiným).

Schéma vln dopadajících na rozhraní je na Obrázku 3.1. Rovinná vlna s elektrickou intenzitou \mathbf{E}_i dopadá na rozhraní pod úhlem ϕ , prošlá vlna se šíří pod úhlem ϕ_t . Rozdělíme elektrické intenzity na neporušené a porušené části. Stejně jako v kapitole 2.2 nezávisí amplituda poruchy odražené vlny na poloze a amplituda poruchy prošlé vlny závisí na souřadnici z (závisí totiž pouze na tom, jak hluboko vlna prošla materiálem s poruchou permitivity). U poruchy prošlé vlny opět bereme, že se šíří se stejným vlnovým vektorem jako neporušená vlna, proto se taky láme pod stejným úhlem jako neporušená vlna.

Elektrické intenzity dopadající, odražené a prošlé vlny si tedy napíšeme jako

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_i &= \mathbf{E}_{i0} e^{i\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r}}, \\ \mathbf{E}_r &= \mathbf{E}_{r1} e^{i\mathbf{k}_r \cdot \mathbf{r}} + \mathbf{E}_{r2} e^{i\mathbf{k}_r \cdot \mathbf{r}}, \\ \mathbf{E}_t &= \mathbf{E}_{t1} e^{i\mathbf{k}_t \cdot \mathbf{r}} + \mathbf{E}_{t2}(z) e^{i\mathbf{k}_t \cdot \mathbf{r}},\end{aligned}\tag{3.1}$$

kde \mathbf{E}_{i0} , \mathbf{E}_{r1} , \mathbf{E}_{t1} jsou elektrické intenzity vstupní, odražené, prošlé vlny, které bychom měli pro rozhraní vakua a materiálu pokud by v něm nebyla přítomna po-



Obrázek 3.1: Schéma rozhraní materiálu s porušeným tenzorem permitivity

rucha permitivity. Můžeme je tedy spočítat pomocí Fresnelových vzorců. Vlnové vektory jednotlivých vln jsou

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_i &= k_0 (\sin \phi, 0, -\cos \phi), \\ \mathbf{k}_r &= k_0 (\sin \phi, 0, \cos \phi), \\ \mathbf{k}_t &= \sqrt{\varepsilon_r} k_0 (\sin \phi_t, 0, -\cos \phi_t). \end{aligned} \quad (3.2)$$

Časová závislost vln \mathbf{E}_i , \mathbf{E}_r , \mathbf{E}_t je pouze ve fázi $e^{-i\omega t}$, vlnovou rovnici (1.8) tedy můžeme upravit do tvaru $(\Delta + k_0^2 \varepsilon) \mathbf{E} = 0$ dosazením $\varepsilon_r + \bar{\varepsilon}$ a \mathbf{E}_t , dostaneme

$$[\Delta + k_0^2(\varepsilon_r + \bar{\varepsilon})](\mathbf{E}_{t1} e^{i\mathbf{k}_t \cdot \mathbf{r}} + \mathbf{E}_{t2}(z) e^{i\mathbf{k}_t \cdot \mathbf{r}}) = 0. \quad (3.3)$$

Po roznásobení a aplikaci Laplaceova operátoru dostaneme

$$\frac{d^2}{dz^2} \mathbf{E}_{t2}(z) + 2ik_{tz} \frac{d}{dz} \mathbf{E}_{t2}(z) + k_0^2 \bar{\varepsilon} \mathbf{E}_{t1} + k_0^2 \bar{\varepsilon} \mathbf{E}_{t2}(z) = 0. \quad (3.4)$$

Člen $k_0^2 \bar{\varepsilon} \mathbf{E}_{t2}(z)$ je porucha druhého řádu, takže jej zanedbáme. Člen $\frac{d^2}{dz^2} \mathbf{E}_{t2}(z)$ zanedbáme pomocí stejného argumentu jako při kolmém dopadu. Za k_{tz} dosadíme z (3.2), po úpravě tedy dostaneme rovnici

$$\frac{d^2}{dz^2} \mathbf{E}_{t2}(z) = -\frac{ik_0}{2\sqrt{\varepsilon_r} \cos \phi_t} \bar{\varepsilon} \mathbf{E}_{t1}, \quad (3.5)$$

ze které po integraci dostaneme

$$\mathbf{E}_{t2}(z) = -\frac{ik_0 z}{2\sqrt{\varepsilon_r} \cos \phi_t} \bar{\varepsilon} \mathbf{E}_{t1} + \mathbf{E}_{t3}, \quad (3.6)$$

kde \mathbf{E}_{t3} je integrační konstanta. Máme tedy elektrickou intenzitu prošlé vlny

$$\mathbf{E}_t(z) = \left(\mathbf{E}_{t1} + \mathbf{E}_{t3} - \frac{ik_0 z}{2\sqrt{\varepsilon_r} \cos \phi_t} \bar{\varepsilon} \mathbf{E}_{t1} \right) e^{i\mathbf{k}_t \cdot \mathbf{r}}. \quad (3.7)$$

Složky vektorů \mathbf{E}_{r2} , \mathbf{E}_{t3} , které zatím neznáme určíme ze spojitosti tečných složek \mathbf{E} , \mathbf{H} a normálových složek \mathbf{D} , \mathbf{B} . Jelikož \mathbf{E}_{i0} , \mathbf{E}_{r1} , \mathbf{E}_{t1} podmínky spojitosti na rozhraní už splňují, stačí aby je splňovali i \mathbf{E}_{r2} , $\mathbf{E}_{t2}(z)$. Ze spojitosti

tečné složky \mathbf{E} dostaneme

$$\begin{aligned} E_{r2x} &= E_{t3x}, \\ E_{r2y} &= E_{t3y}. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Normálové složky \mathbf{D} určíme ze vztahu $\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$. Máme tedy $\mathbf{D}_{r2} = \varepsilon_0 \mathbf{E}_{r2}$ a použitím toho že na rozhraní je $z = 0$ a $\bar{\varepsilon} \mathbf{E}_{t3}$ je porucha druhého řádu, takže ji zanedbáme, dostaneme

$$\mathbf{D}_{t2} = \varepsilon \left(\mathbf{E}_{t3} - \frac{ik_0 z}{2\sqrt{\varepsilon_r} \cos \phi_t} \bar{\varepsilon} \mathbf{E}_{t1} \right) = \varepsilon \mathbf{E}_{t3} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \mathbf{E}_{t3} + \varepsilon_0 \bar{\varepsilon} \mathbf{E}_{t3} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \mathbf{E}_{t3}. \quad (3.9)$$

Ze spojitosti normálových složek tedy dostáváme

$$E_{r2z} = \varepsilon_r E_{t3z}. \quad (3.10)$$

Složky \mathbf{H}_{r2} , \mathbf{H}_{t2} spočítáme pomocí vztahu $\mathbf{H} = \frac{1}{i\mu_0\omega} \nabla \times \mathbf{E}$, takže stačí aby na rozhraní byly spojitě tečné složky $\nabla \times \mathbf{E}$. Spočítáme rotace \mathbf{E}_{r2} a jednotlivých částí \mathbf{E}_{t2} , dostaneme

$$\nabla \times \mathbf{E}_{r2} e^{i\mathbf{k}_r \cdot \mathbf{r}} = i(\mathbf{k}_r \times \mathbf{E}_{r2}) e^{i\mathbf{k}_r \cdot \mathbf{r}}, \quad (3.11)$$

$$\nabla \times \mathbf{E}_{t3} e^{i\mathbf{k}_t \cdot \mathbf{r}} = i(\mathbf{k}_t \times \mathbf{E}_{t3}) e^{i\mathbf{k}_t \cdot \mathbf{r}}, \quad (3.12)$$

$$\nabla \times \left(\frac{ik_0 z}{2\sqrt{\varepsilon_r} \cos \phi_t} \bar{\varepsilon} \mathbf{E}_{t1} e^{i\mathbf{k}_t \cdot \mathbf{r}} \right) = \frac{ik_0}{2\sqrt{\varepsilon_r} \cos \phi_t} e^{i\mathbf{k}_t \cdot \mathbf{r}} (\mathbf{z} + iz\mathbf{k}_t) \times \bar{\varepsilon} \mathbf{E}_{t1}. \quad (3.13)$$

Zde \mathbf{z} značí jednotkový vektor ve směru osy z . Podmínky spojitosti počítáme v počátku, tedy $\mathbf{r} = 0$, $z = 0$. Dosazením tedy dostaneme podmínky spojitosti tečných složek \mathbf{H}

$$\begin{aligned} [\mathbf{k}_r \times \mathbf{E}_{r2}]_x &= [\mathbf{k}_t \times \mathbf{E}_{t3}]_x + \frac{k_0}{2\sqrt{\varepsilon_r} \cos \phi_t} [\mathbf{E}_z \times \bar{\varepsilon} \mathbf{E}_{t1}]_x, \\ [\mathbf{k}_r \times \mathbf{E}_{r2}]_y &= [\mathbf{k}_t \times \mathbf{E}_{t3}]_y + \frac{k_0}{2\sqrt{\varepsilon_r} \cos \phi_t} [\mathbf{E}_z \times \bar{\varepsilon} \mathbf{E}_{t1}]_y. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Platí

$$\mathbf{k} \times \mathbf{E} = \begin{pmatrix} k_y E_z - k_z E_y \\ k_z E_x - k_x E_z \\ k_x E_y - k_y E_x \end{pmatrix}, \quad \mathbf{z} \times \bar{\varepsilon} \mathbf{E}_{t1} = \begin{pmatrix} -[\bar{\varepsilon} \mathbf{E}_{t1}]_y \\ [\bar{\varepsilon} \mathbf{E}_{t1}]_x \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (3.15)$$

Dosazením z rovnic (3.15), (3.2) do (3.14) dostaneme

$$\begin{aligned} k_{rz} E_{r2y} &= k_{tz} E_{t3y} + \frac{k_0}{2\sqrt{\varepsilon_r} \cos \phi_t} [\bar{\varepsilon} \mathbf{E}_{t1}]_y, \\ k_{rz} E_{r2x} - k_{rx} E_{r3z} &= k_{tz} E_{t3x} - k_{tx} E_{t3z} + \frac{k_0}{2\sqrt{\varepsilon_r} \cos \phi_t} [\bar{\varepsilon} \mathbf{E}_{t1}]_x. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Ze spojitosti normálové složky \mathbf{B} nedostaneme žádnou novou informaci. Pro určení šesti neznámých \mathbf{E}_{r2} , \mathbf{E}_{t3} máme zatím jenom pět rovnic, šestou dostaneme z podmínky že odražená vlna musí být příčná, takže $\mathbf{E}_{r2} \cdot \mathbf{k}_r = 0$, odtud dostáváme

$$E_{r2z} = -\tan \phi E_{r2x} \quad (3.17)$$

Zkombinováním rovnic (3.8), (3.10), (3.14), (3.17) dostaneme složky \mathbf{E}_{r2} , \mathbf{E}_{t3}

$$\begin{aligned} E_{r2x} &= \frac{[\bar{\varepsilon} \mathbf{E}_{t1}]_x}{2\sqrt{\varepsilon_r} \cos \phi_t \left[\cos \phi + \sqrt{\varepsilon_r} \cos \phi_t + \left(1 - \frac{1}{\varepsilon_r}\right) \tan \phi \sin \phi \right]} \\ E_{r2y} &= \frac{[\bar{\varepsilon} \mathbf{E}_{t1}]_y}{2\sqrt{\varepsilon_r} \cos \phi_t \left[\cos \phi + \sqrt{\varepsilon_r} \cos \phi_t \right]} \end{aligned} \quad (3.18)$$

$$E_{r2z} = -\tan \phi \frac{[\bar{\varepsilon} \mathbf{E}_{t1}]_x}{2\sqrt{\varepsilon_r} \cos \phi_t \left[\cos \phi + \sqrt{\varepsilon_r} \cos \phi_t + \left(1 - \frac{1}{\varepsilon_r}\right) \tan \phi \sin \phi \right]}$$

$$\begin{aligned} E_{t3x} &= \frac{[\bar{\varepsilon} \mathbf{E}_{t1}]_x}{2\sqrt{\varepsilon_r} \cos \phi_t \left[\cos \phi + \sqrt{\varepsilon_r} \cos \phi_t + \left(1 - \frac{1}{\varepsilon_r}\right) \tan \phi \sin \phi \right]} \\ E_{t3y} &= \frac{[\bar{\varepsilon} \mathbf{E}_{t1}]_y}{2\sqrt{\varepsilon_r} \cos \phi_t \left[\cos \phi + \sqrt{\varepsilon_r} \cos \phi_t \right]} \end{aligned} \quad (3.19)$$

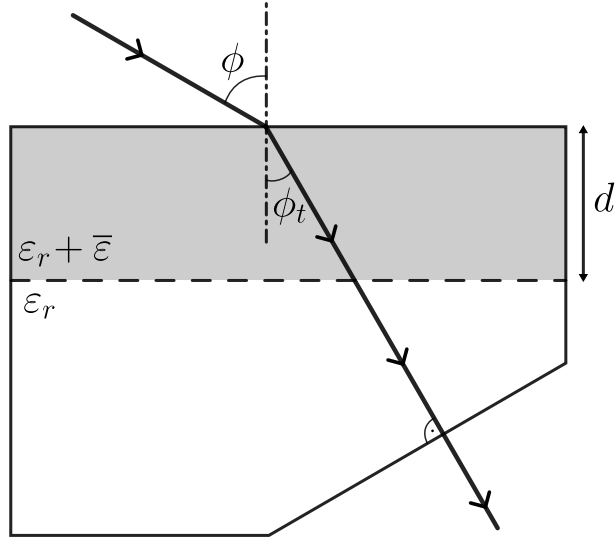
$$E_{t3z} = -\frac{\tan \phi}{\varepsilon_r} \frac{[\bar{\varepsilon} \mathbf{E}_{t1}]_x}{2\sqrt{\varepsilon_r} \cos \phi_t \left[\cos \phi + \sqrt{\varepsilon_r} \cos \phi_t + \left(1 - \frac{1}{\varepsilon_r}\right) \tan \phi \sin \phi \right]}$$

3.2 Poruchová metoda pro druhé rozhraní

V minulé kapitole jsme pomocí poruchové metody spočítali elektrické intenzity prošlé a odražené vlny na rozhraní. Prošlá vlna jejíž elektrickou intenzitu jsme spočítali je ale neměřitelná, nachází se totiž uvnitř zmagnetizovaného materiálu. Abychom tedy mohli tuto elektrickou intenzitu změřit, tak musí vyjít ven z materiálu. Stačí tedy použít poruchovou metodu na další rozhraní.

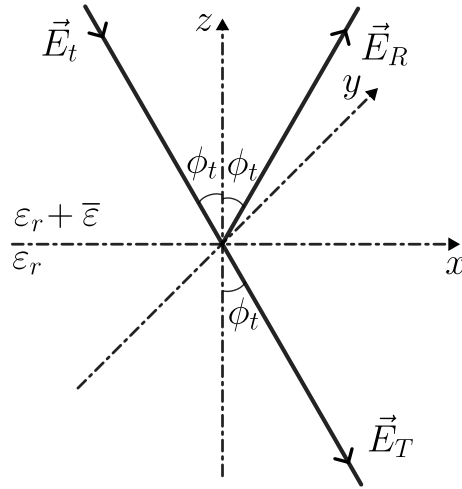
Pro zjednodušení výpočtu budeme uvažovat, že prošlá vlna vyjde ze zmagnetizovaného prostředí rozhraním mezi zmagnetizovaným materiálem s permitivitou $\varepsilon_0(\varepsilon_r + \bar{\varepsilon})$ a tím samým materiálem, ve kterém ale neuvažujeme magnetizaci, má tedy permitivitu $\varepsilon_0\varepsilon_r$. Prošlá vlna by se pak ještě musela dostat ven z tohoto materiálu, to už ale nebudeme uvažovat, protože zde už nejsou žádné poruchy permitivity, takže se dá elektrická intenzita určit pomocí Fresnelových koeficientů. Místo toho budeme uvažovat, že vzorek je seříznutý, tak aby vlna dopadala na rozhraní materiálu a vakua kolmo, pak se totiž při průchodu rozhraním nezmění polarizace světla. Stačí nám tedy spočítat polarizaci vlny po průchodu rozhraním mezi $\varepsilon_0(\varepsilon_r + \bar{\varepsilon})$ a $\varepsilon_0\varepsilon_r$, ta bude stejná jako polarizace vycházející z takto uvažovaného vzorku. Schéma takového vzorku je na Obrázku 3.2. Šířku prostředí, ve kterém uvažujeme magnetizaci (a tedy poruchu permitivity) označíme d .

V minulé kapitole jsme vyřešili prošlou vlnu prvním rozhraním, stačí nám tedy vyřešit průchod druhým rozhraním. Schéma tohoto rozhraní je na Obrázku 3.3. Na rozhraní dopadá vlna s elektrickou intenzitou $\mathbf{E}_i(d)$ z rovnice (3.7). Můžeme



Obrázek 3.2: Schéma vzorku, kde část materiálu má permitivitu i s porušenou částí a část má permitivitu bez porušené části.

tedy vypsát porušené a neporušené elektrické intenzity na tomto rozhraní. Elektrickou intenzitu odražené vlny označíme \mathbf{E}_R , elektrickou intenzitu prošlé vlny označíme \mathbf{E}_T . V tomto případě amplituda poruchy prošlé vlny nezávisí na poloze a amplituda poruchy odražené vlny závisí na souřadnici z . Opět bereme, že se porušená vlna šíří se stejným vlnovým vektorem jako neporušená vlna.



Obrázek 3.3: Schéma druhého rozhraní mezi materiálem s poruchou permitivity a materiálem bez poruchy.

$$\begin{aligned}
 \mathbf{E}_t &= \left[\mathbf{E}_{t1} + \mathbf{E}_{t3} - \frac{ik_0 d}{2\sqrt{\varepsilon_r} \cos \phi_t} \bar{\varepsilon} \mathbf{E}_{t1} \right] e^{ik_t \cdot \mathbf{r}}, \\
 \mathbf{E}_R &= [\mathbf{E}_{R1} + \mathbf{E}_{R2}(z)] e^{ik_R \cdot \mathbf{r}}, \\
 \mathbf{E}_T &= [\mathbf{E}_{T1} + \mathbf{E}_{T2}] e^{ik_t \cdot \mathbf{r}}.
 \end{aligned} \tag{3.20}$$

Odražená i prošlá vlna jsou pod úhlem ϕ_t , takže máme vlnové vektory

$$\begin{aligned}\mathbf{k}_t &= k_0\sqrt{\varepsilon_r}(\sin\phi_t, 0, -\cos\phi_t), \\ \mathbf{k}_R &= k_0\sqrt{\varepsilon_r}(\sin\phi_t, 0, \cos\phi_t).\end{aligned}\quad (3.21)$$

Neporušené \mathbf{E}_{T1} , \mathbf{E}_{R1} jsou elektrické intenzity prošlé a odražené vlny na rozhraní bez poruchy permitivity $\bar{\varepsilon}$, takže zde v podstatě žádné rozhraní není a tedy $\mathbf{E}_{T1} = \mathbf{E}_t$, $\mathbf{E}_{R1} = 0$.

Do vlnové rovnice dosadíme permitivitu vzorku s magnetizací $\varepsilon_0(\varepsilon_r + \bar{\varepsilon})$ a elektrickou intenzitu odražené vlny \mathbf{E}_R . Máme tedy

$$[\Delta + k_0^2(\varepsilon_r + \bar{\varepsilon})]\mathbf{E}_{R2}(z)e^{i\mathbf{k}_R \cdot \mathbf{r}} = 0. \quad (3.22)$$

Po úpravách analogických jako u prvního rozhraní dostaneme

$$\frac{d^2}{dz^2}\mathbf{E}_{R2}(z) + 2ik_{Rz}\frac{d}{dz}\mathbf{E}_{R2}(z) + k_0^2\bar{\varepsilon}\mathbf{E}_{R2}(z) = 0. \quad (3.23)$$

Opět zanedbáme druhou derivaci \mathbf{E}_{R2} a poruchu druhého řádu $\bar{\varepsilon}\mathbf{E}_{R2}$. Dostaneme $\mathbf{E}'_{R2}(z) = 0$, tedy $\mathbf{E}_{R2}(z) = \text{konst.}$

Neznámé složky \mathbf{E}_{R2} , \mathbf{E}_{T2} určíme ze spojitosti tečných složek \mathbf{E} , \mathbf{H} a normálových složek \mathbf{D} , \mathbf{B} . Neporušené vlny \mathbf{E}_t , \mathbf{E}_{T1} , \mathbf{E}_{R1} už automaticky splňují podmínky spojitosti, stačí je tedy vyšetřit pouze pro \mathbf{E}_{T2} , \mathbf{E}_{R2} . Ze spojitosti tečných složek \mathbf{E} dostaneme

$$\begin{aligned}E_{R2x} &= E_{T2x}, \\ E_{R2y} &= E_{T2y}.\end{aligned}\quad (3.24)$$

Spočítáme elektrické indukce pomocí vzorce $\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}$, zanedbáme poruchu druhého řádu.

$$\begin{aligned}\mathbf{D}_{R2} &= \varepsilon_0(\varepsilon_r + \bar{\varepsilon})\mathbf{E}_{R2} = \varepsilon_0\varepsilon_r\mathbf{E}_{R2} + \varepsilon_0\bar{\varepsilon}\mathbf{E}_{R2} = \varepsilon_0\varepsilon_r\mathbf{E}_{R2}, \\ \mathbf{D}_{T2} &= \varepsilon_0\varepsilon_r\mathbf{E}_{T2}.\end{aligned}\quad (3.25)$$

Ze spojitosti normálové složky \mathbf{D} dostaneme

$$E_{R2z} = E_{T2z}. \quad (3.26)$$

Pro spojitost \mathbf{H} musí být spojitě $\nabla \times \mathbf{E}$, to spočítáme analogicky jako u prvního rozhraní, dostaneme

$$\begin{aligned}\nabla \times (\mathbf{E}_{R2}e^{i\mathbf{k}_R \cdot \mathbf{r}}) &= i(\mathbf{k}_R \times \mathbf{E}_{R2})e^{i\mathbf{k}_R \cdot \mathbf{r}}, \\ \nabla \times (\mathbf{E}_{T2}e^{i\mathbf{k}_t \cdot \mathbf{r}}) &= i(\mathbf{k}_t \times \mathbf{E}_{T2})e^{i\mathbf{k}_t \cdot \mathbf{r}}.\end{aligned}\quad (3.27)$$

Ze spojitosti tečných složek \mathbf{H} tedy dostaneme

$$[\mathbf{k}_R \times \mathbf{E}_{R2}]_x = [\mathbf{k}_t \times \mathbf{E}_{T2}]_x, \quad (3.28)$$

$$[\mathbf{k}_R \times \mathbf{E}_{R2}]_y = [\mathbf{k}_t \times \mathbf{E}_{T2}]_y. \quad (3.29)$$

Z rovnic (3.28), (3.21) dostaneme $E_{R2y} = -E_{T2y}$, to spolu s (3.24) dává

$$E_{R2y} = E_{T2y} = 0. \quad (3.30)$$

Z rovnic (3.29), (3.21), (3.26) dostaneme $E_{R2x} = -E_{T2x}$, to spolu s (3.24) dává

$$E_{R2x} = E_{T2x} = 0. \quad (3.31)$$

Máme tedy

$$\mathbf{E}_{R2} = \mathbf{E}_{T2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ E_{T2z} \end{pmatrix}. \quad (3.32)$$

Ze spojitosti normálové složky \mathbf{B} bychom nedostali žádnou novou informaci, pro určení členu E_{T2z} tedy použijeme toho, že v izotropním prostředí musí být vlna příčná a tedy \mathbf{E}_T musí být příčná. Máme tedy podmínku $\mathbf{E}_T \cdot \mathbf{k}_t = 0$, neboli $E_{Tz}/E_{Tx} = \tan \phi_t$. Dosazením z rovnic (3.20), (3.32) a vyjádřením E_{T2z} dostaneme

$$E_{T2z} = E_{T1x} \tan \phi_t - E_{T1z}. \quad (3.33)$$

Dosazením za $E_{T1} = E_t$ z rovnice (3.20) a využitím toho, že E_{t1} je příčná vlna tedy, že $E_{t1z} = E_{t1x} \tan \phi_t$, dostaneme

$$E_{T2z} = E_{t3x} \tan \phi_t - E_{t3z} - \frac{ik_0 d}{2\sqrt{\varepsilon_r \cos \phi_t}} ([\bar{\varepsilon} \mathbf{E}_{t1}]_x \tan \phi_t - [\bar{\varepsilon} \mathbf{E}_{t1}]_z). \quad (3.34)$$

Celkově tedy dostáváme dosazením do vzorce (3.20) intenzitu prošlé vlny

$$\begin{aligned} E_{Tx} &= E_{t1x} + E_{t3x} - \frac{ik_0 d}{2\sqrt{\varepsilon_r \cos \phi_t}} [\bar{\varepsilon} \mathbf{E}_{t1}]_x \\ E_{Ty} &= E_{t1y} + E_{t3y} - \frac{ik_0 d}{2\sqrt{\varepsilon_r \cos \phi_t}} [\bar{\varepsilon} \mathbf{E}_{t1}]_y \\ E_{Tz} &= E_{t1z} + \tan \phi_t \left(E_{t3x} - \frac{ik_0 d}{2\sqrt{\varepsilon_r \cos \phi_t}} [\bar{\varepsilon} \mathbf{E}_{t1}]_x \right) \end{aligned} \quad (3.35)$$

3.3 Rozklad změn natočení a elipticity na příspěvky jednotlivých poruch

Cílem této kapitoly bude ukázat, že pokud rozložíme tenzor poruchy permittivity na několik částí $\bar{\varepsilon} = \bar{\varepsilon}_1 + \bar{\varepsilon}_2 + \dots + \bar{\varepsilon}_m$, tak celková odezva k polarizaci světla od poruchy $\bar{\varepsilon}$ se bude rovnat součtu odezev od jednotlivých částí poruchy $\bar{\varepsilon}_i$.

Nejdříve ukážeme postup, kterým budeme počítat odezvy k polarizaci od poruchy. Tento postup srovnáme s tím, jak se experimentálně měří změny polarizace. V dalším kroku ukážeme, že pokud takto spočítáme změny polarizace v důsledku poruchy, tak za předpokladu že jsou tyto změny malé (což je rozumný předpoklad, protože obvykle jsou měřené změny polarizace malé) dostaneme, že součet příspěvků od jednotlivých poruch $\bar{\varepsilon}_i$ se rovná příspěvku od poruchy $\bar{\varepsilon}$. V tomto kroku využijeme výsledku z předchozích kapitol, že složky výsledné poruchové části elektrické intenzity jsou ve tvaru nějakého násobku složek $\bar{\varepsilon} \mathbf{E}_{t1}$ (kde \mathbf{E}_{t1} je elektrická intenzita vlny prošlé prvním rozhraním mezi vzduchem a materiálem, pokud v materiálu neuvažujeme poruchu tenzoru permittivity).

3.3.1 Výpočet změny polarizace v důsledku poruchy permitivity

Úhel natočení a elipticitu polarizace můžeme spočítat z parametru χ definovaného vztahem (1.10). Dostaneme tak natočení polarizace o úhel θ vůči ose x , nějak zvolené souřadnicové soustavy s osou z mířící ve směru šíření světla. Jelikož nás ale zajímá pouze vliv poruchy permitivity na polarizaci výsledné vlny, tak zkusíme najít způsob jak spočítat rozdíl úhlu natočení a rozdíl elipticity výsledné vlny oproti vlně, kterou bychom dostali, pokud bychom uvažovali, že v materiálu není žádná porucha permitivity. Tuto vlnu nazveme referenční vlna a její elektrickou intenzitu označíme \mathbf{E}_1 . Při poruchovém výpočtu v kapitole 3.1, odpovídá referenční elektrické intenzitě odražení vlny vektor \mathbf{E}_{r1} , v kapitole 3.2 odpovídá referenční elektrické intenzitě prošlé vlny vektor \mathbf{E}_{T1} .

Ze vztahu (1.10) vidíme, že parametr χ můžeme rozepsat jako podíl průmětu elektrické intenzity do směru y a průmětu elektrické intenzity do směru x (tedy podíl průmětů na jednotkové vektory \mathbf{y} , \mathbf{x} , které jsou na sebe kolmé).

$$\chi = \frac{E_y}{E_x} = \frac{\mathbf{y} \cdot \mathbf{E}}{\mathbf{x} \cdot \mathbf{E}} \quad (3.36)$$

Pomocí takto definovaného χ můžeme použitím rovnic (1.11), (1.12) spočítat natočení polarizace vůči ose x a elipticitu elektrické intenzity \mathbf{E} . To si můžeme představit tak, že tímto způsobem spočítáme změnu úhlu natočení a změnu elipticity elektrické intenzity \mathbf{E} , vůči lineárně polarizované vlně ve směru x . To nás vede k následujícím krokům.

Zadefinujeme si dva jednotkové, na sebe kolmé vektory \mathbf{E}_{\parallel} , \mathbf{E}_{\perp} , pomocí referenční elektrické intenzity \mathbf{E}_1 tak, aby platilo: $|\mathbf{E}_{\parallel}| = |\mathbf{E}_{\perp}| = 1$, $\mathbf{E}_{\parallel} \parallel \mathbf{E}_1$, $\mathbf{E}_{\perp} \perp \mathbf{E}_1$. Vyzkoušíme je dosadit do vztahu 3.36 místo vektorů \mathbf{x} , \mathbf{y} a výsledek označíme $\tilde{\chi}$.

$$\tilde{\chi} = \frac{\mathbf{E}_{\perp} \cdot \mathbf{E}}{\mathbf{E}_{\parallel} \cdot \mathbf{E}} \quad (3.37)$$

Pokusíme se dokázat, že dosazením $\tilde{\chi}$ do rovnic (1.11), (1.12) dostaneme změnu úhlu natočení polarizace elektrické intenzity \mathbf{E} vůči úhlu natočení polarizace referenční elektrické intenzity \mathbf{E}_1 a změnu elipticity \mathbf{E} vůči elipticitě \mathbf{E}_1 .

Označíme θ úhel natočení polarizace (vůči ose x) \mathbf{E} , θ_1 úhel natočení polarizace \mathbf{E}_1 , ψ elipticitu \mathbf{E} , ψ_1 elipticitu \mathbf{E}_1 . Změnu úhlu natočení polarizace \mathbf{E} vůči \mathbf{E}_1 označíme $\delta\theta$ a změnu elipticity \mathbf{E} vůči \mathbf{E}_1 označíme $\delta\psi$. Platí tedy

$$\theta = \theta_1 + \delta\theta, \quad \psi = \psi_1 + \delta\psi. \quad (3.38)$$

Bez újmy na obecnosti vezmeme, že $|\mathbf{E}_1| = |\mathbf{E}| = 1$, to můžeme udělat, protože nás zajímá pouze jak je jiná polarizace \mathbf{E} od \mathbf{E}_1 a na to nemají jejich intenzity vliv. Dále zvolíme osy x a y tak, aby úhel natočení referenční vlny byl nulový. Máme tedy $\theta_1 = 0$ a Jonesův vektor referenční vlny

$$\mathbf{E}_1 = \begin{pmatrix} \cos \psi_1 \\ i \sin \psi_1 \end{pmatrix}. \quad (3.39)$$

Odtud dostáváme Jonesovy vektory elektrických intenzit \mathbf{E}_{\parallel} a \mathbf{E}_{\perp}

$$\mathbf{E}_{\parallel} = \begin{pmatrix} \cos \psi_1 \\ i \sin \psi_1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{E}_{\perp} = \begin{pmatrix} i \sin \psi_1 \\ \cos \psi_1 \end{pmatrix}. \quad (3.40)$$

Vlna \mathbf{E} má elipticitu $\psi = \psi_1 + \delta\psi$ a je otočena o úhel $\delta\theta$. Její Jonesův vektor tedy je

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} \cos \delta\theta & -\sin \delta\theta \\ \sin \delta\theta & \cos \delta\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\psi_1 + \delta\psi) \\ i \sin(\psi_1 + \delta\psi) \end{pmatrix}. \quad (3.41)$$

Zde využijeme předpoklad, že jsou změna úhlu natočení $\delta\theta$ a změna polarizace $\delta\psi$ malé. Rozvineme cosiny a siny do prvního řádu Taylorova rozvoje, dostáváme tedy $\sin(\psi_1 + \delta\psi) = \sin \psi_1 + \delta\psi \cos \psi_1$, $\cos(\psi_1 + \delta\psi) = \cos \psi_1 - \delta\psi \sin \psi_1$, $\sin \delta\theta = \delta\theta$, $\cos \delta\theta = 1$. Označíme $\cos \psi_1 = c_1$, $\sin \psi_1 = s_1$. Dosazením do rovnice (3.41) dostaneme

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1 & -\delta\theta \\ \delta\theta & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 - \delta\psi s_1 \\ i(s_1 + \delta\psi c_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 - \delta\psi s_1 - i\delta\theta(s_1 + \delta\psi c_1) \\ \delta\theta(c_1 - \delta\psi s_1) + i(s_1 + \delta\psi c_1) \end{pmatrix}. \quad (3.42)$$

Dosazením \mathbf{E}_{\parallel} , \mathbf{E}_{\perp} , \mathbf{E} z rovnic (3.40), (3.42) do rovnice (3.37) dostaneme

$$\tilde{\chi} = \frac{\delta\theta(\cos 2\psi_1 - \delta\psi \sin 2\psi_1) + i\delta\psi}{1 - i\delta\theta(\sin 2\psi_1 + \delta\theta \cos 2\psi_1)}. \quad (3.43)$$

Zlomek (3.43) upravíme a zanedbáme druhé a vyšší mocniny $\delta\theta$, $\delta\psi$, toho jsme oprávněni, protože jsme je zanedbali už při tom, když jsme brali Taylorovy rozvoje sinů a kosinů. Dostaneme

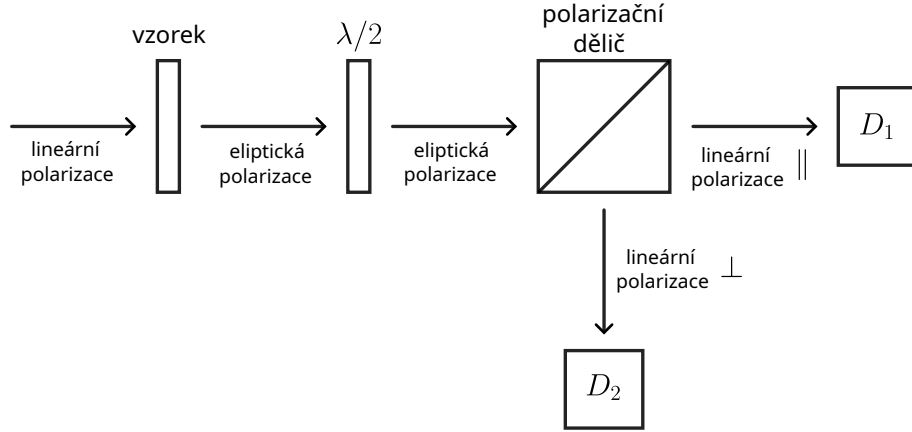
$$\tilde{\chi} = \delta\theta(\cos 2\psi_1 - 2\delta\psi \sin 2\psi_1) + i\delta\psi. \quad (3.44)$$

Teď zkusíme dosadit $\tilde{\chi}$ do rovnic (1.11), (1.12) namísto χ , výsledek označíme $\tilde{\theta}$, $\tilde{\psi}$. Jelikož jsme předpokládali, že $\delta\theta$, $\delta\psi$ jsou malé, tak platí $|\tilde{\chi}| \ll 1$ a můžeme tedy použít rovnici (1.13). Dostaneme

$$\begin{aligned} \tilde{\theta} &= \delta\theta(\cos 2\psi_1 - 2\delta\psi \sin 2\psi_1), \\ \tilde{\psi} &= \delta\psi. \end{aligned} \quad (3.45)$$

Odtud vidíme, že spočítáním $\tilde{\chi}$ pro nějakou referenční polarizaci a dosazením ho do rovnice (1.13) dostaneme změnu elipticity $\delta\psi$ elektrické intenzity \mathbf{E} vůči referenční elektrické intenzitě \mathbf{E}_1 . Pokud bychom se takto pokoušeli spočítat změnu natočení polarizace $\delta\theta$, tak ji dostaneme přenásobenou faktorem $(\cos 2\psi_1 - 2\sin 2\psi_1 \delta\psi)$. Pokud jím výsledek vydělíme, tak dostaneme požadovanou změnu elipticity $\delta\theta$. Dostáváme tedy vztahy

$$\begin{aligned} \delta\psi &= \text{Im } \tilde{\chi}, \\ \delta\theta &= \frac{\text{Re } \tilde{\chi}}{\cos 2\psi_1 - 2\delta\psi \sin 2\psi_1}. \end{aligned} \quad (3.46)$$



Obrázek 3.4: Schéma experimentálního uspořádání pro měření změny natočení polarizace.

Porovnání s experimentálním měření změn polarizace

Metoda spočítání změny natočení polarizace $\delta\theta$ elektrické intenzity \mathbf{E} , vůči referenční polarizaci \mathbf{E}_1 se podobá jedné experimentální metodě, kterou se měří malé změny polarizace. Proto se v této podsececi pokusíme tyto metody porovnat a uvidíme jestli dostaneme stejný výsledek jako v rovnici (3.45).

Na Obrázku 3.4 je schéma zmíněného experimentálního uspořádání. Změnu úhlu natočení polarizace za pomoci něj můžeme určit následovně. Nejprve se na něm provede první, referenční, měření. Při něm se natočí $\lambda/2$ -destička tak, aby na detektory D_1 a D_2 dopadalo světlo se stejnou intenzitou. To nastane, když bude úhel natočení $\theta_1 = \pi/4$. Poté se nějak změní vzorek (můžeme třeba uvažovat, že se v něm změní magnetizace a tím se k jeho tenzoru permitivity přidá nějaká porucha) v důsledku toho předpokládáme, že se nějak změní polarizace a nebude už tedy natočena o úhel $\theta_1 = \pi/4$, ale o úhel $\theta = \pi/4 + \delta\theta$. $\lambda/2$ -destička zůstane natočena tak, jak byla při referenčním měření. Provede se druhé měření, a v důsledku změny úhlu natočení už nebudou intenzity na detektorech D_1 , D_2 stejné. Změří se intenzita I_1 na detektoru D_1 a intenzita I_2 na detektoru D_2 . Změna natočení polarizace $\delta\theta$ se pak určí ze vztahu [2]

$$\delta\theta \approx \frac{\sin 2\delta\theta}{2} = \frac{I_1 - I_2}{2(I_1 + I_2)}. \quad (3.47)$$

Referenční vlna \mathbf{E}_1 z předchozí podsečky v tomto experimentu odpovídá vlně po průchodu $\lambda/2$ -destičkou. Víme že je zde polarizace otočená o úhel $\theta_1 = \pi/4$, vlna zde může mít elipticitu ψ_1 . Jonesův vektor referenční vlny tedy je

$$\mathbf{E}_1 = \begin{pmatrix} \cos(\pi/4) & -\sin(\pi/4) \\ \sin(\pi/4) & \cos(\pi/4) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ is_1 \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} c_1 - is_1 \\ c_1 + is_1 \end{pmatrix}. \quad (3.48)$$

Polarizace měřené elektrické intenzity \mathbf{E} má vůči referenční vlně změněnou elipticitu o $\delta\psi$ a je vůči ní natočená o úhel $\delta\theta$. Označíme $c = \cos(\psi_1 + \delta\psi)$, $s = \sin(\psi_1 + \delta\psi)$, její Jonesův vektor tedy je (opět jsme vzali pouze první členy Taylorova rozvoje sinů a kosinů)

$$\mathbf{E} = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} (1 - \delta\theta)c - i(1 + \delta\theta)s \\ (1 + \delta\theta)c + i(1 - \delta\theta)s \end{pmatrix}. \quad (3.49)$$

Odtud dostáváme $I_1 = (1 - \delta\theta)^2 c^2 + (1 + \delta\theta)^2 s^2$, $I_2 = (1 + \delta\theta)^2 c^2 + (1 - \delta\theta)^2 s^2$, dosazením do vztahu (3.47) a po úpravách dostaneme

$$\frac{I_1 - I_2}{2(I_1 + I_2)} = \delta\theta \cos 2(\psi_1 + \delta\psi) \approx \delta\theta(\cos 2\psi_1 - 2\delta\psi \sin 2\psi_1). \quad (3.50)$$

Opravdu vidíme, že jsme dostali stejný výsledek jako metodou spočítání $\tilde{\chi}$ pomocí referenční vlny a dosazením do rovnice (1.11).

3.3.2 Rozložení poruchy permitivity

Už víme jak můžeme spočítat změnu natočení polarizace a změnu elipticity vůči nějaké referenční vlně \mathbf{E}_1 . V rovnici (3.46) si můžeme všimnout, že vztahy pro $\delta\psi$, $\delta\theta$ jsou lineární v $\tilde{\chi}$. Pokud se nám tedy podaří nějak rozložit $\tilde{\chi}$ na součet dvou členů $\tilde{\chi} = \tilde{\chi}_1 + \tilde{\chi}_2$, tak bude platit, že změna elipticity $\delta\psi$ příslušející parametru $\tilde{\chi}$ se bude rovnat součtu změny elipticity $\delta\psi_1$ příslušející $\tilde{\chi}_1$ a změny elipticity $\delta\psi_2$ příslušející $\tilde{\chi}_2$. Analogicky pro úhel natočení polarizace $\delta\theta = \delta\theta_1 + \delta\theta_2$. Neboli pro libovolný rozklad $\tilde{\chi} = \tilde{\chi}_1 + \tilde{\chi}_2 + \dots$ (s podmínkou, že musí platit $|\tilde{\chi}_i| \ll 1$) stačí spočítat jednotlivé příspěvky ke změně úhlu natočení $\delta\theta_i$, jednotlivé příspěvky k změně elipticity $\delta\psi_i$. Jejich sečtením potom dostaneme změnu úhlu natočení $\delta\theta$ a změnu elipticity $\delta\psi$.

Elektrickou intenzitu výsledné vlny můžeme napsat jako součet neporušené části a porušené části. Neporušenou část vezmeme jako referenční elektrickou intenzitu, porušená část závisí na poruše $\bar{\varepsilon}$, můžeme tedy napsat $\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_{por}(\bar{\varepsilon})$. Určíme \mathbf{E}_{\parallel} , \mathbf{E}_{\perp} z referenční elektrické intenzity \mathbf{E}_1 (tak aby platilo $\mathbf{E}_{\perp} \perp \mathbf{E}_1$, $\mathbf{E}_{\parallel} \parallel \mathbf{E}_1$, $|\mathbf{E}_{\perp}| = |\mathbf{E}_{\parallel}| = 1$) a dosadíme do rovnice (3.37). Dostáváme tedy

$$\tilde{\chi} = \frac{\mathbf{E}_{\perp} \cdot (\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_{por})}{\mathbf{E}_{\parallel} \cdot (\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_{por})} = \frac{\mathbf{E}_{\perp} \cdot \mathbf{E}_{por}}{|\mathbf{E}_1| + \mathbf{E}_{\parallel} \cdot \mathbf{E}_{por}} = \frac{\mathbf{E}_{\perp} \cdot \mathbf{E}_{por}}{|\mathbf{E}_1|}, \quad (3.51)$$

kde jsme použili, že platí $\mathbf{E}_{\perp} \cdot \mathbf{E}_1 = 0$, $\mathbf{E}_{\parallel} \cdot \mathbf{E}_1 = |\mathbf{E}_1|$, protože $\mathbf{E}_{\perp} \perp \mathbf{E}_1$, $\mathbf{E}_{\parallel} \parallel \mathbf{E}_1$. V posledním kroku jsme navíc zanedbali člen $\mathbf{E}_{\parallel} \cdot \mathbf{E}_{por}$ oproti členu $|\mathbf{E}_1|$, protože předpokládáme, že poruchová část elektrické intenzity je malá oproti neporušované části.

Poruchu permitivity rozdělíme na dvě části $\bar{\varepsilon} = \bar{\varepsilon}_1 + \bar{\varepsilon}_2$, musí ale pořád platit, že poruchy $\bar{\varepsilon}_i$ jsou malé oproti neporušené části tenzoru permitivity. Nyní využijeme toho, že každá složka porušené části výsledné elektrické intenzity se rovná nějakému násobku složek $\bar{\varepsilon}\mathbf{E}_{t1}$, platí tedy $\mathbf{E}_{por}(\bar{\varepsilon}) = \mathbf{E}_{por}(\bar{\varepsilon}_1) + \mathbf{E}_{por}(\bar{\varepsilon}_2)$. Dosazením do rovnice (3.51) dostaneme

$$\tilde{\chi} = \frac{\mathbf{E}_{\perp} \cdot \mathbf{E}_{por}(\bar{\varepsilon}_1)}{|\mathbf{E}_1|} + \frac{\mathbf{E}_{\perp} \cdot \mathbf{E}_{por}(\bar{\varepsilon}_2)}{|\mathbf{E}_1|} = \tilde{\chi}(\bar{\varepsilon}_1) + \tilde{\chi}(\bar{\varepsilon}_2). \quad (3.52)$$

Celkově odtud vyplývá, že pokud rozdělíme poruchu permitivity na dva členy $\bar{\varepsilon} = \bar{\varepsilon}_1 + \bar{\varepsilon}_2$, tak každému členu $\bar{\varepsilon}_i$ odpovídá porušená část elektrické intenzity $\mathbf{E}_{por}(\bar{\varepsilon}_i)$, kterou bychom dostali, pokud bychom v materiálu uvažovali jako jedinou poruchu permitivity $\bar{\varepsilon}_i$. Porušené elektrické intenzitě $\mathbf{E}_{por}(\bar{\varepsilon}_i)$ odpovídají změna úhlu natočení polarizace $\delta\theta_i$ a změna elipticity $\delta\psi_i$ oproti referenční vlně \mathbf{E}_1 . V rovnici (3.52) jsme ukázali, že $\tilde{\chi}$ můžeme rozložit do členů odpovídajících poruchám $\bar{\varepsilon}_1$, $\bar{\varepsilon}_2$. Dále pro rozklad $\tilde{\chi} = \tilde{\chi}_1 + \tilde{\chi}_2$ na součet platí, že celková změna

úhlu natočení $\delta\theta$ a elipticity $\delta\psi$ odpovídající parametru $\tilde{\chi}$ se rovná součtu jednotlivých změn $\delta\theta_i$, $\delta\psi_i$ odpovídajících parametru $\tilde{\chi}_i$. Celkově tedy dostáváme, že celková změna úhlu natočení $\delta\theta$ a změna elipticity $\delta\psi$ odpovídající poruše $\bar{\varepsilon}$ se rovná součtu změn úhlů natočení $\delta\theta_i$ a změn elipticit $\delta\psi_i$ odpovídající poruchám $\bar{\varepsilon}_1, \bar{\varepsilon}_2$. Analogický výsledek platí i pro rozklad poruchy permitivity na více než dva členy.

3.4 Rozklad poruchové části tenzoru permitivity

V předchozí kapitole jsme ukázali, že můžeme rozdělit poruchu permitivity na několik členů $\bar{\varepsilon} = \bar{\varepsilon}_1 + \bar{\varepsilon}_2 + \dots + \bar{\varepsilon}_m$, sečtením příspěvků k úhlu natočení polarizace $\delta\theta_i$ a k elipticitě $\delta\psi_i$ od každého z nich pak dostaneme celkovou změnu úhlu natočení $\delta\theta$ a celkovou změnu elipticity $\delta\psi$ oproti vlně, kterou bychom dostali, pokud bychom v materiálu neuvažovali žádnou poruchu permitivity. V této kapitole se budeme snažit najít takové rozklady poruchy permitivity odpovídající magnetizaci v materiálu, které budou mít dobrý fyzikální význam. Budeme uvažovat magnetizaci \mathbf{M} mířící do nějakého směru a budeme hledat rozklad na magnetizace mířící do nějakých speciálních směrů (např. kolmo/rovnoběžně s rozhraním, ...), tak aby se součet jim odpovídajících poruch rovnal poruše odpovídající původní magnetizaci \mathbf{M} .

V kapitolách 3.1, 3.2 nám vyšlo, že poruchová část výsledné vlny (buď odražená vlna od prvního rozhraní, nebo prošlá vlna druhým rozhraním) nezávisí na z -ové komponentě $\bar{\varepsilon} \mathbf{E}_{t1}$. Proto bude rozklad poruchy permitivity $\bar{\varepsilon} = \bar{\varepsilon}_1 + \bar{\varepsilon}_2 + \dots + \bar{\varepsilon}_m$ fungovat (součet příspěvků k změně polarizace od jednotlivých poruch $\bar{\varepsilon}_i$ bude stejný jako změna polarizace způsobená poruchou $\bar{\varepsilon}$) i pokud se bude rozklad poruchy $\bar{\varepsilon}_1 + \bar{\varepsilon}_2 + \dots + \bar{\varepsilon}_m$ lišit od původní poruchy $\bar{\varepsilon}$ v komponentách na pozicích $\bar{\varepsilon}_{zx}, \bar{\varepsilon}_{zy}, \bar{\varepsilon}_{zz}$.

Nejprve zkusíme rozložit magnetizaci ležící v rovině dopadu. Úhel o který je otočena kolem osy y označíme jako α . Z rovnice (1.16) víme, že magnetizace ležící ve směru z dává poruchu permitivity ve tvaru

$$\bar{\varepsilon} = \begin{pmatrix} b & -ig & 0 \\ ig & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.53)$$

Poruchu pro magnetizaci otočenou vůči ose y získáme transformací $\bar{\varepsilon}$ pomocí matice rotace. Označíme si $s = \sin \alpha$, $c = \cos \alpha$. Poruchu permitivity od magnetizace otočené kolem osy y o úhel α označíme $\bar{\varepsilon}_\alpha$.

$$\bar{\varepsilon}_\alpha = \begin{pmatrix} c & 0 & s \\ 0 & 1 & 0 \\ -s & 0 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b & -ig & 0 \\ ig & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & 0 & -s \\ 0 & 1 & 0 \\ s & 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c^2 b & -cig & -scb \\ cig & b & -sig \\ -scb & sig & s^2 b \end{pmatrix} \quad (3.54)$$

Zkusíme magnetizaci rozložit do složek ve směru x a ve směru z , máme $\mathbf{M} = M \cos \alpha \mathbf{x} + M \sin \alpha \mathbf{z}$, kde M je velikost magnetizace. Porucha permitivity odpovídající složce $M \sin \alpha \mathbf{z}$ má tvar jako (3.53). Avšak g zde je přenásobené faktorem $\cos \alpha$, protože g je magnetooptický efekt prvního řádu a je úměrný první

mocnině velikosti magnetizace a b je přenásobené faktorem $\cos^2 \alpha$, protože b je magnetooptický efekt druhého řádu a je tedy úměrné druhé mocnině velikosti magnetizace. Porucha permitivity odpovídající složce $M \cos \alpha \mathbf{x}$ je ve tvaru $\bar{\varepsilon}_{\pi/2}$, opět zde ale musíme g a b přenásobit příslušnou mocninou $\sin \alpha$. Dostáváme tedy poruchy permitivity odpovídající průmětu magnetizace do směru z a do směru x .

$$\bar{\varepsilon}_z = \begin{pmatrix} c^2 b & -c ig & 0 \\ c ig & c^2 b & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{\varepsilon}_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & s^2 b & -s ig \\ 0 & s ig & s^2 b \end{pmatrix} \quad (3.55)$$

Jejich sečtením dostaneme

$$\bar{\varepsilon}_x + \bar{\varepsilon}_z = \begin{pmatrix} c^2 b & -c ig & 0 \\ c ig & b & -s ig \\ 0 & s ig & s^2 b \end{pmatrix}. \quad (3.56)$$

Vidíme, že součet $\bar{\varepsilon}_x + \bar{\varepsilon}_z$ se liší od $\bar{\varepsilon}_\alpha$ pouze členy na pozicích $\bar{\varepsilon}_{xz}$, $\bar{\varepsilon}_{zx}$.

Pokud budeme předpokládat, že z -ová složka \mathbf{E}_{t1} je nulová. Potom x -ové a y -ové složky vektorů $\bar{\varepsilon}_\alpha \mathbf{E}_{t1}$, $(\bar{\varepsilon}_x + \bar{\varepsilon}_z) \mathbf{E}_{t1}$ budou stejné. To, že jejich z -ové složky se liší nám nevadí, protože jak jsme výše uvedli, tak na z -ové složce $\bar{\varepsilon} \mathbf{E}_{t1}$ nezáleží. Toto nastane při kolmém dopadu, v takovém případě tedy můžeme rozložit magnetizaci na složku kolmou k rozhraní a na složku rovnoběžnou k rozhraní. Součet jejich magnetooptických odezev pak dá magnetooptickou odezvu původní magnetizace.

Zůstaneme u případě kdy leží magnetizace v rovině dopadu. Poruchu $\bar{\varepsilon}_\alpha$ se nám zatím podařilo rozložit do dvou členů $\bar{\varepsilon}_x + \bar{\varepsilon}_z$, ale tento rozklad se neshoduje s celkovou poruchou $\bar{\varepsilon}_\alpha$ komponentami na pozicích $\bar{\varepsilon}_{xz}$, $\bar{\varepsilon}_{zx}$. Zkusíme do rozkladu přidat poruchy odpovídající magnetizacím mířícím do diagonálních směrů mezi osami x , z (svírají s osou x nebo z úhel $\pi/4$). Magnetizace si označíme podle toho do jakého kvadrantu míří, např. \mathbf{M}_{+-} míří do kladného směru x a záporného směru z , viz. Obrázek 3.5.

Nejdříve vezmeme, že všechny magnetizace mají stejnou velikost M_d , určíme jaké jim odpovídají poruchy permitivity ze vztahu (3.54). Dostaneme

$$\begin{aligned} \bar{\varepsilon}_{-+} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}b & -\frac{\sqrt{2}}{2}ig & \frac{1}{2}b \\ \frac{\sqrt{2}}{2}ig & b & \frac{\sqrt{2}}{2}ig \\ \frac{1}{2}b & -\frac{\sqrt{2}}{2}ig & \frac{1}{2}b \end{pmatrix} & \bar{\varepsilon}_{++} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}b & -\frac{\sqrt{2}}{2}ig & -\frac{1}{2}b \\ \frac{\sqrt{2}}{2}ig & b & -\frac{\sqrt{2}}{2}ig \\ -\frac{1}{2}b & \frac{\sqrt{2}}{2}ig & \frac{1}{2}b \end{pmatrix} \\ \bar{\varepsilon}_{--} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}b & \frac{\sqrt{2}}{2}ig & -\frac{1}{2}b \\ -\frac{\sqrt{2}}{2}ig & b & \frac{\sqrt{2}}{2}ig \\ -\frac{1}{2}b & -\frac{\sqrt{2}}{2}ig & \frac{1}{2}b \end{pmatrix} & \bar{\varepsilon}_{+-} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}b & \frac{\sqrt{2}}{2}ig & \frac{1}{2}b \\ -\frac{\sqrt{2}}{2}ig & b & -\frac{\sqrt{2}}{2}ig \\ \frac{1}{2}b & \frac{\sqrt{2}}{2}ig & \frac{1}{2}b \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.57)$$

Můžeme si všimnout, že poruchy odpovídající magnetizacím do opačných směrů mají stejné ty členy které jsou úměrné b a ty členy které jsou úměrné g mají s opačným znaménkem (to je taky důsledek toho, že g je magnetooptický efekt prvního řádu a toho, že b je magnetooptický efekt druhého řádu). Sečtením těchto poruch odpovídajících opačným magnetizacím tedy se tedy členy úměrné g vykrátí a zůstane nám

$$\bar{\epsilon}_{++} + \bar{\epsilon}_{--} = \begin{pmatrix} b & 0 & -b \\ 0 & 2b & 0 \\ -b & 0 & b \end{pmatrix}, \quad \bar{\epsilon}_{+-} + \bar{\epsilon}_{-+} = \begin{pmatrix} b & 0 & b \\ 0 & 2b & 0 \\ b & 0 & b \end{pmatrix}. \quad (3.58)$$

Pokud teď od sebe $\bar{\epsilon}_{++} + \bar{\epsilon}_{--}$ a $\bar{\epsilon}_{+-} + \bar{\epsilon}_{-+}$ odečteme, tak dostaneme poruchu, která bude mít nenulové komponenty pouze na pozicích $\bar{\epsilon}_{xz}$, $\bar{\epsilon}_{zx}$. Tyto nenulové komponenty jsou navíc úměrné b .

$$\bar{\epsilon}_{++} + \bar{\epsilon}_{--} - \bar{\epsilon}_{+-} - \bar{\epsilon}_{-+} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2b \\ 0 & 0 & 0 \\ -2b & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.59)$$

Takováto porucha je přesně to (až na velikost) co nám chybělo do rozkladu poruchy $\bar{\epsilon}_\alpha$. Porovnáním (3.54), (3.59) aby se komponenty na pozicích $\bar{\epsilon}_{xz}$, $\bar{\epsilon}_{zx}$ rozkladu poruchy a celkové poruchy rovnaly a díky tomu, že b je magnetooptický efekt druhého řádu dostaneme podmínku pro poměr velikostí M_d/M . Musí platit $\sin \alpha \cos \alpha M^2 = 2M_d^2$. Velikost diagonálních magnetizací v rozkladu je tedy

$$M_d = \frac{1}{2} \sqrt{|\sin \alpha \cos \alpha|} M. \quad (3.60)$$

Pokud je hodnota $\sin \alpha \cos \alpha$ záporná (pokud magnetizace \mathbf{M} míří do úhlů z intervalu $(\pi/2, \pi) \cup (3\pi/2, 2\pi)$), tak bychom museli poruchy způsobené diagonálními magnetizacemi od sebe odečíst naopak, měli bychom tedy v rovnici (3.59) opačné znaménka.

Celkově tedy dostáváme, že poruchu permitivity od magnetizace otočenou o úhel α vůči ose z můžeme, pokud je α z intervalu $(0, \pi/2) \cup (\pi, 3\pi/2)$, rozložit jako

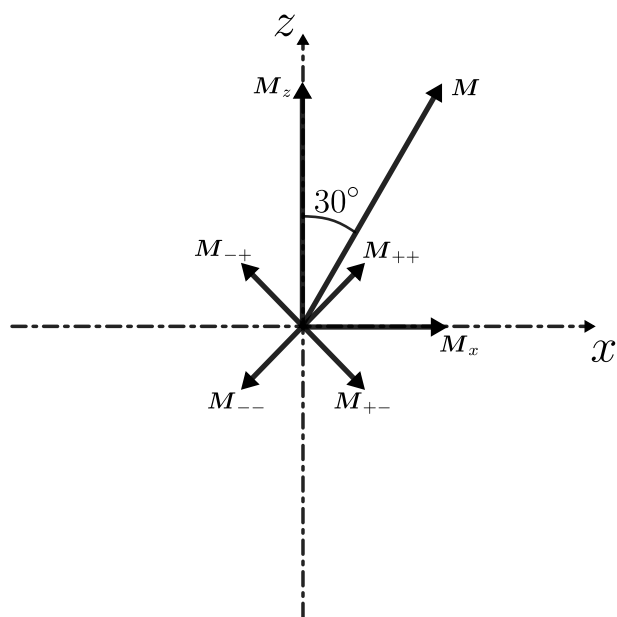
$$\bar{\epsilon}_\alpha = \bar{\epsilon}_x + \bar{\epsilon}_z + \bar{\epsilon}_{++} + \bar{\epsilon}_{--} - \bar{\epsilon}_{+-} - \bar{\epsilon}_{-+}, \quad (3.61)$$

pokud je α z intervalu $(\pi/2, \pi) \cup (3\pi/2, 2\pi)$, tak ji můžeme rozložit jako

$$\bar{\epsilon}_\alpha = \bar{\epsilon}_x + \bar{\epsilon}_z - \bar{\epsilon}_{++} - \bar{\epsilon}_{--} + \bar{\epsilon}_{+-} + \bar{\epsilon}_{-+}. \quad (3.62)$$

Na Obrázku 3.5 jsme pro ilustraci znázornili magnetizace odpovídající rozkladu poruchy $\bar{\epsilon}_\alpha$ pro úhel $\alpha = 30^\circ$, pro tento úhel z rovnice (3.60) dostaneme, že velikost diagonálních magnetizací je přibližně $M_d \approx 0,33 M$.

Pokud leží \mathbf{M} v rovině vzorku, tak je možné poruchu permitivity od magnetizace rozložit do podélné a příčné složky a do diagonálních složek analogicky, jako když leží magnetizace v rovině dopadu.



Obrázek 3.5: Znázornění rozkladu magnetizací, kterým odpovídají poruchy v rovnicích (3.61), (3.62), pro magnetizaci \mathbf{M} otočenou o úhel $\alpha = 30^\circ$ vůči ose z . Velikost diagonálních magnetizací je přibližně $M_d \approx 0,33 M$

4. Diskuze

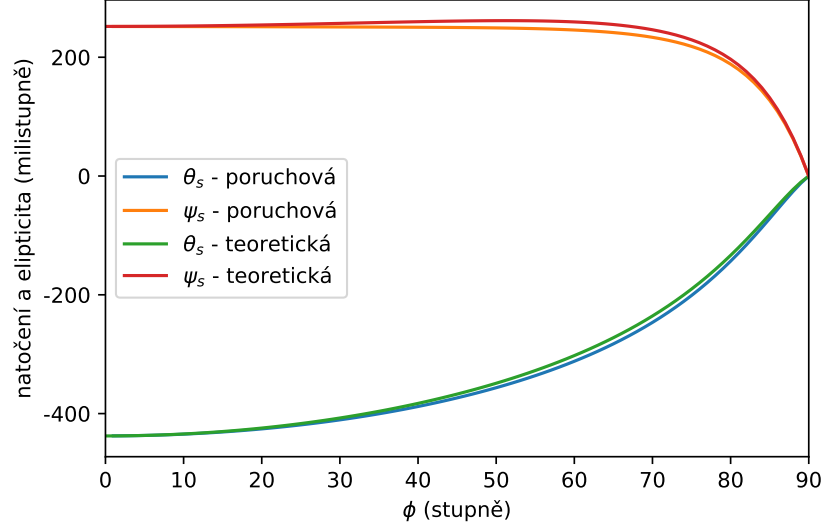
V kapitole 2 jsme pro speciální případ kolmého dopadu zlinearizovali vlnovou rovnici pomocí poruchové metody, kde jsme uvažovali, že tenzor permitivity materiálu je tvořen neporuchovou částí (brali jsme pouze homogenní, izotropní materiál) a oproti ní malou poruchovou částí. Dosadili jsme do vlnové rovnice a zanedbali poruchy vyššího řádu než prvního a zbývající neznámé parametry jsme určili z hraničních podmínek. Tím jsme dostali poruchu elektrické intenzity. U průchodu měla porucha dva členy: povrchový člen, který se nabyde na rozhraní a dále je konstantní a objemový člen, který závisí na vzdálenosti, kterou světlo urazilo v prostředí s poruchou permitivity. U odrazu měla porucha pouze povrchový člen. Tato metoda se ukázala jako užitečná, v kapitolách 2.2.1, 2.2.2 jsme ji aplikovali na jednoduchý případ kolmého dopadu a pro Faradayův a polární Kerrův jev jsme pomocí ní dostali výsledky, které se shodují se známými teoretickými vztahy.

Poruchová metoda pro průchodí vlnu má ale omezení, vyplývající z toho, že jsme brali, že se porušená část prošlé vlny šíří se stejným vlnovým vektorem jako neporušená část. Kvůli tohoto omezení je vypočítaná porucha elektrické intenzity prošlé vlny platná pouze pro malé z . Jak malé musí být z teď řádově určíme. Aby výpočet fungoval, tak musí být chyba fáze $\Delta\varphi$, kterou díky našeho předpokladu porušená vlna nabrala, velmi malá, tedy $\Delta\varphi \ll 1$. Označíme \bar{k} vlnové číslo porušené vlny, jeho velikost je řádově rovna $\bar{k} = k_0\sqrt{\varepsilon_r + |\bar{\varepsilon}|}$, kde $|\bar{\varepsilon}|$ jsme označili něco jako velikost poruchy. Taylorovým rozvojem dostaneme $\bar{k} \approx k_0(n + |\bar{\varepsilon}|/2n)$. Chyba fáze kterou jsme naším předpokladem nabrali tedy je $\Delta\varphi \approx \pi z|\bar{\varepsilon}|/n\lambda_0$. Vzdálenost z pro kterou je použití poruchové metody pro prošlou vlnu oprávněné je tedy $z \ll n\lambda_0/|\bar{\varepsilon}|$.

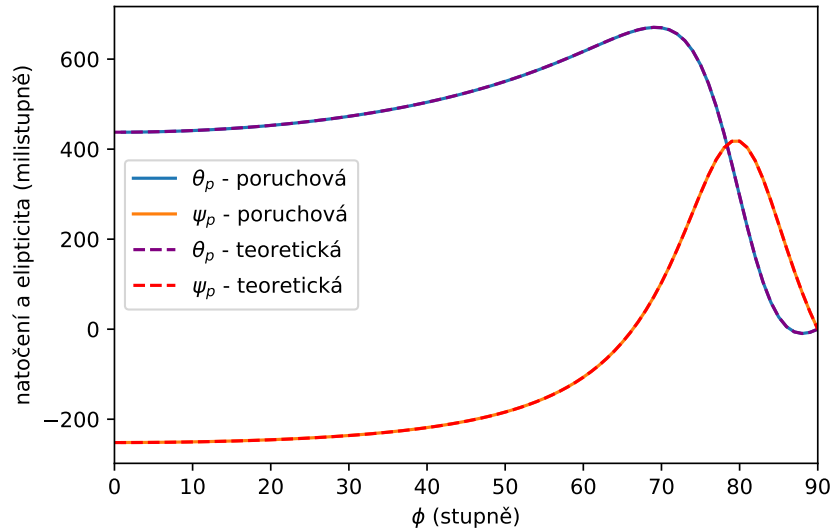
Poruchovou metodu jsme dále použili na dva případy: 1) Dopad pod libovolným úhlem na rozhraní vzduchu a materiálu s porušenou permitivitou $\varepsilon_r + \bar{\varepsilon}$, zde jsme brali "nekonečný" vzorek, neřešili jsme tedy zpětné odrazy, ani jak se prošlá vlna dostane ven z materiálu. 2) Dopad prošlé vlny z předchozího případu na rozhraní materiálu s porušenou permitivitou $\varepsilon_r + \bar{\varepsilon}$ a toho samého materiálu, ale s neporušenou permitivitou ε_r , viz Obrázek 3.2. Tento druhý případ je sice experimentálně těžko zkonstruovatelný, ale je jednoduše řešitelný. Pro kolmý dopad navíc takto dostaneme v podstatě (až na přenásobení Fresnelovým koeficientem) elektrickou intenzitu, kterou by mělo světlo, po průchodu ven z vzorku. V přiblížení prvního řádu poruchy nám vyšlo, že výsledné elektrické intenzity závisí na poruše $\bar{\varepsilon}$ pouze prostřednictvím složek vektoru $\bar{\varepsilon}\mathbf{E}_{t1}$, kde \mathbf{E}_{t1} je neporušená elektrická intenzita po průchodu prvním rozhraním. Zároveň nezávisí porucha odražené vlny z prvního případu a porucha prošlé vlny z druhého případu na z -ové složce $\bar{\varepsilon}\mathbf{E}_{t1}$. Tento výsledek byl pro nás dále důležitý při rozkladu poruchy tenzoru permitivity.

Ze spočítané poruchy elektrické intenzity $\mathbf{E}_{r,2}$ z rovnice (3.18) můžeme pro nějaké speciální hodnoty spočítat jak se stočí polarizace a jak se změní elipticita a výsledek porovnat s teoretickými hodnotami. To jsme udělali pro polární Kerrův jev, pro odraz na železe pro s a p polarizaci. Výsledek jsme porovnali s hodnotami spočtenými pomocí rovnic (1.24), (1.25). Počítali jsme s hodnotami $\varepsilon_r^{(\text{Fe})} = -0,8845 - i17,938$, $g^{(\text{Fe})} = -0,08988 + i0,06676$ [3]. Spočtené a teoretické

závislosti natočení a elipticity na úhlu dopadu jsou na Obrázcích 4.1, 4.2. Vidíme, že hodnoty spočítané pomocí poruchové metody jsou téměř stejné jako hodnoty spočítané pomocí teoretických vztahů (1.24), (1.25).



Obrázek 4.1: Porovnání teoretických a poruchovou metodou vypočítaných závislostí natočení a elipticity na úhlu dopadu pro dopadající s polarizaci a hodnoty $\varepsilon_r^{(\text{Fe})} = -0,8845 - i17,938$, $g^{(\text{Fe})} = -0,08988 + i0,06676$.



Obrázek 4.2: Porovnání teoretických a poruchovou metodou vypočítaných závislostí natočení a elipticity na úhlu dopadu pro dopadající p polarizaci a hodnoty $\varepsilon_r^{(\text{Fe})} = -0,8845 - i17,938$, $g^{(\text{Fe})} = -0,08988 + i0,06676$.

V kapitole 3.3 jsme ukázali, že poruchu tenzoru permitivity $\bar{\varepsilon}$ můžeme rozdělit na m libovolných, ale pořád malých, členů $\bar{\varepsilon} = \bar{\varepsilon}_1 + \bar{\varepsilon}_2 + \dots + \bar{\varepsilon}_m$. Každý člen $\bar{\varepsilon}_i$ nějak ovlivní polarizaci výsledné vlny (stočí polarizaci o úhel $\delta\theta_i$ a změní elipticitu

o úhel $\delta\psi_i$), oproti polarizaci světla které bychom dostali, pokud by světlo prošlo nebo se odrazilo materiálem, u nějž bychom uvažovali pouze neporušenou část tenzoru permitivity. Celková změna natočení polarizace $\delta\theta$ a změna elipticity $\delta\psi$ se pak rovná součtu jednotlivých příspěvků $\delta\theta_i$, $\delta\psi_i$.

V sekci 3.3.1 jsme taky ukázali, že výpočet změny polarizace vlny, vůči nějaké referenční vlně, závisí i na elipticitě referenční vlny (viz. rovnice (3.45)). Velmi podobnou závislost na elipticitě referenční vlny jsme dostali pro experimentální metodu měření změn natočení polarizace, která je na Obrázku 3.4. Je tedy vidět, že pro experimentální uspořádání jako na Obrázku 3.4 závisí změna natočení polarizace spočítaná pomocí vztahu (3.47) taky na elipticitě referenční vlny (jako v rovnici (3.50)). Pokud je však elipticita referenční vlny malá, tak toto nemá vliv.

V další kapitole jsme se zabývali tím, jak rozložit poruchu permitivity na jednotlivé členy. Víme, že rozklad může být v podstatě libovolný, chceme ale aby jednotlivé členy rozkladu poruchy měly nějaký fyzikální význam. Snažili jsme se aby jednotlivé členy odpovídaly magnetizaci mířící do nějakého směru. Nutno podotknout že jsme předpokládali, že porucha permitivity od magnetizace v nějakém daném směru nezávisí na tom, jak je vůči ní orientován materiál. Toto však obecně neplatí ani pro opticky izotropní materiály.

Také víme, že výsledné elektrické intenzity nezávisí na z -ové složce $\bar{\mathbf{E}}_{t1}$, proto nám nevádí, pokud se komponenty tenzoru poruchy $\bar{\epsilon}_{zx}$, $\bar{\epsilon}_{zy}$, $\bar{\epsilon}_{zz}$ nebudou shodovat s příslušnými komponentami rozkladu tenzoru poruchy. Jako první jsme vyzkoušeli rozložit poruchu odpovídající magnetizaci ležící v rovině dopadu, natočenou o úhel θ vůči ose z . Když jsme magnetizaci rozložili do složek ve směrech x , z a pro ně vzali příslušné tenzory permitivity, tak se takový rozklad lišil od původní poruchy pouze komponentami $\bar{\epsilon}_{xz}$, $\bar{\epsilon}_{zx}$, jak můžeme vidět v rovnicích (3.54), (3.56). Platí, že pokud z -ová složka \mathbf{E}_{t1} je nulová, tak relevantní složky $\bar{\mathbf{E}}_{t1}$ dává tento rozklad stejné jako původní porucha. Odtud vyplývá, že pokud $E_{t1z} = 0$, tak můžeme rozložit magnetizaci na složku kolmou k rozhraní a rovnoběžnou s rozhraním. Podmínka $E_{t1z} = 0$ platí pouze pro kolmý dopad, v praxi však má hodně materiálů relativní permitivitu ϵ_r velkou a tedy i pokud světlo dopadá na materiál pod malým nenulovým úhlem (jeho velikost závisí na relativní permitivitě daného materiálu), tak je z -ová složka \mathbf{E}_{t1} malá a můžeme použít rozklad magnetizace na kolmou a rovnoběžnou složku.

Dále se nám povedlo ukázat, že poruchu permitivity odpovídající magnetizaci ležící v rovině dopadu můžeme rozložit na poruchy odpovídající x -ové a z -ové složce magnetizace, pokud k nim ještě přičteme, popřípadě odečteme, poruchy odpovídající magnetizacím mířícím do diagonálních směrů (viz. Obrázek 3.5 a rovnice (3.61), (3.62)). Smysl takového rozkladu magnetizace sice na první pohled není zřejmý, nicméně může v budoucnu najít uplatnění. Analogicky pokud magnetizace leží v rovině vzorku, tak se porucha permitivity dá rozložit do příspěvků od složek magnetizace ve směru x a y a na diagonální členy. Na podobném výsledku, i když odůvodněném jinými argumenty, je založena tzv. osmisměrná metoda pro měření magnetooptického tenzoru permitivity [4]. Tato metoda ale předpokládá s nebo p polarizaci vstupní vlny, náš výpočet je univerzálnější a ukazujeme mnohem obecnější výsledek.

Závěr

Pomocí poruchového řešení vlnové rovnice se nám podařilo spočítat elektrické intenzity vlny, která buď prošla, nebo se odrazila od materiálu, ve kterém magnetizace způsobila poruchu tenzoru permitivity $\bar{\epsilon}$. Výsledné poruchové části elektrických intenzit jsme dostali lineární v poruše $\bar{\epsilon}$. Toho jsme využili k ukázání, že pokud poruchu rozložíme na součet $\bar{\epsilon} = \bar{\epsilon}_1 + \bar{\epsilon}_2 + \dots + \bar{\epsilon}_m$, tak se celková magnetooptická odezva k polarizaci od poruchy $\bar{\epsilon}$ rovná součtu odezev k polarizaci od jednotlivých členů rozkladu $\bar{\epsilon}$. Stačí nám tedy najít nějaký vhodný rozklad poruchy $\bar{\epsilon}$.

Zjistili jsme, že při kolmém dopadu světla na materiál, můžeme magnetizaci rozdělit na složku kolmou a rovnoběžnou s povrchem materiálu. Celková magnetooptická odezva se pak rovná součtu odezev od kolmé a rovnoběžné složky magnetizace. Rozklad magnetizace do složek x , y , z souřadného systému vzpjatého s rovinou dopadu a povrchem materiálu funguje taky pro nekolmý dopad, ale jen pokud bereme v potaz pouze magnetooptické efekty prvního řádu.

Pro nekolmý dopad i s magnetooptickými efekty druhého řádu byla situace složitější. Ukázali jsme, že poruchu permitivity odpovídající magnetizaci ležící v rovině dopadu můžeme rozložit opět na složku kolmou a rovnoběžnou s povrchem materiálu, pokud k nim přičteme, popřípadě odečteme, ještě poruchy odpovídající magnetizacím mířícím diagonálně (viz. Obrázek 3.5).

V kapitole 3.3.1 jsme při odvozování výpočtu změny natočení polarizace vůči nějaké referenční vlně dostali, že musíme vzít v potaz i elipticitu referenční vlny. Ukázali jsme, že to samé platí (pokud není elipticita referenční vlny malá) pro měření natočení polarizace pomocí experimentálního uspořádání na Obrázku 3.4, při použití vzorce (3.47).

Seznam použité literatury

- [1] A.K. Zvezdin and V.A. Kotov. *Modern Magnetooptics and Magneto-optical Materials*. Condensed Matter Physics. CRC Press, 1997.
- [2] Jozef Kimák. *Optická spektroskopie antiferomagnetů*. Diplomová práce. MFF UK, 2019.
- [3] Š. Višňovský. *Optics in Magnetic Multilayers and Nanostructures*. ISSN. CRC Press, 2006.
- [4] K. Postava, D. Hrabovský, J. Pištora, A. R. Fert, Š. Višňovský, and T. Yamaguchi. Anisotropy of quadratic magneto-optic effects in reflection. *Journal of Applied Physics*, 91(10):7293–7295, 05 2002.