Posudek vedoucího diplomové práce

Název: Analysis of variations of stochastic integrals
Autor: Bc. Matěj Svoboda

Tématem předložené práce je studium variace stochastického integrálu v případě, že integrátor spadá do třídy tzv. frakcionálních procesů.

Základním příkladem frakcionálního procesu je Wienerův proces, který nalezne uplatnění např. jako matematický model náhodné, nesystematické chyby v různých fyzikálních systémech. V jistých situacích ale pozorované fluktuace vykazují tzv. dlouhou pamět a v takových případech je nutné uvažovat i jiné modely - nabízí se například frakcionální Brownův pohyb W^H nebo Rosenblattův proces R^H.

Matěj Svoboda se ve své práci věnuje $1/H$-variaci stochastických integrálů právě vůči těmto dvěma procesům. Konkrétně je známo (Guerra, Nualart, 2005), že pro frakcionální Brownův pohyb W^H s Hurstovým parametrem $H \in (1/2, 1)$, $u \in L^{\frac{1}{H}}([0,T]; \mathbb{D}^{1,\frac{1}{H}})$ a posloupnost ekvidistantních dělení $\{0 = t_0^n < \ldots < t_n^n = T\}$ intervalu $[0,T]$, platí, že

$$\sum_{i=0}^{n} \left| \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} u_s \delta W_s^H \right|^{\frac{1}{H}} \xrightarrow[n\to\infty]{L^1(\Omega)} \mathbb{E}|W_1^H|^{\frac{1}{H}} \int_0^T |u_s|^{\frac{1}{H}} \,\mathrm{d}\, s, \tag{1}$$

kde stochastický integrál na levé straně je definován ve Skorokhodově smyslu. Matěj Svoboda ve své práci dokazuje, že obdobný výsledek platí i pro stochastický integrál vzhledem k Rosenblattově procesu R^H, tj. dokazuje, že pro $u \in L^{\frac{1}{H}}([0,T]; \mathbb{D}^{2,\frac{1}{H}})$ platí

$$\sum_{i=0}^{n} \left| \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} u_s \delta R_s^H \right|^{\frac{1}{H}} \xrightarrow[n\to\infty]{L^1(\Omega)} \mathbb{E}|R_1^H|^{\frac{1}{H}} \int_0^T |u_s|^{\frac{1}{H}} \,\mathrm{d}\, s.$$

Tento výsledek je zcela nový a užitečný a jeho důkaz, byť myšlenkově podobný jako důkaz tvrzení (1), vyžaduje velmi netriviální a technicky náročné modifikace, které Matěj Svoboda provedl velmi samostatně a pečlivě a které následně zdařile sepsal do, dle mého názoru, velmi čitelného textu.

Domnívám se tedy, že předložená práce je vynikající a že jistě splňuje požadavky kladené na diplomové práce a jako takovou ji doporučuji uznat.

27. května 2024

Petr Čoupek
KPMS MFF UK
coupek@karlin.mff.cuni.cz