



**MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ
FAKULTA**
Univerzita Karlova

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Bc. Štěpán Pilař

**Viskoelastická deformace planetárních
těles**

Katedra geofyziky

Vedoucí diplomové práce: Prof. RNDr. Ondřej Čadek, CSc.

Studijní program: Geofyzika a fyzika planet

Studijní obor: Geofyzika a fyzika planet

Praha 2024

Prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci vypracoval(a) samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů. Tato práce nebyla využita k získání jiného nebo stejného titulu.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V dne

Podpis autora

Moc děkuji vedoucímu práce Prof. RNDr. Ondřeji Čadkovi, CSc. za množství času věnované naší spolupráci, za jeho trpělivost, cenné rady a komentáře při tvorbě této práce. Děkuji celému svému okolí za podporu při studiu a přemluvení k jeho dokončení. A děkuji sobě, že jsem se k dokončení nechal přemluvit.

Název práce: Viskoelastická deformace planetárních těles

Autor: Bc. Štěpán Pilař

Katedra: Katedra geofyziky

Vedoucí diplomové práce: Prof. RNDr. Ondřej Čadek, CSc., Katedra geofyziky

Abstrakt: Zatížením povrchu planety dochází k jeho deformaci. Časový průběh této deformace je ovlivněn vnitřní strukturou planety. V této práci jsme pomocí jednorozměrného numerického modelu maxwellovské viskoelastické deformace kulové slupky otestovali vliv několika vybraných parametrů litosféry a pláště na konkrétním případě zatížení povrchu Marsu ledovou čepičkou na severním pólu. Ledová vrstva není starší než 10 milionů let a změřený průhyb povrchu pod ní je asi 100 m. Jako testované parametry modelu jsme vybrali tloušťku elastické litosféry a viskozí profil litosféry a pláště, ostatní parametry podle výsledků mise InSight. Viskozí profil jsme volili buď po částech konstantní, nebo definovaný Arrheniovským vztahem. Veliký vliv na velikost průhybu povrchu má tloušťka elastické litosféry. K realizaci deformace pozorované na Marsu naše modely s po částech konstantní viskozitou vyžadují tloušťku litosféry $T_e = 200 - 300$ km, modely s Arrheniovským profilem vyžadují $T_e \geq 300$ km.

Klíčová slova: elastická litosféra, deformace, InSight, numerický model, led

Title: Viscoelastic deformation of planetary bodies

Author: Bc. Štěpán Pilař

Department: Department of geophysics

Supervisor: Prof. RNDr. Ondřej Čadek, CSc., Department of Geophysics

Abstract: Loading a planet's surface causes it to deform. The evolution of this deformation is influenced by the internal structure of the planet. In this thesis we use a one-dimensional numerical model of Maxwell viscoelastic deformation of a spherical shell to test the effect of a few selected parameters of lithosphere and mantle on the specific case of loading of the Martian surface by the North Polar cap. The ice sheet is less than 10 million years old and the measured surface deformation under it is about 100 m. We chose elastic lithosphere thickness and viscous profile of the lithosphere and mantle as the model parameters to be tested, the other parameters according to the results of InSight mission. We made the viscosity profile either piecewise constant or defined by an Arrhenius formula. The magnitude of deformation is mostly influenced by the elastic lithosphere thickness. To realize the deformation observed on Mars, our models with piecewise constant viscosity require the lithospheric thickness to be $T_e = 200 - 300$ km, Arrhenius formula based models require $T_e \geq 300$ km.

Keywords: elastic lithosphere, deformation, InSight, numerical model, ice

Obsah

Úvod	2
1 Mars a jeho vnitřní struktura	4
2 Metoda	8
2.1 Zákony zachování v integrálním tvaru	8
2.2 Aproximace základních rovnic Maxwellovské viskoelastické deformace	9
2.3 Hraníční podmínky	9
2.4 Selfgravitace	10
2.5 Přechod do spektrální oblasti	10
2.6 Numerické řešení	13
3 Výsledky	16
3.1 Dvouvrstvé modely s po částech konstantní viskozitou	19
3.2 Arrheniovské modely	24
Diskuze a závěr	28
Seznam použité literatury	30
Seznam obrázků	35

Úvod

Odedávna probíhá studium všech známých planet Sluneční soustavy. Ačkoliv astronomickými měřeními lze určit nejruznější vnější charakteristiky zkoumaných těles, pro konkrétnější poznatky o jejich vnitřní struktuře, případně vnitřní dynamice, je potřeba bližšího pozorování z orbity, či přímo z povrchu. S každou další misí tak přibývají nové odpovědi na otázky ohledně vzniku a vývoje Sluneční soustavy i jednotlivých planet a jejich měsíců.

Každá planeta vznikla v jiné části rané Sluneční soustavy, má také proto trochu jiné složení, přinejmenším co se rozložení jednotlivých prvků týče. Merkur zatím zaznamenal pouze dvě úplné mise (Mariner 10 a MESSENGER), které jeho povrch a atmosféru zkoumaly při průletech v blízkosti planety. Van Hoolst a kol. (2007) z dat sondy Mariner 10 odvodili nezvykle velký poměr velikosti kovového jádra ku velikosti planety ($\sim 3/4$). Knibbe a kol. (2021) na základě dat z mise MESSENGER udává tento poměr téměř 84%. Podrobnější studium umožní až orbitální mise BepiColombo koncem roku 2025.

Venuše byla cílem mnohem většího počtu misí. Přesto že je velikostí, průměrnou hustotou i vzdáleností od Slunce velice podobná Zemi, velice se od ní liší podmínkami na povrchu i pod ním. Teploty na povrchu dosahují až 500°C , (Moroz, 1981) v důsledku skleníkového efektu způsobeného vysokým podílem CO_2 v atmosféře ($\approx 96,5\%$) a menší vzdálenosti od Slunce. Nehostinné prostředí na povrchu tak v současné době znemožňuje bližší výzkum za pomoci roverů. Podle Aitta (2012) z pozorované absence magnetického pole vyplývá, že struktura jádra Venuše je jiná než struktura zemského jádra. V důsledku výrazně jiného charakteru konvekce v plášti také na Venuši nepozorujeme deskovou tektoniku jako na Zemi.

V rozvoji znalostí o nitru Země sehrála významnou roli seismologie. Seismologie umožnila objev a popis zemské kůry, objev jádra a oblasti fázových přechodů v zemském plášti. Určení profilu rychlosti seismických vln spolu s výzkumem vlastních kmitů v 80. letech pomohly určit hustotní profil Země (Dziewonski a Anderson, 1981). V neposlední řadě rozvoj seismické tomografie (Nolet, 1987) na přelomu století umožnil určit trojrozměrnou strukturu zemského pláště a pomohl s výzkumem dynamiky litosferických desek a jejich zanořováním. Díky objevu jádra a určení jeho vlastností se mohla rozvinout teorie geodynamika, které vytváří magnetické pole Země. S rozvojem astronautiky a prvními lety do vesmíru přišlo i umístění měřících přístrojů na orbitu, díky kterým se více rozvinuly metody zkoumání projevů vnitřní dynamiky planety na jejím povrchu.

Po Zemi je nejvíce prozkoumanou planetou ve Sluneční soustavě Mars. Určení jeho struktury je však v mnohém jiné, než na Zemi. Hlavní úlohou roverů na povrchu Marsu bylo získat informace o jeho povrchu, méně však o vnitřní struktuře. Určení vnitřní struktury se tedy dlouho spoléhalo spíše na gravitační, magnetická a další data ze sond umístěných na orbitě. Dřívější studie na základě gravitačních dat a topografie usuzovaly globální tloušťku kůry $57 \pm 24 \text{ km}$ (Zuber a kol. (2000), Neumann a kol. (2004)), litosféru o tloušťce okolo 100 km (Belleguic a kol. (2005), McGovern a kol. (2004)) a jádro o velikosti $1520 - 1840 \text{ km}$ (Yoder a kol. (2003), Helffrich (2017)). Novější pozorování však některé tyto údaje rozporují. Měření

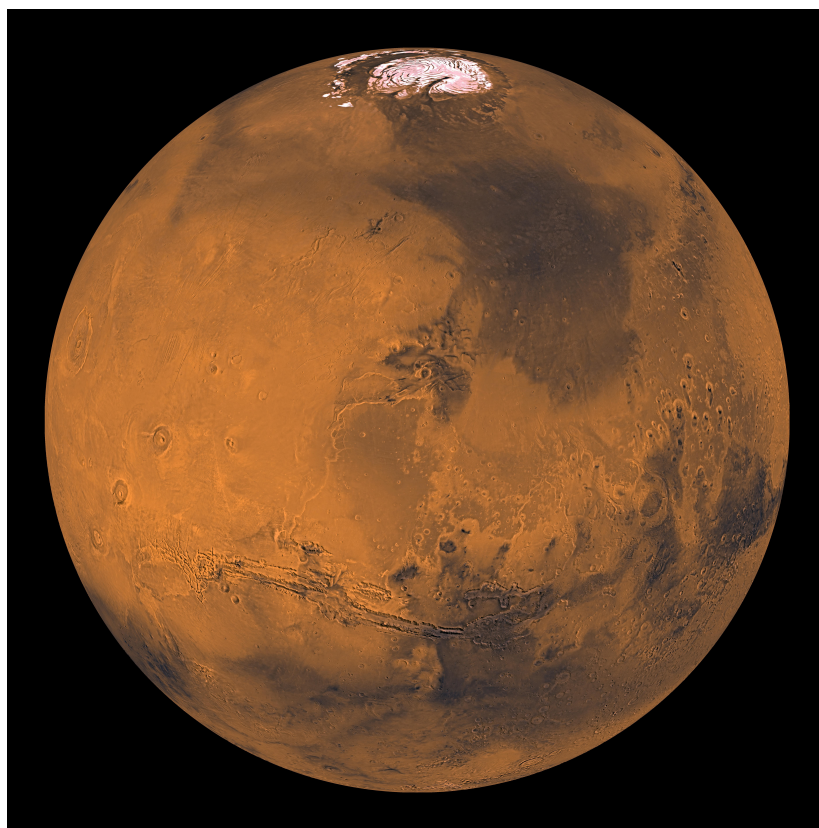
pomocí senzoru SHARAD (Shallow Radar) ukazují, že deformace povrchu pod ledovou čepičkou na severním pólu Marsu neodpovídá navrženým parametrům litosféry a pláště. S předpokládaným stářím ledovce okolo 10 milionů let bychom s litosférou tloušťky 100 km měli pozorovat několikanásobně větší deformaci povrchu než naměřených zhruba 100 m (Phillips a kol., 2008).

Pohled do nitra Marsu výrazně ovlivnila mise InSight (*Interior Exploration using Seismic Investigation, Geodesy and Heat Transport*) z programu Discovery. Ta na povrch Marsu přinesla i seismogram SEIS (*Seismic Experiment for Interior Structure*), pomocí kterého byly zaznamenány první otřesy Marsu. Těmito záznamy se možnosti výzkumu nitra planety rozšířily o metody ze seismologie. Jedním z hlavních zjištění na základě dat z InSightu bylo výrazně větší jádro, než se předpokládalo. Nově se jeho poloměr odhaduje na 1830 ± 40 km (Stähler a kol., 2021).

V této práci se za použití vlastního vyvinutého programu na výpočet viskoelastické deformace planety zaměříme na vliv vnitřní struktury Marsu na deformaci povrchu pod severní polární ledovou čepičkou. V 1. kapitole se podíváme na znalosti o Marsu před misí InSight a příspěvek této mise do poznání Rudé planety. V 2. kapitole uvedeme matematický popis řešeného fyzikálního problému viskoelastické deformace kulové slupky a návrh numerického řešení problému. Ve 3. kapitole se věnujeme konkrétním výpočtům, výsledkům a jejich porovnání. Nakonec ve 4. kapitole z výsledků vyvodíme důsledky pro strukturu Marsu a zasadíme je do kontextu výsledků mise InSight.

1. Mars a jeho vnitřní struktura

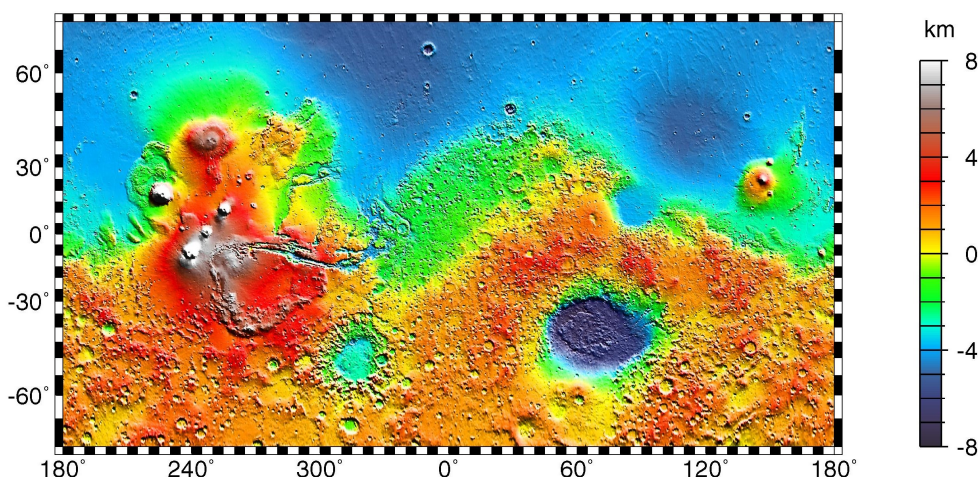
Mars, též známý jako Rudá planeta, je čtvrtá terestrická planeta ve Sluneční soustavě a po Merkuru jde o druhou nejmenší planetu soustavy s poloměrem $R = 3389,5$ km. Vznikl před asi 4,6 miliardami let, pravděpodobně s vodou na povrchu (Poulet a kol., 2005) a hustou atmosférou, o kterou v průběhu vývoje z velké části přišel. Okolo Slunce obíhá průměrně ve vzdálenosti asi 228 milionů km, což je zhruba 1,5krát dál než Země. Oběžná dráha Marsu má vysokou excentricitu, zhruba 0,093. To v kombinaci s velice proměnlivým sklonem rotační osy (Touma a Wisdom, 1993), v současnosti $25,19^\circ$, znamená velké rozdíly v délce ročních období na Marsu. Jeden den (*sol*) zde trvá asi 24 hodin a 37 minut. Rok na Marsu trvá 687 pozemských dní.



Obrázek 1.1: Planeta Mars. Významnými útvary na fotografii jsou Valles Marineris v dolní části, pohoří Elysium Mons vlevo se sopkou Olympus Mons na úplném okraji a ledová čepička na severním pólu. Kompozitní fotografie vytvořená z tisíce snímků pořízených během programu Viking. Obrázek je převzatý z <https://photojournal.jpl.nasa.gov/catalog/PIA00407>, Courtesy NASA/JPL/USGS

Povrch planety má výraznou červeno-hnědou barvu způsobenou oxidem železa v prachu na povrchu (Berger a kol., 2016). Mezi severní a jižní polokoulí je na Marsu výrazná dichotomie (viz. obrázek 1.2). Podle Watters a kol. (2007) má severní polokoule nižší nadmořskou výšku než jižní polokoule až o 6 km a také až o 26 km tenčí kůru. Jižní polokoule je velice členitá, pokryta mnohými sopkami

a impaktními krátery jako pánev Hellas. Nejvyšším pohořím Marsu je Elysium Planitia s dominantní horou Olympus Mons, která ční do nadmořské výšky 21 km, což z ní dělá nejvyšší horu Sluneční soustavy. Elevace je pravděpodobně způsobena horkou skvrnou, plumou horkého materiálu pláště stoupajícího od jádra až k povrchu (Broquet a Andrews-Hanna, 2022). Naproti tomu impaktní pánev Hellas má nadmořskou výšku asi -8 km. Severní polokoule Marsu je vzhledem k výrazně menší četnosti impaktních kráterů pravděpodobně mladší.



Obrázek 1.2: Topografie Marsu. Ukazuje členitý povrch Marsu s výraznými útvary jako hornaté Elysium Mons či impaktním kráterem Hellas Planitia. Viditelná je dichotomie mezi severní a jižní polokoulí. Obrázek je převzatý z <https://photojournal.jpl.nasa.gov/catalog/PIA02031>, Courtesy NASA/JPL/GSFC

Mars vypadá jako menší kopie Země. Velikostně je svým poloměrem 3389,5 km vůči 6371 km Země přibližně poloviční. Konopliv a kol. (2006) na základě gravitačních dat určili velikost jádra Marsu na 1600 – 1810 km, také zhruba poloviční oproti velikosti jádra Země (přibližně 3480 km, Dziewonski a Anderson (1981)). Yoder a kol. (2003) na základě naměřené hodnoty Loveova čísla $k_2 = 0,153 \pm 0,017$ a inverze slapové deformace určil možnou velikost jádra na 1520 – 1840 km. Helffrich (2017) poté na tyto dvě studie navázal a zaměřil svou pozornost na očekávané výsledky z mise InSight. Takto velké jádro Marsu se pravděpodobně podobně jako Země skládá z *Fe-Ni* směsi s příměsí lehkých prvků *S*, *C*, *Si*, *O*, *N* a *H*. V jádře Marsu však mají příměsí zastoupení okolo 10 – 17%, tedy až 10krát tak velké jako v zemském jádře.

Zpřesnění velikosti jádra bude mít vliv i na správné vyhodnocení schopnosti Marsu generovat magnetické pole. V současné době měříme pouze remanentní magnetizaci, protože vlastní magnetické pole Marsu chybí. Díky remanentní magnetizaci kůry však víme (Kuang a kol., 2008), že před 4 miliardami let jeho vlastní pole dokonce dosahovalo magnetické indukce až $50 \mu\text{T}$. Pro porovnání magnetické pole Země se v dnešní době na povrchu pohybuje mezi $25 - 65 \mu\text{T}$ (Friis-Christensen a kol., 2006). Absence geodynamika znamená, že se konvekce v jádře Marsu v minulosti dostala pod kritickou hranici a již nebylo možné ho znovu vybudit. Vnitřních procesů a příčin, kterými jádro dospělo do tohoto stavu je celá řada, například jedním z činitelů útlumu dynamika by podle Arkani-Hamed

(2012) mohly být četné impakty v minulosti planety.

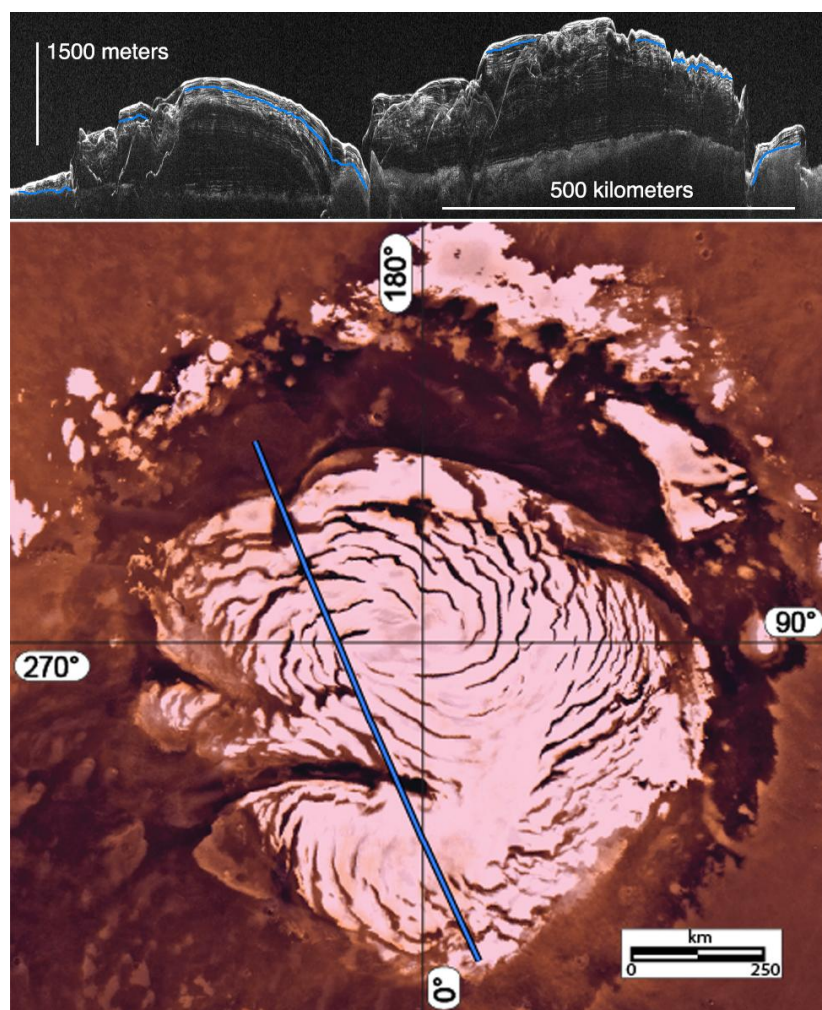
Vnitřní struktura se věnovala také studie Zuber a kol. (2000). Na základě topografie a gravitačních dat z mise Mars Global Surveyor (MGS) kvantitativně popsali již zmíněnou dichotomii v topografii. Ta odpovídá kůře o tloušťce 3 – 100 km s průměrnou tloušťkou okolo 50 km. Výsledky jejich modelů opírajících se o termální vývoj planety ukazovaly na proměnlivou tloušťku elastické litosféry, od $T_e = 20$ km pod pánví Hellas až po více než 100 km pod vulkány v oblasti Tharsis s maximem $T_e = 250$ km pod Olympem Mons. Neumann a kol. (2004) na stejných datech odhad pro kůru zpřesnili. Tloušťku kůry určili na severní polokouli 32 km, na jižní polokouli 58 km, přičemž uvažovali tloušťku elastické litosféry 150 km v oblasti Tharsis.

Mise InSight díky seismickým přístrojům přinesla cenná data, která nám pomohla vnitřní strukturu planety lépe charakterizovat. Jádro Marsu je oproti dřívějším předpokladům větší, různí autoři uvádí podobné výsledky. Stähler a kol. (2021) uvádí 1830 ± 40 km, Le Maistre a kol. (2023) pak 1835 ± 55 km. První zmíněná studie také ukazuje, že v hloubce ~ 1050 km se nachází vysoký nárůst seismických rychlostí, který odpovídá diskontinuitě v zemském plášti v hloubce 410 km. Dále v hloubce 1520 – 1600 km na rozhraní jádro-plášť (CMB - Core-mantle boundary) Marsu jsou nedostatečné teplotní a tlakové podmínky pro fázový přechod analogický hranici v hloubce 660 km v zemském plášti. Na Marsu tedy chybí ekvivalent spodního pláště Země a v hloubce od 1050 km až k CMB je na Marsu plášť svými vlastnostmi podobný přechodové oblasti v Zemi v hloubkách 410 – 660 km.

Ze seismických dat mise InSight vyplynula také řada informací o struktuře kůry Marsu. Knapmeyer-Endrun a kol. (2021) určili blízko povrchu tři diskontinuity seismických rychlostí. Zatím nelze s jistotou říci, zda jako hranici kůry uvažovat již druhé nebo až třetí rozhraní. Uvádí proto 2 možné tloušťky kůry. Tenká kůra má v oblasti pod sondou InSight tloušťku 20 ± 5 km, model tlusté kůry připouští 39 ± 8 km. Extrapolací za použití gravitačních dat a topografie pak došli k závěru, že průměrná tloušťka kůry Marsu je mezi 24 – 72 km, což je nepatrně menší než 57 ± 24 km ze staršího článku Zuber a kol. (2000).

Litosférou a především pak tloušťkou elastické litosféry se v minulosti zabývali například Belleguic a kol. (2005), McGovern a kol. (2004), či Johnson (2000). Většinou s výsledkem, že tloušťka elastické litosféry T_e se v různých částech planety mění, ale maximální hodnoty nepřekračují 200 km. Phillips a kol. (2008) na základě dat ze senzoru SHARAD (viz. obrázek 1.3) poukázal na nesoulad mezi předpokládanou tloušťkou litosféry na severním pólu okolo 100 km a změřenou deformací povrchu zhruba 100 m pod polární ledovou čepičkou. Tato ledová pokrývka je pravděpodobně stará jen několik milionů let Broquet a kol. (2020) a můžeme díky ní sledovat aktuální odezvu planety na tuto zátěž.

Již před misí InSight se začaly objevovat důkazy o tom, že na severním pólu Marsu má elastická litosféra větší mocnost, než se dosud uvádělo. Smrekar a kol. (2018) uvádí tloušťku $T_e > 300$ km, již zmíněný článek Broquet a kol. (2020) uvádí na severním pólu $T_e = 330 - 450$ km a Khan a kol. (2021) na základě dat z InSight tvrdí, že elastická litosféra pod čepičkou má tloušťku větší než 500 km.



Obrázek 1.3: Ledová čepička na severním pólu Marsu a snímek průřezu touto vrstvou ledu po modré úsečce, jak ho vidí přístroj SHARAD (Shallow Radar). Obrázek je převzatý z <https://photojournal.jpl.nasa.gov/catalog/PIA20029>, Courtesy NASA/JPL-Caltech/Sapienza University of Rome

2. Metoda

V následující kapitole se budeme věnovat představení metody, kterou jsme použili k řešení evolučního problému viskoelastické deformace kulové slupky s volným povrchem. Využíváme sférické symetrie výpočetní oblasti, což nám umožňuje převést problém do spektrální oblasti pomocí sférických harmonických funkcí a efektivně tak řešit rovnice pro plášť jednorozměrně.

Nejprve se seznámíme s řídicími rovnicemi, které jsou určeny základními fyzikálními zákony zachování - hmoty, hybnosti a momentu hybnosti. Dále je předpoklad o fyzikálním systému zjednodušíme a přidáme k nim konstitutivní vztah, který popisuje zjednodušenou reologii materiálu v plášti (Martinec, 2019). Následně se zaměříme na okrajové podmínky, které jsou aplikovány na povrchu a na CMB. Poté do modelu zakomponujeme účinek selfgravitace a v závěru této kapitoly se budeme věnovat převodu uvedených rovnic do spektrální oblasti, což je důležitý krok pro efektivní řešení daného problému.

2.1 Zákony zachování v integrálním tvaru

Chování materiálu v plášti planety je popsáno systémem rovnic odvozených ze tří základních zákonů zachování - zákona zachování hmoty, zákona zachování hybnosti a zákona zachování momentu hybnosti.

Podle zákona zachování hmoty zůstává celková hmotnost tělesa během deformace neměnná, což znamená, že žádná hmota nevzniká ani nezaniká. Tento princip lze vyjádřit následující rovnicí v integrálním tvaru:

$$\frac{D}{Dt} \int_{v(t)} \rho dv = 0 \quad (2.1)$$

Zde $\frac{D}{Dt}$ představuje materiálovou derivaci, $v(t)$ je objem časově proměnné oblasti, ρ je hustota materiálu a dv je objemový element.

Zákon zachování hybnosti formuluje, že časová změna hybnosti tělesa je rovna celkové síle, která na těleso působí. Tato síla se skládá z plošné složky (první člen na pravé straně rovnice (2.2)) a objemové složky (druhý člen na pravé straně rovnice (2.2)):

$$\frac{D}{Dt} \int_{v(t)} \rho \vec{v} dv = \int_{s(t)} \vec{\tau}_{(\vec{n})} da + \int_{v(t)} \rho \vec{f} dv \quad (2.2)$$

Zde $s(t)$ představuje povrch deformujícího se tělesa, \vec{v} je rychlost, \vec{f} je objemová síla, $\vec{\tau}_{(\vec{n})}$ představuje skalární součin Cauchyho tenzoru napětí $\boldsymbol{\tau}$ a vnější normály \vec{n} k povrchu a da je plošný element povrchu.

Zákon zachování momentu hybnosti stanovuje, že časová změna momentu hybnosti tělesa je rovna celkovému momentu všech sil, plošných i objemových, působících na toto těleso:

$$\frac{D}{Dt} \int_{v(t)} (\vec{x} \times \rho \vec{v}) dv = \int_{s(t)} (\vec{x} \times \vec{\tau}_{(\vec{n})}) da + \int_{v(t)} (\vec{x} \times \rho \vec{f}) dv, \quad (2.3)$$

kde \vec{x} je polohový vektor.

2.2 Aproximace základních rovnic Maxwellovské viskoelastické deformace

Nyní výše uvedené rovnice v integrálním tvaru zjednodušíme za pomoci několika předpokladů chování systému s Maxwellovskou viskoelastickou deformací a převedeme do invariantního tvaru.

Materiál v plášti považujeme za nestlačitelnou kapalinu s konstantní hustotou. Zákon zachování hmoty (2.1) se tak vyjádří jako rovnice kontinuity vzhledem k posunutí \vec{u} ve tvaru:

$$\nabla \cdot \vec{u} = 0 \quad (2.4)$$

Deformace pláště planety, jehož viskozita je typicky vysoká $\eta \geq 10^{20}$ Pa s, probíhá velmi pomalu. Celková míra deformace přes 1500 km velké vrstvy pláště způsobená cca 1 km vrstvy ledu bude také relativně malá. Uvnitř kulové slupky tedy zanedbáváme všechny objemové síly a setrvačnou sílu, což zákon zachování hybnosti (2.2) zjednoduší na pohybovou rovnici tvaru:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\tau} = \vec{0} \quad (2.5)$$

Později do rovnice opět zahrneme působení objemových sil v podobě selfgravitace ve formě členu $-\rho\delta\vec{g}$ na pravé straně rovnice.

Ze zákona zachování momentu hybnosti vyplývá symetrie Cauchyho tenzoru napětí

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}^T \quad (2.6)$$

Pro konstitutivní vztah popisující reologii materiálu pláště uvažujeme Maxwellovský viskoelastický model. Tento model popisuje materiál, který se chová elasticky na krátkých časových škálách a viskozně na delších. Vztah mezi napětím a posunutím je v takovém materiálu dán následujícím vztahem:

$$\boldsymbol{\tau}^D - \mu \left(\nabla \vec{u} + (\nabla \vec{u})^T \right) = -\frac{\mu}{\eta} \int_0^t \boldsymbol{\tau}^D(t') dt' \quad (2.7)$$

Zde $\boldsymbol{\tau}^D$ představuje deviator Cauchyho tenzoru napětí, μ je modul torze, η je viskozita, \vec{u} je vektor posunutí a t' je integrační čas.

2.3 Hraniční podmínky

K výše uvedené soustavě rovnic je třeba přidat také rovnice popisující podmínky na hranicích oblasti. Na povrchu planety uvažujeme volný povrch (2.8a) (Čadek a kol., 2017). Pokud zkoumáme viskoelasticitu pláště za přítomnosti povrchové zátěže, do pravé strany rovnice (2.8b) přidáváme člen pro sílu způsobenou ledovou zátěží s hustotou ledu $\rho_i = 10^3 \text{ kg m}^{-3}$:

$$\boldsymbol{\tau} \cdot \vec{e}_r + \rho_s g_s \vec{e}_r (\vec{u} \cdot \vec{e}_r) = 0 \quad (2.8a)$$

$$\boldsymbol{\tau} \cdot \vec{e}_r + \rho_s g_s \vec{e}_r (\vec{u} \cdot \vec{e}_r) = -h_i \rho_i g_s \vec{e}_r \quad (2.8b)$$

Zde $\boldsymbol{\tau}$ je Cauchyho tenzor napětí, \vec{e}_r je jednotkový radiální vektor směřující od středu planety ven, ρ_s je hustota pláště, g_s je tíhové zrychlení na povrchu, \vec{u} je posunutí a h_i je tloušťka zátěže s hustotou ρ_i .

Na CMB také předepisujeme podmínku volného povrchu. V tomto případě však musíme brát v úvahu i interakci mezi pláštěm a jádrem (Čadek a kol., 2017). Rovnice má následující tvar:

$$\boldsymbol{\tau} \cdot \vec{e}_r + \rho_s g_s \vec{e}_r (\vec{u} \cdot \vec{e}_r) = \rho_c g_c \vec{e}_r (\vec{u} \cdot \vec{e}_r) \quad (2.9)$$

V této rovnici se nově objevují tíhové zrychlení na CMB g_c a hustota jádra ρ_c . Znaménko na pravé straně rovnice je dané vnější normálou k výpočetní oblasti, která nyní směřuje do středu planety a znaménko je tedy opačné v porovnání s normálou na povrchu.

Tíhové zrychlení počítáme ze zadaných parametrů modelu (viz. Tabulka 1) pomocí vzorce pro výpočet gravitačního zrychlení uvnitř kulového tělesa na poloměru r :

$$g(r) = \frac{4\pi G}{3} \frac{1}{r^2} \left[R_c^3 \rho_c + (r^3 - R_c^3) \rho_s \right] \quad (2.10)$$

Pro zrychlení na CMB a na povrchu pak stačí do rovnice dosadit odpovídající poloměr $g_c = g(r = R_c)$, $g_s = g(r = R_s)$.

2.4 Selfgravitace

Při deformaci povrchu jeho zatížením dochází k přesunu hmot zátěže, pláště i jádra. Tento přebytek či úbytek hmoty generuje dodatečný gravitační potenciál \bar{V} , který způsobuje odchylku od tíhového zrychlení δg . V plášti planety přibude objemová síla $\rho_s \delta \vec{g} = \nabla \bar{V}$, která tlumí celkovou deformaci. Objeví se na levé straně pohybové rovnice (2.5):

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \rho_s \delta \vec{g} = 0 \quad (2.11)$$

Přírůstkový potenciál \bar{V} má vliv také na spodní hranici oblasti a ve spodní hraniční podmínce (2.9) se tak objeví člen $\rho_c \bar{V} \vec{e}_r$:

$$\boldsymbol{\tau} \cdot \vec{e}_r + \rho_s g_s \vec{e}_r (\vec{u} \cdot \vec{e}_r) = \rho_c g_c \vec{e}_r (\vec{u} \cdot \vec{e}_r) + \rho_c \bar{V} \vec{e}_r \quad (2.12)$$

2.5 Přechod do spektrální oblasti

Rovnici kontinuity (2.4), pohybovou rovnici (2.11), reologický vztah (2.7) a hraniční podmínky (2.8b) a (2.12) následně rozvíjíme do prostoru sférických harmonických funkcí pomocí metod uvedených v Varšalovič a kol. (1988) či Matas (1995). Tím přecházíme ze soustavy parciálních diferenciálních rovnic na soustavu obyčejných diferenciálních rovnic. Navíc místo náročného výpočtu ve 2D či 3D oblasti dostáváme jednorozměrný problém, ve kterém počítáme vývoj systému ve vrstvách. Systém se přechodem rozpadá do řádů a stupňů sférických harmonických funkcí. Zátěž lze také rozložit na jednotlivé stupně a řády, vypočítat jejich

příspevky na těchto frekvencích a následně je opět sčítat pro získání celkového posunutí.

Veličiny vyjadřujeme jako součet harmonické řady, ve kterém se objevuje součin hodnoty veličiny v hloubce odpovídající poloměru r a bázová sférická harmonická funkce. Pro skalární veličiny platí

$$f(r, \vartheta, \varphi) = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{m=-j}^j f_{jm}(r) Y_{jm}(\vartheta, \varphi), \quad (2.13)$$

kde f je zkoumaná veličina, $f_{jm}(r)$ je radiálně závislý koeficient na stupni j a řádu m . Y_{jm} je odpovídající sférická harmonická funkce se stupněm j a řádem m .

Pro vektorové veličiny platí

$$\vec{f}(r, \vartheta, \varphi) = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{m=-j}^j \sum_{l=|j-1|}^{j+1} f_{jm}^l(r) \vec{Y}_{jm}^l(\vartheta, \varphi), \quad (2.14)$$

kde index l označuje vektorovou složku veličiny.

Pro tenzorové veličiny platí

$$\mathbf{F}(r, \vartheta, \varphi) = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{m=-j}^j \sum_{l=|j-1|}^{j+1} \sum_{k=0}^2 F_{jm}^{lk}(r) \mathbf{Y}_{jm}^{lk}(\vartheta, \varphi), \quad (2.15)$$

kde navíc vystupuje tenzorový index k .

Rovnici kontinuity (2.4) pak převedením do harmonického rozvoje a použitím vzorce pro divergenci sférických harmonických funkcí z Varšalovič a kol. (1988) dostáváme ve tvaru

$$\sqrt{\frac{j}{2j+1}} \left(\frac{d}{dr} - \frac{j-1}{r} \right) u^{j-1}(r) - \sqrt{\frac{j+1}{2j+1}} \left(\frac{d}{dr} + \frac{j+2}{r} \right) u^{j+1}(r) = 0, \quad (2.16)$$

kde j je harmonický stupeň, r je poloměr a $u^{j\pm 1}$ jsou harmonické koeficienty posunutí.

Pohybová rovnice (2.5) je vektorová, máme tedy celkem tři rovnice. Tenzor napětí je podle zákona zachování momentu hybnosti symetrický. Proto jsou jeho toroidální složky τ^{j-1} a τ^{j+1} nulové a jedna z rovnic se stává triviální. Pro zbývající dvě rovnice (pro \vec{Y}_{jm}^{j-1} a \vec{Y}_{jm}^{j+1}) dostáváme

$$\begin{aligned} -\sqrt{\frac{j}{3(2j+1)}} \left(\frac{d}{dr} + \frac{j+1}{r} \right) \tau_{jm}^{j,0} + \sqrt{\frac{j-1}{2j-1}} \left(\frac{d}{dr} - \frac{j-2}{r} \right) \tau_{jm}^{j-2,2} - \\ -\sqrt{\frac{(j+1)(2j+3)}{6(2j-1)(2j+1)}} \left(\frac{d}{dr} + \frac{j+1}{r} \right) \tau_{jm}^{j,2} = 0, \end{aligned} \quad (2.17a)$$

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{j+1}{3(2j+1)}} \left(\frac{d}{dr} - \frac{j}{r} \right) \tau_{jm}^{j,0} - \sqrt{\frac{j+2}{2j+3}} \left(\frac{d}{dr} + \frac{j+3}{r} \right) \tau_{jm}^{j+2,2} + \\ + \sqrt{\frac{j(2j-1)}{6(2j+3)(2j+1)}} \left(\frac{d}{dr} - \frac{j}{r} \right) \tau_{jm}^{j,2} = 0 \end{aligned} \quad (2.17b)$$

Zde j je harmonický stupeň, r je poloměr a $\tau_{jm}^{j\pm 2,2}$, $\tau_{jm}^{j,2}$ a $\tau_{jm}^{0,2}$ jsou koeficienty Cauchyho tenzoru napětí.

V případě zahrnutí selfgravitace přidáváme do pravé strany rovnic členy, které reprezentují sílu vyvolanou přesunem hmoty a následným přírůstkem gravitačního potenciálu. Tento člen se v invariantním tvaru vyjádří jako $\rho_s \delta \vec{g} = \rho_s \nabla \bar{V}$. V jedné rovnici tato síla představuje příspěvek zátěže a topografie povrchu, zatímco v druhé rovnici popisuje příspěvek topografie jádra:

$$4\pi G \sqrt{\frac{j}{2j+1}} \left(\frac{r}{R_s}\right)^{j-1} (\rho_s u_{jm}(R_s) + \rho_i h_i) \quad \text{pro } \vec{Y}_{jm}^{j-1} \quad (2.18a)$$

$$4\pi G \sqrt{\frac{j+1}{2j+1}} \left(\frac{R_c}{r}\right)^{j+2} (\rho_c - \rho_s) u_{jm}(R_c) \quad \text{pro } \vec{Y}_{jm}^{j+1} \quad (2.18b)$$

Zde G je gravitační konstanta, j je harmonický stupeň, r je poloměr, R_s je poloměr povrchu, R_c je poloměr jádra, h_i je tloušťka zátěže, ρ_i je hustota zátěže, ρ_s je hustota pláště, ρ_c je hustota jádra a u_{jm} je radiální posunutí na stupni j a řádu m .

Reologická rovnice z invariantního tvaru přechází ve 3 rovnice v rámci sférických harmonických funkcí. Tyto rovnice se vztahují k funkcím $\mathbf{Y}_{jm}^{j-2,2}$, $\mathbf{Y}_{jm}^{j,2}$ a $\mathbf{Y}_{jm}^{j+2,2}$. V případě elastické deformace mají rovnice následující podobu:

$$\tau_{jm}^{j-2,2} - 2\mu \sqrt{\frac{j-1}{2j-1}} \left(\frac{d}{dr} + \frac{j}{r}\right) u_{jm}^{j-1} = 0, \quad (2.19a)$$

$$\begin{aligned} \tau_{jm}^{j,2} + 2\mu \sqrt{\frac{(j+1)(2j+3)}{6(2j-1)(2j+1)}} \left(\frac{d}{dr} - \frac{j-1}{r}\right) u_{jm}^{j-1} - \\ - 2\mu \sqrt{\frac{j(2j-1)}{6(2j+3)(2j+1)}} \left(\frac{d}{dr} + \frac{j+2}{r}\right) u_{jm}^{j+1} = 0, \end{aligned} \quad (2.19b)$$

$$\tau_{jm}^{j+2,2} + 2\mu \sqrt{\frac{j+2}{2j+3}} \left(\frac{d}{dr} - \frac{j+1}{r}\right) u_{jm}^{j+1} = 0 \quad (2.19c)$$

Zde j je harmonický stupeň, r je poloměr, μ je modul torze, $u_{jm}^{j\pm 1}$ jsou harmonické koeficienty posunutí a $\tau_{jm}^{j\pm 2,2}$, $\tau_{jm}^{j,2}$ a $\tau_{jm}^{0,2}$ jsou koeficienty Cauchyho tenzoru napětí.

V případě viskoelastické deformace musíme zahrnout viskozni člen na pravé straně reologické rovnice (2.7) $\frac{\mu}{\eta} \int_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{\tau} dt'$. Při časové diskretizaci (viz. následující kapitola 2.6) je tento člen rozdělen na dvě části. Výraz na levé straně rovnic je vydělen 2μ a výraz u koeficientů napětí se v rámci Euler-Lagrangeovy diference transformuje na

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{\mu} + \frac{dt}{2\eta}\right) \tau_{jm}^{kl}$$

Hraniční podmínka na povrchu se rozpadá na následující rovnice:

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{j-1}{2j-1}} \tau_{jm}^{j-2,2} - \sqrt{\frac{j}{3(2j+1)}} \tau_{jm}^{j,0} - \sqrt{\frac{(j+1)(2j+3)}{6(2j+1)(2j-1)}} \tau_{jm}^{j,2} + \\ + g_s \left[\rho_s \left(\frac{j}{\sqrt{2j+1}} u_{jm}^{j-1} - \sqrt{\frac{j(j+1)}{2j+1}} u_{jm}^{j+1} \right) + h_i \rho_I \sqrt{\frac{j}{2j+1}} \right] = 0, \end{aligned} \quad (2.20a)$$

$$\begin{aligned} & \sqrt{\frac{j+1}{3(2j+1)}}\tau_{jm}^{j,0} - \sqrt{\frac{j+2}{2j+3}}\tau_{jm}^{j+2,2} + \sqrt{\frac{j(2j-1)}{6(2j+1)(2j+3)}}\tau_{jm}^{j,2} + \\ & + g_s \left[\rho_s \left(\frac{j+1}{\sqrt{2j+1}}u_{jm}^{j+1} - \sqrt{\frac{j(j+1)}{2j+1}}u_{jm}^{j-1} \right) - h_i \rho_I \sqrt{\frac{j+1}{2j+1}} \right] = 0, \end{aligned} \quad (2.20b)$$

kde h_i je tloušťka zátěže, ρ_i je hustota zátěže, ρ_s je hustota pláště, g_s je tíhové zrychlení na povrchu, $u^{j\pm 1}$ jsou harmonické koeficienty posunutí a $\tau_{jm}^{j\pm 2,2}$, $\tau_{jm}^{j,2}$ a $\tau_{jm}^{0,2}$ jsou koeficienty Cauchyho tenzoru napětí.

Hraniční podmínka na rozhraní CMB se rozpadá na následující rovnice

$$\begin{aligned} & \sqrt{\frac{j-1}{2j-1}}\tau_{jm}^{j-2,2} - \sqrt{\frac{j}{3(2j+1)}}\tau_{jm}^{j,0} - \sqrt{\frac{(j+1)(2j+3)}{6(2j+1)(2j-1)}}\tau_{jm}^{j,2} + \\ & + g_c \left[(\rho_c - \rho_s) \left(\frac{j}{\sqrt{2j+1}}u_{jm}^{j-1} - \sqrt{\frac{j(j+1)}{2j+1}}u_{jm}^{j+1} \right) \right] = 0, \end{aligned} \quad (2.21a)$$

$$\begin{aligned} & \sqrt{\frac{j+1}{3(2j+1)}}\tau_{jm}^{j,0} - \sqrt{\frac{j+2}{2j+3}}\tau_{jm}^{j+2,2} + \sqrt{\frac{j(2j-1)}{6(2j+1)(2j+3)}}\tau_{jm}^{j,2} + \\ & + g_c \left[(\rho_c - \rho_s) \left(\frac{j+1}{\sqrt{2j+1}}u_{jm}^{j+1} - \sqrt{\frac{j(j+1)}{2j+1}}u_{jm}^{j-1} \right) \right] = 0 \end{aligned} \quad (2.21b)$$

kde ρ_s je hustota pláště, ρ_c je hustota jádra, g_c je tíhové zrychlení na CMB, $u^{j\pm 1}$ jsou harmonické koeficienty posunutí a $\tau_{jm}^{j\pm 2,2}$, $\tau_{jm}^{j,2}$ a $\tau_{jm}^{0,2}$ jsou koeficienty Cauchyho tenzoru napětí.

V případě zahrnutí selfgravitace do rovnic (2.21) se na pravé straně objeví členy popisující přírůstek gravitačního potenciálu v důsledku přesunu hmot na povrchu. Pro \vec{Y}_{jm}^{j-1} a \vec{Y}_{jm}^{j+1} na pravé straně postupně dostáváme:

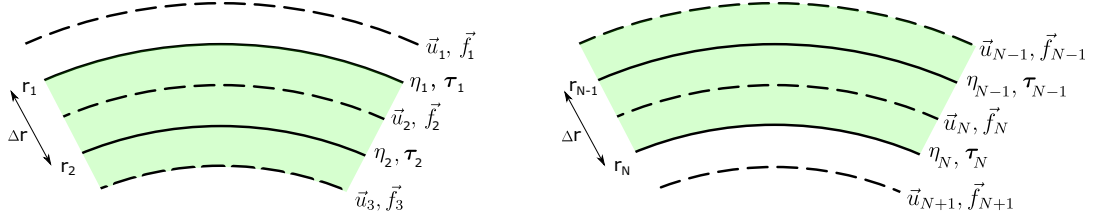
$$\rho_c \frac{4\pi G R_c}{2j+1} \sqrt{\frac{j}{2j+1}} \left[\left(\frac{R_c}{R_s} \right)^{j-1} (\rho_s u_{jm}(R_s) + \rho_i h_i) + (\rho_c - \rho_s) u_{jm}(R_c) \right] \quad (2.22a)$$

$$- \rho_c \frac{4\pi G R_c}{2j+1} \sqrt{\frac{j+1}{2j+1}} \left[\left(\frac{R_c}{R_s} \right)^{j-1} (\rho_s u_{jm}(R_s) + \rho_i h_i) + (\rho_c - \rho_s) u_{jm}(R_c) \right] \quad (2.22b)$$

Zde G je gravitační konstanta, R_s je vnější poloměr pláště, R_c je vnitřní poloměr pláště, j je harmonický stupeň, ρ_i je hustota zátěže na povrchu, h_i je tloušťka zátěže, ρ_s je hustota pláště, ρ_c je hustota jádra, u_{jm} je radiální posunutí.

2.6 Numerické řešení

Kulovou slupku jsme rozdělili na N stejně širokých vrstev, na jejichž hranicích předepisujeme upravené výše uvedené rovnice. Veličiny η a τ předepisujeme na hranicích, zatímco \vec{u} a \vec{f} předepisujeme uvnitř vrstev. Rozvojem do sférických harmonických funkcí dostáváme soustavu obyčejných diferenciálních rovnic.



Obrázek 2.1: Rozdělení kulové slupky na vrstvy. Nalevo je diskretizace u povrchu, napravo u spodní hranice slupky. Vnitřek kulové slupky je naznačený zelenou barvou. Hranice vrstev jsou značené plnou čarou, středy vrstev čárkovaně.

Hodnotu derivace v radiálním směru a hodnotu funkce aproximujeme na v -té hranici pomocí vztahů

$$\left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)\Big|_{r=r_v} \approx \frac{f_v - f_{v+1}}{\Delta r}, \quad (2.23a)$$

$$f(r_v) \approx \frac{f_v + f_{v+1}}{2}. \quad (2.23b)$$

Hodnotu derivace v radiálním směru a hodnotu funkce uvnitř v -té vrstvy aproximujeme pomocí vztahů

$$\left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)\Big|_{r=r_v+\Delta r_v/2} \approx \frac{f_{v-1} - f_v}{\Delta r}, \quad (2.24a)$$

$$f(r_v + \Delta r_v/2) \approx \frac{f_{v-1} + f_v}{2}. \quad (2.24b)$$

Časovou integraci ve viskoelastické deformaci řešíme lichoběžníkovým pravidlem s konstantním časovým krokem:

$$\int_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{\tau} dt' \approx \frac{t_2 - t_1}{\alpha} \sum_{k=1}^{\alpha-1} \frac{\boldsymbol{\tau}_k + \boldsymbol{\tau}_{k+1}}{2} \quad (2.25)$$

Celkem na N vrstvách řešíme N rovnic kontinuity, $2(N - 1)$ pohybových rovnic, $3N$ reologických rovnic a 4 rovnice hraničních podmínek. To dohromady představuje $6N + 2$ parciálních diferenciálních rovnic. Rovnice jsou uspořádané do matice s pásovou strukturou a efektivně je řešíme pomocí knihoven *bandec* a *banbks* převzatých z *Numerical Recipes in C/Fortran: The Art of Scientific Computing*.

V tabulce 2.1 uvádíme hodnoty použitých parametrů.

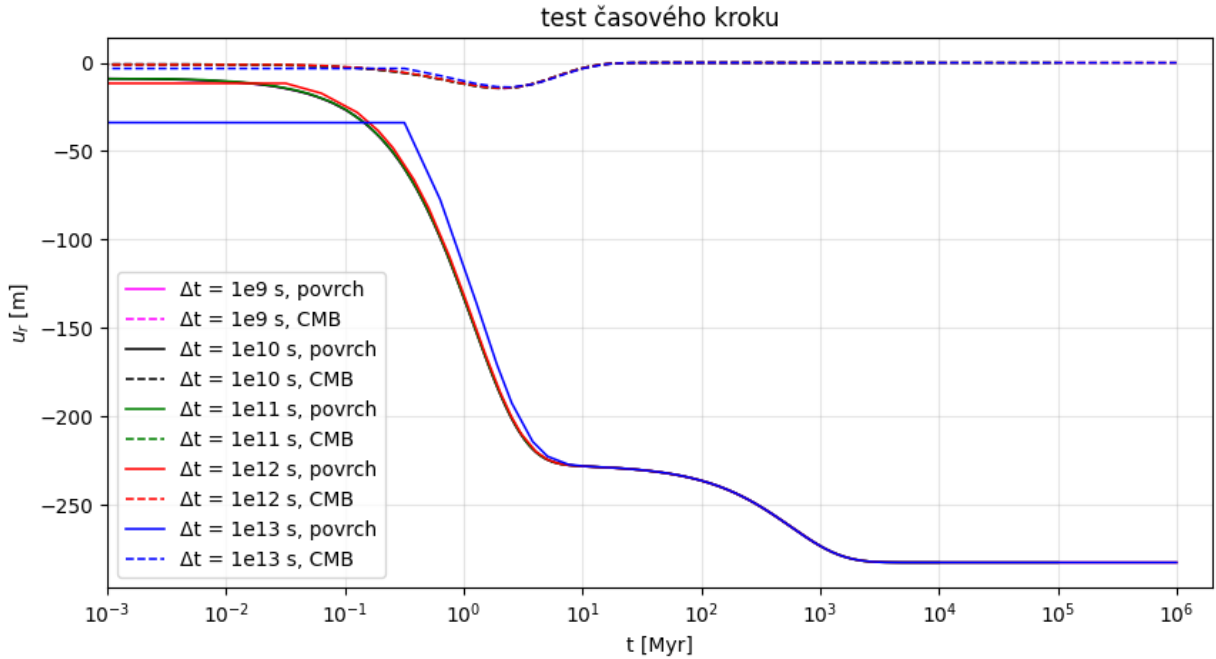
Tabulka 2.1: Modelové parametry

Veličina	Symbol	Hodnota	Jednotky
Hustota pláště a litosféry	ρ_s	$3,54 \cdot 10^3$	$kg\ m^{-3}$
Hustota jádra	ρ_c	$6 \cdot 10^3$	$kg\ m^{-3}$
Hustota ledu	ρ_i	$1 \cdot 10^3$	$kg\ m^{-3}$
Modul torze	μ	$7 \cdot 10^{10}$	Pa
Poloměr na povrchu	R_s	3390	km
Poloměr na rozhraní plášť-jádro (CMB)	R_c	1830	km
Stupeň harmonické funkce	j	8	–
Tloušťka ledu	h_i	1000	m
Tloušťka elastické litosféry	T_e	50 – 500	km
Viskozita pláště	η_M	$10^{21} - 10^{24}$	$Pa\ s$
Viskozita litosféry	η_{el}	$10^{25} - 10^{30}$	$Pa\ s$
Viskozita na povrchu	η_s	$10^{25} - 10^{30}$	$Pa\ s$
Počet vrstev modelu	N	150	
Časový krok	Δt	10^9	s

3. Výsledky

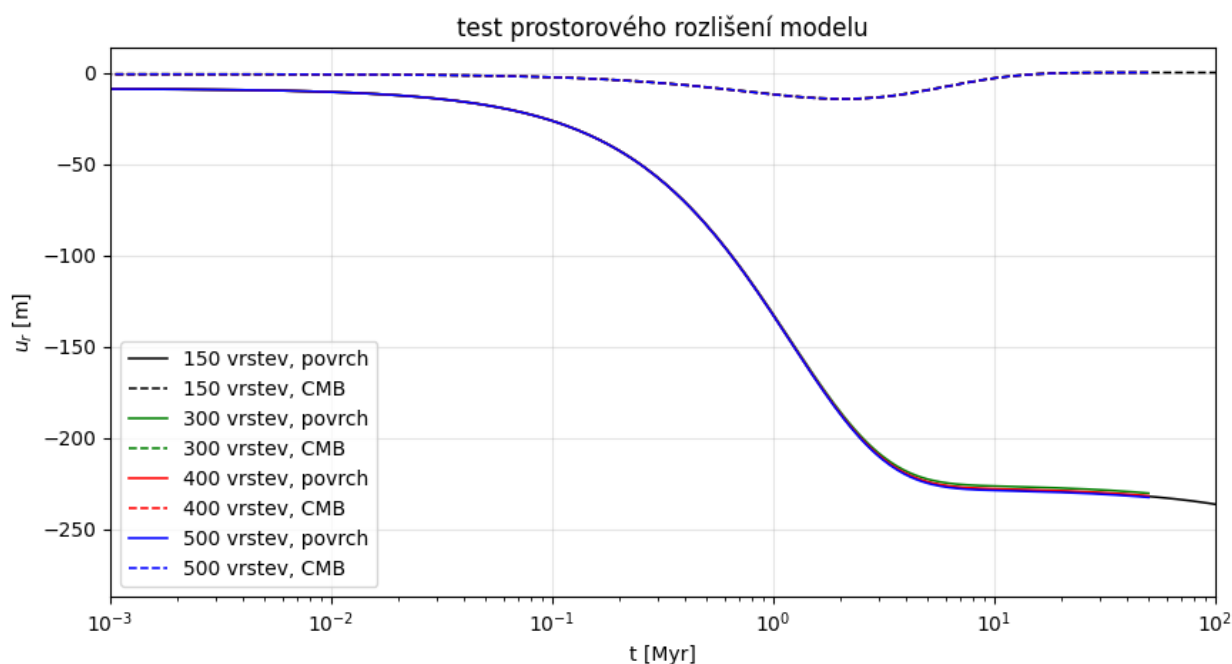
Nejprve jsme uskutečnili test časového a prostorového rozlišení. Nedostatečné rozlišení by mohlo vést k nepřesnému popisu dynamiky systému, numerické nestabilitě a snadnému šíření numerických chyb.

V grafu na obrázku 3.1 je celý průběh relaxace po zatížení povrchu Marsu vrstvou ledu o tloušťce 1 km. Průběh je napočítaný pro délky časového kroku $\Delta t = 10^9$ s, 10^{10} s, 10^{11} s, 10^{12} s a 10^{13} s. Pro všechna nastavení délky časového kroku jsou modely stabilní na dlouhých časových škálách a konvergují společně ke stejné teoretické hodnotě $h_i \rho_i / \rho_s \approx -282.49$ m. My se však budeme zajímat především o vývoj deformace v prvních tisících let až desítkách milionů let. V tomto časovém rozmezí vidíme, že vývoj posunutí je pro velké časové kroky nepřesný. Dál tedy budeme používat nejkratší časový krok z tohoto testu, $\Delta t = 10^9$ s, abychom zajistili hladký a numericky přesný průběh.



Obrázek 3.1: Test rozlišení modelu pro různé velikosti časového kroku, $\Delta t = 10^9$ s, 10^{10} s, 10^{11} s, 10^{12} s, 10^{13} s a 10^{14} s, v modelu se 150 vrstvami, tloušťkou elastické litosféry $T_e = 100$ km, viskozitou elastické litosféry $\eta_{el} = 10^{27}$ Pa s a viskozitou pláště $\eta_M = 10^{23}$ Pa s.

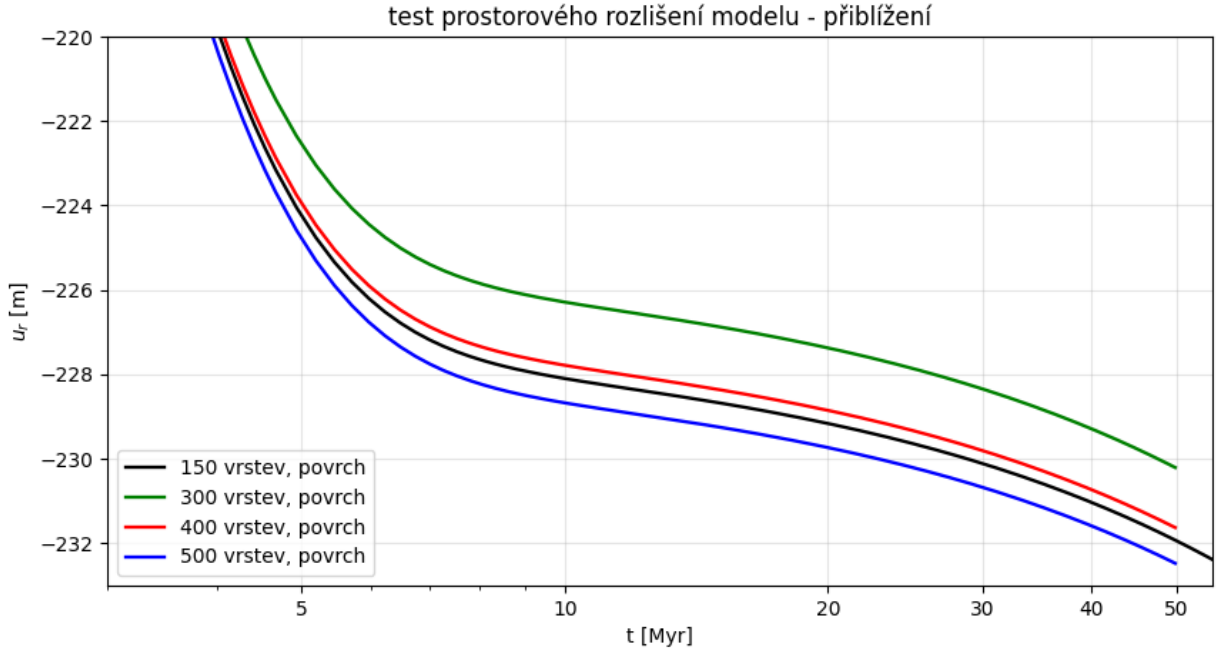
Na obrázku 3.2 vidíme vliv počtu vrstev modelu na vývoj deformace. Všechny modely mají nastavený časový krok $\Delta t = 10^9$ s, který jsme určili v předchozím testu jako dostatečný. Modely uvažují viskozitu pláště $\eta_M = 10^{23}$ Pa s, viskozitu litosféry $\eta_{el} = 10^{27}$ Pa s a tloušťku litosféry $T_e = 100$ km. Z hlediska dlouhodobého vývoje by při dostatečném rozlišení měl konvergovat k teoretické hodnotě $u_{r,max} \approx -282,49$ m. Model s rozlišením 150 vrstev je shodný s modelem z testu časového kroku a již víme, že k teoretické hodnotě po zhruba 20 miliardách let konverguje.



Obrázek 3.2: Test vývoje deformace modelu pro různé prostorové rozlišení, $N = 150, 300, 400, 500$ vrstev, v modelu s časovým krokem $\Delta t = 10^9$ s, tloušťkou elastické litosféry $T_e = 100$ km, viskozitou elastické litosféry $\eta_{el} = 10^{27}$ Pa s a viskozitou pláště $\eta_M = 10^{23}$ Pa s.

V grafu 3.2 jsou v pozdější fázi deformace mezi modely vidět malé rozdíly v průhybu povrchu. Nastavení počtu vrstev má totiž vliv i v absolutních hodnotách posunutí. To je dané efektivní tloušťkou elastické litosféry určenou hodnotami viskozity, které zadáváme na hranicích vrstev. Změnou počtu vrstev dochází i ke změně polohy posledního rozhraní, na kterém ještě uvažujeme viskozitu elastické litosféry a na které už uvažujeme viskozitu pláště. Při úvaze velikosti pláště Marsu, jehož CMB je v hloubce 1560 km, znamená rozlišení 150 vrstev tloušťku každé vrstvy asi 10 km. Tedy rozdíl ve velikosti litosféry mezi tímto modelem a modelem s jiným rozlišením může být až 10 km. Pokud je rozlišení modelu se 150 vrstvami dostatečné, měli bychom být schopní najít taková dvě řešení s vyšším rozlišením prostorové sítě, které model se 150 vrstvami během celého vývoje modelu omezují shora a zdola.

Na obrázku 3.3 je přiblížení vývoje deformace z obrázku 3.2 v době 3 – 55 milionů let. Jsou na něm vidět rozdílné absolutní hodnoty posunutí způsobené diskretizací modelu. Nastavením tloušťky litosféry na $T_e = 100$ km by hranice litosféry v těchto modelech měla být správně umístěna v $r_{lit} = 3290$ km. V případě modelu se 150 vrstvami je hranice litosféry a pláště určena viskozitami v hloubkách odpovídajících $r_t = 3295.8$ km (10^{27} Pa s) a $r_b = 3285.3$ km (10^{23} Pa s), v modelu s 500 vrstvami $r_t = 3293.1$ km (10^{27} Pa s) a $r_b = 3289.9$ km (10^{23} Pa s) a v modelu s 300 vrstvami $r_t = 3290.9$ km (10^{27} Pa s) a $r_b = 3285.7$ km (10^{23} Pa s). Na obrázku je vidět, že se model se 150 vrstvami modelu celou dobu drží mezi oběma modely s vyšším rozlišením, s 300 a 500 vrstvami, a nedochází k žádným náhlým změnám v deformaci, které by naznačovaly potíže s numerickou přesností. Protože je tento



Obrázek 3.3: Přiblížení testu vývoje deformace modelu pro různé prostorové rozlišení, $N = 150, 300, 400, 500$ vrstev, v modelu s časovým krokem $\Delta t = 10^9$ s, tloušťkou elastické litosféry $T_e = 100$ km, viskozitou elastické litosféry $\eta_{el} = 10^{27}$ Pa s a viskozitou pláště $\eta_M = 10^{23}$ Pa s. Přiblížení je zaměřené na dobu od 3 do 55 milionů let.

model dostatečně prostorově rozlišený a v době do 50 milionů let se neodchyluje od správného řešení, dále v modelech budeme používat nastavení 150 vrstev.

Obrázek 3.1 také ilustruje typické rysy chování systému po celou dobu deformace a zaslouží si proto podrobnější diskuzi. Posunutí v čase $t = 0$ je dané čistě elastickým průhybem litosféry a CMB pod zátěží. V našem případě modelu s tloušťkou litosféry $T_e = 100$ km, viskozitou litosféry $\eta_{el} = 10^{27}$ Pa s, viskozitou pláště $\eta_M = 10^{23}$ Pa s a modulem torze $\mu = 7 \cdot 10^{10}$ Pa je to $u_{r,povrch} \approx 8.79$ m na povrchu a $u_{r,CMB} \approx 0.83$ m na CMB. Kvůli logaritmické škále časové osy je tato hodnota zkreslená. Elastická deformace se v grafu nachází v 10^n , kde $n \rightarrow -\infty$ a hodnota posunutí v grafu se tak jeví stejná jako posunutí po prvním časovém kroku.

Posunutí na CMB monotónně klesá do globálního minima a poté monotónně konverguje zpátky k nule. Čas odpovídající minimu a velikost posunutí jsou v modelech závislé jak na tloušťce elastické litosféry, tak na její viskozitě a na viskozitě pláště. V tomto případě se model do minima dostane po zhruba 2 milionech let a absolutní hodnota posunutí je zde $|u_{r,CMB}| \approx 14.5$ m. K úplné nule pak dokonverguje zhruba po 16 mld. let, nicméně vidíme, že k největší deformaci dojde v prvních 10 milionech let.

V modelech s větší viskozitou a větší tloušťkou litosféry je vývoj posunutí na CMB v důsledku pomalejšího vyrovnávání působících sil složitější. V takových modelech není průhyb povrchu pod ledovcem dostatečný, aby gravitačně kom-

penzoval ledovcovou zátěží. Na CMB poté působí kladná radiální síla, která tuto hranici vychýlí do kladných hodnot. Síla však není výrazně velká a kladná deformace na CMB dosahuje řádově $u_{r,CMB} \approx 10^{-3}$ m. Z těchto hodnot poté $u_{r,CMB}$ opět konverguje k nule.

Na povrchu je nárůst radiálního posunutí na začátku deformace výrazně rychlejší než na CMB. Po milionu let jde už o 130 m, po 2 milionech let 186 m a poté výrazně zpomalí. Po 10 milionech let deformace na povrchu dospěje do 228 m. Změna o každý další metr již trvá déle než 10 milionů let, ale deformace probíhá dál a po zhruba 20 mld. let konverguje až do teoretické hodnoty $u_{r,max} \approx -282,49$ m, ve které dochází k rovnováze.

Takové dělení deformace na dvě části v různých časových škálách je způsobené rozdílem viskozit v plášti a v litosféře. Díky nižší viskozitě pláště se v něm hornina deformuje rychleji, díky čemuž se dostane do rovnovážného stavu dříve než elastická litosféra. Ve zde uvedených modelech s viskozitami pláště $\eta_M = 10^{21} - 10^{24}$ Pa s to jsou řádově jednotky až desítky milionů let. Naproti tomu relaxační procesy v litosféře s konstantní viskozitou $\eta_{el} = 10^{27}$ Pa s, 10^{30} Pa s trvají řádově stovky milionů až desítky miliard let. Oba příspěvky se po celou dobu deformace sčítají. Ve všech následujících modelech bude zřetelné, že deformace povrchu zpomaluje právě ve chvíli, kdy radiální posunutí na CMB dosáhne minima. Pár milionů let nato se hodnota ustálí a další deformace, způsobená relaxací litosféry, je viditelná až na řádově větší časové škále.

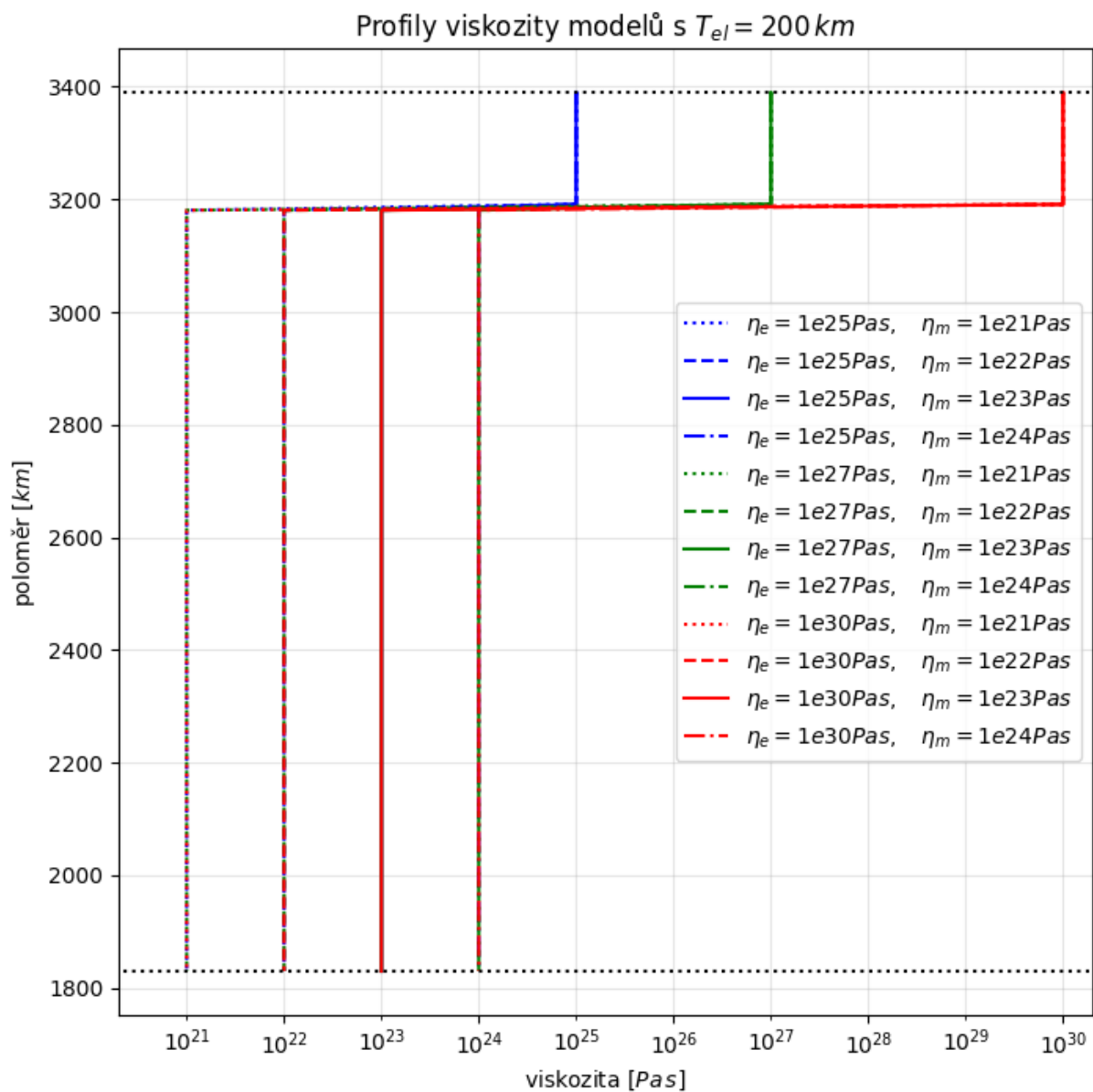
3.1 Dvouvrstvé modely s po částech konstantní viskozitou

V této kapitole se budeme zabývat modely, ve kterých elastickou litosféru a plášť definujeme po částech konstantním viskozním profilem. V hloubkách menších než tloušťka litosféry T_e používáme hodnotu viskozity určenou η_{el} a v hloubkách rovných či větších než T_e hodnotu viskozity určenou η_M .

Na obrázku 3.4 jsou nakreslené profily viskozit pro modely s tloušťkou elastické litosféry $T_e = 200$ km. Vyneseno je všech 12 kombinací viskozity elastické litosféry a viskozity pláště pro modely s tloušťkou litosféry T_e , jejichž vývoj ukazujeme na následujících obrázcích. V nich se další modely liší pouze hloubkou hraniční vrstvy, kombinace hodnot viskozity litosféry a pláště jsou stejné.

Následují obrázky shrnující vývoj deformace na povrchu a CMB v několika modelech, vždy se společným nastavením viskozity litosféry. Pro každou ze tří hodnot viskozity litosféry $\eta_{el} = 10^{27}$ Pa s, 10^{30} Pa s, 10^{25} Pa s ukazujeme časový vývoj deformace pro celkem 16 kombinací 4 mocností elastické litosféry se 4 hodnotami viskozity pláště. Vždy jejich hodnoty volíme tak, aby byly zobrazené grafy pro modely s kombinacemi těchto parametrů, při kterých se povrch po 10 milionech let deformuje zhruba o 100 m.

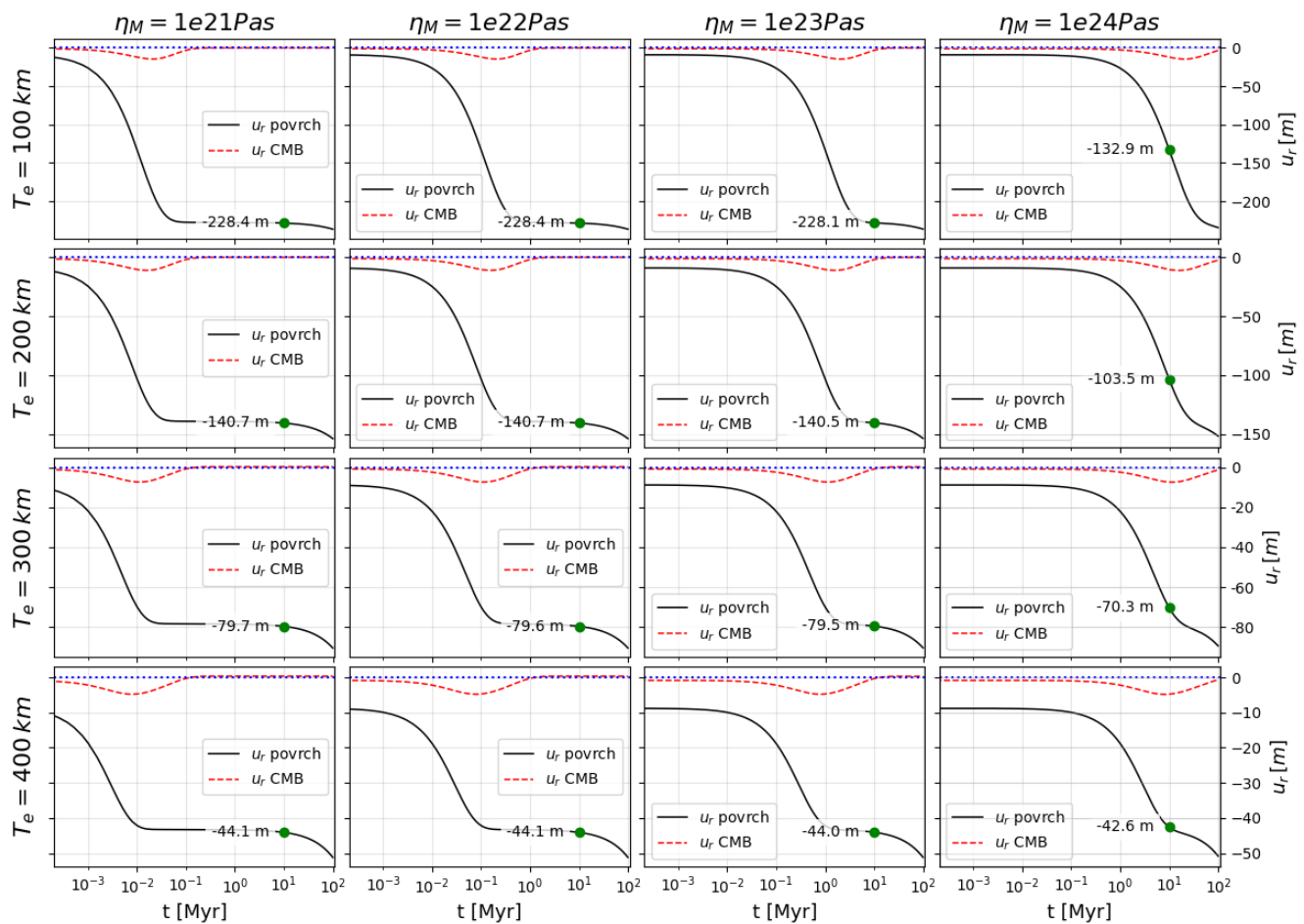
Prvním ze série obrázků modelů je obrázek 3.5 prezentující modely s viskozitou elastické litosféry $\eta_{el} = 10^{27}$ Pa s. Tyto grafy zobrazují vývoj deformace v modelech s tloušťkami elastické litosféry $T_e = 100$ km, 200 km, 300 km, 400 km a viskozitami



Obrázek 3.4: Profily viskozity modelů v případě tloušťky elastické litosféry $T_e = 200 \text{ km}$. Jsou nakreslené pro všechny kombinace viskozity elastické litosféry $\eta_{el} = 10^{25} \text{ Pa.s}$, 10^{27} Pa.s , 10^{30} Pa.s a viskozity pláště $\eta_M = 10^{21} \text{ Pa.s}$, 10^{22} Pa.s , 10^{23} Pa.s , 10^{24} Pa.s .

pláště $\eta_M = 10^{21} \text{ Pa.s}$, 10^{22} Pa.s , 10^{23} Pa.s , 10^{24} Pa.s . Ostatní parametry modelů jsou nastavené podle tabulky 2.1.

Na prvním řádku modelů obrázku 3.5 vidíme, že vyšší viskozita pláště podle očekávání zpožďuje charakteristický čas jeho deformace, během kterého síly v plášti dojdou do rovnováhy. Neovlivňuje však průhyb na povrchu, při kterém k této relaxaci dochází. Naproti tomu tloušťka elastické litosféry průhyb povrchu ovlivňuje



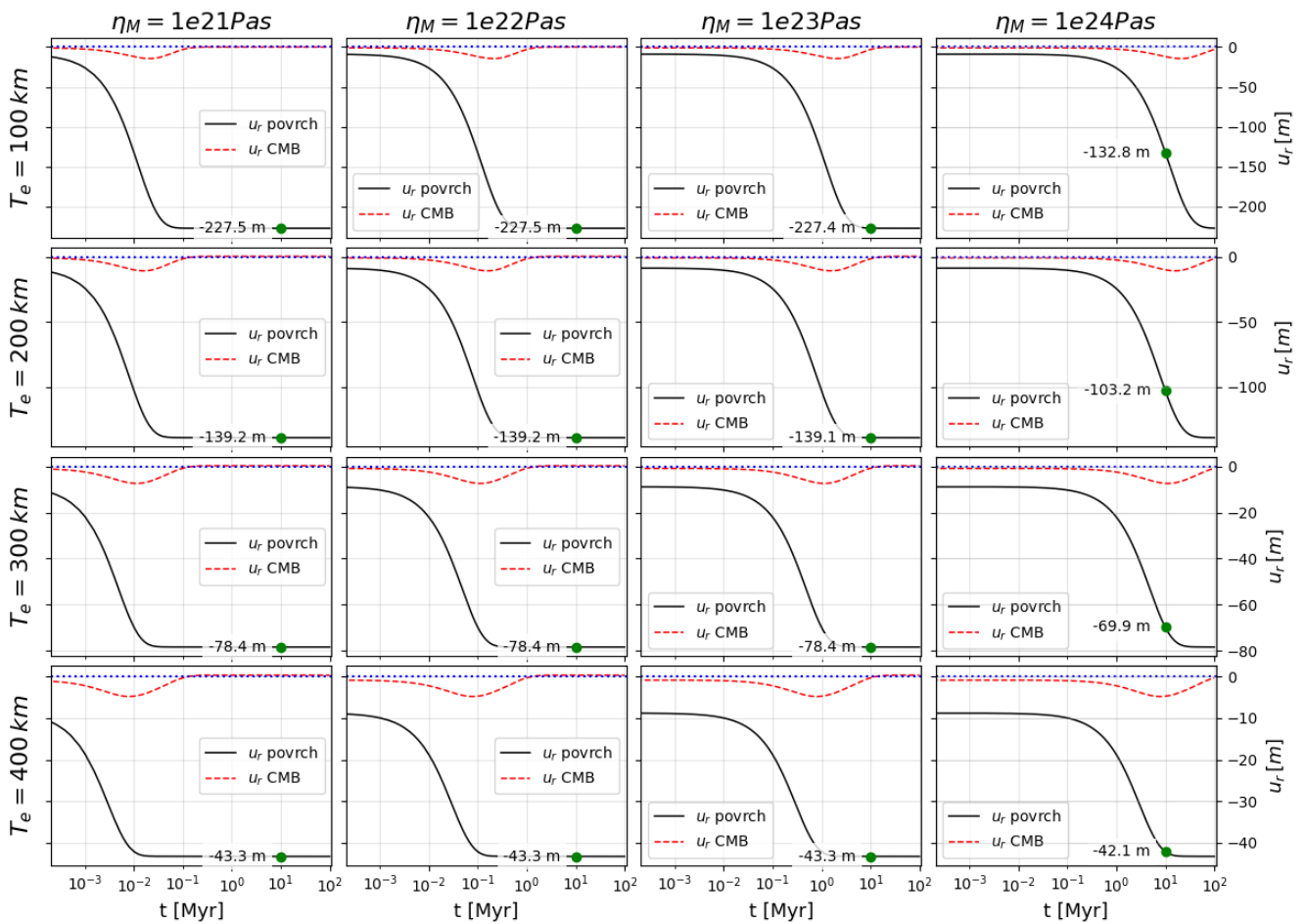
Obrázek 3.5: Přehled vývoje deformace povrchu Marsu při zatížení ledovcem o výšce $h_i = 1$ km pro různé tloušťky elastické litosféry T_e a různé viskozity pláště η_M . Elastická litosféra má ve všech bžích modelu konstantní viskozitu $\eta_{el} = 10^{27}$ Pa s, viz. profily viskozit 3.4. V jednotlivých bžích je zeleným bodem zvýrazněna deformace povrchu po 10 milionech let.

výrazně. V prvním sloupci obrázku 3.5 vidíme, že každých 100 km litosféry ovlivní deformaci na povrchu o desítky metrů. Má však také malý, ale nezanedbatelný, vliv i na charakteristický čas deformace pláště. Čím větší je mocnost litosféry, tím méně prostoru zaujímá plášť planety a tím rychleji v něm dojde k ustálení deformace. Ve všech modelech platí dříve poukázaná skutečnost, že v době, kdy posunutí na CMB dosáhne minima, se plášť přestává výrazně deformovat a dále se deformace povrchu odvíjí od deformace v litosféře.

V modelech s tloušťkou litosféry $T_e = 400$ km k hledaným 100 m deformace nedochází ani po 100 milionech let. Plášť v tomto časovém úseku umožňuje deformaci povrchu pouze zhruba 44 m a další průhyb je řízený deformací litosféry. Ta se ale při viskozitě 10^{27} Pa s výrazněji deformuje až na řádově delší časové škále, čímž vývoj během prvních 10 milionů let ve všech modelech z tohoto obrázku redukuje

pouze na deformaci pláště. V modelech s $T_e = 300$ km se po 10 milionech let povrch deformuje zhruba o 80 m, vyšší viskozita litosféry další deformaci spíše brání a také zde nenastává případ, kdy bychom dosáhli deformace blízké 100 m.

U modelů s $T_e = 100$ km, 200 km již pozorujeme dostatečně velkou deformaci. Tenčí litosféra umožňuje přenést větší část deformace na snadněji deformovatelný plášť a průhyb povrchu proto přesahuje 100 m. Do vývoje posunutí na povrchu v tomto případě může významně zasáhnout i viskozita pláště, která ovlivněním relaxační doby deformace pláště mění i fázi, ve které se deformace po 10 milionech let nachází. Vidíme, že pro model s $T_e = 200$ km a viskozitou pláště $\eta_M = 10^{24}$ Pa s plášť ještě plně nezrelaxoval a průhyb povrchu po 10 milionech let nabývá téměř přesně 100 m. V modelu s $T_e = 100$ km se stejnou viskozitou pláště je průhyb povrchu 133 m. Další zvýšení viskozity pláště η_M by průhyb mohlo snížit na 100 m.



Obrázek 3.6: Přehled vývoje deformace povrchu Marsu při zatížení ledovcem o výšce $h_i = 1$ km pro různé tloušťky elastické litosféry T_e a různé viskozity pláště η_M . Elastická litosféra má ve všech běžích modelu konstantní viskozitu $\eta_{el} = 10^{30}$ Pa s, viz. profily viskozit 3.4. V jednotlivých běžích je zeleným bodem zvýrazněno radiální posunutí bodu na povrchu po 10 milionech let.

Na druhém obrázku série grafů 3.6 jsou modely s viskozitou elastické litosféry $\eta_{el} = 10^{30}$ Pa s. Tyto grafy zobrazují vývoj deformace v modelech s tloušťkami elastické litosféry $T_e = 100$ km, 200 km, 300 km, 400 km a různými viskozitami pláště $\eta_M = 10^{21}$ Pa s, 10^{22} Pa s, 10^{23} Pa s, 10^{24} Pa s. Ostatní parametry jsou nastavené podle tabulky 2.1.

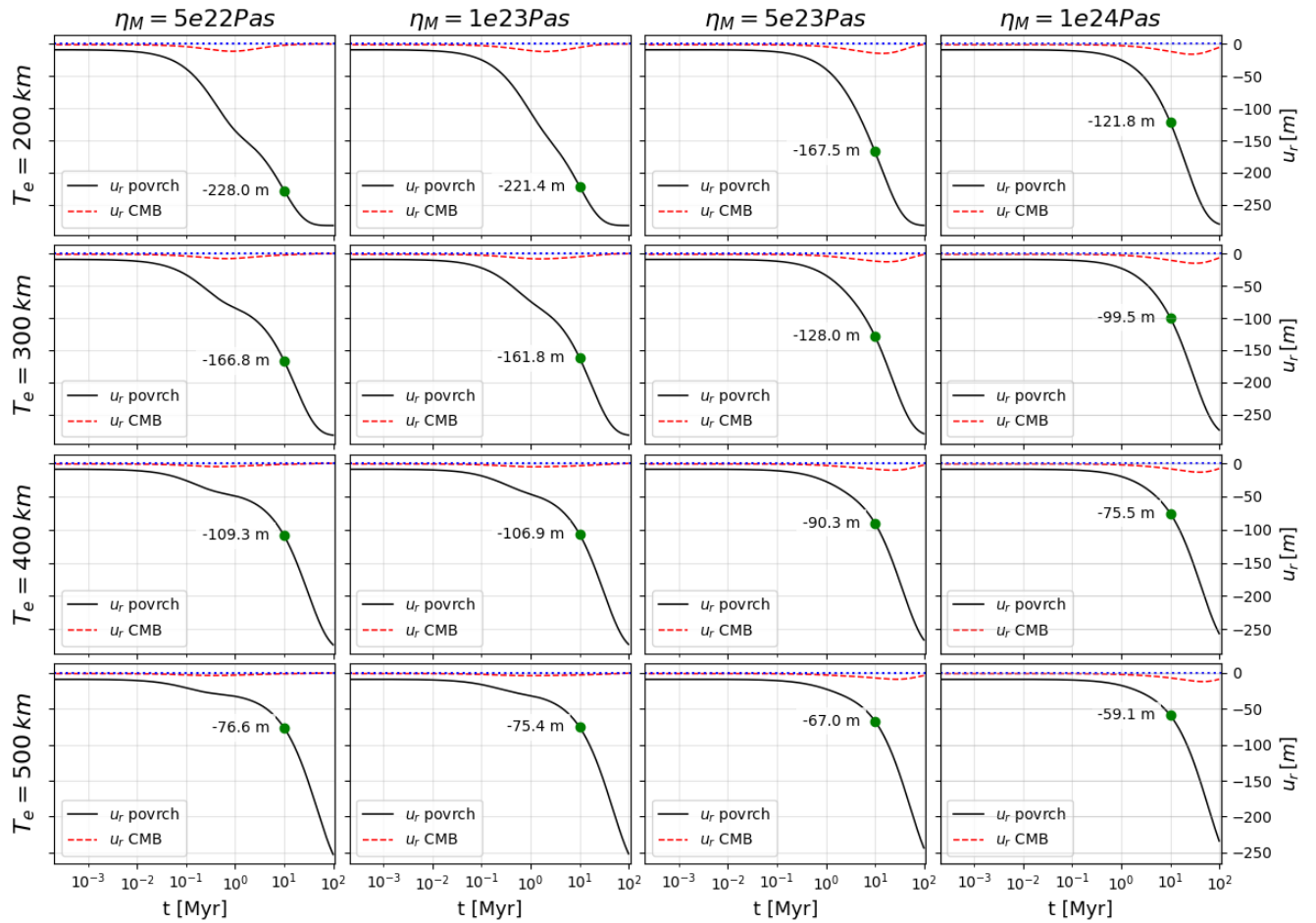
Zatímco na předchozím obrázku 3.5 se deformace litosféry výrazněji projevovала na škále nižších desítek milionů let, v případě viskozity $\eta_{el} = 10^{30}$ Pa s se jedná o vyšší desítky milionů let. Pakliže rychlost deformace litosféry v předchozím obrázku na krátkých časových škálách milionů let deformaci ovlivňovala málo, v případě těchto modelů už ji neovlivňuje téměř vůbec. Modely s $\eta_{el} = 10^{30}$ Pa s se v absolutních hodnotách průhybu povrchu od modelů s viskozitou litosféry $\eta_{el} = 10^{27}$ Pa s liší jen velmi omezeně, kvalitativně jsou také de facto stejné. Litosféra je svou viskozitou oproti plášti tuhá a na deformaci v prvních deseti milionech let se tedy pro viskozity litosféry $\eta_{el} \geq 10^{27}$ Pa s chová jako by byla čistě elastická ($\eta_{el} = 10^n$, kde $n \rightarrow \infty$).

V modelech na obrázku 3.7, kde ukazujeme chování modelů s nastavenou viskozitou litosféry $\eta_{el} = 10^{25}$ Pa s, je situace výrazně odlišná od předchozích modelů s viskozitami $\eta_{el} = 10^{27}$ Pa s a $\eta_{el} = 10^{30}$ Pa s. Nižší viskozita litosféry umožňuje její rychlejší deformaci a zatímco v předchozích modelech průhyb povrchu ovlivňovala především deformace pláště, nyní je ovlivněna velkou mírou i viskozitní deformací litosféry samotné. Protože na základě uvedených důvodů očekáváme v prvních 10 milionech let modelů větší deformaci než na předchozích obrázcích, volíme i parametry mocnosti litosféry a viskozity pláště vyšší, $T_e = 200$ km, 300 km, 400 km, 500 km a $\eta_M = 5 \cdot 10^{22}$ Pa s, 10^{23} Pa s, $5 \cdot 10^{23}$ Pa s, 10^{24} Pa s.

Rychlejší deformace litosféry je na obrázku 3.7 vidět nejlépe na prvním sloupci grafů s viskozitou pláště $\eta_M = 10^{21}$ Pa s. V nich plášť zrelaxuje zhruba během prvního milionu let. Vidíme tedy, že charakteristická doba deformace litosféry s viskozitou $\eta_{el} = 10^{25}$ Pa s, během které dojde k většině průhybu povrchu, jsou nyní řádově jednotky až desítky milionů let, čímž se její nízká viskozita výrazně propisuje do pozorovaného průhybu povrchu. Při mocnosti litosféry $T_e = 500$ km zde průhyb nedosahuje 100 m ani pro nízkou viskozitu pláště

Při nižší tloušťce litosféry již průhyb povrchu dosahuje hodnot okolo 100 m. Pro $T_e = 400$ km je to rozmezí viskozity pláště $\eta_M = 5 \cdot 10^{22} - 5 \cdot 10^{23}$ Pa s. Pro tloušťku $T_e = 300$ km je průhyb povrchu po 10 milionech let při viskozitě pláště $\eta_M = 10^{24}$ Pa s také blízko 100 m. Nicméně v tomto případě se již viskozita pláště a litosféry od sebe příliš neliší a takový viskozitní profil je nepravděpodobný. Podobně v případě $T_e = 200$ km by pro splnění průhybu povrchu pravděpodobně musela viskozita pláště být tak velká, že by se litosféra od pláště ve viskozitě již vůbec nelišila, nebo by dokonce plášť byl tužší než litosféra.

Analýza výsledků modelů s po částech konstantní viskozitou ukazuje, že pro průhyb povrchu odpovídající měření přístrojem SHARAD je při nastavení realistických parametrů na základě zjištění z mise InSight potřeba tloušťka elastické litosféry alespoň 200 km a zároveň by neměla být větší než 500 km. Vývoj deformace povrchu v konkrétních modelech ovlivňuje také viskozita litosféry a viskozita pláště. Viskozita litosféry především tím, zda se díky nižší viskozitě také výrazněji podílí na deformaci již v době do 10 milionů let nebo ne. Viskozita pláště tím, že



Obrázek 3.7: Přehled vývoje deformace povrchu Marsu při zatížení ledovcem o výšce $h_i = 1$ km pro různé tloušťky elastické litosféry T_e a různé viskozity pláště η_M . Elastická litosféra má ve všech běžích modelu konstantní viskozitu $\eta_{el} = 10^{25}$ Pa s, viz. profily viskozit 3.4. V jednotlivých běžích je zeleným bodem zvýrazněno radiální posunutí bodu na povrchu po 10 milionech let.

vyšší viskozita zpožďuje relaxaci pláště a u modelů s tenčí litosférou ji umožňuje prodloužit do té míry, že po 10 milionech let ještě není zcela zrelaxovaný.

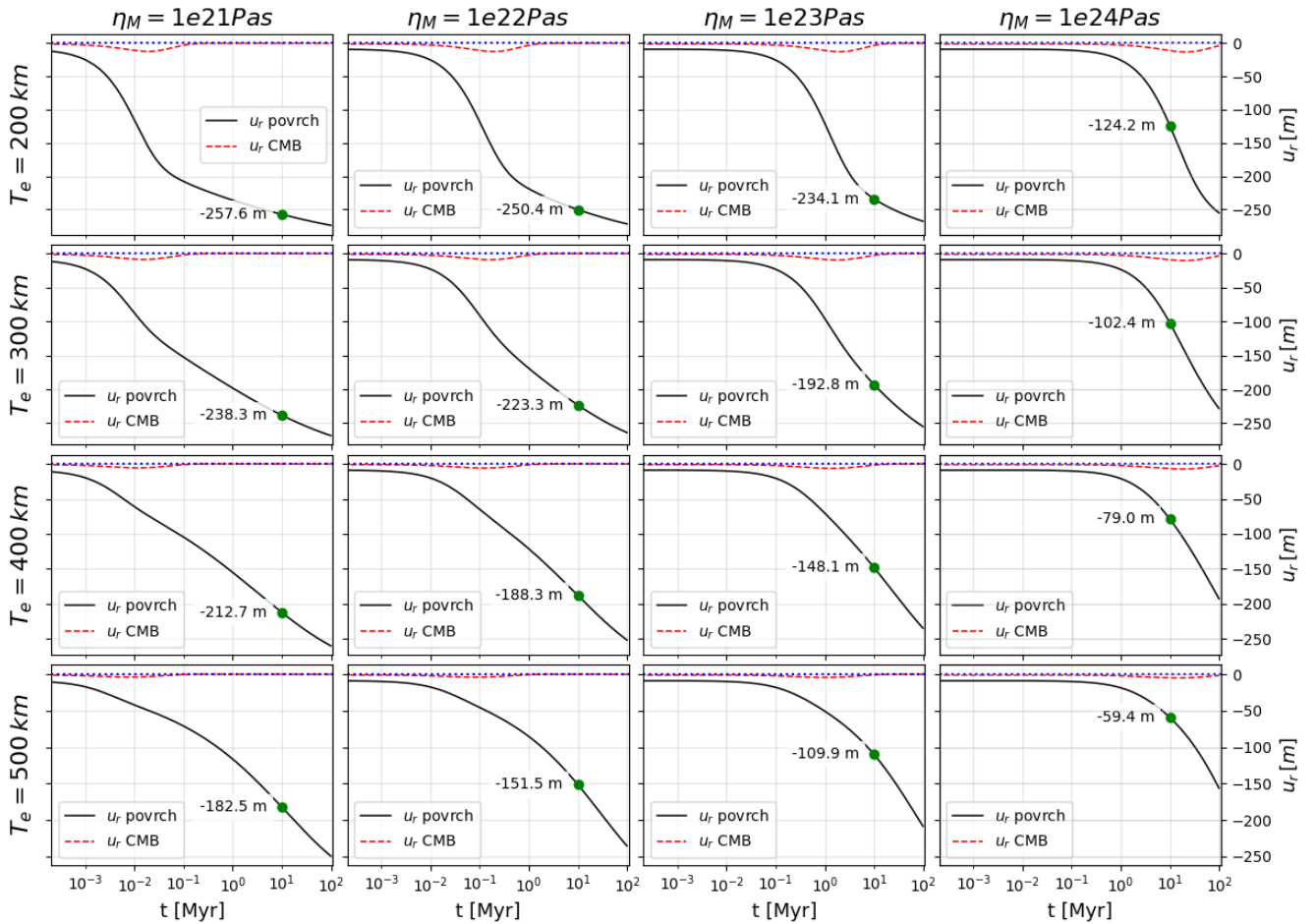
3.2 Arrheniovské modely

Nyní uvedeme sérii výpočtů, ve kterých viskozitu v elastické litosféře neuvažujeme dále konstantní jako v předchozí kapitole, nýbrž ji definujeme následujícím Arrheniovským vztahem. Viskozita pláště bude nadále konstantní. Arrheniovský profil zmírní skok ve viskozitě mezi vrstvami v okolí hranice mezi litosférou a pláštěm. Litosféra bude u povrchu dále velice tuhá, s hloubkou ale bude měkkší, což se projeví i pozvolnějším průběhem deformace. Použitý Arrheniovský vztah

má následující tvar:

$$\eta(r) = \eta_s \exp \left[-\log \left(\frac{\eta_s}{\eta_M} \right) \frac{R_s - r}{T_e} \right], \quad (3.1)$$

kde $\eta(r)$ je viskozita modelu na poloměru r , η_s je viskozita zadaná na povrchu, η_M je viskozita pláště, $R_s - r$ je hloubka odpovídající poloměru r a T_e je tloušťka elastické litosféry. Pod litosférou v plášti je viskozita konstantní s hodnotou η_M .

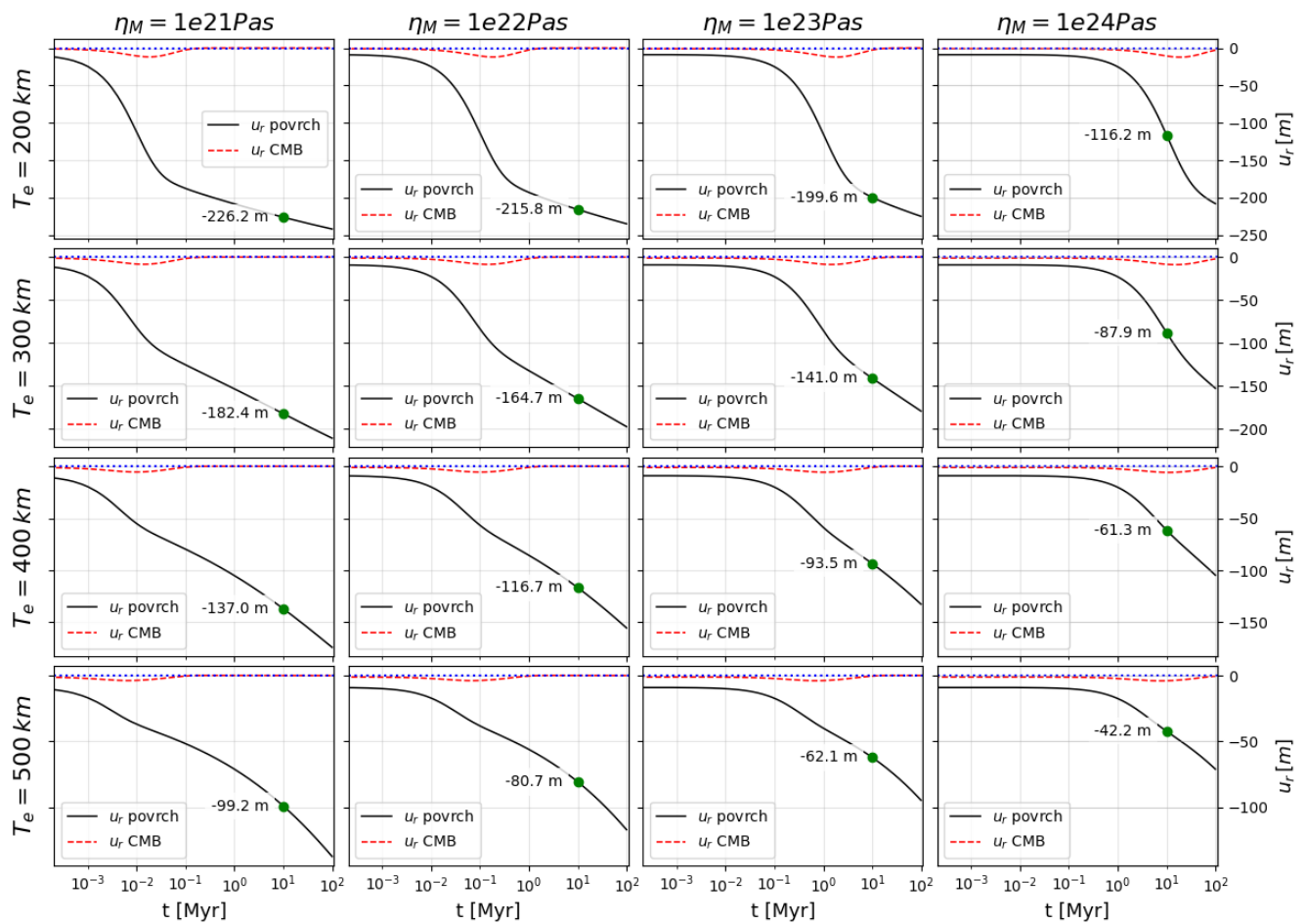


Obrázek 3.8: Přehled vývoje deformace povrchu Marsu při zatížení ledovcem o výšce $h_i = 1$ km pro různé tloušťky elastické litosféry T_e a různé viskozity pláště η_M . Elastická litosféra má ve všech běžích modelu viskozitu popsanou Arrheniovským vztahem 3.1 s viskozitou na povrchu $\eta_s = 10^{27}$ Pa s. V jednotlivých běžích je zeleným bodem zvýrazněno radiální posunutí bodu na povrchu po 10 milionech let.

Na prvním obrázku 3.8 je ukázka vývoje deformace na povrchu a na CMB v modelech s viskozitou na povrchu $\eta_s = 10^{27}$ Pa s. Oproti modelům s po částech konstantní viskozitou je v těchto modelech vidět výrazně větší deformace na povrchu způsobená právě Arrheniovským profilem viskozity v litosféře. Vývoj deformace

také už není rozdělený na deformaci pláště na kratší časové škále a deformaci litosféry na delší časové škále, ale k deformaci dochází průběžně v celém vymezeném časovém okně.

Tloušťku elastické litosféry proto v těchto modelech pro ukázky volíme větší, konkrétně $T_e = 200$ km, 300 km, 400 km, 500 km. K průhybu povrchu 100 m dochází jen ve dvou modelech. První s viskozitou pláště $\eta_M = 10^{24}$ Pa s a tloušťkou litosféry $T_e = 300$ km, druhý s viskozitou pláště $\eta_M = 10^{23}$ Pa s a tloušťkou litosféry $T_e = 500$ km. Vidíme tedy celkově velký nárůst v požadavku tloušťky litosféry, abychom pozorovali správný průhyb povrchu.

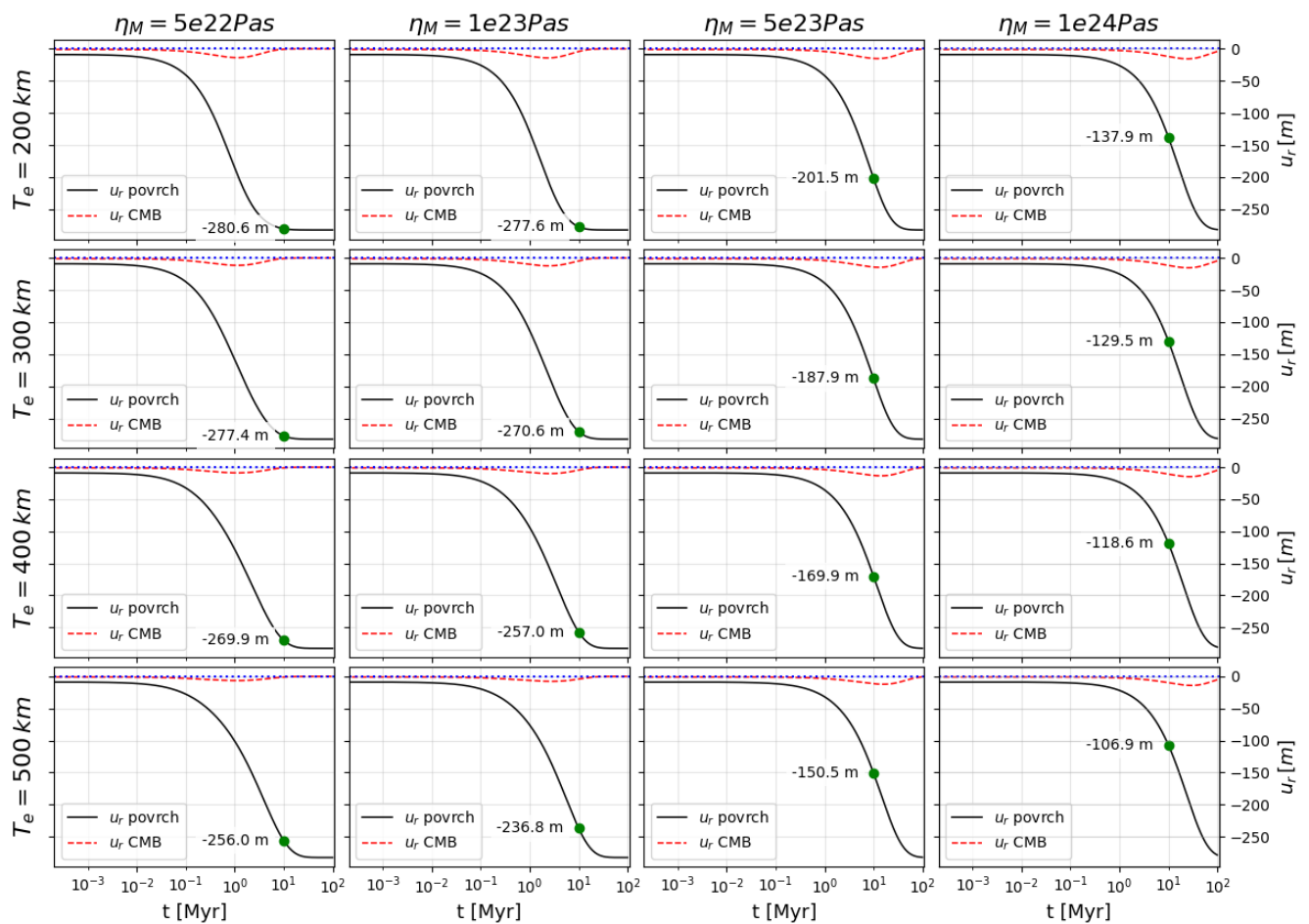


Obrázek 3.9: Přehled vývoje deformace povrchu Marsu při zatížení ledovcem o výšce $h_i = 1$ km pro různé tloušťky elastické litosféry T_e a různé viskozity pláště η_M . Elastická litosféra má ve všech běžích modelu viskozitu popsanou Arrheniovským vztahem 3.1 s viskozitou na povrchu $\eta_s = 10^{30}$ Pa s. V jednotlivých běžích je zeleným bodem zvýrazněno radiální posunutí bodu na povrchu po 10 milionech let.

Na obrázku 3.9 jsou grafy deformace Arrheniovského modelu s viskozitou u povrchu $\eta_s = 10^{30}$ Pa s. Díky vyšší viskozitě je zde elastická litosféra tužší než v před-

chozím případě a v rámci nastavení parametrů vidíme více modelů odpovídajících požadovanému průhybu povrchu. Modely s tloušťkou litosféry $T_e = 200$ km se na povrchu deformují příliš. Modely s $T_e = 300$ km při nastavení viskozity pláště η_M mezi 10^{23} Pa s a 10^{24} Pa s by už splnil průhyb povrchu okolo 100 m. V modelech s viskozitami pláště podobnými viskozitě pláště Země, 10^{21} Pa s a 10^{22} Pa s, je vidět 100 m průhyb povrchu v modelech s $T_e \geq 400$ km.

Na posledním obrázku 3.10 je ukázka deformace Marsu při viskozitě na povrchu $\eta_s = 10^{25}$ Pa s. Při stejném nastavení modelových parametrů jako u modelů s počátek konstantní viskozitou však s Arrheniovskou viskozitou litosféry dostáváme ve všech modelech pouze deformaci povrchu větší než 100 m. U těchto modelů je tedy v každém případě potřeba větší tloušťka litosféry než 500 km.



Obrázek 3.10: Přehled vývoje deformace povrchu Marsu při zatížení ledovcem o výšce $h_i = 1$ km pro různé tloušťky elastické litosféry T_e a různé viskozity pláště η_M . Elastická litosféra má ve všech běžích modelu viskozitu popsanou Arrheniovským vztahem 3.1 s viskozitou na povrchu $\eta_s = 10^{25}$ Pa s. V jednotlivých běžích je zeleným bodem zvýrazněno radiální posunutí bodu na povrchu po 10 milionech let.

Diskuze a závěr

Otestovali jsme vliv parametrů pláště a litosféry Marsu na deformaci povrchu zatíženého pokrývkou ledu odpovídající severní polární ledové čepičce. Využili jsme pro to vlastní program pro výpočet Maxwellovské viskoelastické deformace kulové slupky ve formulaci sférických harmonických funkcí. Parametry modelu jsme nastavili podle současných studií založených na datech z mise InSight. Naše výsledky jsou velice podobné novějším poznatkům o tloušťce litosféry Marsu, například Broquet a kol. (2020) uvádějící 330 – 450 km, Smrekar a kol. (2018) uvádějící tloušťku na severním pólu větší než 300 km, nebo Khan a kol. (2021) na základě dat z mise InSight uvádí tloušťku elastické litosféry okolo 500 km.

Spočítali jsme odezvu povrchu pro kombinace tloušťky litosféry $T_e = 100$ km, 200 km, 300 km, 400 km a 500 km, viskozity litosféry $\eta_{el} = 10^{25}$ Pa s, 10^{27} Pa s a 10^{30} Pa s a viskozity pláště $\eta_M = 10^{21}$ Pa s, 10^{22} Pa s, 10^{23} Pa s a 10^{24} Pa s. Ukázali jsme, že v modelech s po částech konstantní viskozitou pro vysokou viskozitu litosféry ($\geq 10^{27}$ Pa s) je deformace povrchu závislá především na tloušťce litosféry a reálnému průhybu povrchu 100 m odpovídají modely s tloušťkou litosféry $T_e = 200 - 300$ km. V modelech s výrazně méně vychladlou litosférou o viskozitě 10^{25} Pa s by její tloušťka T_e musela být větší než 300 km.

V modelech s Arrheniovskou viskozitou litosféry je deformace povrchu obecně větší než v modelech s po částech konstantní viskozitou. Výsledky modelů s viskozitou na povrchu $\eta_s = 10^{25}$ Pa s ukazují, že by celý plášť Marsu musel být tuhý a litosféra by musela mít tloušťku $T_e \geq 500$ km. V případě $\eta_s = 10^{27}$ Pa s deformaci 100 m po 10 milionech let odpovídá při viskozitě pláště $\eta_M = 10^{23}$ Pa s tloušťka $T_e = 500$ km, případně model s vyšší viskozitou pláště v kombinaci s tenčí litosférou, vždy však s tloušťkou $T_e \geq 300$ km. V případě nejvíce vychladlé litosféry s viskozitou u povrchu $\eta_s = 10^{30}$ Pa s jsme dospěli k výsledku, že s velice tuhým pláštěm $\eta_M = 10^{24}$ Pa s dostačuje tloušťka litosféry pouze $T_e = 250$ km. Snížíme-li však viskozitu pláště η_M o jeden řád, tloušťka litosféry již musí být téměř 400 km. Při viskozitě pláště podobné hodnotám v plášti Země $\eta_M = 10^{21} - 10^{22}$ Pa s litosféra musí mít tloušťku $T_e \geq 400$ km.

Naše výsledky se tak v tloušťce elastické litosféry shodují se zmíněnými články Khan a kol. (2021), Broquet a kol. (2020), Smrekar a kol. (2018) a celková deformace povrchu výrazně závisí právě na ní. Naše modely však uvažují poměrně jednoduchou reologii. Vidíme, že pouhý přechod k viskozitě definované Arrheniovským vztahem znamenal výraznou změnu v charakteru i míře deformace. Neostrý přechod mezi viskozitami litosféry a pláště umožnil deformaci na všech časových škálách, namísto izolované deformace pláště v řádu jednotek milionů let a deformace litosféry v řádu desítek až stovek milionů let. Nabízí se, že v modelech například s viskozitou závislou na teplotě by viskozitní profil lépe reflektoval reálný profil viskozity v celém plášti Marsu.

Seismická aktivita na Marsu a vulkanická oblast Tharsis jsou také důkazem toho, že pod povrchem stále probíhá či nedávno probíhala nějaká aktivita. Malou deformaci pod ledovými čepičkami by tak mohl vysvětlit i nějaký dynamický jev, nemusí záviset pouze na stavu elastické litosféry. Broquet a Andrews-Hanna (2022)

uvádí důkazy existence velké plumy v plášti Marsu v oblasti Cerberus Fossae spojenou právě s nedávnou vulkanickou činností. Zavedením objemových sil do modelu by se dala prozkoumat i možnost existence podobné plumy v oblasti severního pólu.

Seznam použité literatury

- AITTA, A. (2012). Venus' internal structure, temperature and core composition. *Icarus*, **218**(2), 967–974. ISSN 0019-1035. doi: 10.1016/j.icarus.2012.01.007. URL <http://dx.doi.org/10.1016/j.icarus.2012.01.007>.
- ARKANI-HAMED, J. (2012). Life of the Martian dynamo. *Physics of the Earth and Planetary Interiors*, **196–197**, 83–96. ISSN 0031-9201. doi: 10.1016/j.pepi.2012.02.008. URL <http://dx.doi.org/10.1016/j.pepi.2012.02.008>.
- BELLEGUIC, V., LOGNONNÉ, P. a WIECZOREK, M. (2005). Constraints on the Martian lithosphere from gravity and topography data. *Journal of Geophysical Research: Planets*, **110**(E11). ISSN 0148-0227. doi: 10.1029/2005je002437. URL <http://dx.doi.org/10.1029/2005JE002437>.
- BERGER, J. A., SCHMIDT, M. E., GELLERT, R., CAMPBELL, J. L., KING, P. L., FLEMMING, R. L., MING, D. W., CLARK, B. C., PRADLER, I., VANBOMMEL, S. J. V., MINITTI, M. E., FAIRÉN, A. G., BOYD, N. I., THOMPSON, L. M., PERRETT, G. M., ELLIOTT, B. E. a DESOUZA, E. (2016). A global Mars dust composition refined by the Alpha-Particle X-ray Spectrometer in Gale Crater. *Geophysical Research Letters*, **43**(1), 67–75. ISSN 1944-8007. doi: 10.1002/2015gl066675. URL <http://dx.doi.org/10.1002/2015GL066675>.
- BROQUET, A. a ANDREWS-HANNA, J. C. (2022). Geophysical evidence for an active mantle plume underneath Elysium Planitia on Mars. *Nature Astronomy*. ISSN 2397-3366. doi: 10.1038/s41550-022-01836-3. URL <http://dx.doi.org/10.1038/s41550-022-01836-3>.
- BROQUET, A., WIECZOREK, M. A. a FA, W. (2020). Flexure of the Lithosphere Beneath the North Polar Cap of Mars: Implications for Ice Composition and Heat Flow. *Geophysical Research Letters*, **47**(5). ISSN 1944-8007. doi: 10.1029/2019gl086746. URL <http://dx.doi.org/10.1029/2019GL086746>.
- DZIEWONSKI, A. M. a ANDERSON, D. L. (1981). Preliminary reference Earth model. *Physics of the Earth and Planetary Interiors*, **25**(4), 297–356. ISSN 0031-9201. doi: 10.1016/0031-9201(81)90046-7. URL [http://dx.doi.org/10.1016/0031-9201\(81\)90046-7](http://dx.doi.org/10.1016/0031-9201(81)90046-7).
- FRIIS-CHRISTENSEN, E., LÜHR, H. a HULOT, G. (2006). Swarm: A constellation to study the Earth's magnetic field. *Earth, Planets and Space*, **58**(4), 351–358. ISSN 1880-5981. doi: 10.1186/bf03351933. URL <http://dx.doi.org/10.1186/BF03351933>.
- HELFFRICH, G. (2017). Mars core structure—concise review and anticipated insights from InSight. *Progress in Earth and Planetary Science*, **4**(1). ISSN 2197-4284. doi: 10.1186/s40645-017-0139-4. URL <http://dx.doi.org/10.1186/s40645-017-0139-4>.

- JOHNSON, C. (2000). Lithospheric Loading by the Northern Polar Cap on Mars. *Icarus*, **144**(2), 313–328. ISSN 0019-1035. doi: 10.1006/icar.1999.6310. URL <http://dx.doi.org/10.1006/icar.1999.6310>.
- KHAN, A., CEYLAN, S., VAN DRIEL, M., GIARDINI, D., LOGNONNÉ, P., SAMUEL, H., SCHMERR, N. C., STÄHLER, S. C., DURAN, A. C., HUANG, Q., KIM, D., BROQUET, A., CHARALAMBOUS, C., CLINTON, J. F., DAVIS, P. M., DRILLEAU, M., KARAKOSTAS, F., LEKIC, V., MCLENNAN, S. M., MAGUIRE, R. R., MICHAUT, C., PANNING, M. P., PIKE, W. T., PINOT, B., PLASMAN, M., SCHOLZ, J.-R., WIDMER-SCHNIDRIG, R., SPOHN, T., SMREKAR, S. E. a BANERDT, W. B. (2021). Upper mantle structure of Mars from InSight seismic data. *Science*, **373**(6553), 434–438. ISSN 1095-9203. doi: 10.1126/science.abf2966. URL <http://dx.doi.org/10.1126/science.abf2966>.
- KNAPMEYER-ENDRUN, B., PANNING, M. P., BISSIG, F., JOSHI, R., KHAN, A., KIM, D., LEKIĆ, V., TAUZIN, B., THARIMENA, S., PLASMAN, M., COMPAIRE, N., GARCIA, R. F., MARGERIN, L., SCHIMMEL, M., STUTZMANN, , SCHMERR, N., BOZDAĞ, E., PLESA, A.-C., WIECZOREK, M. A., BROQUET, A., ANTONANGELI, D., MCLENNAN, S. M., SAMUEL, H., MICHAUT, C., PAN, L., SMREKAR, S. E., JOHNSON, C. L., BRINKMAN, N., MITTELHOLZ, A., RIVOLDINI, A., DAVIS, P. M., LOGNONNÉ, P., PINOT, B., SCHOLZ, J.-R., STÄHLER, S., KNAPMEYER, M., VAN DRIEL, M., GIARDINI, D. a BANERDT, W. B. (2021). Thickness and structure of the martian crust from InSight seismic data. *Science*, **373**(6553), 438–443. ISSN 1095-9203. doi: 10.1126/science.abf8966. URL <http://dx.doi.org/10.1126/science.abf8966>.
- KNIBBE, J. S., RIVOLDINI, A., LUGINBUHL, S. M., NAMUR, O., CHARLIER, B., MEZOUAR, M., SIFRE, D., BERNDT, J., KONO, Y., NEUVILLE, D. R., VAN WESTRENNEN, W. a VAN HOOLST, T. (2021). Mercury’s Interior Structure Constrained by Density and P-Wave Velocity Measurements of Liquid Fe-Si-C Alloys. *Journal of Geophysical Research: Planets*, **126**(1). ISSN 2169-9100. doi: 10.1029/2020je006651. URL <http://dx.doi.org/10.1029/2020JE006651>.
- KONOPLIV, A. S., YODER, C. F., STANDISH, E. M., YUAN, D.-N. a SJOGREN, W. L. (2006). A global solution for the Mars static and seasonal gravity, Mars orientation, Phobos and Deimos masses, and Mars ephemeris. *Icarus*, **182**(1), 23–50. ISSN 0019-1035. doi: 10.1016/j.icarus.2005.12.025. URL <http://dx.doi.org/10.1016/j.icarus.2005.12.025>.
- KUANG, W., JIANG, W. a WANG, T. (2008). Sudden termination of Martian dynamo?: Implications from subcritical dynamo simulations. *Geophysical Research Letters*, **35**(14). ISSN 1944-8007. doi: 10.1029/2008gl034183. URL <http://dx.doi.org/10.1029/2008GL034183>.
- LE MAISTRE, S., RIVOLDINI, A., CALDIERO, A., YSEBOODT, M., BALAND, R.-M., BEUTHE, M., VAN HOOLST, T., DEHANT, V., FOLKNER, W. M., BUCCINO, D., KAHAN, D., MARTY, J.-C., ANTONANGELI, D., BADRO, J.,

- DRILLEAU, M., KONOPLIV, A., PÉTERS, M.-J., PLESA, A.-C., SAMUEL, H., TOSI, N., WIECZOREK, M., LOGNONNÉ, P., PANNING, M., SMREKAR, S. a BANERDT, W. B. (2023). Spin state and deep interior structure of Mars from InSight radio tracking. *Nature*, **619**(7971), 733–737. ISSN 1476-4687. doi: 10.1038/s41586-023-06150-0. URL <http://dx.doi.org/10.1038/s41586-023-06150-0>.
- MARTINEC, Z. (2019). *Principles of Continuum Mechanics: A Basic Course for Physicists*. Springer International Publishing. ISBN 9783030053901. doi: 10.1007/978-3-030-05390-1. URL <http://dx.doi.org/10.1007/978-3-030-05390-1>.
- MATAS, J. (1995). Mantle viscosity and density structure.
- MCGOVERN, P. J., SOLOMON, S. C., SMITH, D. E., ZUBER, M. T., SIMONS, M., WIECZOREK, M. A., PHILLIPS, R. J., NEUMANN, G. A., AHARONSON, O. a HEAD, J. W. (2004). Correction to “Localized gravity/topography admittance and correlation spectra on Mars: Implications for regional and global evolution”. *Journal of Geophysical Research: Planets*, **109**(E7). ISSN 0148-0227. doi: 10.1029/2004je002286. URL <http://dx.doi.org/10.1029/2004JE002286>.
- MOROZ, V. (1981). The atmosphere of Venus. *Space Science Reviews*, **29** (1). ISSN 1572-9672. doi: 10.1007/bf00177144. URL <http://dx.doi.org/10.1007/BF00177144>.
- NEUMANN, G. A., ZUBER, M. T., WIECZOREK, M. A., MCGOVERN, P. J., LEMOINE, F. G. a SMITH, D. E. (2004). Crustal structure of Mars from gravity and topography. *Journal of Geophysical Research: Planets*, **109**(E8). ISSN 0148-0227. doi: 10.1029/2004je002262. URL <http://dx.doi.org/10.1029/2004JE002262>.
- NOLET, G. (1987). *Seismic wave propagation and seismic tomography*, page 1–23. Springer Netherlands. ISBN 9789400938991. doi: 10.1007/978-94-009-3899-1_1. URL http://dx.doi.org/10.1007/978-94-009-3899-1_1.
- PHILLIPS, R. J., ZUBER, M. T., SMREKAR, S. E., MELLON, M. T., HEAD, J. W., TANAKA, K. L., PUTZIG, N. E., MILKOVICH, S. M., CAMPBELL, B. A., PLAUT, J. J., SAFAEINILI, A., SEU, R., BICCARI, D., CARTER, L. M., PICARDI, G., OROSEI, R., MOHIT, P. S., HEGGY, E., ZUREK, R. W., EGAN, A. F., GIACOMONI, E., RUSSO, F., CUTIGNI, M., PETTINELLI, E., HOLT, J. W., LEUSCHEN, C. J. a MARINANGELI, L. (2008). Mars North Polar Deposits: Stratigraphy, Age, and Geodynamical Response. *Science*, **320**(5880), 1182–1185. ISSN 1095-9203. doi: 10.1126/science.1157546. URL <http://dx.doi.org/10.1126/science.1157546>.
- POULET, F., BIBRING, J.-P., MUSTARD, J. F., GENDRIN, A., MANGOLD, N., LANGEVIN, Y., ARVIDSON, R. E., GONDET, B. a GOMEZ, C. (2005). Phyllosilicates on Mars and implications for early martian climate. *Nature*, **438**(7068), 623–627. ISSN 1476-4687. doi: 10.1038/nature04274. URL <http://dx.doi.org/10.1038/nature04274>.

- SMREKAR, S. E., LOGNONNÉ, P., SPOHN, T., BANERDT, W. B., BREUER, D., CHRISTENSEN, U., DEHANT, V., DRILLEAU, M., FOLKNER, W., FUJI, N., GARCIA, R. F., GIARDINI, D., GOLOMBEK, M., GROTT, M., GUDKOVA, T., JOHNSON, C., KHAN, A., LANGLAIS, B., MITTELHOLZ, A., MOCQUET, A., MYHILL, R., PANNING, M., PERRIN, C., PIKE, T., PLESA, A.-C., RIVOLDINI, A., SAMUEL, H., STÄHLER, S. C., VAN DRIEL, M., VAN HOOLST, T., VERHOEVEN, O., WEBER, R. a WIECZOREK, M. (2018). Pre-mission InSights on the Interior of Mars. *Space Science Reviews*, **215**(1). ISSN 1572-9672. doi: 10.1007/s11214-018-0563-9. URL <http://dx.doi.org/10.1007/s11214-018-0563-9>.
- STÄHLER, S. C., KHAN, A., BANERDT, W. B., LOGNONNÉ, P., GIARDINI, D., CEYLAN, S., DRILLEAU, M., DURAN, A. C., GARCIA, R. F., HUANG, Q., KIM, D., LEKIC, V., SAMUEL, H., SCHIMMEL, M., SCHMERR, N., SOLLBERGER, D., ÉLÉONORE STUTZMANN, XU, Z., ANTONANGELI, D., CHARALAMBOUS, C., DAVIS, P. M., IRVING, J. C. E., KAWAMURA, T., KNAPMEYER, M., MAGUIRE, R., MARUSIAK, A. G., PANNING, M. P., PERRIN, C., PLESA, A.-C., RIVOLDINI, A., SCHMELZBACH, C., ZENHÄUSERN, G., ÉRIC BEUCLER, CLINTON, J., DAHMEN, N., VAN DRIEL, M., GUDKOVA, T., HORLESTON, A., PIKE, W. T., PLASMAN, M. a SMREKAR, S. E. (2021). Seismic detection of the martian core. *Science*, **373**(6553), 443–448. doi: 10.1126/science.abi7730. URL <https://www.science.org/doi/abs/10.1126/science.abi7730>.
- TOUMA, J. a WISDOM, J. (1993). The Chaotic Obliquity of Mars. *Science*, **259** (5099), 1294–1297. ISSN 1095-9203. doi: 10.1126/science.259.5099.1294. URL <http://dx.doi.org/10.1126/science.259.5099.1294>.
- VAN HOOLST, T., SOHL, F., HOLIN, I., VERHOEVEN, O., DEHANT, V. a SPOHN, T. (2007). Mercury’s Interior Structure, Rotation, and Tides. *Space Science Reviews*, **132**(2–4), 203–227. ISSN 1572-9672. doi: 10.1007/s11214-007-9202-6. URL <http://dx.doi.org/10.1007/s11214-007-9202-6>.
- VARŠALOVIČ, D., MOSKALEV, A. a CHERSONSKIJ, V. (1988). *Quantum Theory of Angular Momentum: Irreducible Tensors, Spherical Harmonics, Vector Coupling Coefficients, 3nj Symbols*. World Scientific Pub. URL <https://books.google.cz/books?id=vyKNswEACAAJ>.
- WATTERS, T. R., MCGOVERN, P. J. a IRWIN III, R. P. (2007). Hemispheres Apart: The Crustal Dichotomy on Mars. *Annual Review of Earth and Planetary Sciences*, **35**(1), 621–652. ISSN 1545-4495. doi: 10.1146/annurev.earth.35.031306.140220. URL <http://dx.doi.org/10.1146/annurev.earth.35.031306.140220>.
- YODER, C. F., KONOPLIV, A. S., YUAN, D. N., STANDISH, E. M. a FOLKNER, W. M. (2003). Fluid Core Size of Mars from Detection of the Solar Tide. *Science*, **300**(5617), 299–303. ISSN 1095-9203. doi: 10.1126/science.1079645. URL <http://dx.doi.org/10.1126/science.1079645>.
- ZUBER, M. T., SOLOMON, S. C., PHILLIPS, R. J., SMITH, D. E., TYLER, G. L., AHARONSON, O., BALMINO, G., BANERDT, W. B., HEAD, J. W.,

- JOHNSON, C. L., LEMOINE, F. G., MCGOVERN, P. J., NEUMANN, G. A., ROWLANDS, D. D. a ZHONG, S. (2000). Internal Structure and Early Thermal Evolution of Mars from Mars Global Surveyor Topography and Gravity. *Science*, **287**(5459), 1788–1793. ISSN 1095-9203. doi: 10.1126/science.287.5459.1788. URL <http://dx.doi.org/10.1126/science.287.5459.1788>.
- ČADEK, O., BĚHOUNKOVÁ, M., TOBIE, G. a CHOBLET, G. (2017). Viscoelastic relaxation of Enceladus's ice shell. *Icarus*, **291**, 31–35. ISSN 0019-1035. doi: 10.1016/j.icarus.2017.03.011. URL <http://dx.doi.org/10.1016/j.icarus.2017.03.011>.

Seznam obrázků

1.1	Planeta Mars. Významnými útvary na fotografii jsou Valles Marineris v dolní části, pohoří Elysium Mons vlevo se sopkou Olympus Mons na úplném okraji a ledová čepička na severním pólu. Kompozitní fotografie vytvořená z tisíce snímků pořízených během programu Viking. Obrázek je převzatý z https://photojournal.jpl.nasa.gov/catalog/PIA00 Courtesy NASA/JPL/USGS	4
1.2	Topografie Marsu. Ukazuje členitý povrch Marsu s výraznými útvary jako hornaté Elysium Mons či impaktním kráterem Hellas Planitia. Viditelná je dichotomie mezi severní a jižní polokoulí. Obrázek je převzatý z https://photojournal.jpl.nasa.gov/catalog/PIA02031 , Courtesy NASA/JPL/GSFC	5
1.3	Ledová čepička na severním pólu Marsu a snímek průřezu touto vrstvou ledu po modré úseče, jak ho vidí přístroj SHARAD (Shallow Radar). Obrázek je převzatý z https://photojournal.jpl.nasa.gov/catalog/PIA20029 , Courtesy NASA/JPL-Caltech/Sapienza University of Rome	7
2.1	Rozdělení kulové slupky na vrstvy. Nalevo je diskretizace u povrchu, napravo u spodní hranice slupky. Vnitřek kulové slupky je naznačený zelenou barvou. Hranice vrstev jsou značené plnou čarou, středy vrstev čárkovaně.	14
3.1	Test rozlišení modelu pro různé velikosti časového kroku, $\Delta t = 10^9\text{s}$, 10^{10}s , 10^{11}s , 10^{12}s , 10^{13}s a 10^{14}s , v modelu se 150 vrstvami, tloušťkou elastické litosféry $T_e = 100\text{ km}$, viskozitou elastické litosféry $\eta_{el} = 10^{27}\text{ Pa s}$ a viskozitou pláště $\eta_M = 10^{23}\text{ Pa s}$	16
3.2	Test vývoje deformace modelu pro různé prostorové rozlišení, $N = 150, 300, 400, 500$ vrstev, v modelu s časovým krokem $\Delta t = 10^9\text{s}$, tloušťkou elastické litosféry $T_e = 100\text{ km}$, viskozitou elastické litosféry $\eta_{el} = 10^{27}\text{ Pa s}$ a viskozitou pláště $\eta_M = 10^{23}\text{ Pa s}$	17
3.3	Přiblížení testu vývoje deformace modelu pro různé prostorové rozlišení, $N = 150, 300, 400, 500$ vrstev, v modelu s časovým krokem $\Delta t = 10^9\text{s}$, tloušťkou elastické litosféry $T_e = 100\text{ km}$, viskozitou elastické litosféry $\eta_{el} = 10^{27}\text{ Pa s}$ a viskozitou pláště $\eta_M = 10^{23}\text{ Pa s}$. Přiblížení je zaměřené na dobu od 3 do 55 milionů let.	18
3.4	Profily viskozity modelů v případě tloušťky elastické litosféry $T_e = 200\text{ km}$. Jsou nakreslené pro všechny kombinace viskozity elastické litosféry $\eta_{el} = 10^{25}\text{ Pa s}$, 10^{27} Pa s , 10^{30} Pa s a viskozity pláště $\eta_M = 10^{21}\text{ Pa s}$, 10^{22} Pa s , 10^{23} Pa s , 10^{24} Pa s	20
3.5	Přehled vývoje deformace povrchu Marsu při zatížení ledovcem o výšce $h_i = 1\text{ km}$ pro různé tloušťky elastické litosféry T_e a různé viskozity pláště η_M . Elastická litosféra má ve všech běžích modelu konstantní viskozitu $\eta_{el} = 10^{27}\text{ Pa s}$, viz. profily viskozit 3.4. V jednotlivých běžích je zeleným bodem zvýrazněna deformace povrchu po 10 milionech let.	21

3.6	Přehled vývoje deformace povrchu Marsu při zatížení ledovcem o výšce $h_i = 1$ km pro různé tloušťky elastické litosféry T_e a různé viskozity pláště η_M . Elastická litosféra má ve všech běžích modelu konstantní viskozitu $\eta_{el} = 10^{30}$ Pa s, viz. profily viskozit 3.4. V jednotlivých běžích je zeleným bodem zvýrazněno radiální posunutí bodu na povrchu po 10 milionech let.	22
3.7	Přehled vývoje deformace povrchu Marsu při zatížení ledovcem o výšce $h_i = 1$ km pro různé tloušťky elastické litosféry T_e a různé viskozity pláště η_M . Elastická litosféra má ve všech běžích modelu konstantní viskozitu $\eta_{el} = 10^{25}$ Pa s, viz. profily viskozit 3.4. V jednotlivých běžích je zeleným bodem zvýrazněno radiální posunutí bodu na povrchu po 10 milionech let.	24
3.8	Přehled vývoje deformace povrchu Marsu při zatížení ledovcem o výšce $h_i = 1$ km pro různé tloušťky elastické litosféry T_e a různé viskozity pláště η_M . Elastická litosféra má ve všech běžích modelu viskozitu popsanou Arrheniovským vztahem 3.1 s viskozitou na povrchu $\eta_s = 10^{27}$ Pa s. V jednotlivých běžích je zeleným bodem zvýrazněno radiální posunutí bodu na povrchu po 10 milionech let.	25
3.9	Přehled vývoje deformace povrchu Marsu při zatížení ledovcem o výšce $h_i = 1$ km pro různé tloušťky elastické litosféry T_e a různé viskozity pláště η_M . Elastická litosféra má ve všech běžích modelu viskozitu popsanou Arrheniovským vztahem 3.1 s viskozitou na povrchu $\eta_s = 10^{30}$ Pa s. V jednotlivých běžích je zeleným bodem zvýrazněno radiální posunutí bodu na povrchu po 10 milionech let.	26
3.10	Přehled vývoje deformace povrchu Marsu při zatížení ledovcem o výšce $h_i = 1$ km pro různé tloušťky elastické litosféry T_e a různé viskozity pláště η_M . Elastická litosféra má ve všech běžích modelu viskozitu popsanou Arrheniovským vztahem 3.1 s viskozitou na povrchu $\eta_s = 10^{25}$ Pa s. V jednotlivých běžích je zeleným bodem zvýrazněno radiální posunutí bodu na povrchu po 10 milionech let.	27