BARVENÍ NEKONEČNÝCH GRAFŮ

DÁVID UHRIK

Abstrakt: Táto práca sa sústreďuje na analýzu nespočitateľných grafov v súvislosti s rozkladovými šípkami, chromatickým číslom a nespočitateľnou Hadwigerovou domnienkou. Značná časť textu sa zaoberá konštrukciou nespočitateľných grafov v generických rozšíreniach po pridaní Cohen reálnych čísel. Ukážeme, že ak sa pridá ω_2 Cohen čísel, tak v rozšírení platí, že $\omega_2 \to (\omega_2, \omega : \omega)^2$, zároveň ale platí $\omega_2 \not\to (\omega_2, \omega : \omega_1)^2$. Dokážeme aj nepublikovaný výsledok Steva Todorčevića, že po pridaní jedného Cohen čísla máme $\omega_1 \not\to (\omega_1, \omega : 2)^2$. Z jedného Cohen čísla skonštruujeme aj Hajnal–Máté graf bez trojuholníkov, čím dávame pozitívnu odpoveď na otázku Dániela Soukupa. Rovnakou metódou zostrojíme aj príklad T-Hajnal–Máté grafu v ZFC s rovnakými vlastnosťami, čím rozšírime výsledok Pétera Komjátha a Saharona Shelaha. V sekcií 2.4.1 sa sústredíme na iné zovšeobecnenie HM grafov, takzvané δ-Hajnal–Máté grafy. Ukážeme, že za predpokladu $\mathsf{MA}(\omega_1)$ žiadne neexistujú. V tej istej sekcií odvodíme aj slabú rozkladovú šípku: $\omega_2 \to (\omega_1, \delta : 2)^2$, kde δ je spočitateľný ordinál, ktorá súvisí so starým výsledkom Freda Galvina. V kapitole 3 sa sústredíme na nespočitateľnú Hadwigerovu domnienku, zavedieme kardinálny invariant $\mathfrak{hc}$, určujúci najmenšiu veľkosť grafu, ktorý je protipríkladom na nespočitateľnú Hadwigerovu domnienku. Ukážeme, že tento invariant je rovný takzvanému special tree number.

Hlavné výsledky tejto práce sú: Veta 2.6, Tvrdenie 2.7, Veta 2.25, Veta 2.26, Veta 2.31, Tvrdenie 2.32, Veta 3.32, Veta 3.34 a Veta 3.35.