



**MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ
FAKULTA**
Univerzita Karlova

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Johanka Sadílková

Množiny bodů daných vlastností

Katedra didaktiky matematiky

Vedoucí bakalářské práce: RNDr. Jana Hromadová, Ph.D.

Studijní program: Matematika se zaměřením na
vzdělávání

Studijní obor: Matematika se zaměřením na
vzdělávání se sdruženým studiem
Deskriptivní geometrie se
zaměřením na vzdělávání

Praha 2023

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval(a) samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů. Tato práce nebyla využita k získání jiného nebo stejného titulu.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V dne

Podpis autora

Tímto bych ráda poděkovala vedoucí mé bakalářské práce RNDr. Janě Hromadové, Ph.D. za všestrannou pomoc, množství cenných a inspirativních rad, podnětů, doporučení, připomínek a zároveň za velkou trpělivost s obdivuhodnou ochotou při konzultacích poskytnutých ke zpracování této práce. Dále také děkuji RNDr. Vlastě Moravcové, Ph.D. a Mgr. Zdeňku Halasovi, DiS., Ph.D. za vypůjčení potřebných materiálů k vypracování této práce.

Název práce: Množiny bodů daných vlastností

Autor: Johanka Sadílková

Katedra: Katedra didaktiky matematiky

Vedoucí bakalářské práce: RNDr. Jana Hromadová, Ph.D., Katedra didaktiky matematiky

Abstrakt: Tato práce pojednává o množinách bodů daných vlastností. V teoretické části je uvedené ucelené zpracování základních poznatků jako jsou způsoby šetření množin bodů dané vlastnosti, definice elementárních množin a jejich grafická reprezentace v eukleidovské rovině. V praktické části jsou uvedeny návodné úlohy na elementární množiny bodů dané vlastnosti, jejich využití v rámci řešení konstrukčních úloh s trojúhelníky a v neposlední řadě šetření složitějších množin bodů daných vlastností s aplikací postupů z části teoretické. Poslední kapitola obsahuje zápis průběhu výzkumného šetření mezi středoškolskými studenty s netradičně zadanými úlohami na hledání těchto množin. Dále zpracovává výsledky šetření a představuje možné závěry.

Klíčová slova: množina planimetrie množina bodů dané vlastnosti geometrické místo konstrukční geometrie konstrukční úlohy kružnice osa úsečky osa úhlu Thaletova kružnice ekvigonála

Title: Sets of points

Author: Johanka Sadílková

Department: Department of Mathematics Education

Supervisor: RNDr. Jana Hromadová, Ph.D., Department of Mathematics Education

Abstract: This thesis deals with sets of points of given properties otherwise known as sets of points or loci. The theoretical part is focused on basic knowledge about sets of points, such as methods of how to find these sets, definitions of primary sets, and their graphic representation in the Euclidean plane. In the practical part, there are instructional problems for primary sets of points, their use in the construction of triangles, and last but not least, the examination of more complex sets of points with the application of procedures from the theoretical part. The last chapter contains a record of the experiment conducted among high school students with unconventionally assigned tasks to examine these sets. Further, it presents the results of the experiment and proposes possible conclusions.

Keywords: set plane geometry set of points locus constructive geometry construction exercises circle perpendicular bisector angle bisector Thales's circle equigonal

Obsah

| | |
|---|-----------|
| Úvod | 2 |
| 1 Množiny bodů dané vlastnosti | 3 |
| 1.1 Definice a význam | 3 |
| 1.2 Vyšetřování množin bodů dané vlastnosti | 4 |
| 1.3 Elementární množiny bodů dané vlastnosti | 10 |
| 2 Řešené dílčí úlohy | 14 |
| 2.1 Elementární návodné úlohy s užitím MBDV | 15 |
| 2.2 Vzorově řešené konstrukční úlohy využívající MBDV | 19 |
| 2.3 Šetření množin bodů dané vlastnosti | 25 |
| 3 Výzkumné šetření | 38 |
| 3.1 Stanovení cílů a zadání testových úloh | 38 |
| 3.2 Výzkumný vzorek | 39 |
| 3.3 Průběh výzkumného šetření | 39 |
| 3.4 Metody řešení úloh | 40 |
| 3.5 Výsledky šetření | 43 |
| 3.6 Závěr výzkumného šetření | 44 |
| Závěr | 45 |
| Seznam literatury | 46 |
| Seznam použité literatury | 46 |
| Seznam související literatury | 46 |
| Seznam obrázků | 47 |
| Seznam tabulek | 49 |
| Seznam použitých symbolů | 50 |
| A Přílohy | 51 |
| A.1 Originální zadání výzkumných úloh | 51 |
| A.2 Upravené zadání výzkumných úloh | 51 |

Úvod

Název množiny bodů dané vlastnosti či množiny všech bodů určité vlastnosti je novější termín pro pojem, který byl dříve běžně označován názvem geometrické místo bodů. Většina z nás se poprvé setkala s tímto tématem v rámci studia planimetrie na střední škole. Úlohy na jejich vyšetřování se zařazují do sylabu matematiky již dlouhou dobu, kdy se k jejich řešení používají téměř výhradně syntetické metody. Tyto množiny využíváme nejenom k řešení čtených konstrukčních úloh ale i k hlubšímu poznání jednotlivých prvků eukleidovské geometrie a především k rozvinutí geometrické představivosti a správnému přístupu při řešení geometrických úloh.

Cílem této bakalářské práce je ucelené zpracování základních poznatků teorie množin bodů dané vlastnosti, vyzdvihnutí jejich váhy v eukleidovské geometrii se zvýšeným důrazem na didaktiku a dále šetření jednoduchých i komplexnějších konstrukčních úloh vhodnými syntetickými metodami, které lze prakticky využít ve výuce.

V rámci teoretické části uvedeme definice jednotlivých pojmů a názorné příklady s didaktickými poznámkami, dále postupně rozebereme dílčí metody řešení a uvedeme myšlenkové postupy včetně jejich grafického zpracování formou algoritmů, které lze zařadit do středoškolské výuky.

V úvodu vzorově řešených úloh budou rozebrány návodné úlohy k rozvinutí geometrické představivosti a získání intuice pro dané množiny bodů. Dále zde budou podrobně popsány konstrukční úlohy trojúhelníků s využitím elementárních množin a neposledně detailně rozebrané úlohy na šetření množin bodů dané vlastnosti. Jednotlivé úlohy budou doplněny o jejich grafická řešení vytvořená v softwaru GeoGebra Klasik či přímo v softwaru \LaTeX . U konstrukčních řešení budou zobrazeny všechny pomocné konstrukce a výsledek řádně zvýrazněn.

Poslední kapitola se bude věnovat průběhu výzkumného šetření mezi středoškolskými studenty s netradičně zadanými úlohami na hledání těchto množin. Budou zde představeny výsledky šetření a z nich vyvozené závěry.

1. Množiny bodů dané vlastností

1.1 Definice a význam

Pojmy *bod*, *přímka* a *rovina* nelze v syntetické geometrii exaktně definovat. Patří mezi tzv. *primitivní pojmy*. Představu o nich si tvoříme na základě zkušeností, na základě modelů těchto objektů a jejich vlastností viz Hromadová a Moravcová [1].

Jednotlivé body značíme velkými písmeny, přímky malými písmeny latinské abecedy. Budeme je považovat za základní stavební prvky, ze kterých můžeme některé množiny bodů sestavit.

V této práci se budeme výhradně zabývat takovými množinami M , pro které platí $M \subseteq E_2$. Pro přehlednost budoucího zápisu označíme E_2 jako ρ , tj. eukleidovským prostorem dimenze dva bude rozumět naší náčrtku, resp. rovinu ρ ; tabuli či studentův sešit.

Následující definice obecné množiny bodů dané vlastností je kombinací definic viz Pomykalová [2] a Lidskij [3].

Definice 1. *Množina M všech bodů roviny ρ , které mají danou vlastnost, je taková množina bodů, pro kterou současně platí:*

1. *Každý bod množiny M má danou vlastnost.*
2. *Každý bod roviny ρ , který má danou vlastnost, náleží množině M .*

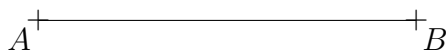
Označíme-li dále $V(X)$ skutečnost, že bod X má danou vlastnost, můžeme psát $M = \{X \in \rho; V(X)\}$.

První instance, kdy se student s touto definicí nevědomky setká na ZŠ je při introdukcí nejtriviálnějších prvků eukleidovské geometrie jako je např. úsečka.

Definice 2. *Nechť $A, B \in \rho$, kde $A \neq B$, množinu AB , pro kterou platí:*

$$AB = \{X \in \rho; X \in \overrightarrow{AB} \cap \overrightarrow{BA}\}$$

*nazýváme **úsečka** s koncovými body A, B , značíme AB .*



Obrázek 1.1: Zakreslení úsečky AB .

Poznámka. Z definice je zřejmé, že úsečkou AB rozumíme body A, B a všechny body „mezi nimi“ viz obr 1.1. Můžeme tedy říci, že každá úsečka má nekonečně mnoho bodů.

1.2 Vyšetřování množin bodů dané vlastnosti

Než přejdeme k šetření množin a jejich použití, je nutné podotknout, že v textech geometrických úloh často nejsou specifikovány vzájemné polohy jednotlivých útvarů. V důsledku toho jsme tedy povinni při řešení úloh vždy provádět diskuze všech možných hodnot proměnných a jejich vlivu na počet řešení konstrukční úlohy či výsledek vyšetřování množiny bodů.

Pro přehled uvedeme systematické řešení na základě hypotéz a definice množin bodů dané vlastnosti (dále už jen MBDV) i vhodné algoritmy řešení zařaditelné do středoškolské výuky.

Následující tvrzení včetně poznámek je až na úpravu značení převzato z knihy *Metody řešení matematických úloh* viz Odvárko a kol. [4].

Vyšetřováním množiny $M = \{X \in \rho; V(X)\}$ rozumíme činnost, při níž hledáme takový útvar U , jenž se rovná M .

Induktivní postup

1. Sestrojíme větší počet bodů X , které mají danou vlastnost V .
2. Odhadneme útvar U a vyslovíme hypotézu, že $M = U$.
3. Ověříme platnost hypotézy, tj. dokážeme ji či vyvrátíme.
- (4.) Vyvrácenou hypotézu zpřesníme a novou se pokusíme ověřit.

Metoda rozboru a zkoušky

1. *Rozbor*

Vyvodíme důsledky z toho, že X má vlastnost V , dokážeme, že $\forall X \in \rho : V(X) \implies T(X)$, popíšeme útvar $T = \{X \in \rho; T(X)\}$ a vyjádříme závěr rozboru: $M \subset T$, resp. $U \subset T$.

2. *Zkouška*

Ověříme, které body X útvaru T mají vlastnost V , z nich vytvoříme množinu M a vyjádříme závěr řešení, že $M = U$.

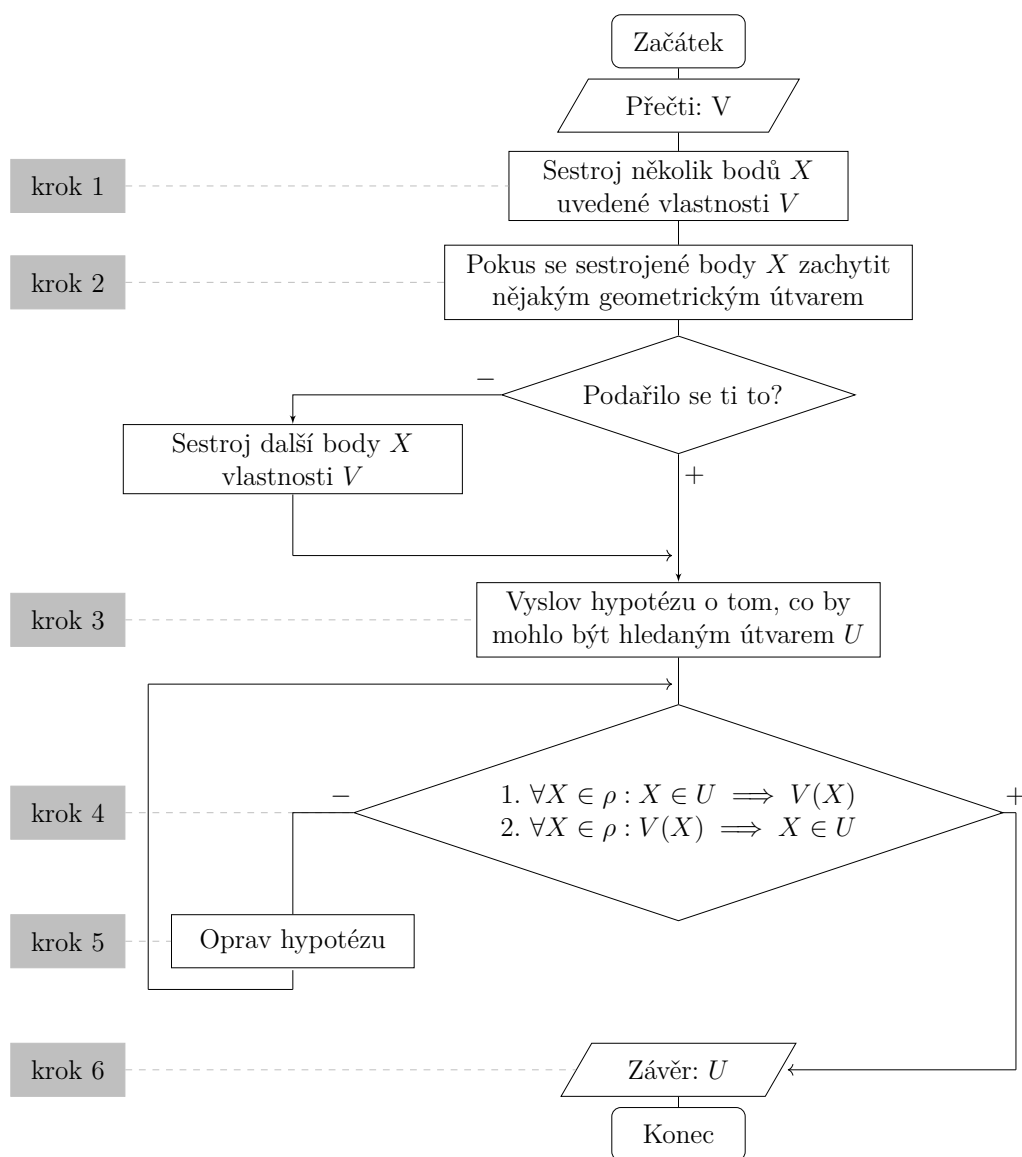
Poznámka. Pokud úlohu na vyšetřování množiny bodů transformujeme na úlohu algebraickou, tzn. neřešíme ji synteticky nýbrž početně, zpravidla volíme metodu rozboru a zkoušky.

Poznámka. Pokud odhadnutý tvar U je sám definován pomocí charakteristické vlastnosti $U(X)$ svých bodů, pokusíme se dokázat dvě věty.

$$\text{a) } \forall X \in \rho : V(X) \implies U(X) \qquad \text{b) } \forall X \in \rho : U(X) \implies V(X)$$

Slovní i symbolický zápis není však nutně pro studenty průhledný a proto se leckdy ve výuce přechází k lidové nematematické formulaci, která je často zjednodušená avšak ne vždy matematicky korektní. Uvedeme tedy další možnost reprezentace obecného postupu při hledání MBDV, která spojuje matematickou logiku a základy programování. Jde o korektní ale mnohem intuitivnější návod k řešení - je jím právě *algoritmus*.

Hledejme množinu $M = \{X \in \rho; V(X)\}$, tj. množinu všech bodů v rovině, které mají danou vlastnost V , tzn. platí $V(X)$. Budeme postupovat dle následujícího schématu.



Obrázek 1.2: Algoritmus nalezení množiny bodů dané vlastnosti.

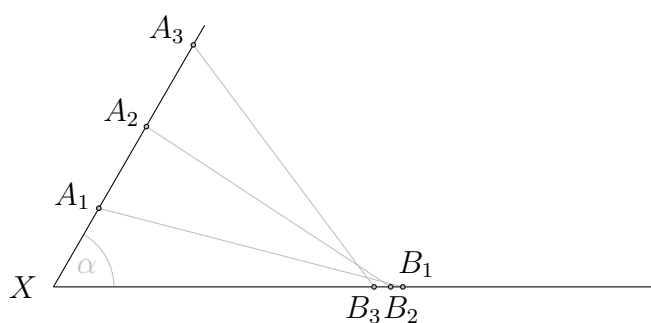
Schéma až na úpravy v zápise je převzato z knihy *Planimetrie pro střední odborné školy* viz Molnár [5]. Aplikujme jej na následující vzorový příklad.

Příklad 1. Necht $A, B \in \rho$, $|AB| = 4$ cm. Určete, co je množinou všech bodů v rovině, ze kterých je úsečka AB vidět pod úhlem $\alpha = 60^\circ$.

Symbolickým zápisem můžeme danou množinu zapsat také jako:

$$M = \{X \in \rho; V(X)\} = \{X \in \rho; |\sphericalangle AXB| = 60^\circ\}$$

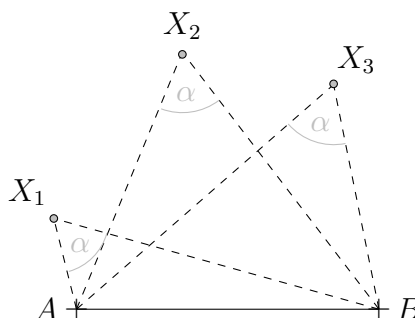
Postupujme dle algoritmu viz obr. 1.2 na předchozí straně s tím, že v tomto konkrétním případě budeme danou úlohu nejdříve řešit v jedné z polorovin určené úsečkou AB ¹. V prvním kroku najdeme několik bodů X dané množiny M splňujících vlastnost V – začneme konstrukcí pomocných trojúhelníků sestrojených dle věty Ssu , přičemž delší strana naproti úhlu α bude úsečka o délce $|AB|$ a kratší o libovolné velikosti menší než je $|AB|$, viz XA_i v obr. 1.3.



Obrázek 1.3: Pomocné trojúhelníky sestrojené dle věty Ssu .

Tyto trojúhelníky následně můžeme přenést tak, aby strana A_iB_i splývala s naší úsečkou AB . Vrcholy, u nichž je úhel α , jsou hledané body X množiny M , ze kterých lze úsečku AB vidět pod úhlem α viz obr. 1.4.

krok 1

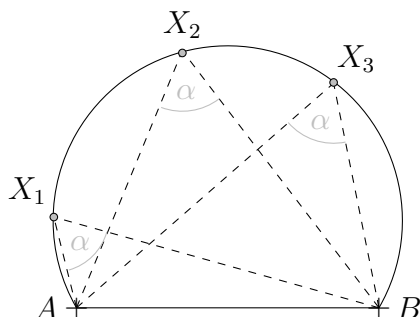


Obrázek 1.4: Zakreslení několika bodů hledané množiny M .

¹Řešení v jedné polorovině může vést v rámci některých úloh ke ztrátě části řešení. Ve všech případech je třeba být obezřetný a ujistit se, že touto volbou nic neztratíme. Jelikož hned v prvním kroku sestrojujeme trojúhelníky dle věty Ssu , je zřejmé, že situace v druhé polorovině bude symetrická podle hraniční přímky AB .

V kroku druhém se snažíme najít vhodný geometrický útvar U , jímž bychom zachytili sestrojené body (můžeme tím také rozumět snahu zachytit „trajektorii“ bodu X). Ze sestrojených bodů lze vyvodit, že daným geometrickým útvarem U by mohl být nějaký kružnicový oblouk s koncovými body A, B viz obr. 1.5.

krok 2

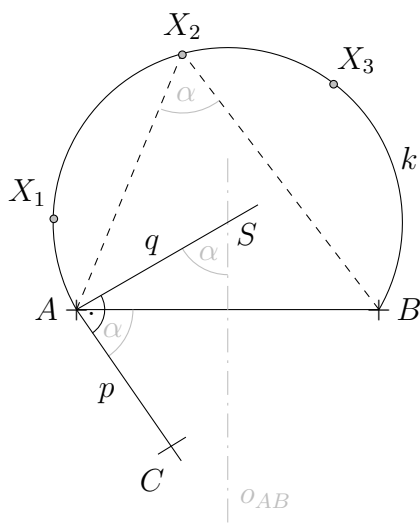


Obrázek 1.5: Zachycení množiny M známým geometrickým útvarem.

V kroku číslo tři vyslovujeme následující hypotézu. Hledaným geometrickým útvarem U je větší oblouk \widehat{AB} kružnice $k(S; |SA|)$, jejíž střed S dostaneme následující konstrukcí viz obr. 1.6:

1. o_{AB} ; osa úsečky AB
2. C ; $|\sphericalangle BAC| = \alpha$
3. p ; $p = \overleftrightarrow{AC}$
4. q ; $A \in q \wedge q \perp p$
5. S ; $S \in o_{AB} \cap q$

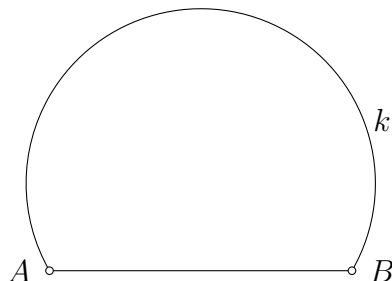
krok 3



Obrázek 1.6: Nalezení středu S kružnicového oblouku s koncovými body A, B .

Při kontrole ve čtvrtém kroku narazíme na následující nesrovnalost: body A, B patří danému oblouku \widehat{AB} a danou vlastnost nespĺňují. Opravíme tedy původní hypotézu dle kroku číslo pět. Hledaným útvarem U je *otevřený*² větší oblouk \widehat{AB} .

krok 5

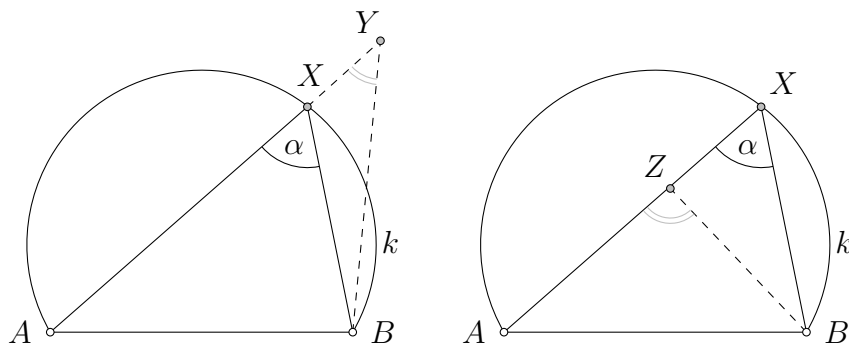


Obrázek 1.7: Větší *otevřený* oblouk \widehat{AB} kružnice k .

Vrátíme se do čtvrtého kroku a provedeme opakovaně kontrolu nové hypotézy. Z věty o obvodových úhlech plyne, že všechny body X daného většího *otevřeného* oblouku \widehat{AB} kružnice k splňují vlastnost V . Co však ostatní body? Zkontrolujeme, zda-li danou vlastnost nespĺňují i jiné body poloroviny ρ . Můžeme zkoumat následující případy:

1. Necht je Y bodem vnější oblasti kružnice k viz obr. 1.8 a X průsečíkem jedné z přímek \overleftrightarrow{AY} , \overleftrightarrow{BY} (bez újmy na obecnosti necht např. \overleftrightarrow{AY}) a *otevřeného* oblouku \widehat{AB} kružnice k . Z vlastností vnějších a vnitřních úhlů trojúhelníků plyne, že: $|\sphericalangle AYB| + |\sphericalangle YBX| = \alpha$, odkud $|\sphericalangle AYB| < \alpha$.
Je zřejmé, že pro $Y \in \widehat{AB} \setminus \{A, B\}$ je $\alpha = 0^\circ$
2. Necht je Z bodem vnitřní oblasti kružnice k viz obr. 1.8, pak \overleftrightarrow{AZ} protne kružnici k v bodě X . Z vlastností vnějších a vnitřních úhlů trojúhelníků plyne, že: $|\sphericalangle BZA| = \alpha + |\sphericalangle XBZ| > \alpha$.
Je zřejmé, že pro $Z \in AB \setminus \{A, B\}$ je $\alpha = 180^\circ$

krok 4



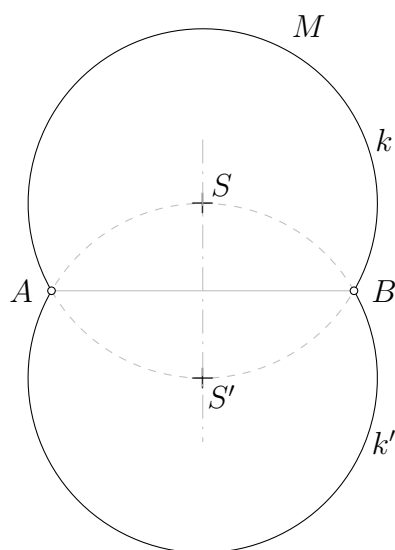
Obrázek 1.8: Kontrola správnosti hypotézy $U = M$.

²Otevřeným obloukem rozumíme oblouk \widehat{AB} bez bodů A, B .

V posledním šestém kroku provedeme závěr a vykreslíme celou množinu M . Jelikož jsme dosavadně pracovali pouze v polorovině, rozšíříme závěr o řešení ležící v polorovině opačné, ve které bychom postupovali analogicky a uvědomili si, že dané řešení je symetrické s řešením v první polorovině.

Množinou všech bodů v rovině, ze kterých lze danou úsečku AB vidět pod daným úhlem $\alpha = 60^\circ$, je sjednocení dvou *otevřených* větších oblouků \widehat{AB} shodných kružnic $k(S, |SA|)$, $k'(S', |S'A|)$, kde S, S' jsou jejich středy sestavené dle konstrukce ve třetím kroku, ležící ve vzájemně opačných polorovinách s hraniční přímkou \overleftrightarrow{AB} .

krok 6



Obrázek 1.9: Zakreslení hledané množiny $M = \{X \in \rho; |\sphericalangle AXB| = 60^\circ\}$.

Situaci pro $\alpha \in (90^\circ; 180^\circ)$ ponecháváme čtenáři k prošetření.

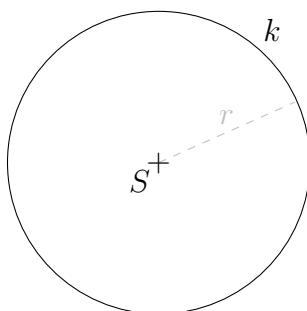
1.3 Elementární množiny bodů dané vlastnosti

Následující MBDV budeme považovat za elementární a v rámci řešených úloh nebudeme odvozovat jejich sestavení. Každé MBDV je přiřazen název a symbolický zápis, který je využíván v rámci rozboru a popisu konstrukce dílčích konstrukčních úloh.

Definice 3. Necht $S \in \rho$, $r \in \mathbb{R}^+$, množinu k , pro kterou platí:

$$k = \{X \in \rho; v(X; S) = r\}$$

nazýváme **kružnice** k o středu S a poloměru r , značíme $k(S; r)$.

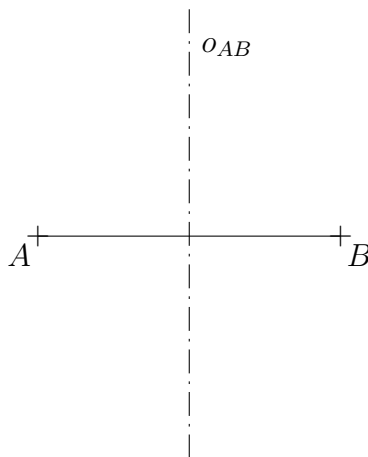


Obrázek 1.10: Zakreslení kružnice $k(S, r)$.

Definice 4. Necht $A, B \in \rho$, kde $A \neq B$, množinu o_{AB} , pro kterou platí:

$$o_{AB} = \{X \in \rho; v(X; A) = v(X; B)\}$$

nazýváme **osa úsečky** AB , značíme o_{AB} .



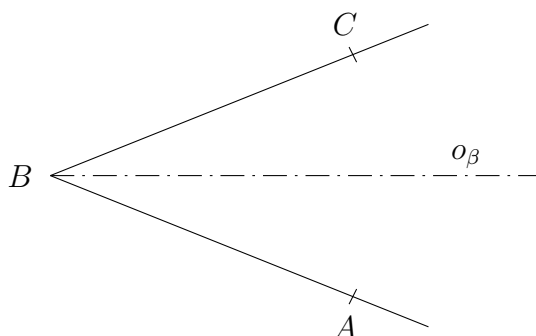
Obrázek 1.11: Zakreslení osy o_{AB} úsečky AB .

Poznámka. Lze dokázat, že osa úsečky AB je přímka, která je kolmá na AB a zároveň prochází jejím středem. Osy útvarů zpravidla kreslíme čerchovanou čarou. Ať už tedy reprezentujeme danou osu plnou či čerchovanou čarou, myslíme tím vždy všechny body dané množiny (v tomto případě přímky).

Definice 5. Necht je dán nenulový konvexní úhel $\beta = \sphericalangle ABC \subset \rho$, množinu o_β , pro kterou platí:

$$o_\beta = \{X \in \beta; v(X; \overrightarrow{BA}) = v(X; \overrightarrow{BC})\}$$

nazýváme **osa úhlu** β , značíme o_β .



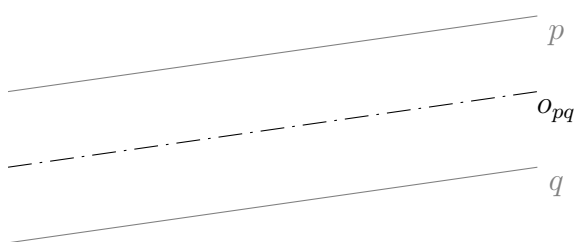
Obrázek 1.12: Zakreslení osy o_β úhlu $\sphericalangle ABC$.

Poznámka. V dané definici je osou o_β myšlena polopřímka náležející úhlu β . Budeme-li uvažovat místo úhlu β rovinu ρ jako množinu šetřených bodů, pak o_β nebude polopřímkou ani přímkou. Nalezení této MBDV necháváme prozatím čtenáři jako úlohu k procvičení, kterou později rozebereme v praktické části.

Definice 6. Necht $p, q \subset \rho$, kde $p \parallel q \wedge p \neq q$, množinu o_{pq} , pro kterou platí:

$$o_{pq} = \{X \in \rho; v(X; p) = v(X; q)\}$$

nazýváme **osou rovinného pásu** p, q , značíme o_{pq} .

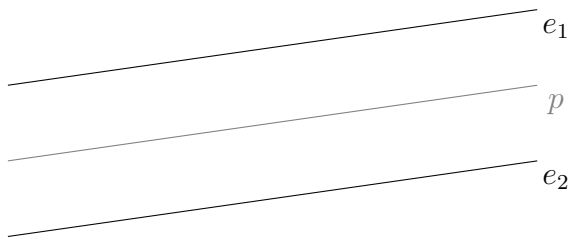


Obrázek 1.13: Zakreslení osy rovinného pásu o_{pq} .

Definice 7. Necht $p \subset \rho, d \in \mathbb{R}^+$, množinu e , pro kterou platí:

$$e = \{X \in \rho; v(X; p) = d\}$$

nazýváme **ekvidistantou přímky** p , značíme e .



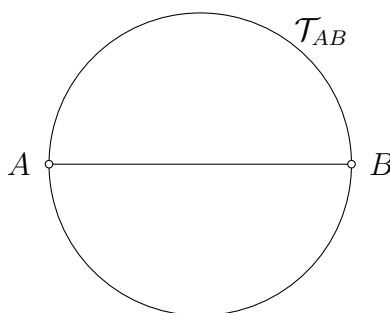
Obrázek 1.14: Zakreslení ekvidistanty přímky p .

Poznámka. Lze dokázat, že ekvidistanta e přímky p je sjednocení dvou různých rovnoběžných přímek e_1, e_2 , které mají od přímky p vzdálenost právě d . Obdobně lze definovat MBDV jako je ekvidistanta úsečky (ovál), ekvidistanta kružnice či ekvidistanta elipsy.

Definice 8. Necht $A, B \in \rho$, kde $A \neq B$, množinu \mathcal{T}_{AB} , pro kterou platí:

$$\mathcal{T}_{AB} = \{X \in \rho; |\sphericalangle AXB| = 90^\circ\}$$

nazýváme **Thalétova kružnice** nad průměrem AB , značíme \mathcal{T}_{AB} či τ_{AB} .



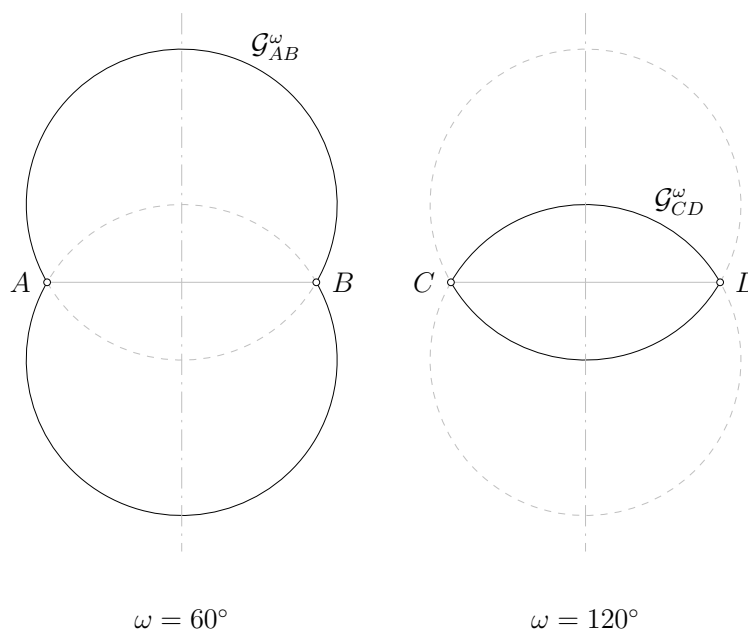
Obrázek 1.15: Zakreslení Thalétovy kružnice \mathcal{T}_{AB} nad průměrem AB .

Poznámka. Z definice je zřejmé, že body A, B dané množině \mathcal{T}_{AB} nenáleží. Používaný název *kružnice* může být tedy zavádějící. Množinou můžeme rozumět sjednocení polokružnic určených body A, B právě bez jejich koncových bodů. Danou informaci lze zdůraznit označením koncových bodů prázdným kolečkem viz obr. 1.15.

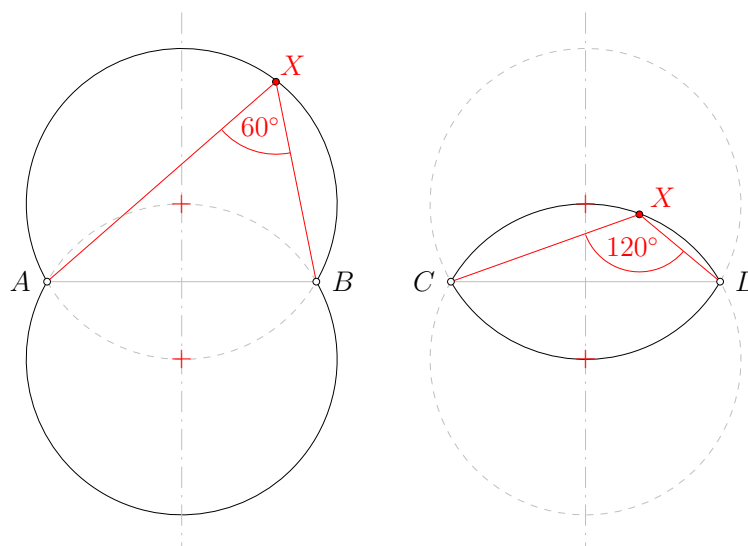
Definice 9. Necht $A, B \in \rho$, kde $A \neq B$ a úhel $\omega \in (0^\circ; 180^\circ)$, množinu \mathcal{G} , pro kterou platí:

$$\mathcal{G} = \{X \in \rho; |\sphericalangle AXB| = \omega\}$$

nazýváme **ekvigonála**³ \mathcal{G} ; množina takových bodů, ze kterých lze úsečku AB vidět pod úhlem ω ⁴, značíme \mathcal{G} či \mathcal{G}_{AB}^ω



Obrázek 1.16: Zakreslení množiny \mathcal{G}_{AB}^ω s různými volbami úhlu ω .



Obrázek 1.17: Zakreslení \mathcal{G} , vyznačení úhlu ω a středů příslušných oblouků.

³Název ekvigonála se v aktuální středoškolské literatuře nepoužívá. Jde o starší název, který pravděpodobně vychází z lat. equiv (ekvivalent) a z řec. γωνία [gonía] (úhel).

⁴Speciálním případem \mathcal{G}_{AB}^ω pro úhel $\omega = 90^\circ$ je \mathcal{T}_{AB} .

2. Řešené dílčí úlohy

V následující praktické části rozebereme návodné úlohy na procvičení hledání MBDV a zároveň jejich praktické využití v konstrukčních úlohách. Všechny uvedené úlohy lze vyřešit eukleidovskými konstrukcemi tj. pouze za pomoci kružítka a pravítka. Každá z konstrukčních úloh bude obsahovat všechny řádné části řešení:

1. Náčrtek

První vizualizace dané situace. Rekapitulace zadaných pojmů a náskres hypotetického výsledku – ručně, zadané prvky zvýrazníme.

2. Rozbor

Podrobné rozepsání zadaných informací a rozebrání jejich významu při hledání řešení. Vytvoření myšlenkové mapy hledání řešení. Kombinace slovního a symbolického zápisu.

3. Popis konstrukce

Shled úkonů nutných k provedení syntetického řešení zapsaný matematickou symbolikou odkazující se na poznatky z náčrtku a rozboru.

4. Konstrukce

Realizace popisu konstrukce provedená v softwaru GeoGebra. Obrázek finálního řešení.

5. Diskuze

Závěr a diskuze počtu řešení na základě typu úlohy a daného zadání.

Úlohy zabývající se šetřením MBDV budou rozepsány především pomocí slovního rozboru. Popis konstrukce i finální realizace se budou vždy silně opírat o odvozené vztahy z tohoto rozboru a vizualizaci finálního výsledku pomocí upraveného náčrtku. V rámci řešení budou využity metody popsané v sekci 1.2; vyšetřování množin bodů dané vlastnosti.

2.1 Elementární návodné úlohy s užitím MBDV

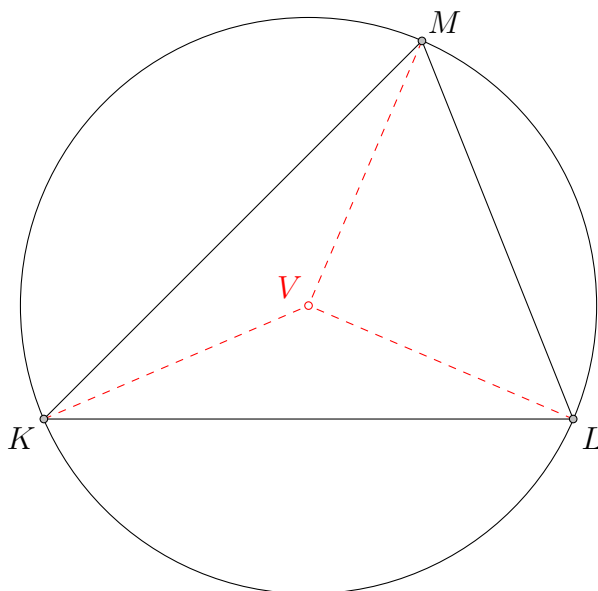
Příklad 2. Okresní města Kyblíkov, Ledvinky a Maletice plánují postavit pro své rezidenty vlakové nádraží. Jelikož jde o regionální projekt financovaný ze společného fondu, plánují postavit nádraží na takovém místě, které nebude žádné město zvyhodňovat. Nádraží má být umístěno tak, aby přímá vzdálenost od každého z měst byla stejná. Určete, kde bude nádraží postaveno.

Rozbor

Slovní rozbor

Z úlohy víme, že města Kyblíkov, Ledvinky a Maletice jsou tři různá okresní města. Označme tedy každé z nich pomocí jejich počátečního písmene a umístíme je jako tři různé body K, L a M do roviny ρ .

Reprezentujme bodem V vlakové nádraží. Cílem naší úlohy je pak najít takový bod V , pro který platí; $v(K, V) = v(L, V) = v(K, M)$. Hledáme tedy střed V kružnice opsané trojúhelníku KLM .



Obrázek 2.1: Vizualizace problému tří měst.

Jak tedy sestrojíme bod V ? Střed kružnice opsané neumíme najít hned, ale můžeme postupně určit, kde leží. Ze zadání víme, že platí; $v(K, V) = v(L, V)$ a z toho plyne, že V náleží ose o_{KL} úsečky KL . Obdobně $v(L, V) = v(M, V) \implies V \in o_{LM}$. Jelikož bod V náleží o_{KL} a zároveň o_{LM} , pak náleží i jejich průniku, tj. $V \in o_{KL} \cap o_{LM}$.

Symbolický rozbor

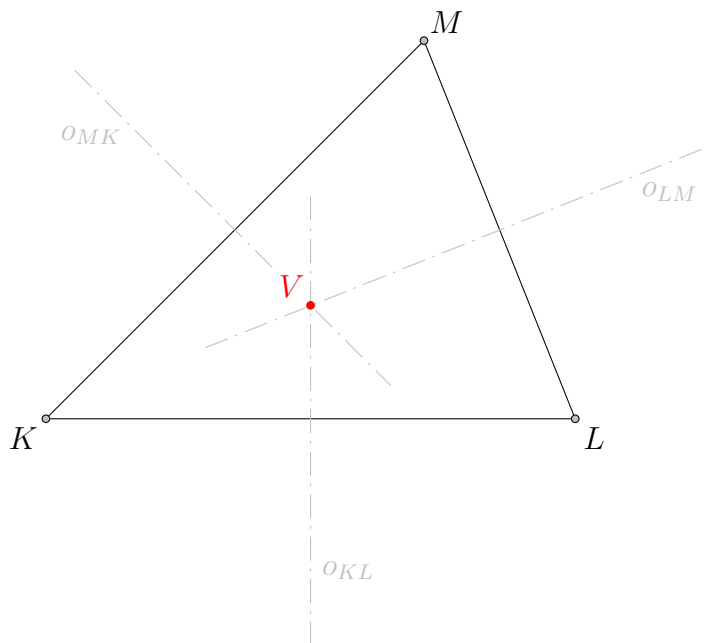
začneme $\triangle KLM$

hledáme V (V střed kružnice opsané $\triangle KLM$)

$$\left. \begin{array}{l} v(K, V) = v(L, V) \implies V \in o_{KL} \\ v(L, V) = v(M, V) \implies V \in o_{LM} \end{array} \right\} V \in o_{KL} \cap o_{LM}$$

Popis konstrukce

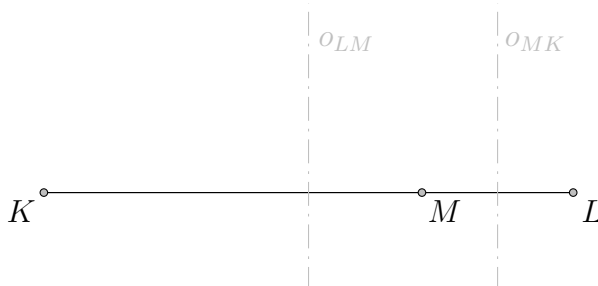
- 1) o_{KL} ; osa úsečky KL
- 2) o_{LM} ; osa úsečky LM
- 3) $V; V \in o_{KL} \cap o_{LM}$



Obrázek 2.2: Řešení problému tří měst.

Diskuze

Jsou-li body K, L, M *nekolineární*, pak má úloha 1 řešení. Jsou-li naopak body K, L, M *kolineární*, pak je $o_{KL} \parallel o_{LM} \implies o_{KL} \cap o_{LM} = \emptyset$ a tzn. V neexistuje. V tomto případě úloha nemá žádné řešení.



Obrázek 2.3: Speciální případ problému tří kolineárních měst.

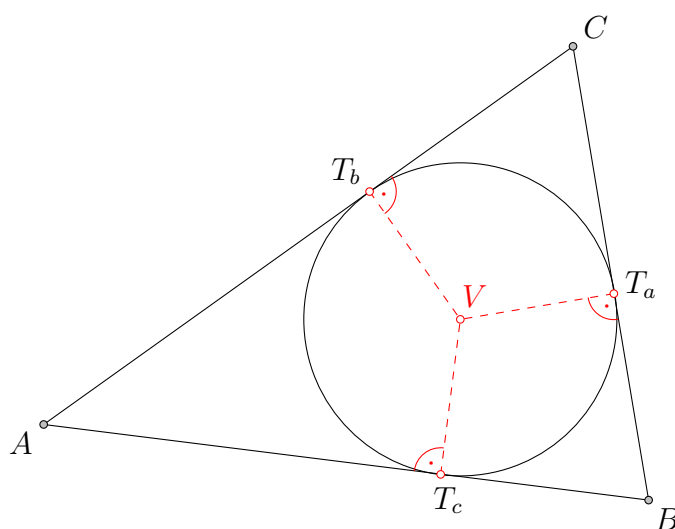
Poznámka. Úlohu je možné zadat jako klasickou slovní úlohu či pro zjednodušení rovnou jako určení středu kružnice opsané danému trojúhelníku. Zdůrazňujeme, že se jedná o úlohu, kdy dané rozmístění je „spravedlivé“ nikoli však „optimální“. Pakliže bychom hledali takový bod v rovině, jehož součet vzdáleností od vrcholů daného trojúhelníku by byl minimální, pak bychom hledali tzv. *Fermatův bod* trojúhelníku.

Příklad 3. V muzeu Ektheta vymezili v rámci veřejné expozice výstavní trojúhelníkovou desku pro umístění starožitné vázy nevyčíslitelné ceny. Pracovníci muzea chtějí tento kousek na desku umístit tak, aby byla váza od všech stran desky stejně vzdálena, a zamezili tak nechtěným dotekům ze strany návštěvníků. Určete, kam pracovníci muzea vázu umístí.

Rozbor

Slovní rozbor

Trojúhelníkovou desku můžeme v rámci roviny ρ reprezentovat např. trojúhelníkem ABC a umístění vázy bodem $V \in \triangle ABC$. Ze zadání víme, že vzdálenost vázy od každé strany trojúhelníku musí být stejná; $v(V, AB) = v(V, BC) = v(V, CA)$. Hledáme tedy střed kružnice vepsané trojúhelníku ABC .



Obrázek 2.4: Vizualizace problému umístění vázy.

Jak tedy sestrojíme bod V ? Střed kružnice vepsané neumíme najít hned, ale můžeme postupně určit, kde leží. Ze zadání víme, že platí $v(V, AB) = v(V, BC)$ a z toho plyne, že V náleží ose o_β úhlu $\beta = \sphericalangle ABC$. Obdobně $v(V, BC) = v(V, CA) \implies V \in o_\gamma$. Jelikož bod V náleží o_β a zároveň o_γ , pak náleží i jejich průniku, tj. $V \in o_\beta \cap o_\gamma$.

Symbolický rozbor

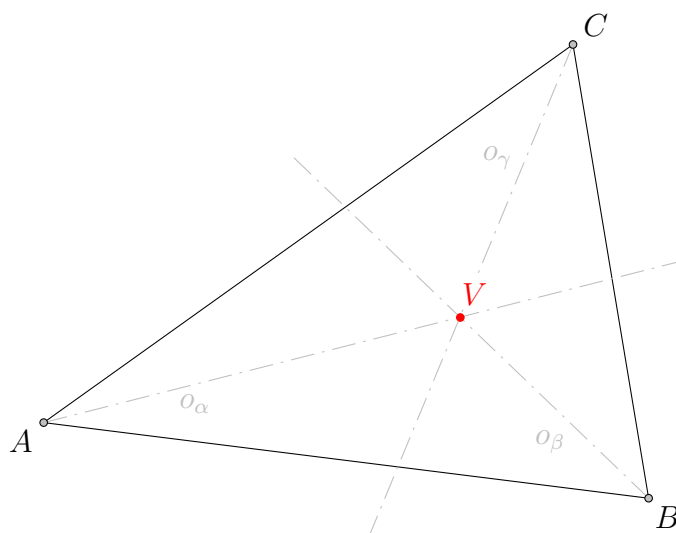
začneme $\triangle ABC$

hledáme V (V střed kružnice vepsané $\triangle ABC$)

$$\left. \begin{array}{l} v(V, AB) = v(V, BC) \implies V \in o_\beta \\ v(V, BC) = v(V, CA) \implies V \in o_\gamma \end{array} \right\} V \in o_\beta \cap o_\gamma$$

Popis konstrukce

- 1) o_β ; osa úhlu $\beta = \sphericalangle ABC$
- 2) o_γ ; osa úhlu $\gamma = \sphericalangle BCA$
- 3) $V; V \in o_\beta \cap o_\gamma$



Obrázek 2.5: Řešení problému umístění vázy.

Diskuze

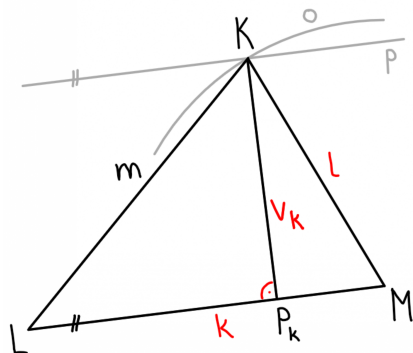
Jelikož body A, B, C nejsou nikdy *kolinéární* (musí dát za vznik trojúhelníku), má úloha vždy právě 1 řešení.

Poznámka. Úlohu je možné zadat jako klasickou slovní úlohu či pro zjednodušení rovnou jako určení středu kružnice vepsané danému trojúhelníku. Další vhodná návodná úloha, jejíž řešení vede na užití dotyků kružnice vepsané s daným trojúhelníkem, spočívá v sestrojení tří kružnic k_1, k_2, k_3 , které mají po dvou vnější dotyk, pakliže jsou zadány 3 *nekolinéární* body S_1, S_2, S_3 , které jsou jejich středy. Tuto úlohu necháme k rozebrání čtenáři.

2.2 Vzorově řešené konstrukční úlohy využívající MBDV

Příklad 4. Sestrojte trojúhelník KLM znáte-li velikost stran $k = 4$ cm, $l = 5$ cm a výšky $v_k = 3$ cm.

Náčrtek



Je-li cílem úlohy sestavit trojúhelník, zpravidla volíme pro náčrtek obecný trojúhelník, který zhruba odpovídá zadání (nevyplývá-li ze zadání nějaký speciální případ). Pro přehlednost barevně vyznačíme zadané informace o daném útvaru. Na základě této vizualizace provedeme rozbor úlohy. Je nutné si dále pamatovat, že náčrtek nemusí odpovídat finálnímu řešení, ani nemusí nastínit všechna možná řešení. Do náčrtku zakreslíme i pomocné konstrukce z rozboru.

Rozbor

Slovní rozbor

Úloha je nepolohová, můžeme si tedy zvolit čím začít.

Začneme např. stranou k , tj. LM ; $|LM| = 4$ cm. Známe body L a M daného trojúhelníku KLM . K jeho sestavení nám chybí již jen bod K . Stranu k jsme již využili, k nalezení bodu K hledáme dvě množiny bodů, kterým bod K náleží.

O výšce $v_k = 3$ cm víme, že $v_k \perp LM$, z čehož plyne, že $v(K, LM) = 3$ cm a tedy, že K leží na nějaké přímce p , pro kterou platí, že $p \parallel LM$ a zároveň $v(p, LM) = 3$ cm.

Dále známe $l = 5$ cm, tj. KM ; $|KM| = 5$ cm. Víme tedy, že $v(K; M) = 5$ cm, což kopíruje definici kružnice jako MBDV. Můžeme tedy říci, že bod K nutně leží na nějaké kružnici o se středem v bodě M a poloměrem 5 cm, tzn. $K \in o(M; 5$ cm).

Z předchozích řádků víme, že K leží na dané přímce p a zároveň leží na dané kružnici o , tím pádem vznikne jako průnik těchto dvou množin – je průsečíkem přímky p a kružnice o .

Symbolický rozbor

začneme LM ; $|LM| = 4$ cm

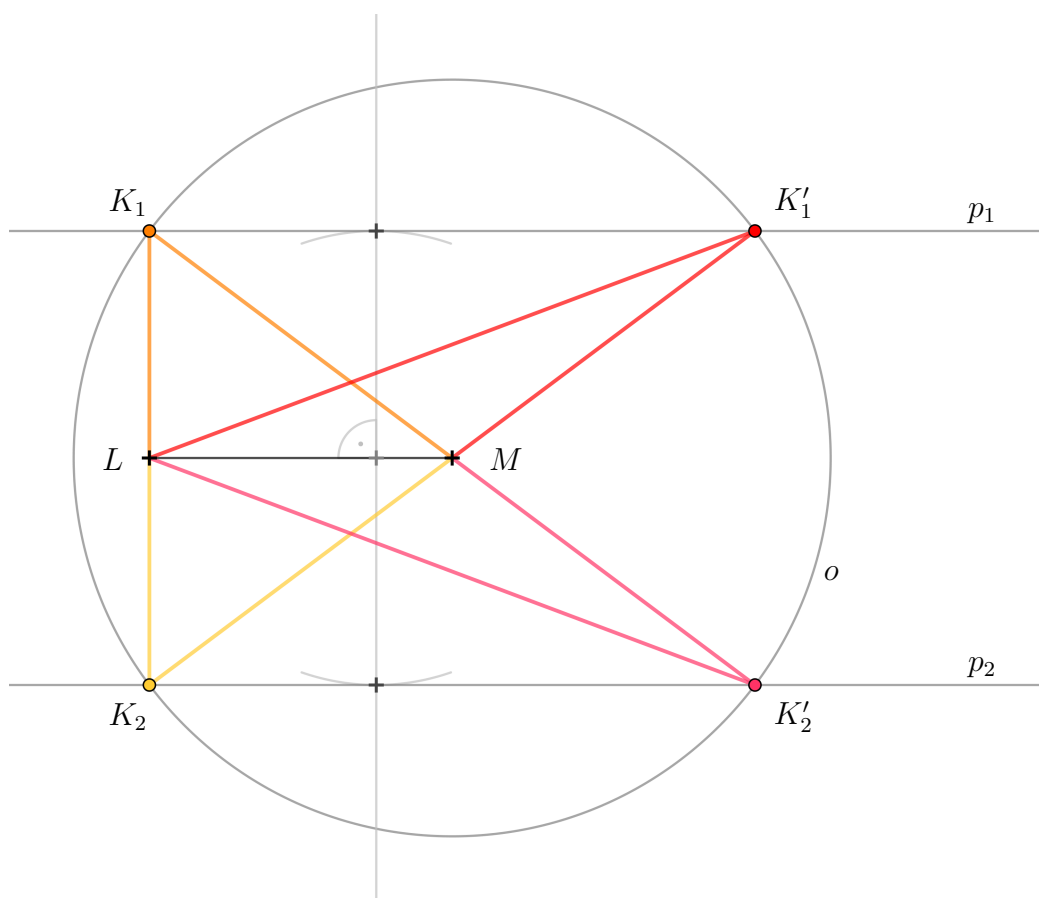
hledáme K (K vrchol $\triangle KLM$)

$$\left. \begin{array}{l} v_k = 3 \text{ cm} \implies v(K; \overleftrightarrow{LM}) = 3 \text{ cm} \implies K \in p; p \parallel \overleftrightarrow{LM} \wedge v(p, \overleftrightarrow{LM}) = 3 \text{ cm} \\ l = 5 \text{ cm} \implies |MK| = 5 \text{ cm} \implies v(M; K) = 5 \text{ cm} \implies K \in o(M; 5 \text{ cm}) \end{array} \right\} K \in o \cap p$$

Popis konstrukce

- 1) LM ; $|LM| = 4$ cm
- 2) p ; $p \parallel \overleftrightarrow{LM} \wedge v(p; \overleftrightarrow{LM}) = 3$ cm
- 3) o ; $o(M; 5$ cm)
- 4) K ; $K \in o \cap p$
- 5) $\triangle KLM$

Konstrukce



Obrázek 2.6: Konstrukční řešení příkladu č. 4.

Diskuze

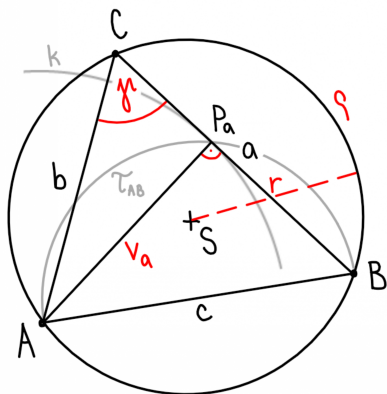
Trojúhelníky v polovině určené \overleftrightarrow{LM} jsou po řadě shodné s trojúhelníky v polovině opačné; $K_1LM \cong K_2LM$, $K_1'LM \cong K_2'LM$, ty nebereme tedy jako další různá řešení, jelikož jde o nepolohovou úlohu. Pakliže by se jednalo o úlohu polohovou, byla by řešení celkově 4.

Úloha má v rovině 2 řešení: $K_1LM, K_1'LM$.

Řešení úlohy se zvolením jiného počátečního prvku necháváme jako cvičení čtenáři.

Příklad 5. Sestrojte všechny trojúhelníky ABC , pro které platí, že $\gamma = 75^\circ$, $v_a = 3,5$ cm, a jejichž poloměr r kružnice opsané je roven 2,5 cm. [2]

Náčrtek



Při náčrtku začínáme zpravidla stěžejními útvary, jako je například kružnice opsaná. Je totiž snadnější dokreslit do dané kružnice obecný trojúhelník, než obecnému trojúhelníku kružnici posléze opsat. Neriskujeme tak zavádějící náčrtek. Opět zvýrazňujeme známé informace ze zadání a již při črtání uvažujeme nad možnostmi konstrukce. V případě nejasností rozebíráme každou známou vlastnost a odvozujeme další. Už při náčrtku si můžeme uvědomit, s kterou informací je vhodné začít a s kterou naopak ne.

Rozbor

Slovní rozbor

Úloha je nepolohová, můžeme si tedy zvolit čím začít.

Začneme např. kružnicí opsanou, tj. $\rho(S; 2,5$ cm). Tato volba je vhodná, jelikož již máme stanovenou jednu MBDV, na které budeme hledat všechny vrcholy trojúhelníku ABC . Postupně rozeberme další dostupné informace.

Víme, že $\gamma = 75^\circ$, tj. $|\sphericalangle ACB| = 75^\circ$. Z vlastností středových a obvodových úhlů v kružnici ρ , lze odvodit, že $|\sphericalangle ASB| = 150^\circ$. Jelikož nemáme zvolen ani jeden vrchol trojúhelníku ABC , můžeme sestavit libovolný úhel $\sphericalangle XSY$; $|\sphericalangle XSY| = 150^\circ$, jehož ramena budou nutně po řadě protínat kružnici ρ ve vrcholech A, B , BÚNO necht $A \in \rho \cap \overrightarrow{SX}$ a $B \in \rho \cap \overrightarrow{SY}$.

Poslední informací, kterou disponujeme, je výška $v_a = 3,5$ cm. Ta nijak rovnou nepoukazuje na umístění vrcholu C , ale může nám pomoci nalézt bod P_a (patu dané výšky), který nám k němu dopomůže. Jelikož $v_a = 3,5$ cm, víme, že $v(A; P_a) = 3,5$ cm. Tato vlastnost společně s již určeným bodem A kopíruje definici kružnice jako MBDV, tzn. $P_a \in k(A; 3,5$ cm).

Dále víme, že úhel při patě výšky v_a je pravý, tj. $|\sphericalangle AP_aB| = 90^\circ$, jelikož $v_a \perp CB$. Zobecněná verze tohoto výroku přesně popisuje Thalétovu kružnici jako MBDV. Můžeme tedy říci, že $P_a \in \tau_{AB}$ a z toho dále odvodit, že $P_a \in k \cap \tau_{AB}$.

V této chvíli můžeme sestavit přímkou, s níž je incidentní strana a , tj. úsečka BC . Víme, že $P_a \in \overrightarrow{BC}$ a z toho nutně plyne $C \in \overrightarrow{BP_a}$. Jelikož všechny vrcholy trojúhelníku ABC leží na kružnici opsané ρ , nalezneme bod C tak, že $C \in \rho \cap \overrightarrow{BP_a}$ a zároveň $C \neq B$.

Symbolický rozbor

začneme kružnicí opsanou $\rho(S; 2,5$ cm)

hledáme A, B (vrcholy $\triangle ABC$)

$$\left. \begin{array}{l} |\sphericalangle ACB| = 75^\circ \implies |\sphericalangle ASB| = 150^\circ \implies A \in \overrightarrow{SX} \wedge B \in \overrightarrow{SY}; |\sphericalangle XSY| = 150^\circ \\ \rho \text{ je kružnice opsaná } \triangle ABC \implies A, B \in \rho \end{array} \right\} \begin{array}{l} A \in \rho \cap \overrightarrow{SX} \\ B \in \rho \cap \overrightarrow{SY} \end{array}$$

hledáme P_a (pata výšky v_a)

$$\left. \begin{array}{l} v_a = 3,5 \text{ cm} \implies v(A; P_a) = 3,5 \text{ cm} \implies P_a \in k(A; 3,5 \text{ cm}) \\ v_a \perp CB \implies |\sphericalangle AP_aB| = 90^\circ \implies P_a \in \tau_{AB} \end{array} \right\} P_a \in k \cap \tau_{AB}$$

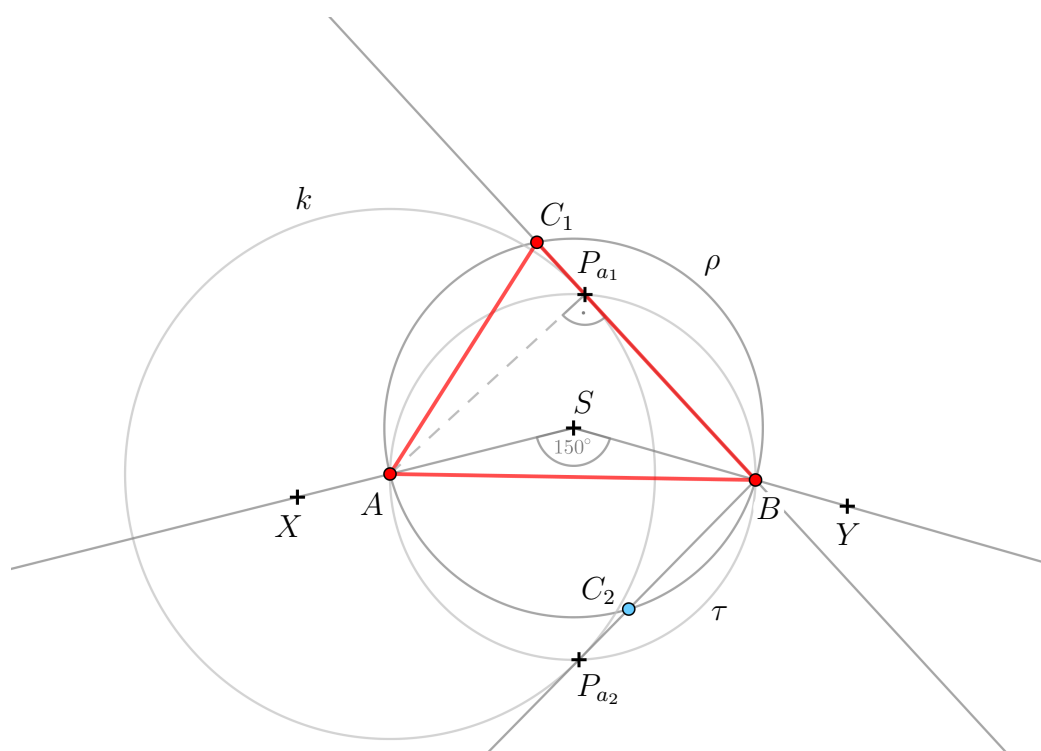
hledáme C (vrchol $\triangle ABC$)

$$\left. \begin{array}{l} \rho \text{ je kružnice opsaná } \triangle ABC \implies C \in \rho \\ P_a \in \overleftrightarrow{BC} \implies C \in \overleftrightarrow{BP_a} \end{array} \right\} C \in \rho \cap \overleftrightarrow{BP_a} \wedge C \neq B$$

Popis konstrukce

- 1) $\rho; \rho(S; 2,5 \text{ cm})$
- 2) $\sphericalangle XSY; |\sphericalangle XSY| = 150^\circ$
- 3) $A; A \in \rho \cap \overleftrightarrow{SX}$
 $B; B \in \rho \cap \overleftrightarrow{SY}$
- 4) $k; k(A; 3,5 \text{ cm})$
- 5) τ_{AB} ; Thalétova kružnice nad průměrem AB
- 6) $P_a; P_a \in k \cap \tau_{AB}$
- 7) $\overleftrightarrow{BP_a}$
- 8) $C; C \in \rho \cap \overleftrightarrow{BP_a} \wedge C \neq B$
- 9) $\triangle ABC$

Konstrukce



Obrázek 2.7: Konstrukční řešení příkladu č. 5.

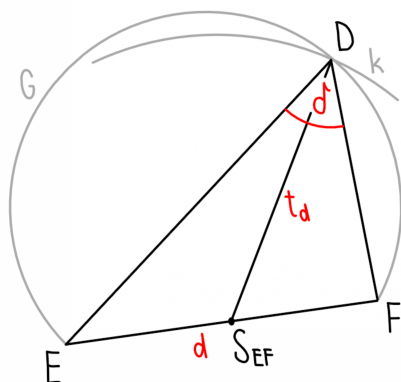
Diskuze

Konstrukce, kterou jsme zde provedli, vede k sestavení dvou trojúhelníků; $\triangle ABC_1, \triangle ABC_2$. Úhel $\sphericalangle ASB; |\sphericalangle ASB| = 150^\circ$ ale není příslušný středový úhel k obloukovému úhlu $\sphericalangle AC_2B$. Trojúhelník ABC_2 tedy nesplňuje zadání, jelikož velikost úhlu u vrcholu C má být rovna 75° .

Úloha má v rovině 1 řešení: $\triangle ABC_1$

Příklad 6. Sestrojte trojúhelník DEF , znáte-li velikost strany $d = 6$ cm, těžnice $t_d = 3,5$ cm a úhlu $\delta = 75^\circ$.

Náčrtek



U náčrtku dbáme především na zachování incidence a držíme se správných poměrů. Střed úsečky by skutečně měl půlit danou úsečku. Známe-li velikost jistého úhlu, pak nevolíme extrémní protiklad, tj. místo ostrého tupý a místo tupého ostrý. Opět zvýrazňujeme všechny důležité informace a uvědomujeme si vzájemné vztahy. Úsečka t_d je těžnice na stranu d a úhel δ úhel proti straně d . Strana d je tedy prvek spojující všechny tyto informace.

Rozbor

Slovní rozbor

Úloha je nepolohová, můžeme si tedy zvolit čím začít.

Vhodné je pro nás začít stranou $d = 6$ cm, tj. $|EF| = 6$ cm. Tím získáme rovnou dva vrcholy daného trojúhelníku a dále známe obě informace v relaci se stranou d ; těžnice je ke straně d a úhel je proti straně d .

Víme, že těžnice $t_d = 3,5$ cm, tedy víme, že vzdálenost středu S_{EF} strany EF od vrcholu D je právě $3,5$ cm, zapíšeme $v(D, S_{EF}) = 3,5$ cm. Množinou bodů v rovině, které mají od bodu S_{EF} vzdálenost $3,5$ cm, je kružnice se středem v bodě S_{EF} a poloměrem $3,5$ cm, tzn. $D \in k(S_{EF}; 3,5 \text{ cm})$.

Jelikož dále $\delta = 75^\circ$, pak víme, že $|\sphericalangle EDF| = 75^\circ$. Můžeme říci, že úsečku EF vidíme z bodu D pod úhlem 75° . Všechny body v rovině, ze kterých danou úsečku EF vidět pod úhlem 75° , tvoří $\mathcal{G}_{EF}^{75^\circ}$. Z toho plyne, že bod D nutně náleží dané ekvigonále $\mathcal{G}_{EF}^{75^\circ}$.

Z předchozích řádků můžeme vyvodit, že $D \in \mathcal{G}_{EF}^{75^\circ} \cap k$ a po jeho sestavení můžeme dát za vznik trojúhelníku DEF .

Symbolický rozbor

začneme EF ; $|EF| = 6$ cm

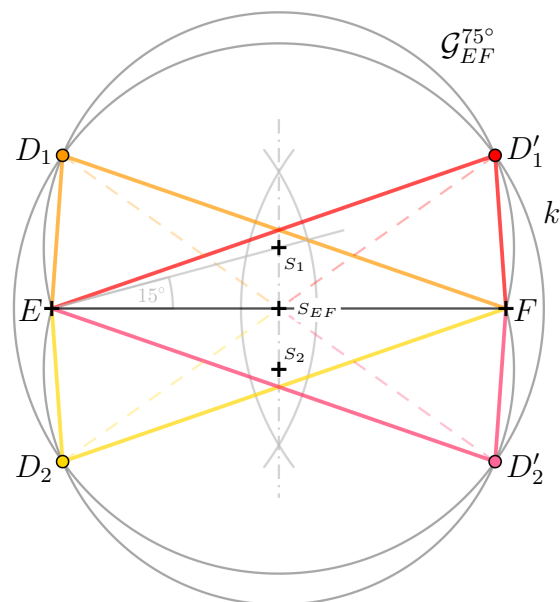
hledáme D (vrchol $\triangle DEF$)

$$\left. \begin{array}{l} t_d = 3,5 \text{ cm} \implies v(D, S_{EF}) = 3,5 \text{ cm} \implies D \in k(S_{EF}; 3,5 \text{ cm}) \\ \delta = 75^\circ \implies |\sphericalangle EDF| = 75^\circ \implies D \in \mathcal{G}_{EF}^{75^\circ} \end{array} \right\} D \in \mathcal{G}_{EF}^{75^\circ} \cap k$$

Popis konstrukce

- 1) $EF; |EF| = 6 \text{ cm}$
- 2) $S_{EF}; S_{EF} \in EF \wedge v(E; S_{EF}) = v(F; S_{EF})$
- 3) $k; k(S_{EF}; 3,5 \text{ cm})$
- 4) $\mathcal{G}_{EF}^{75^\circ}$; ekvigonála $\mathcal{G}_{EF}^{75^\circ}$
- 5) $D; D \in \mathcal{G}_{EF}^{75^\circ} \cap k$
- 6) $\triangle DEF$

Konstrukce



Obrázek 2.8: Konstrukční řešení příkladu č. 6.

Diskuze

Úloha má v rovině 2 řešení: D_1EF, D'_1EF .

Zbývající trojúhelníky jsou shodné; $D_1EF \cong D_2EF, D'_1EF \cong D'_2EF$, a nebereme je tedy jako další různá řešení, jelikož jde o nepolohovou úlohu. Pakliže by se jednalo o úlohu polohovou, byla by řešení celkově 4.

2.3 Šetření množin bodů dané vlastnosti

Na začátku této části práce rozebereme v rámci následujícího příkladu speciální případ MBDV viz poznámka k definici č. 5. Z této definice plyne, že osou úhlu rozumíme polopřímku rozdělující tento úhel na dva shodné úhly, jelikož za množinu šetřených bodů bereme pouze část roviny a to konvexní úhel úhel β :

$$o_\beta = \{X \in \beta; v(X; \overrightarrow{BA}) = v(X; \overrightarrow{BC})\}$$

Rozebereme následující případ, kdy za množinu šetřených bodů zvolíme rovinu ρ .

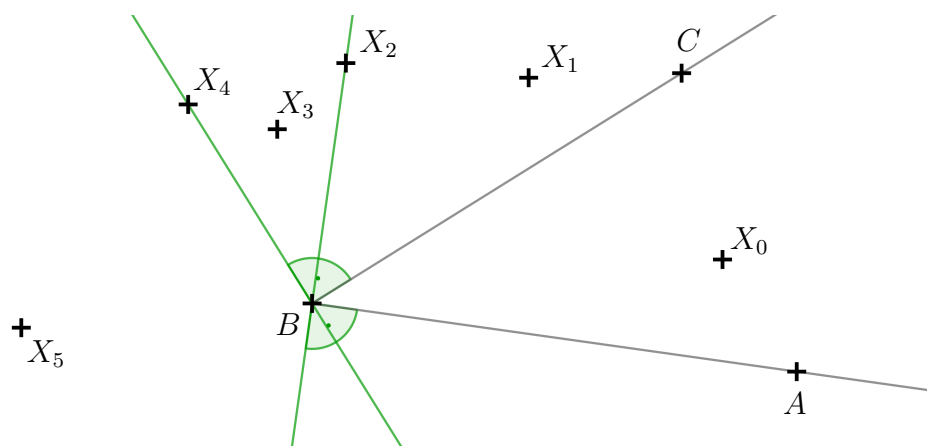
Příklad 7. *Nechť je dán úhel $\beta = \sphericalangle ABC$. Určete všechny body X v rovině, pro které platí, že vzdálenost bodu X od ramene \overrightarrow{BA} je stejná jako vzdálenost bodu X od ramene \overrightarrow{BC} .*

Tzn. hledáme množinu $M = \{X \in \rho; v(X; \overrightarrow{BA}) = v(X; \overrightarrow{BC})\}$.

Náčrtek & Rozbor

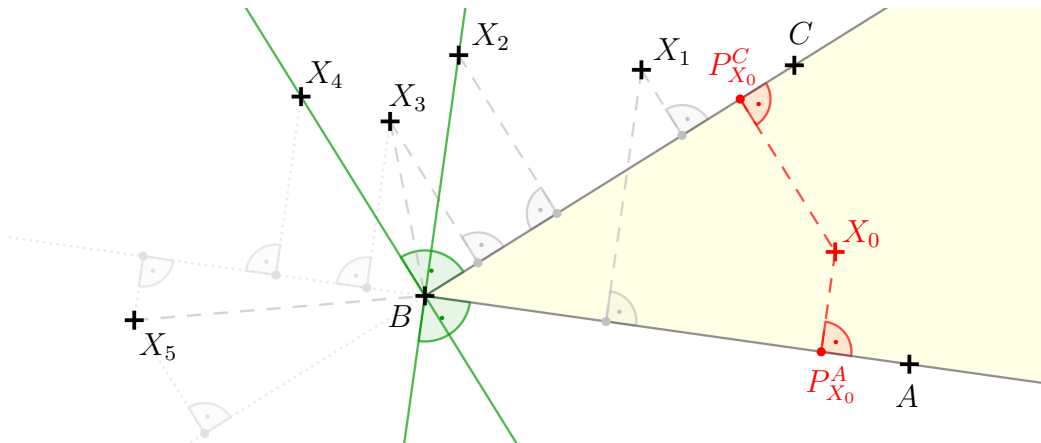
Vzdálenost bodu X od útvaru U definujeme jako $\min(|XY|; Y \in U)$. Pokud pata kolmice spuštěné z bodu X na \overrightarrow{AB} náleží \overrightarrow{BA} , je pak tato pata hledaným bodem Y s minimální vzdáleností od daného bodu X . V opačném případě $v(X; \overrightarrow{BA}) = |XB|$. Jelikož vzdálenost měříme po kolmici, rozdělíme tedy rovinu ρ na několik částí pomocí dvou přímk, které jsou po řadě kolmé k ramenům úhlu β a prochází vrcholem B . Pro přehlednost řešení rozebereme postupně tyto jednotlivé části, jak je naznačeno pomocí několika bodů X_i viz obr. 2.9.

V tomto konkrétním případě budeme rozumět úhlem β nenulový konvexní úhel $\sphericalangle ABC$. Jelikož však v zadání záleží pouze na pozici ramen, tj. dvou polopřímek se společným počátečním bodem, a množinou šetřených bodů je celá rovina ρ , nezáleží pak zda-li pracujeme s konvexním či nekonvexním úhlem určeným body A, B a C . Speciální případy nulového a plného úhlu rozebereme zvlášť v rámci diskuze.



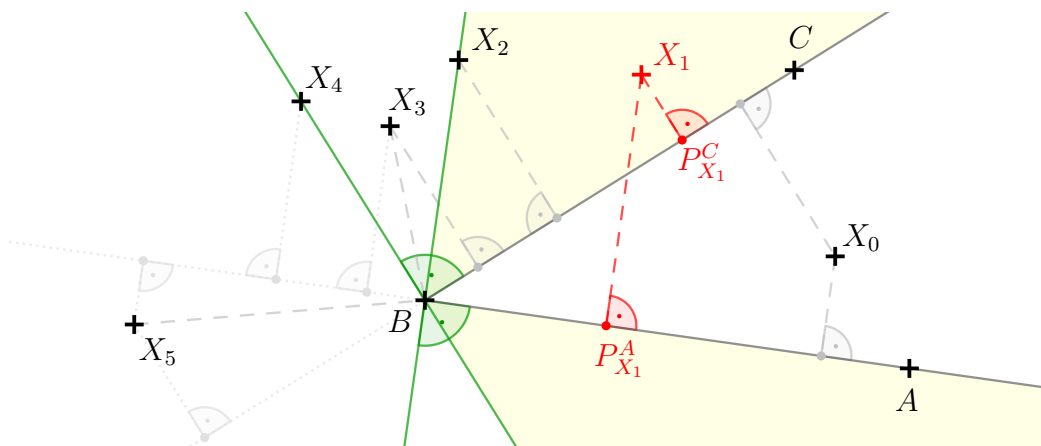
Obrázek 2.9: Vizualizace příkladu č. 7; zadání.

Začneme nejdříve s šetřením bodů, které náleží úhlu β . Zvolme libovolný z nich a označme jej X_0 viz obr. 2.10. Pro každý bod z této oblasti platí, že vzdálenost bodu X od daného ramene je rovna právě vzdálenosti bodu X od paty kolmice P spuštěné z bodu X k danému rameni. Všechny vnitřní body, které mají stejnou vzdálenost od ramen daného konvexního úhlu β , tvoří právě osu o_β úhlu β .



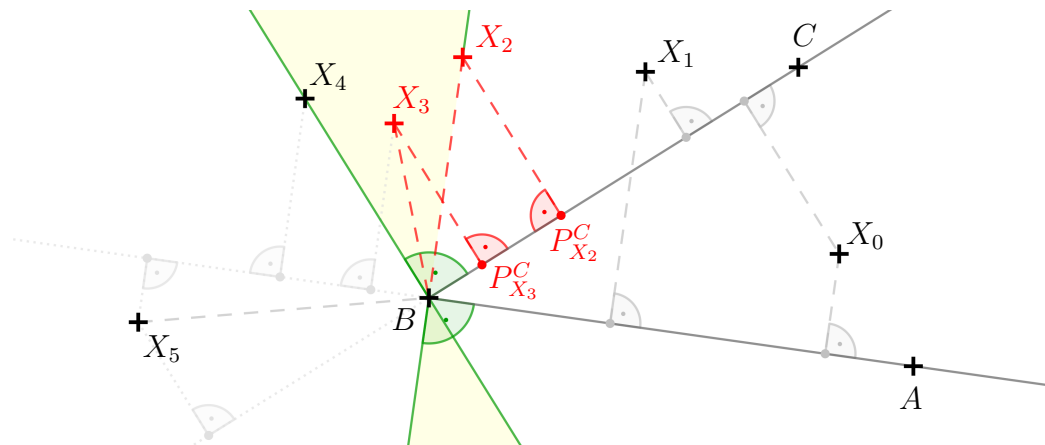
Obrázek 2.10: Vizualizace příkladu č. 7; šetření bodů X_0 .

Body náležící jednomu z ramen daného úhlu vyjma bodu B jistě do MBDV nepatří, jelikož vzdálenost od jednoho ramene je nulová kdežto k druhému nikoli. Zvolme tedy libovolný bod, který nenáleží úhlu β , ty se budou dle počtu pat kolmic na daných ramenech lišit. Soustředme se nejdříve na typ vnějšího bodu, jako je zvolený bod X_1 viz obr. 2.11. Obě paty kolmic leží přímo na ramenech daného úhlu, kdy je zřejmé, že pro každou volbu X_1 platí $v(X_1; P_{X_1}^A) \neq v(X_1; P_{X_1}^C)$. Tyto body tedy nenáleží hledané množině M .



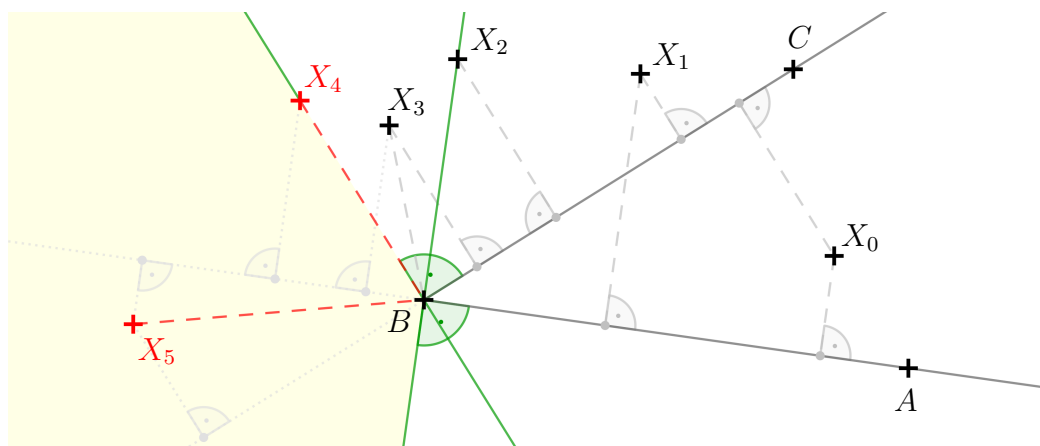
Obrázek 2.11: Vizualizace příkladu č. 7; šetření bodů X_1 .

Jiná volba vnějšího bodu, necht' je jím X_2 viz obr. 2.12, nám dá za vznik paty $P_{X_2}^C$ na jednom rameni a na druhém daná pata splyne s bodem B . Z vlastností pravoúhlého $\triangle X_2BP_{X_2}^C$ plyne, že $v(X_2; B) \neq v(X_2; P_{X_2}^C)$. Stejně pro body z dané oblasti, jako je bod X_3 , platí, že vzdáleností od druhého ramene budeme rozumět vzdálenost bodu X_3 od bodu B . Opět z vlastností pravoúhlého $\triangle X_3BP_{X_3}^C$ je zřejmé, že $v(X_3; B) \neq v(X_3; P_{X_3}^C)$. Tudíž ani body X_2, X_3 nebudou mezi hledanými body množiny M .



Obrázek 2.12: Vizualizace příkladu č. 7; šetření bodů X_2 .

Zaměříme se následně na body ze zvýrazněné části roviny ρ viz obr. 2.13. Zvolme bod X_4 na hranici a reprezentující bod X_5 v této části roviny. Pro bod X_4 platí, že jedna z vzniklých pat splyne s bodem B a vzdálenost od druhého ramene bude právě vzdálenost od bodu B . Podobně pro každý bod X_5 platí, že jeho vzdálenost k ramenům úhlu β nemůžeme změřit po kolmici. Nejbližší bod obou ramen k bodu X_5 je tedy nutně také bod B . Můžeme tedy říci, že všechny body této oblasti i její hranice mají od obou ramen stejnou vzdálenost a tedy náleží hledané MBDV.



Obrázek 2.13: Vizualizace příkladu č. 7; šetření bodů X_3 .

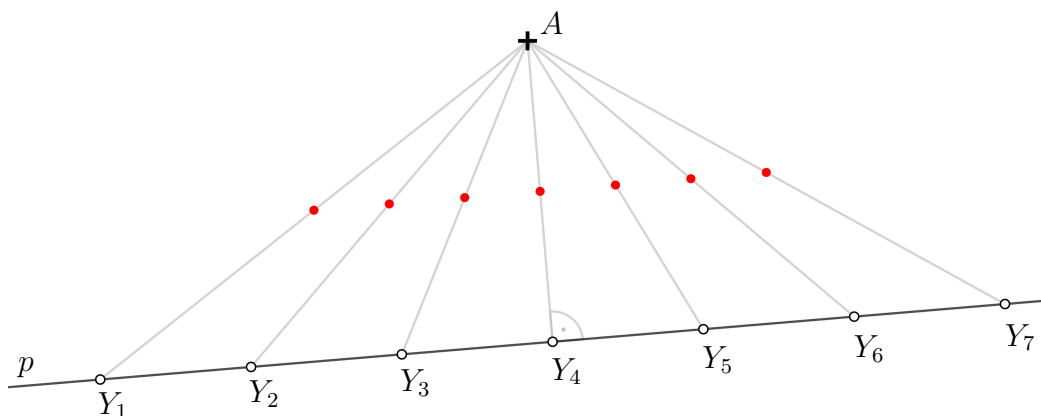
Příklad 8. Je dána přímka p a bod A , který na přímce p neleží. Určete množinu všech středů úseček AY , jestliže bod Y probíhá přímku p . [6]

Náčrtek & Rozbor

Postupujme dle schématu 1.2. Ze zadání víme, že body dané množiny jsou středy úseček AY , kde Y prochází přímku p . Hledáme tedy množinu:

$$M = \{X \in \rho; X = S_{AY}, \text{ kde } Y \text{ prochází } p\}$$

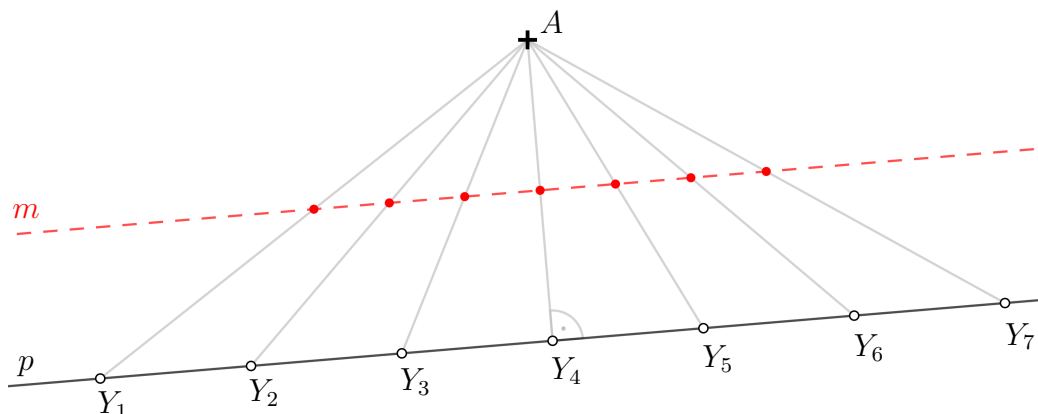
Sestrojme několik bodů $X \in \rho$, které danou vlastnost splňují. Viz červeně vyznačené body v obr. 2.15.



Obrázek 2.15: Sestrojení několika bodů hledané množiny M .

Tyto sestrojené body, nebo lépe řečeno „trajektorii“ bodu X při změně polohy bodu $Y \in p$, můžeme zachytit přímkou (označme ji třeba m), která je rovnoběžná s přímkou p a prochází středem jedné z úseček AY_i . Je-li bod Y patou kolmice spuštěné z bodu A na přímku p , můžeme pak říci, že $v(m, A) = v(m, p)$.

Vyslovujeme tedy hypotézu, že hledanou množinou M je přímka m ; $m \parallel p \wedge v(m, A) = v(m, p)$.

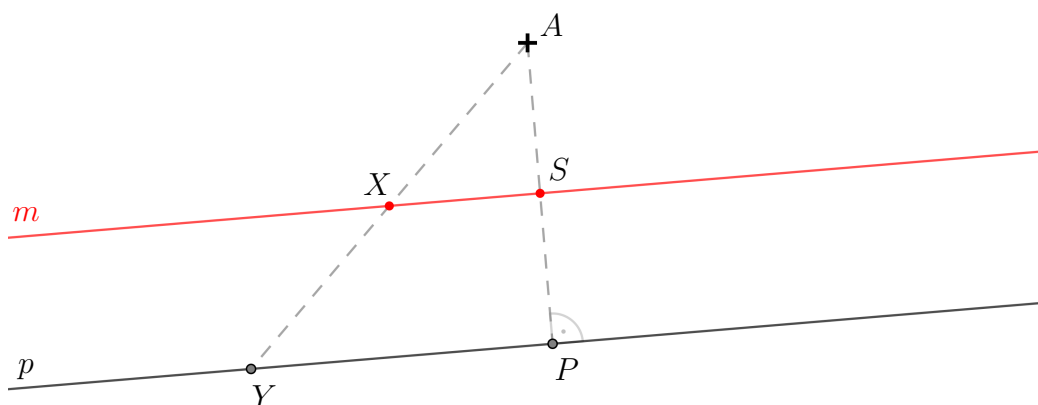


Obrázek 2.16: Zachycení množiny M geometrickým útvarem.

V dalším kroku danou hypotézu dokážeme. Nejprve potvrdíme, že všechny body této vlastnosti náležejí přímce m , tj. $\forall X \in \rho : V(X) \implies X \in m$.

Označme patu kolmice spuštěné z bodu A na přímku p jako bod P a dále S střed úsečky AP . Zvolme libovolně bod $Y \neq P$ na přímce p a sestrojme střed X úsečky AY , který také náleží množině M . Úsečka SX je střední příčkou trojúhelníku APY a je tedy rovnoběžná se stranou YP , resp. s přímkou p . Jelikož $S \in m$, tak i $X \in m$. K témuž výsledku dojdeme, volíme-li bod $Y \in P$, kdekoli na přímce p .

Platí tedy, že $X \in M \implies X \in m$.



Obrázek 2.17: Ověření hypotézy hledané množiny M .

Zadruhé zpětně dokážeme, že každý bod přímky m splňuje danou vlastnost a náleží tedy množině M , tj. $\forall X \in \rho : X \in m \implies V(X)$.

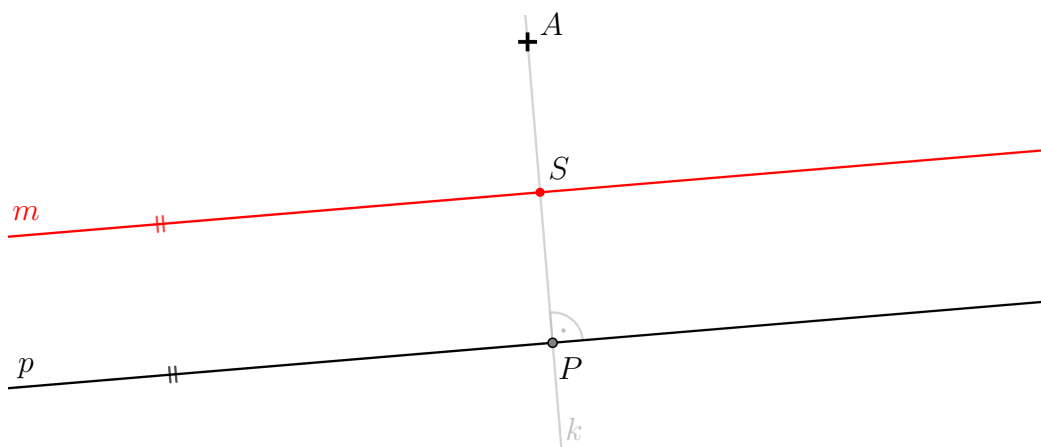
Zvolme na přímce m bod $X \neq S$. Přímka \overleftrightarrow{AX} protíná přímku p v bodě $Y \neq P$, což dá za vznik pravoúhlému trojúhelníku APY s přeponou AY . Jelikož bod S je středem jeho odvěsny AP a $m \parallel p$, je úsečka SX střední příčka trojúhelníku APY a bod $X \in m$ střed úsečky AY . K stejnému výsledku dojdeme, volíme-li bod $X \neq S$ kdekoli na přímce m .

Platí tedy, že $X \in m \implies X \in M$.

Popis konstrukce

- 1) $k; k \perp p \wedge A \in k$
- 2) $P; P \in k \cap p$
- 3) $S; S \in \wedge v(S, A) = v(S, P)$
- 4) $m; m \parallel p \wedge S \in m$

Konstrukce



Obrázek 2.18: Konstrukční řešení příkladu č. 8.

Diskuze

Hledanou množinu bodů dané vlastnosti tvoří přímka m ; $m \parallel p \wedge v(m, A) = v(m, p)$, tj. přímka $m \parallel p$, která prochází středem úsečky AP .

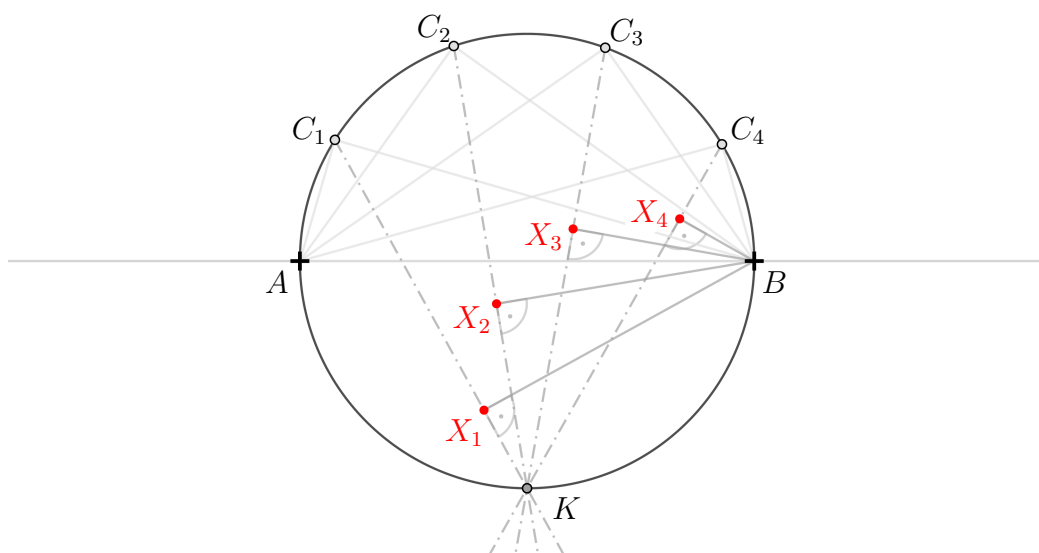
Příklad 9. V rovině je dána úsečka AB . V jedné z polorovin s hraniční přímkou AB uvažujeme všechny pravoúhlé trojúhelníky ABC s přeponou AB . Pro každý takový trojúhelník označíme X patu kolmice vedené bodem B na osu o_γ úhlu $\sphericalangle ACB$. Vyšetřete, co je množinou všech takto obdržných bodů X . [7]

Náčrtek & Rozbor

Označme τ_{AB} Thalétovu kružnici nad průměrem AB . Jelikož trojúhelník ABC je pravoúhlý, bude bod C procházet právě τ_{AB} v jedné z polorovin určené hraniční přímkou AB (tj. *otevřeným* obloukem \widehat{AB}). Postupujme dle schématu 1.2. Ze zadání víme, že body dané množiny jsou paty X kolmic vedených bodem B na osu o_γ . Označme tyto kolmice písmenem k . Hledáme tedy množinu:

$$M = \{X \in \rho; X = k \cap o_\gamma \text{ kde } C \text{ prochází otevřeným obloukem } \widehat{AB} \text{ a } k \perp o_\gamma \wedge B \in k\}$$

Sestrojme několik bodů $X \in \rho$, které danou vlastnost splňují. Viz červeně vyznačené body v obr. 2.19.

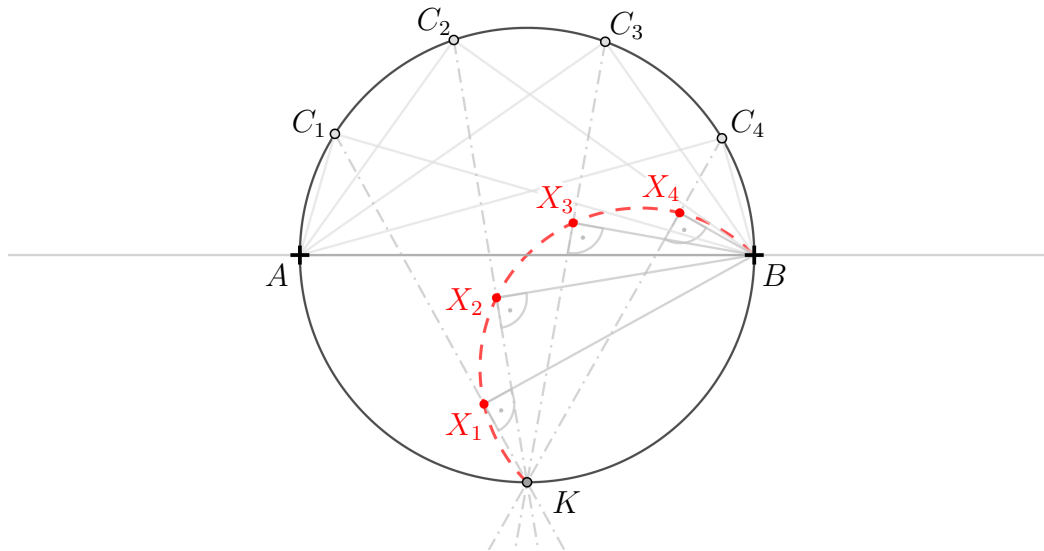


Obrázek 2.19: Sestrojení několika bodů hledané množiny M .

Takto sestrojené body, nebo lépe řečeno „trajektorii“ bodu X při změně polohy bodu C , můžeme zachytit polokružnicí BK bez bodů B, K , která leží ve vnitřní oblasti τ_{AB} a kde bod $K \in \tau_{AB}$ je společným průsečíkem všech os o_γ pro všechny volby polohy bodu C .

Prochází skutečně všechny osy úhlu γ bodem K viz obr. 2.19? Pokud C je různý od A, B , pak osa o_γ jistě protíná druhý oblouk určený body A, B v nějakém bodě K . Jelikož $|\sphericalangle ACK| = |\sphericalangle KCB|$, pak délka menšího oblouku \widehat{AK} je rovna délce menšího oblouku \widehat{KB} . Z toho plyne, že bod K vždy púli oblouk \widehat{AB} opačné poloroviny k bodu C a je tedy pevný pro všechny volby bodu C .

Vyslovujeme tedy hypotézu, že hledanou množinou M je polokružnice BK bez jejích koncových bodů B, K ležící ve vnitřní oblasti τ_{AB} .

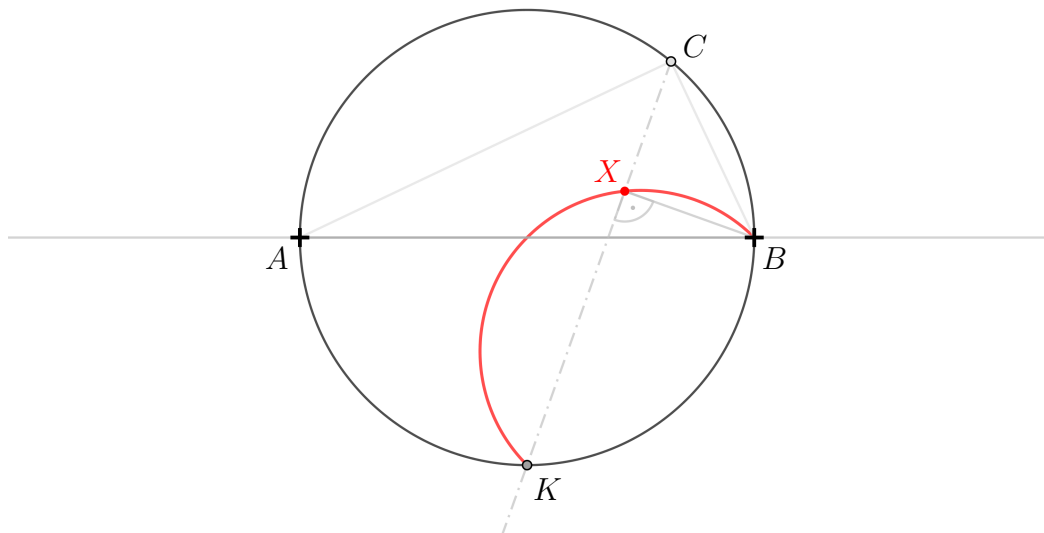


Obrázek 2.20: Zachycení množiny M geometrickým útwarem.

Nyní je třeba ověřit správnost této hypotézy. Nejprve potvrdíme, že všechny body dané vlastností náležejí polokružnici BK vyjma bodů B, K , tj. $\forall X \in \rho : V(X) \implies X \in \text{polokružnice } BK \setminus \{B, K\}$.

Jelikož osa o_γ prochází pro každou volbu polohy bodu C bodem K a dále víme, že $k \perp o_\gamma$ a zároveň $B \in k$, pak platí, že $|\sphericalangle KXB| = 90^\circ$. Z toho přímo plyne, že bod X náleží polokružnici KB vyjma bodů B, K .

Platí tedy, že $X \in M \implies X \in \text{polokružnice } BK \setminus \{B, K\}$.



Obrázek 2.21: Ověření hypotézy hledané množiny M .

Zadruhé zpětně dokážeme, že každý bod polokružnice KB vyjma bodů B, K splňuje danou vlastnost a náleží tedy množině M , tj. $\forall X \in \rho : X \in \text{polokružnice } BK \setminus \{B, K\} \implies V(X)$.

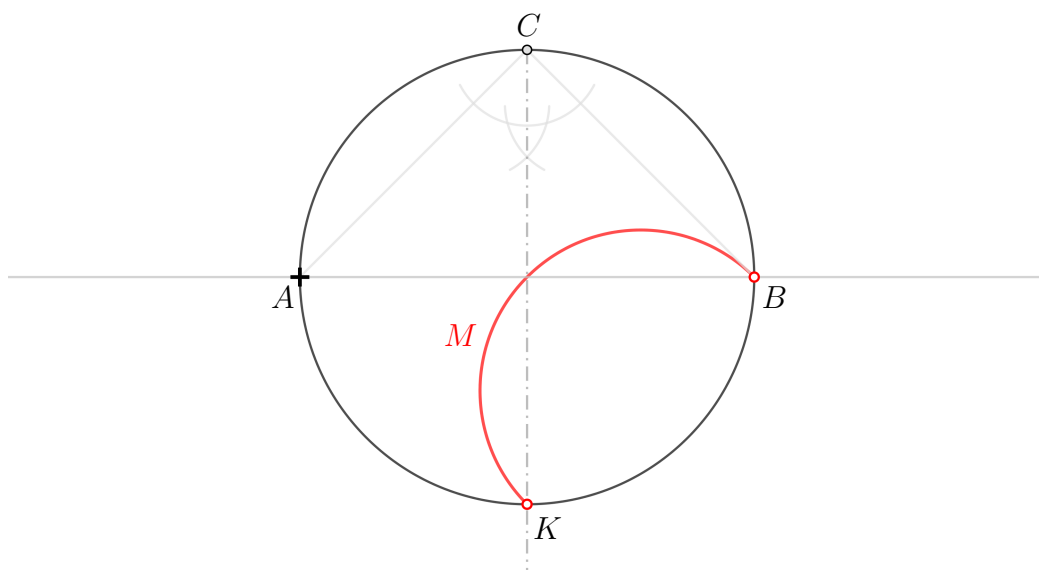
Zvolme na polokružnici KB bod $X \neq B, K$. Pro libovolnou volbu X platí, že \overleftrightarrow{KX} protne τ_{AB} v bodě $C \neq K$. Jelikož $|\sphericalangle KXB| = 90^\circ \implies \overleftrightarrow{BX} \perp \overleftrightarrow{KX} \implies \overleftrightarrow{BX} \perp \overleftrightarrow{KC}$. Dále víme, že délka menšího oblouku \widehat{AK} je rovna délce menšího oblouku \widehat{KB} z čehož plyne, že $|\sphericalangle ACK| = |\sphericalangle KCB|$ a tudíž \overleftrightarrow{CK} je osou o_γ úhlu $\sphericalangle ACB$. Závěrem tedy je, že bod X je patou kolmice spuštěné z bodu B na osu o_γ , čímž jsme potvrdili danou hypotézu.

Platí tedy, že $\forall X \in \rho : X \in \text{polokružnice } BK \setminus \{B, K\} \implies x \in M$.

Popis konstrukce

- 1) τ_{AB} ; Thalétova kružnice nad průměrem AB
- 2) $C; C \in \tau_{AB}$
- 3) o_γ ; osa úhlu $\sphericalangle ACB$
- 4) $K; K \in o_\gamma \cap \tau_{AB} \wedge K \neq C$
- 5) $M; M$ je polokružnice $BK \setminus \{B, K\}$ ve vnitřní oblasti τ_{AB}

Konstrukce



Obrázek 2.22: Konstrukční řešení příkladu č. 9.

Diskuze

Hledanou množinu bodů dané vlastnosti tvoří polokružnice $BK \setminus \{B, K\}$ ve vnitřní oblasti τ_{AB} , tj. polokružnice $BK \setminus \{B, K\}$, která prochází středem úsečky AB .

Poznámka. Určení, o kterou z polokružnic nad průměrem KB se jedná, lze zjednodušit určením jednoho jejího bodu, jak nastiňuje obr. 2.22. Můžeme tedy říci, že se jedná o polokružnici $BK \setminus \{B, K\}$, která prochází středem úsečky AB . Zde si také můžeme zjednodušit konstrukci tím, že místo volby bodu C a sestrojení osy o_γ , rovnou sestrojíme osu o_{AB} , kde jeden její průsečík s τ_{AB} můžeme označit jako K .

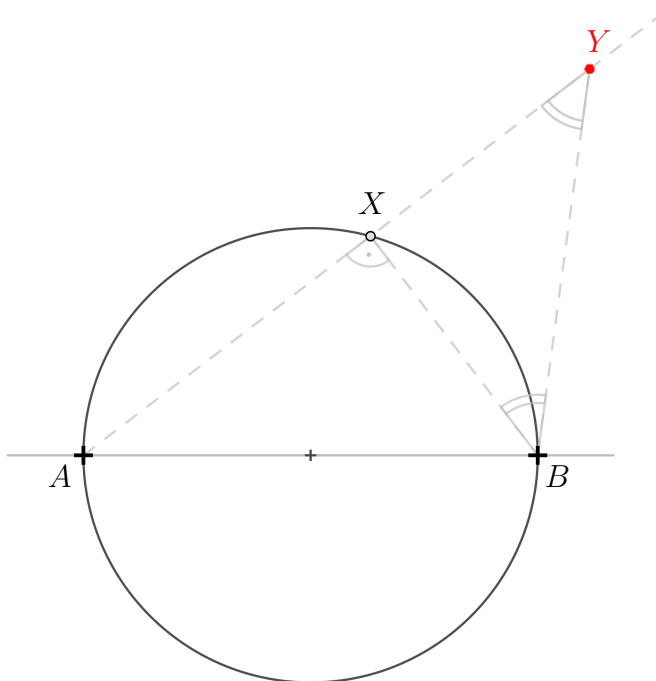
Příklad 10. V rovině je dána kružnice k s průměrem AB . Na kružnici k zvolíme bod X různý od bodů A, B a na polopřímce AX sestrojíme bod Y tak, aby platilo $|AY| = |AX| + |XB|$. Co je množinou všech takto obdržných bodů Y ? [7]

Náčrtek & Rozbor

Postupujme dle *metody rozboru a zkoušky*. Jaké závěry můžeme udělat pro body Y sestrojené dle zadání? Jelikož $X \in k \setminus \{A, B\}$, pak $|\sphericalangle AXB| = 90^\circ \implies |\sphericalangle BXY| = 90^\circ$. Jelikož dále platí, že $|AY| = |AX| + |XB|$, pak $|XY| = |XB|$ a trojúhelník XYB je tedy nutně rovnoramenný a velikost jeho úhlů při základně BY je 45° viz obr. 2.23.

Z toho plyne, že pro každý bod Y splňující danou vlastnost platí, že $|\sphericalangle AYB| = 45^\circ$. Body Y jsou takové body v rovině, ze kterých lze vidět úsečku AB pod úhlem 45° , tzn. $\forall Y \in \rho : V(Y) \implies Y \in \mathcal{G}_{AB}^{45^\circ}$.

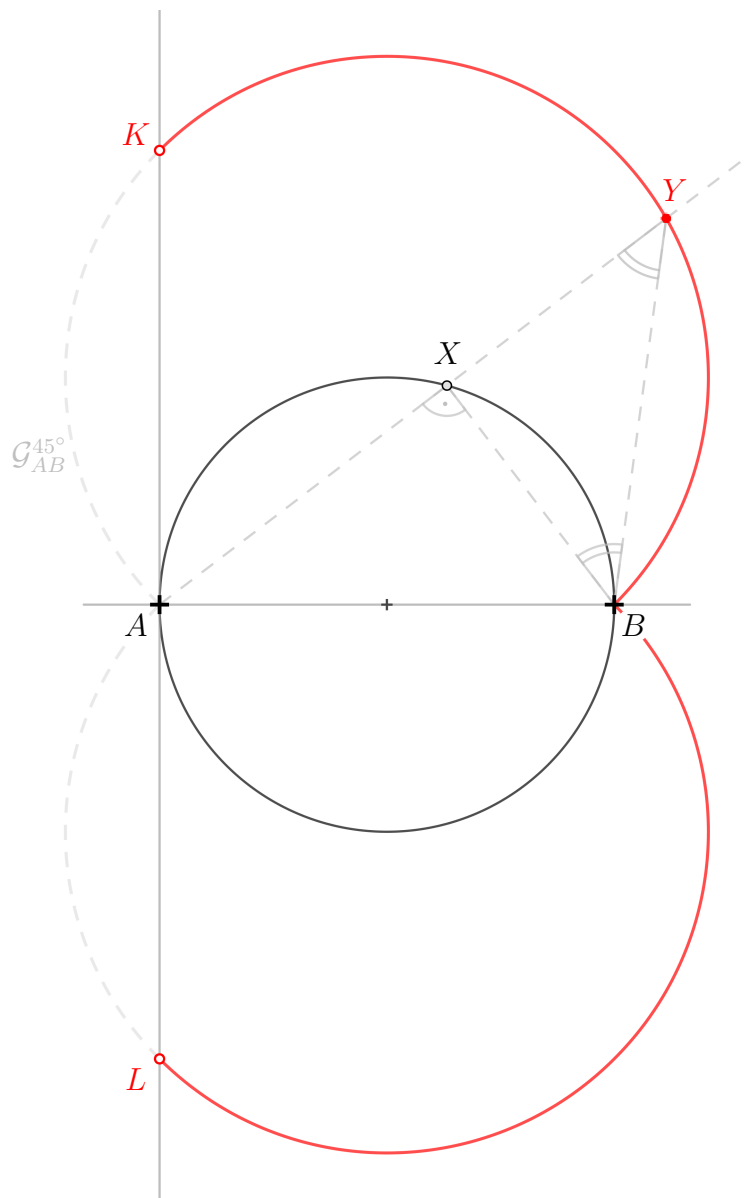
Platí tedy, že $Y \in M \implies Y \in \mathcal{G}_{AB}^{45^\circ}$.



Obrázek 2.23: Rozbor situace příkladu č. 10.

Zpětně ověříme, které body $Y \in \mathcal{G}_{AB}^{45^\circ}$ skutečně splňují $V(Y)$. Pro každý zvolený bod Y na této ekvigonále musí platit, že polopřímka \overrightarrow{AY} protne kružnici k v bodě $X \neq A, B$. Aby takový bod X vznikl, nutně platí, že $|\sphericalangle BAY| \in (0^\circ; 90^\circ)$. Pro úhly velikosti 0° a 90° by totiž bod X nutně splýnul po řadě s body B, A . Pro úhel velikosti $> 90^\circ$ by X vůbec nevznikl. Platí tedy, že $Y \in \mathcal{G}_{AB}^{45^\circ}$, které skutečně budou splňovat $V(Y)$, jsou právě takové body Y , pro které platí, že $|\sphericalangle BAY| \in (0^\circ; 90^\circ)$.

Označme body $Y \in \mathcal{G}_{AB}^{45^\circ}$ ležící na kolmici k AB procházející bodem A po řadě jako body K, L . Hledanou množinou je pak sjednocení větších *otevřených* oblouků \widehat{KB} a \widehat{BL} viz obr. 2.24.

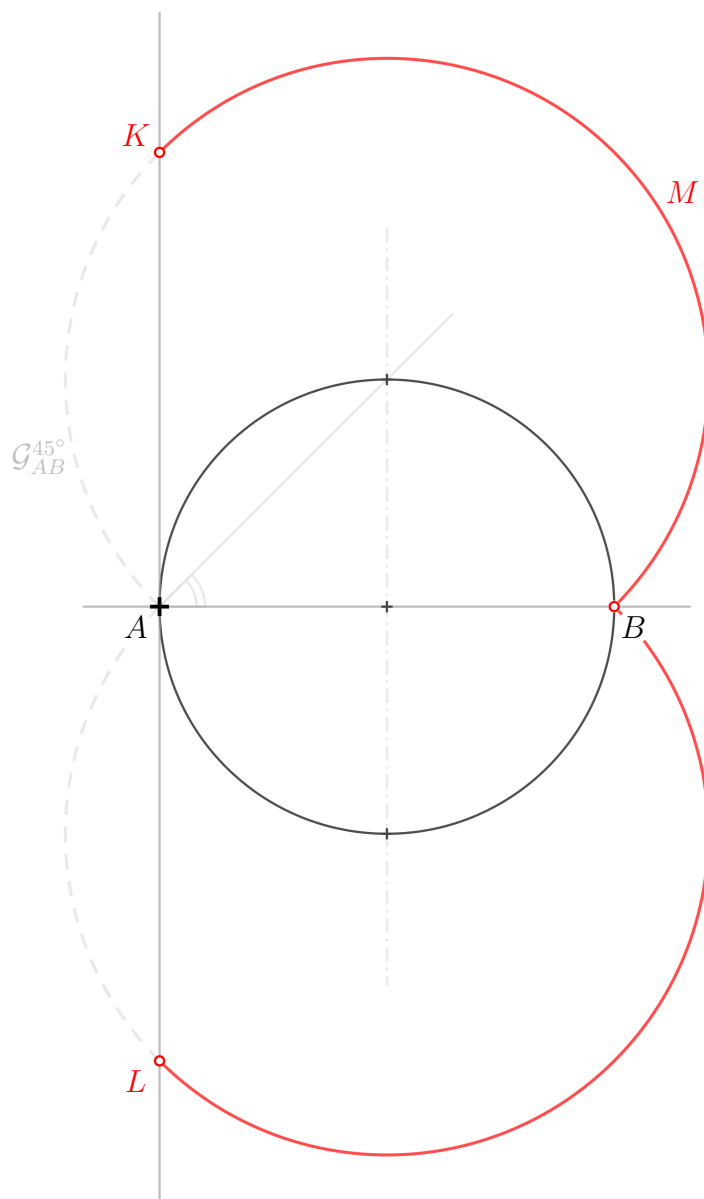


Obrázek 2.24: Zachycení množiny M geometrickým útvarem.

Popis konstrukce

- 1) $\mathcal{G}_{AB}^{45^\circ}$; ekvigonála $\mathcal{G}_{AB}^{45^\circ}$
- 2) $p; p \perp AB \wedge A \in p$
- 3) $K, L; K, L \in p \cap \mathcal{G}_{AB}^{45^\circ}$
- 4) $M; M$ je sjednocení *otevřených* oblouků \widehat{KB} a \widehat{BL}

Konstrukce



Obrázek 2.25: Konstrukční řešení příkladu č. 10.

Diskuze

Hledanou množinu bodů dané vlastnosti tvoří sjednocení *otevřených* oblouků \widehat{KB} a \widehat{BL} .

3. Výzkumné šetření

V této kapitole se budeme zabývat řešením netradičně zadaných úloh na hledání MBDV. Cílem této části práce bude nejen představení daného experimentu, ale také seznámení s postupem výzkumného šetření, popis celého průběhu šetření, jeho výzkumného vzorku a v neposlední řadě závěr a hodnocení celého šetření.

3.1 Stanovení cílů a zadání testových úloh

Ve výsledcích budeme především zkoumat závislost úspěšného řešení jednotlivce v rámci dílčích zadaných úloh, zvolené metody řešení a počet úspěšných řešitelů.

Pro analýzu těchto závislostí byly stanoveny následující výzkumné otázky:

1. Vyřešil správně student danou úlohu a jakou metodu použil?
2. Které metody řešení převládaly?
3. Mělo vyřešení jedné úlohy vliv na vyřešení druhé úlohy?

Sestavení úloh vedlo na známou, jednoduše sestrojitelnou MBDV, kterou lze využít při praktickém řešení reálných problémů. Studentům byly zadány dvě elementární návodné úlohy s užitím MBDV, které jsou v této práci vzorově vyřešené v rámci druhé kapitoly viz příklad č. 2 a příklad č. 3.

První úloha

Okresní města Kyblíkov, Ledvinky a Maletice plánují postavit pro své rezidenty vlakové nádraží. Jelikož jde o regionální projekt financovaný ze společného fondu, plánují postavit nádraží na takovém místě, které nebude žádné město zvyhodňovat. Nádraží má být umístěno tak, aby přímá vzdálenost od každého z měst byla stejná. Určete, kde bude nádraží postaveno.

Druhá úloha

V muzeu Ektheta vymezili v rámci veřejné expozice výstavní trojúhelníkovou desku pro umístění starožitné vázy nevyčísitelné ceny. Pracovníci muzea chtějí tento kousek na desku umístit tak, aby byla váza od všech stran desky stejně vzdálena, a zamezili tak nechtěným dotekům ze strany návštěvníků. Určete, kam pracovníci muzea vázu umístí.

3.2 Výzkumný vzorek

Úlohy byly podané ve dvou třídách druhého ročníku čtyřletého gymnázia s jazykovým zaměřením s dotací 3-4-4-0¹ po měsíci výuky planimetrie. Označme skupinu studentů jedné z těchto tříd skupina A a druhou jako skupina B.

| | |
|-----------|---|
| skupina A | 19 studentů, 2. ročník čtyřletého gymnázia, 3-4-4-0 |
| skupina B | 16 studentů, 2. ročník čtyřletého gymnázia, 3-4-4-0 |

Tabulka 3.1: Popis výzkumného vzorku.

Obě skupiny viz tabulka 3.1 obsahují studenty jak s velice dobrými znalostmi matematiky tak i ty, kteří s matematikou bojují. Následující poznatky vychází z osobní zkušenosti a dlouhodobého pozorování obou skupin: Skupina A svými výkony mívá tendenci se polarizovat na studenty dosahující výborných a dostatečných výsledků. Daří se jim především při řešení algebraických úloh a úloh řešených pevnými algoritmy. Studenti skupiny B naopak svými výkony klasicky opisují Gaussovu křivku² a daří se jim více při řešení praktických či grafických úloh.

3.3 Průběh výzkumného šetření

Test byl konán u obou skupin ve stejný vyučovací den. Studentům v rámci šetření byly zadány dvě slovní úlohy na jejichž řešení bylo vyhrazeno 20 minut čistého výukového času, po kterém byl stanoven prostor k vzájemné diskuzi. Studenti byli před rozdělením úloh seznámeni s časovým limitem, anonymitou testování a byla zdůrazněna možnost volby jakékoli metody řešení. Všichni studenti měli k dispozici jak psací, tak rýsovací potřeby. Velká většina studentů obou skupin dokončila své řešení s velkým časovým předstihem.

V rámci diskuze vyplynuly na povrch v rámci obou skupin konfliktní tvrzení. Někteří studenti nastiňovali, že nejednoznačnost zadání (neznáme vzájemnou polohu 3 bodů), implikuje možnost jedné volby (např. zvolíme rovnostranný trojúhelník). Další studenti oponovali, že je tomu právě naopak a je nutné prozkoumat všechny možnosti. V rámci této diskuze vyplynuly na povrch nesprávné postupy a špatné implikace ze zavádějícího náčrtku/zvolené situace. Stejně tak byla připomenuta základní myšlenka úloh s parametry, a to, že je nutné prozkoumat všechny možné případy. Studenti byli poté seznámeni s vzorovým řešením obou úloh.

¹Zápisem 3-4-4-0 rozumíme časovou dotaci 3 h matematiky týdně v 1. ročníku, 4 h matematiky týdně v 2. a 3. ročníku a žádné řádné hodiny matematiky v ročníku čtvrtém.

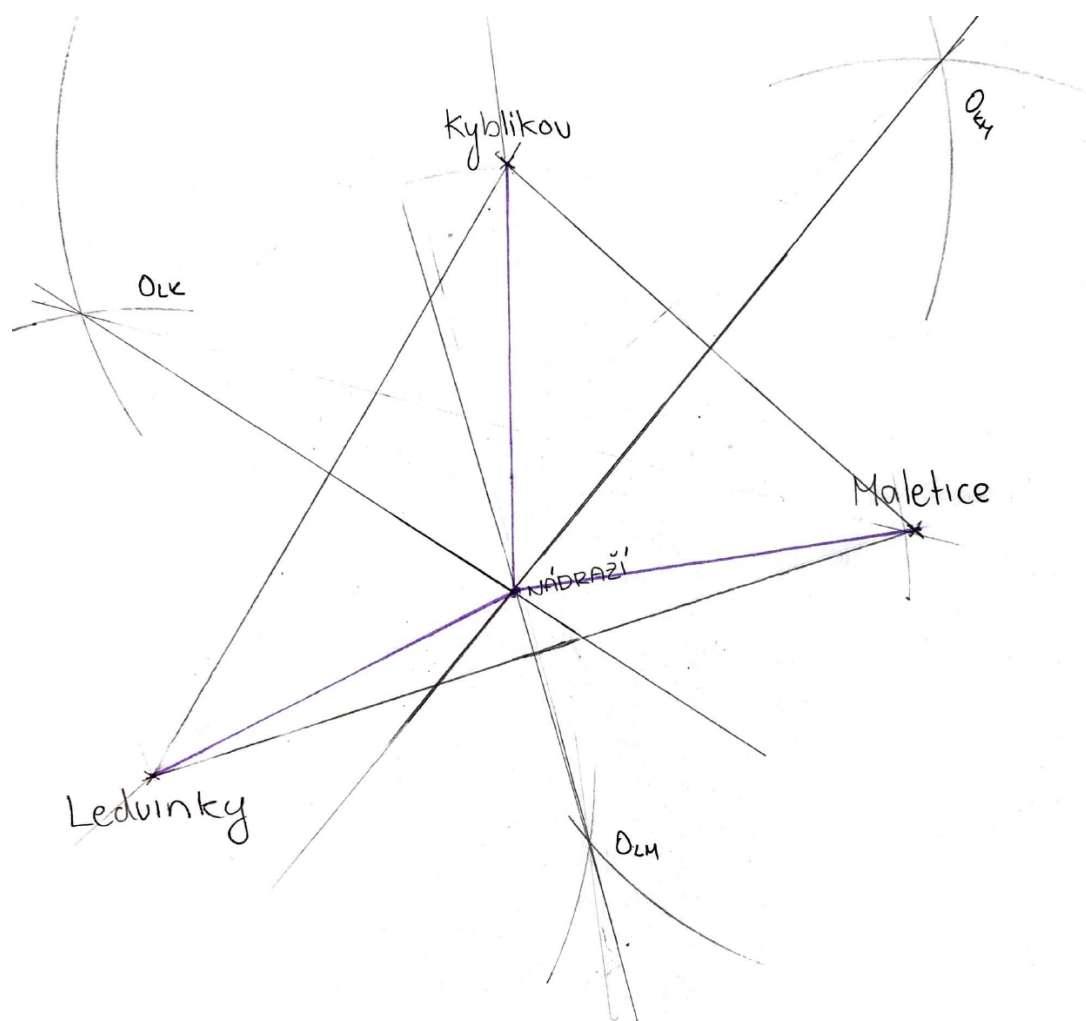
²Křivka popisující zákon o rozložení četnosti nějakého jevu, známého pod názvem *Gaussovo rozdělení* (podle Carla Friedricha Gausse) nebo také *Normální rozdělení*.

3.4 Metody řešení úloh

V této části zkoumáme volby metody řešení. Jelikož všichni studenti zvolili jistou variaci syntetického řešení (nedošlo ani k jednomu početnímu řešení) omezujeme se jenom na některé níže zmíněné metody. Ty dle svého popisu rovnou nastiňují, zda-li mohou vést na správné řešení či nikoli.

Dle vzorku je rozdělujeme do 5 kategorií:

- a) *kružnice*: student na základě známých vlastností kružnice opsané/vepsané zcela jasně sestrojil či popsal hledaný bod viz obr. 3.1



=> vzdálenost nádraží od měst

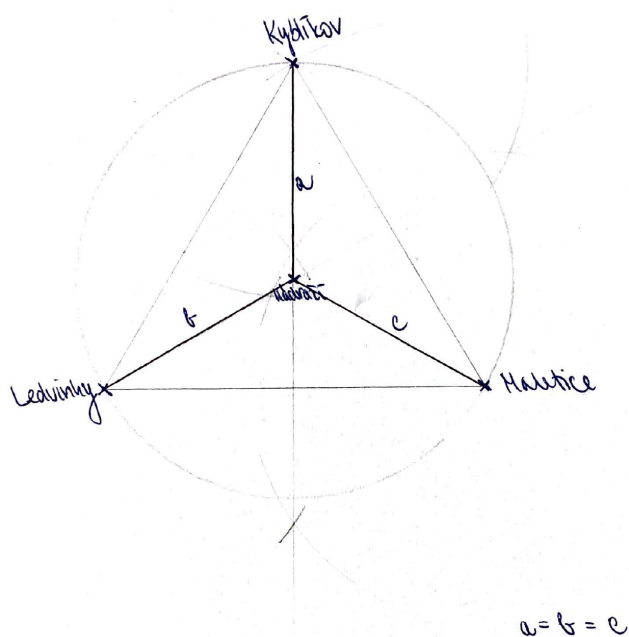


$x \approx 6,8 \text{ cm}$

→ osa stran + jejich průsečík = NÁDRAŽÍ

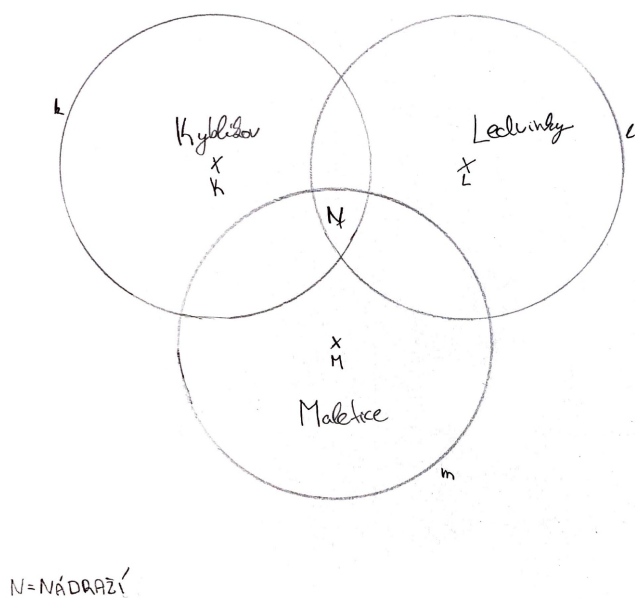
Obrázek 3.1: Příklad na nalezení nádraží řešený metodou *kružnice*.

- b) *speciální případ*: student jasně sestrojil hledaný bod v rámci speciálního případu zadání (rovnostředný trojúhelník, předurčené zadání) viz obr. 3.2



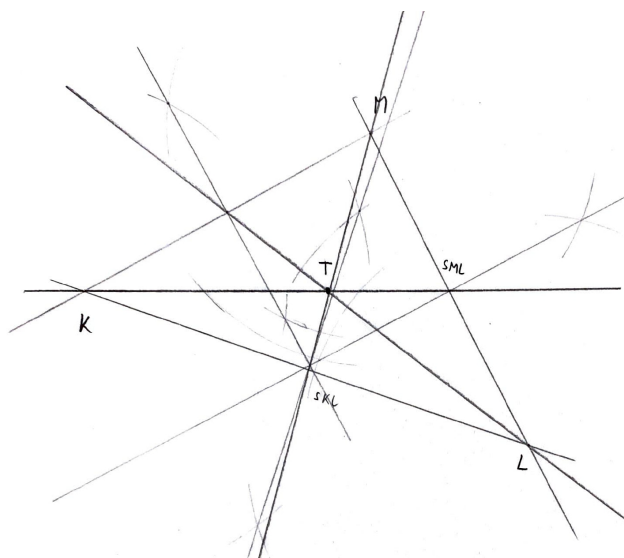
Obrázek 3.2: Příklad na nalezení nádraží řešený metodou *speciální případ*.

- c) *pokus/omyl*: student nejasným způsobem sestrojil hledaný bod, konstrukce je „od oka“, není možné stanovit správnost řešení viz obr. 3.3



Obrázek 3.3: Příklad na nalezení nádraží řešený metodou *pokus/omyl*.

- d) *chybné řešení*: student nesprávným způsobem sestrojil hledaný bod či sestrojil zcela jiný bod neodpovídající zadání viz obr. 3.4



Obrázek 3.4: Příklad na nalezení nádraží řešený metodou *chybné řešení*.

- e) *neřešeno*: student se zdržel řešení dané úlohy

U každé metody je uveden odpovídající počet: **student** *vyřešil / nevyřešil* .

| skupina A | | | | | |
|-----------|-----------------|-------------------------|-------------------|----------------------|-----------------|
| | <i>kružnice</i> | <i>speciální případ</i> | <i>pokus/omyl</i> | <i>chybné řešení</i> | <i>neřešeno</i> |
| 1. úloha | 3 3 / 0 | 9 6 / 3 | 4 0 / 4 | 3 0 / 3 | 0 0 / 0 |
| 2. úloha | 3 3 / 0 | 3 2 / 1 | 2 0 / 2 | 3 0 / 3 | 2 0 / 2 |

| skupina B | | | | | |
|-----------|-----------------|-------------------------|-------------------|----------------------|-----------------|
| | <i>kružnice</i> | <i>speciální případ</i> | <i>pokus/omyl</i> | <i>chybné řešení</i> | <i>neřešeno</i> |
| 1. úloha | 6 6 / 0 | 9 9 / 0 | 1 0 / 1 | 0 0 / 0 | 0 0 / 0 |
| 2. úloha | 6 4 / 2 | 6 6 / 0 | 2 0 / 2 | 0 0 / 0 | 2 0 / 2 |

Tabulka 3.2: Rozdělení dle faktoru metody řešení a jeho úspěšnosti v řešení.

3.5 Výsledky šetření

Před analýzou byl v zápisu výsledků brán ohled na následující faktory: skupina, typ úlohy, vyřešení a metoda řešení. Na základě těchto kategorií došlo k několika rozdělením, dle nichž došlo k porovnání jednotlivých závislostí.

Za správné *úplné* řešení považujeme ideálně takové, které jednoznačně určuje hledaný bod, který je správně sestrojen (popř. popsán). Za správné ale *neúplné* řešení považujeme takové, které je zjednodušené volbou speciálního případu (rovnostranný trojúhelník) či předurčené (z konstrukce je jasné, že student nejprve sestrojil hledaný prvek a dokreslil k němu zadání, ale správně popsal vzájemný vztah). Nesprávné řešení bereme právě takové, které nespadá ani do jedné z těchto kategorií.

| 1. úloha | vyřešil | | nevyřešil |
|-----------|---------------------|-----------------------|-----------|
| | <i>úplné</i> řešení | <i>neúplné</i> řešení | |
| skupina A | 3 | 6 | 10 |
| skupina B | 6 | 9 | 1 |

| 2. úloha | vyřešil | | nevyřešil |
|-----------|---------------------|-----------------------|-----------|
| | <i>úplné</i> řešení | <i>neúplné</i> řešení | |
| skupina A | 3 | 8 | 8 |
| skupina B | 4 | 6 | 6 |

Tabulka 3.3: Rozdělení dle faktoru vyřešil/nevyřešil.

Jaké závěry můžeme na základě tohoto pozorování vyvodit? Z celkových 70 sledovaných řešení bylo alespoň částečně vyřešeno 64 %. *Úplného* řešení bylo dosaženo v 23 % případů. Je možné pozorovat větší skok mezi skupinami v rámci *úplných* řešení, kdy ve skupině A k němu došlo pouze v 16 % případů a ve skupině B v 31 % případů. Tyto pozorované hodnoty zcela odpovídají dlouhodobému nastavení těchto skupin a potvrzují vyšší kompetenci skupiny B v řešení planimetrických úloh přestože skupina A zpravidla dosahuje lepších výsledků v matematice.

Abychom dále odpověděli na otázku závislosti úspěšnosti řešení mezi první a druhou úlohou, musíme se zaměřit na *úplná* řešení. Dochází k případům, kdy student vyřeší *úplně* pouze jednu úlohu, a pokud ano, kolik jich je?

| | 2 <i>úplné</i> řešení | 1 <i>úplné</i> řešení | 0 <i>úplných</i> řešení |
|-----------|-----------------------|-----------------------|-------------------------|
| skupina A | 3 | 0 | 16 |
| skupina B | 4 | 2 | 10 |

Tabulka 3.4: Rozdělení podle počtu *úplných* řešení.

Z tabulky č. 3.4 lze vyčíst, že z 35 studentů bylo 9, kteří měli alespoň jedno *úplné* řešení, z nichž 2 měli právě jedno *úplné* řešení. Z těchto dvou studentů v rámci řešení, které nebylo *úplné*, volil první z nich metodu *kružnice*, která nebyla správně aplikovaná a druhý metodu *pokus/omyl*, u které nešlo stanovit správnost řešení. Studenti, kteří vyřešili správně jednu z těchto úloh tedy zpravidla správně vyřešili i úlohu druhou. Pro pevné potvrzení tohoto tvrzení by bylo nutné pozorovat početnější výzkumný vzorek.

3.6 Závěr výzkumného šetření

Z uvedených výsledků jasně plyne, že alespoň k *neúplnému* řešení došlo v 64 % případech a k *úplnému* právě v 23 % viz tabulka č. 3.3. Také jsme pozorovali, že studenti zcela preferují metodu *speciálního případu* (viz tabulka č. 3.2), kdy si úlohu zjednoduší či předurčí, přestože to není v tomto případě vhodné. Řešení vedena touto metodou bohužel velice zkresluje kompetenci studentů v šetření MBDV a nedávají nám jasné odpovědi na naše výzkumné otázky. Tento problém bych vyřešila jednoduchým určením zadání, tzn. volila bych umístění objektů v zadání v co nejobecnější pozici, které by bylo předem dané. Tímto ztratíme možnost bohatější diskuze s kompetentnějšími studenty, ovšem zamezíme tak nejednoznačným výsledkům v rámci výzkumného šetření. Originální i upravené zadání, které je možné ve výuce využít, je obsaženo v příloze této práce.

Nakonec jsme se zabývali otázkou, zda-li existuje závislost mezi úspěšným (*úplným*) vyřešením 1. a 2. úlohy. K ověření této závislosti jsem použila na výsledky zkoumaného vzorku Fisherův exaktní test³. K výpočtu jeho hodnoty jsem využila on-line kalkulačku [8], do které byly vloženy hodnoty z tabulky č. 3.5.

| | | 1. úloha | |
|----------|---------|----------|--------|
| | | správně | chybně |
| 2. úloha | správně | 7 | 0 |
| | chybně | 2 | 26 |

Tabulka 3.5: Hodnoty použité pro Fisherův exaktní test.

Hodnota Fisherova testu je menší než 0,001, tudíž závislost mezi řádky resp. sloupci je statisticky velice významná. Je ovšem opět nutno podotknout, že pro pevné potvrzení by bylo nutné pozorovat početnější výzkumný vzorek.

³Fisherův exaktní test, pojmenovaný po svém vynálezci Ronaldu Fisherovi, je test statistické významnosti používaný při analýze kontingenčních tabulek. V praxi se používá hlavně na méně objemné vzorky.

Závěr

Cílem této bakalářské práce bylo ucelené zpracování základních poznatků teorie množin bodů dané vlastnosti a vyzdvihnutí jejich váhy v eukleidovské geometrii se zvýšeným důrazem na didaktiku. Každá z elementárních množin byla v rámci první kapitoly, která byla teoretickou částí práce, řádně definována a vykreslena přímo v softwaru \LaTeX . Uvedeny v rámci teorie byly také různé metody šetření MBDV, které byly podrobně rozebrány jak v kapitole první, tak i v kapitole druhé na složitějších příkladech.

Druhá kapitola, která byla praktická, obsahovala nejenom již zmíněné návodné úlohy, ale zabývala se i klasickými konstrukčními úlohami trojúhelníků, které jsou hlavní náplní studia planimetrie na střední škole. V těchto úlohách se dbalo na vhodné zakreslení a popsání situace a především na podrobné popsání myšlenkového postupu v rámci rozboru. Všechny úlohy obsahovaly jak psané, tak symbolické rozborů a byly doplněny o konstrukci v softwaru Geogebra. V neposlední řadě byly rozebrány i úlohy z různých ročníků matematické olympiády, které právě vedly na šetření MBDV. Ty dle vhodnosti byly opět zpracovány buď v softwaru \LaTeX nebo Geogebra.

Ve třetí kapitole jsem se zabývala otázkou netradičně zadané úlohy na šetření MBDV. V rámci malého vzorku jsem sledovala úspěšnost studentů v řešení daných úloh a sledovala aplikaci takových úloh v středoškolské výuce. Přestože byl vzorek velice malý a závěry nebyly přesné, beru celý proces za velice pozitivní přínos k této práci. Umožnil zpřesnění zadání daných úloh k zlepšení výsledků v budoucnu a také představil nesnáze v řešení úloh syntetickými metodami.

Věřím, že práce po stránce uceleného zpracování základních poznatků jistě splnila svůj účel. Všechny úlohy byly podrobně rozpracovány, doplněny didaktickými poznámkami a případnými doporučeními. Tuto práci tak lze využít při přípravě výuky jak na střední, tak vysoké škole, či jako inspiraci k vzorovému řešení jiných konstrukčních úloh nebo úloh k šetření MBDV.

Seznam literatury

Seznam použité literatury

- [1] HROMADOVÁ, J., MORAVCOVÁ, V. (2021). *Základy planimetrie pro učitelské studium*. Praha: MatfyzPress, nakladatelství Matematicko-fyzikální fakulty Univerzity Karlovy. ISBN 978-80-7378-456-0
- [2] POMYKALOVÁ, E. (1993). *Matematika pro gymnázia: planimetrie*. Praha: Prometheus. Učebnice pro střední školy (Prometheus) ISBN 978-80-7196-358-5.
- [3] LIDSKIJ, V. B. (1965). *Úlohy z elementární matematiky*. Praha: Státní pedagogické nakladatelství. Pomocné knihy pro žáky (Státní pedagogické nakladatelství).
- [4] ODVÁRKO, O., CALDA, E., ŠEDIVÝ, J. A ŽIDEK, S. (1990). *Metody řešení matematických úloh*. Praha: SPN. ISBN 80-04-20434-1.
- [5] MOLNÁR, J. (2011). *Matematika pro střední odborné školy*. Praha: Prometheus. Učebnice pro střední školy (Prometheus). ISBN 978-80-7196-415-5.
- [6] VEJSADA, F., TALAFOUS, F. (1969). *Sbírka úloh z matematiky pro gymnasia*. Praha: Státní pedagogické nakladatelství. Pomocné knihy pro žáky (Státní pedagogické nakladatelství).
- [7] BOČEK, L., VRBA, A. (1984). *Vybrané úlohy z matematické olympiády kategorie C*. Praha: Státní pedagogické nakladatelství. Pomocné knihy pro žáky (Státní pedagogické nakladatelství).
- [8] MedCalc Software Ltd. Fisher exact probability calculator.
<https://www.medcalc.org/calc/fisher.php> (Verze 22.009; cit. 2023-07-11)

Seznam související literatury

- KOMAN, M. (1966). *Jak vyšetřujeme geometrická místa metodou souřadnic: kapitola z analytické geometrie v rovině*. Praha: Mladá fronta. Škola mladých matematiků.
- ZEDEK, M. A KOLEKTIV (1971). *Vybrané úlohy z matematické olympiády kategorie B,C*. Praha: Státní pedagogické nakladatelství. Pomocné knihy pro žáky (Státní pedagogické nakladatelství).
- VYŠÍN, J., MACHÁČEK, V. (1971). *Vybrané úlohy z matematické olympiády kategorie Z*. Praha: Státní pedagogické nakladatelství. Pomocné knihy pro žáky (Státní pedagogické nakladatelství).
- (1988) *Názvy a značky školské matematiky: doporučená terminologie školské matematiky na základních a středních školách*. Praha: Státní pedagogické nakladatelství. Odborná literatura pro učitele.

Seznam obrázků

| | | |
|------|---|----|
| 1.1 | Zakreslení úsečky AB . | 3 |
| 1.2 | Algoritmus nalezení množiny bodů dané vlastnosti. | 5 |
| 1.3 | Pomocné trojúhelníky sestrojené dle věty Ssu . | 6 |
| 1.4 | Zakreslení několika bodů hledané množiny M . | 6 |
| 1.5 | Zachycení množiny M známým geometrickým útvarem. | 7 |
| 1.6 | Nalezení středu S kružnicového oblouku s koncovými body A, B . | 7 |
| 1.7 | Větší <i>otevřený</i> oblouk | 8 |
| 1.8 | Kontrola správnosti hypotézy $U = M$. | 8 |
| 1.9 | Zakreslení hledané množiny $M = \{X \in \rho; \sphericalangle AXB = 60^\circ\}$. | 9 |
| 1.10 | Zakreslení kružnice $k(S, r)$. | 10 |
| 1.11 | Zakreslení osy o_{AB} úsečky AB . | 10 |
| 1.12 | Zakreslení osy o_β úhlu $\sphericalangle ABC$. | 11 |
| 1.13 | Zakreslení osy rovinného pásu o_{pq} . | 11 |
| 1.14 | Zakreslení ekvidistanty přímky p . | 12 |
| 1.15 | Zakreslení Thalétovy kružnice \mathcal{T}_{AB} nad průměrem AB . | 12 |
| 1.16 | Zakreslení množiny \mathcal{G}_{AB}^ω s různými volbami úhlu ω . | 13 |
| 1.17 | Zakreslení \mathcal{G} , vyznačení úhlu ω a středů příslušných oblouků. | 13 |
| 2.1 | Vizualizace problému tří měst. | 15 |
| 2.2 | Řešení problému tří měst. | 16 |
| 2.3 | Speciální případ problému tří kolineárních měst. | 16 |
| 2.4 | Vizualizace problému umístění vázy. | 17 |
| 2.5 | Řešení problému umístění vázy. | 18 |
| 2.6 | Konstrukční řešení příkladu č. 4. | 20 |
| 2.7 | Konstrukční řešení příkladu č. 5. | 22 |
| 2.8 | Konstrukční řešení příkladu č. 6. | 24 |
| 2.9 | Vizualizace příkladu č. 7; zadání. | 25 |
| 2.10 | Vizualizace příkladu č. 7; šetření bodů X_0 . | 26 |
| 2.11 | Vizualizace příkladu č. 7; šetření bodů X_1 . | 26 |
| 2.12 | Vizualizace příkladu č. 7; šetření bodů X_2 . | 27 |
| 2.13 | Vizualizace příkladu č. 7; šetření bodů X_3 . | 27 |
| 2.14 | Konstrukční řešení příkladu č. 7. | 28 |
| 2.15 | Sestrojení několika bodů hledané množiny M . | 29 |
| 2.16 | Zachycení množiny M geometrickým útvarem. | 29 |
| 2.17 | Ověření hypotézy hledané množiny M . | 30 |
| 2.18 | Konstrukční řešení příkladu č. 8. | 31 |
| 2.19 | Sestrojení několika bodů hledané množiny M . | 32 |
| 2.20 | Zachycení množiny M geometrickým útvarem. | 33 |
| 2.21 | Ověření hypotézy hledané množiny M . | 33 |
| 2.22 | Konstrukční řešení příkladu č. 9. | 34 |
| 2.23 | Rozbor situace příkladu č. 10. | 35 |
| 2.24 | Zachycení množiny M geometrickým útvarem. | 36 |
| 2.25 | Konstrukční řešení příkladu č. 10. | 37 |
| 3.1 | Příklad na nalezení nádraží řešený metodou <i>kružnice</i> . | 40 |

| | | |
|-----|--|----|
| 3.2 | Příklad na nalezení nádraží řešený metodou <i>speciální případ</i> | 41 |
| 3.3 | Příklad na nalezení nádraží řešený metodou <i>pokus/omyl</i> | 41 |
| 3.4 | Příklad na nalezení nádraží řešený metodou <i>chybné řešení</i> | 42 |

Seznam tabulek

| | | |
|-----|---|----|
| 3.1 | Popis výzkumného vzorku. | 39 |
| 3.2 | Rozdělení dle faktoru metody řešení a jeho úspěšnosti v řešení. . . | 42 |
| 3.3 | Rozdělení dle faktoru vyřešil/nevyřešil. | 43 |
| 3.4 | Rozdělení podle počtu <i>úplných</i> řešení. | 43 |
| 3.5 | Hodnoty použité pro Fisherův exaktní test. | 44 |

Seznam použitých symbolů

| | |
|--|--|
| A | bod A |
| a | přímka a |
| AB | úsečka AB |
| \overrightarrow{AB} | polopřímka AB |
| \overleftrightarrow{AB} | přímka AB |
| ρ | rovina ρ |
| \widehat{AB} | kružnicový oblouk AB |
| α | úhel α |
| $\sphericalangle ABC$ | úhel ABC |
| $\triangle ABC$ | trojúhelník ABC |
| t_a | těžnice vedená vrcholem A trojúhelníku |
| v_a | výška ke straně a trojúhelníku |
| $k(S; r)$ | kružnice k se středem S a poloměrem r |
| o_{AB} | osa úsečky AB |
| o_α | osa úhlu α |
| o_{pq} | osa rovinného pásu p, q |
| $\mathcal{T}_{AB}, \tau_{AB}$ | Thalétova kružnice nad průměrem AB |
| \mathcal{G}_{AB}^ω | ekvigonála s úhlem ω nad úsečkou AB |
| $M \subseteq E_2$ | M je podmnožinou eukleid. prostoru dimenze 2 |
| $A \in p$ ($A \notin p$) | bod A náleží přímce p (bod A nenáleží přímce p) |
| $A = B, (A \neq B)$ | body A a B splývají (body A a B jsou různé) |
| $a \parallel b, (a \not\parallel b)$ | přímka a je (není) rovnoběžná s přímkou b |
| $a \perp b, (a \not\perp b)$ | přímka a je (není) kolmá k přímce b |
| $P \in a \cap b$ | P je průsečíkem přímek a a b |
| $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$ | trojúhelníky ABC a $A'B'C'$ jsou shodné |
| $v(A, p) = x$ | vzdálenost bodu A od přímky p je rovna x |
| $ AB $ | velikost úsečky AB |
| $ \sphericalangle ABC $ | velikost úhlu ABC |

A. Přílohy

A.1 Originální zadání výzkumných úloh

A.2 Upravené zadání výzkumných úloh

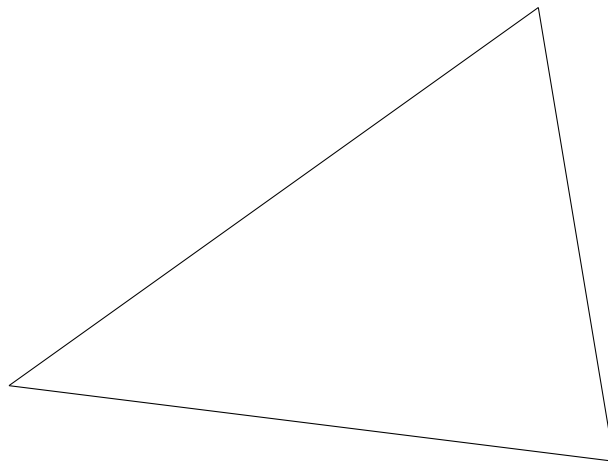
1. Okresní města Kyblíkov, Ledvinky a Maletice plánují postavit pro své rezidenty vlakové nádraží. Jelikož jde o regionální projekt financovaný ze společného fondu, plánují postavit nádraží na takovém místě, které nebude žádné město zvýhodňovat. Nádraží má být umístěno tak, aby přímá vzdálenost od každého z měst byla stejná. Určete, kde bude nádraží postaveno.
-

2. V muzeu Ektheta vymezili v rámci veřejné expozice výstavní trojúhelníkovou desku pro umístění starožitné vázy nevyčísitelné ceny. Pracovníci muzea chtějí tento kousek na desku umístit tak, aby byla váza od všech stran desky stejně vzdálena, a zamezili tak nechtěným dotekům ze strany návštěvníků. Určete, kam pracovníci muzea vázu umístí.
-

1. Okresní města Kyblíkov, Ledvinky a Maletice plánují postavit pro své rezidenty vlakové nádraží. Jelikož jde o regionální projekt financovaný ze společného fondu, plánují postavit nádraží na takovém místě, které nebude žádné město zvýhodňovat. Nádraží má být umístěno tak, aby přímá vzdálenost od každého z měst byla stejná. Určete, kde bude nádraží postaveno.

 $+^M$ K^+ $+^L$

2. V muzeu Ektheta vymezili v rámci veřejné expozice výstavní trojúhelníkovou desku pro umístění starožitné vázy nevyčísitelné ceny. Pracovníci muzea chtějí tento kousek na desku umístit tak, aby byla váza od všech stran desky stejně vzdálena, a zamezili tak nechtěným dotekům ze strany návštěvníků. Určete, kam pracovníci muzea vázu umístí.



výstavní deska