MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ FAKULTA
Univerzita Karlova

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Matyáš Valkoun

Ekvidekomposabilita

Katedra didaktiky matematiky

Vedoucí bakalářské práce:	Mgr. Zdeněk Halas, DiS., Ph.D.
Studijní program:	Chemie
Studijní obor:	Chemie se zaměřením na vzdělávání – Matematika se zaměřením na vzdělávání

Praha 2023

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval(a) samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů. Tato práce nebyla využita k získání jiného nebo stejného titulu.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V .... dne ....

Podpis autora

Na tomto místě bych rád poděkoval Mgr. Zdeňku Halasovi, DiS., Ph.D. za odborné vedení práce, za jeho věcné připomínky a rady. Velice si vážím jeho vstřícnosti a trpělivosti. Zároveň děkuji svým blízkým za jejich podporu a trpělivost.

Název práce: Ekvidekomposabilita

Autor: Matyáš Valkoun

Katedra: Katedra didaktiky matematiky

Vedoucí bakalářské práce: Mgr. Zdeněk Halas, DiS., Ph.D., Katedra didaktiky matematiky

Abstrakt: Tato bakalářská práce se zaměřujeme na obsah mnohoúhelníku a jeho zavedení pomocí ekvidekomposability. Nejprve je v rovině ρ je definován mnohoúhelník a jeho obsah, dále je zaveden pojem ekvidekomposabilita. Ukazuje se, že ekvidekomposabilní (shodně rozložitelné) mnohoúhelníky mají stejný obsah. Nastává tak otázka, zda platí i opačné tvrzení: jsou dva mnohoúhelníky stejného obsahu shodně rozložitelné? To je znění Wallace-Bolyai-Gerweinovy věty, jejíž důkaz je v práci podrobně rozepsán. Díky existenci společného rozkladu dvou mnohoúhelníků stejného obsahu je tak rovnost obsahu a ekvidekomposabilita v rovině ekvivalentní. V závěru práce je zkoumána otázka, zda je možné využít ekvidekomposabilitu i v prostoru a zavést pomocí ní objem mnohostěnu.

Klíčová slova: Obsah mnohoúhelníku, ekvidekomposabilita, Wallace-Bolyai-Gerweinova věta, rozklad mnohoúhelníku na trojúhelníky

Title: Equidecomposability

Author: Matyáš Valkoun

Department: Department of Mathematics Education

Supervisor: Mgr. Zdeněk Halas, DiS., Ph.D., Department of Mathematics Education

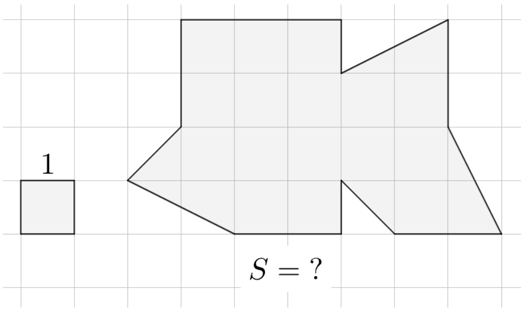
Abstract: This bachelor thesis focuses on the area of polygons and its definition by equidecomposability. In the plane ρ a simple polygon and its area is defined and the notion of equidecomposability is introduced. Since any two equidecomposable polygons have equal areas, a question arises if the opposite is also true: are any two polygons of equal area equidecomposable? That is the formulation of the Wallace-Bolyai-Gerwein theorem, its detailed proof is presented in this text. Thus the notions of equidecomposability and equal area are equivalent. At the end of the thesis it is briefly examined if it is possible to use equidecomposability in the third dimension to define the volume of a polyhedron.

Keywords: Area of a polygon, equidecomposability, Wallace-Bolyai-Gerwein theorem, triangulation

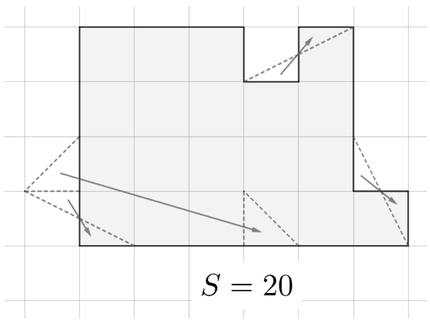
Obsah

Úvod

Již na základní škole jsme se mohli setkat s následující úlohou: *Vypočítejte obsah mnohoúhelníku, jehož vrcholy leží v mřížových bodech čtvercové sítě, je-li obsah nejmenšího čtverce v síti 1.*



Úlohu dokážeme vyřešit i bez znalosti vzorců pro výpočet obsahu čtverce, trojúhelníku nebo dalších mnohoúhelníků. Zadaný mnohoúhelník rozdělíme na čtverce a trojúhelníky, přičemž trojúhelníky v rovině „přemístíme“ tak, abychom „dotvořili“ nové čtverce. Žádný n-úhelník jsme neodebrali ani nepřidali. Obsah původního mnohoúhelníku se tak rovná počtu čtverců, z nichž se nový pravoúhelník skládá.



Díky existenci společného rozkladu původního a výsledného mnohoúhelníku se nám podařilo obsah spočítat. V této motivační úloze se původní a výsledný mnohoúhelník skládají z určitého počtu po dvou shodných n-úhelníků. Takové dva mnohoúhelníky se nazývají *ekvidekomposabilní* neboli *shodně rozložitelné.* Zároveň jak jsme právě ukázali, obsah těchto dvou ekvidekomposabilních mnohoúhelníků se rovná.

Nabízí se otázka: *Jsou ekvidekomposabilita a rovnost obsahu ekvivalentní?* Tedy pokud víme, že ekvidekomposabilní mnohoúhelníky mají stejný obsah, můžeme říci i opak – že mnohoúhelníky stejného obsahu jsou shodně rozložitelné?

Cílem této bakalářské práce je přiblížit souvislost obsahu rovinných útvarů a ekvidekomposability. Nejprve v první kapitole definujeme mnohoúhelník a připomeneme pojmy, které se s mnohoúhelníky pojí. Dále definujeme obsah mnohoúhelníku tak, jak je zaveden na střední škole. Podíváme se na vlastnost dvou mnohoúhelníků nastíněnou v textu výše, která má název ekvidekomposabilita. Ukážeme si některé vlastnosti ekvidekomposabilních (shodně rozložitelných) mnohoúhelníků a nastíníme, jak pomocí ekvidekomposability můžeme pojmout teorii obsahu.

Ve druhé kapitole uvedeme Wallace-Bolyai-Gerweinovu větu. Ta říká, že dva mnohoúhelníky stejného obsahu jsou ekvidekomposabilní. Tuto větu dokážeme tak, že ukážeme existenci společného rozkladu dvou mnohoúhelníků. Ekvidekomposabilitu tak bude možné postavit na stejnou úroveň, jako obsah mnohoúhelníku zavedený v první kapitole. Na konci kapitoly ukážeme i další společné rozklady mnohoúhelníků a také odvození vztahů pro výpočet obsahu jednoduchých běžných mnohoúhelníků.

Třetí kapitola se zabývá otázkou, zda je možné ekvidekomposabilitu využít pro porovnávání objemu těles. Tedy zda se objem dvou mnohostěnů rovná právě tehdy, existuje-li jejich společný rozklad na mnohostěny (analogie Wallace-Bolyai-Gerweinovy věty v prostoru). Ukážeme si příklad mnohostěnů, pro které tato hypotéza platí a pro které naopak ne. Závěrem nastíníme, proč tato teorie pro dva obecné mnohostěny neplatí.

1. Obsahy rovinných obrazců

Jak jsme nastínili v úvodu, první kapitola se zabývá mnohoúhelníky. V první podkapitole se zaměříme na zavedení mnohoúhelníku a zavedení shodnosti mnohoúhelníků. V druhé podkapitole axiomaticky zavedeme obsah a ve třetí se dostaneme k hlavnímu předmětu práce, ekvidekomposabilitě. Pro některé čtenáře může tento pojem znít děsivě, nicméně ukážeme, že tato vlastnost dvou mnohoúhelníků vychází z jednoduchého pozorování.

1.1 Mnohoúhelníky

V celém textu se při práci s mnohoúhelníky budeme pohybovat v rovině ρ, rozumíme jí eukleidovskou rovinu. Pracujeme tedy v takové rovině, ve které pracují žáci na základní a střední škole.

Než začneme s jakýmikoliv rozklady, potřebujeme mít nejprve k dispozici řádnou definici mnohoúhelníku. Mnohoúhelník bychom jistě chtěli zavést tak, aby tvořil jednoduše souvislou množinu. Neformálně řečeno: klademe na mnohoúhelník požadavek, aby byl tvořen „jednolitým celkem“ aby neměl žádné „díry“. Zároveň požadujeme, aby hranici mnohoúhelníku tvořily úsečky. Mnohoúhelník proto zavedeme pomocí lomené čáry, jež bude splňovat určité podmínky. Definice čerpány z [6], upraveny autorem.

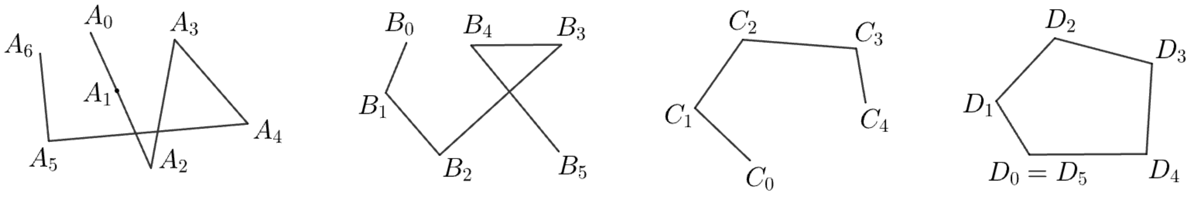
Definice 1.1.1 (Lomená čára)**.** Nechť $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $A_0, A_1, \ldots, A_n \in \rho$ je $n+1$ navzájem různých bodů a nechť úsečky $A_{i-1}A_i$, A_iA_{i+1}, $i \in \{1, \ldots, n-1\}$, mají společný pouze bod A_i. Potom sjednocení úseček $A_0A_1 \cup A_1A_2 \cup \cdots \cup A_{n-1}A_n$ nazýváme *lomená čára* a značíme ji $A_0A_1 \ldots A_{n-1}A_n$ (obrázek 1.1 níže).

Body $A_0, \ldots, A_n$ nazýváme *vrcholy* lomené čáry, úsečky $A_0A_1, \ldots, A_{n-1}A_n$ *strany* lomené čáry. Úsečkám $A_{i-1}A_i$, A_iA_{i+1}, $i \in \{1, \ldots, n-1\}$ říkáme *sousední strany*. Stranám, které nejsou sousední, říkáme *nesousední strany*.

Definice 1.1.2 (Sebeneprotínající se lomená čára)**.** Mějme lomenou čáru $A_0A_1 \ldots A_n$, $n \geq 2$, a nechť každé dvě nesousední strany nemají žádný společný bod. Takovou lomenou čáru nazýváme *sebeneprotínající se lomená čára* (obrázek 1.1, třetí a čtvrtá lomená čára zleva).

Definice 1.1.3 (Uzavřená lomená čára)**.** Mějme lomenou čáru $A_0A_1 \ldots A_n, n \geq 3$. Je-li $A_0 = A_n$, pak se lomená čára nazývá *uzavřená* (obrázek 1.1 čtvrtá lomená čára zleva).

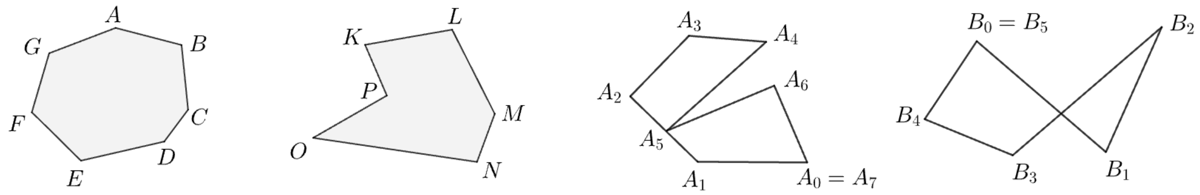
Poznamenejme, že v případě uzavřené lomené čáry považujeme úsečky $A_{n-1}A_n$ a A_0A_1 též za sousední.



Obrázek 1.1: Příklady lomených čar

Na obrázku vidíme příklady lomených čar popsaných v definicích výše. Postupným zpřísňováním požadavků docílíme zavedení takové lomené čáry, pomocí které definujeme mnohoúhelník. Dá se dokázat, že sebeneprotínající se uzavřená lomená čára ležící v rovině ρ (například $D_1D_2D_3D_4D_5$ na obrázku 1.1) ohraničuje jednoduše souvislou množinu. Proto definujeme mnohoúhelník právě pomocí sebeneprotínající se uzavřené lomené čáry.

Definice 1.1.4 (Mnohoúhelník)**.** Nechť $A_0A_1 \dots A_n$, $n \geq 3$, je sebeneprotínající se uzavřená lomená čára, pro kterou navíc platí, že žádné dvě sousední úsečky neleží v téže přímce. Takovou lomenou čáru spolu s tou částí roviny, kterou ohraničuje, nazýváme *mnohoúhelník* nebo *n-úhelník*. Množinu všech mnohoúhelníků v rovině ρ značíme M.



Obrázek 1.2: Mnohoúhelníky, lomené čáry

Na obrázku 1.2 můžeme vidět příklady mnohoúhelníků a lomených čar. Uzavřené lomené čáry $ABCDEFG$ a $KLMNOP$ samy sebe neprotínají a ohraničují tak mnohoúhelník. Avšak lomené čáry $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7$ a $B_1B_2B_3B_4B_5$ nesplňují podmínky definice 1.1.4 a nelze tedy pomocí nich definovat mnohoúhelník. Tak jak jsme si přáli, každý mnohoúhelník zavedený v definici výše tvoří jednoduše souvislou množinu. Pokud bychom chtěli ale takové na první pohled triviální tvrzení dokázat, zjistili bychom, že je daleko nad rámec tohoto textu. Důkaz proto neuvádíme.

Uvažujme nyní mnohoúhelník $A_0 \dots A_n$ a připomeňme další pojmy, které s ním souvisí.

- Body $A_0, A_1, \dots, A_n$ nazýváme *vrcholy* mnohoúhelníku. Vrcholy, jejichž indexy se liší o jednotku, nazýváme *sousední vrcholy.* Jelikož $A_0 = A_n$, tak za sousední vrcholy pokládáme i vrcholy A_0 a A_{n-1} a také A_n a A_1.
- Úsečky $A_0A_1, A_1A_2, \dots, A_{n-1}A_n$ nazýváme *strany* mnohoúhelníku.
- Strany mnohoúhelníku tvoří *obvod* mnohoúhelníku. Obvodem zároveň rozumíme délku lomené čáry, která n-úhelník ohraničuje, označuje tedy i číselnou hodnotu. Obvod je tak roven součtu délek úseček, jimiž je lomená čára tvořena.
- Body mnohoúhelníku, které neleží na žádné z jeho stran, budeme nazývat *vnitřní body* mnohoúhelníku.
- Úsečku, která spojuje dva nesousední vrcholy, nazýváme *úhlopříčka.*
- Úhly $\sphericalangle A_0A_1A_2$, $\sphericalangle A_1A_2A_3$, $\dots$,$\sphericalangle A_{n-2}A_{n-1}A_n$ a $\sphericalangle A_{n-1}A_nA_1$, pro které platí, že alespoň jeden jejich bod, který neleží na ramenech, je zároveň vnitřním bodem mnohoúhelníku, nazýváme *vnitřní úhly* mnohoúhelníku.
- Je-li velikost každého z vnitřních úhlů n-úhelníku ostře menší než 180°, pak se mnohoúhelník nazývá *konvexní* (obrázek 1.2, první zleva). Je-li velikost alespoň jednoho z vnitřních úhlů ostře větší než 180°, pak se mnohoúhelník nazývá *nekonvexní* (obrázek 1.2, druhý zleva).

- Jak bylo uvedeno v definici, pro mnohoúhelník se též používá označení n-úhelník, kde n udává počet vrcholů, tedy i počet stran a vnitřních úhlů. Zde je patrné, proč je výhodné číslovat vrcholy lomené čáry od nuly, ne od jedné. Pro $n = 3$ tak dostáváme trojúhelník, je-li $n = 4$, jedná se o čtyřúhelník, a tak dále.

Shodnost mnohoúhelníků

Shodnost mnohoúhelníků budeme potřebovat pro definici obsahu a ekvidekomposability. Se shodnými mnohoúhelníky budeme také hojně pracovat při hledání společného rozkladu dvou mnohoúhelníků. Na úvod se na chvíli pozastavme nad samotným pojmem shodnost. *Shodnost* označuje dva pojmy, a to geometrické zobrazení a vztah mezi dvěma mnohoúhelníky. Jelikož je shodnost dvou mnohoúhelníků zavedena právě pomocí geometrického zobrazení, častokrát jsou tyto pojmy používány současně.

Shodnost ve smyslu zobrazení popisujeme v definici 1.1.5, jelikož pomocí ní v definici 1.1.6 zavádíme shodnost mnohoúhelníků. Shodnost dvou mnohoúhelníků (a obecně geometrických útvarů) si lze představit tak, že jeden z n-úhelníků lze umístit v rovině takovým způsobem, že se s druhým n-úhelníkem „kryje“ (nebo „ztotožní“). Tímto umístěním rozumíme zobrazení daného mnohoúhelníku shodností. Definice níže a věty o shodnostech trojúhelníku byly čerpány z [5] a upraveny autorem.

Definice 1.1.5 (Shodnost)**.** Nechť F je zobrazení roviny $\rho \to \rho$. Označme $d(X,Y)$ vzdálenost dvou bodů X, Y. Pokud platí

$$\forall X, Y \in \rho: \quad d(X,Y) = d(F(X),F(Y)),$$

pak takové zobrazení nazýváme *shodnost*.

Poznámka. Pro lepší čitelnost textu a zároveň z důvodu kompatibility se značením ze základní a střední školy v tomto textu nahradíme označení pro vzdálenost dvou bodů $d(A,B)$ označením $|AB|$.

Shodnost tedy zachovává vzdálenost dvou bodů, stejně tak i velikosti úhlů a rovnoběžnost přímek. Ze shodností v rovině ρ rozlišujeme *přímou shodnost* (identita, středová souměrnost, posunutí, otočení) a *nepřímou shodnost*[1] (osová souměrnost, posunutá souměrnost[2]).

Nyní pomocí shodnosti zavedeme shodnost dvou mnohoúhelníků. Obdobně bychom tak mohli zavést shodnost úseček, úhlů a tak dále.

Definice 1.1.6 (Shodnost mnohoúhelníků)**.** Dva mnohoúhelníky U, U' ležící v rovině ρ se nazývají *shodné*, existuje-li taková shodnost $F : \rho \to \rho$, že obrazem mnohoúhelníku U je právě mnohoúhelník U' (nebo naopak obrazem U' je právě U). Skutečnost, že jsou mnohoúhelníky U a U' shodné, značíme $U \cong U'$.

Jsou-li dva mnohoúhelníky v rovině shodné, pak se liší pouze svým umístěním. Otočený, posunutý, či „překlopený“ n-úhelník je shodný. V konkrétním případě ale shodnost

[1] Zobrazení mnohoúhelníku nepřímou shodností si můžeme představit tak, jako kdybychom daný mnohoúhelník v rovině „překlopili“. Tímto „překlopením“ se zároveň změní směr popisu vrcholů daného mnohoúhelníku.

[2] Je dána přímka o a nenulová orientovaná úsečka KL, která je rovnoběžná s přímkou o. Zobrazení, které vznikne složením osové souměrnosti $O(o)$ a posunutí $T(KL)$ v libovolném pořadí, se nazývá posunutá souměrnost.

dvou mnohoúhelníků nezjišťujeme tím způsobem, že zobrazujeme postupně všechny body jednoho mnohoúhelníku na druhý. Dá se dokázat, že pokud jsou délky odpovídacích si stran a velikosti odpovídajících si úhlů dvou mnohoúhelníků rovny, jsou tyto mnohoúhelníky shodné. Při zkoumání, zda jsou dva mnohoúhelníky shodné, tak stačí ověřit, jestli jsou si délky odpovídajících si stran a velikosti odpovídajících si úhlů rovny.

V případě shodnosti dvou trojúhelníků využíváme věty o shodnostech trojúhelníků. Jednotlivé věty se často označují třípísmennou kombinací z písmen s (strana) a u (úhel). Poznamenejme, že věty sus, usu a Ssu by bylo možné odvodit na základě věty sss a axiomů shodnosti. V každé z vět uvažujeme dva trojúhelníky a porovnáváme délky jejich stran a velikosti vnitřních úhlů.

- Věta sss: Rovnají-li se délky všech odpovídajících si stran, jsou trojúhelníky shodné.
- Věta sus: Rovnají-li se délky dvou stran a rovnají-li se velikosti úhlů, jenž tyto strany svírají, jsou trojúhelníky shodné.
- Věta usu: Rovnají-li délky stran a rovnají-li se velikosti vnitřních úhlů k této straně přilehlých, jsou trojúhelníky shodné.
- Věta Ssu: Rovnají-li se délky dvou stran a rovnají-li se velikosti úhlů proti delší ze stran, jsou trojúhelníky shodné.

Všechny věty o shodnostech trojúhelníků jsou zapsány jako implikace. Věty by též mohly být zapsané jako ekvivalence (důkaz obrácené implikace plyne z definice shodnosti mnohoúhelníků). Stejné implikace jako zde najdeme i v Eukleidových *Základech*. Tvar implikace je zvolen z toho důvodu, že přímo ukazuje použití dané věty. Zjišťujeme-li shodnost dvou trojúhelníků, je to právě tím způsobem, že ověříme rovnosti délek odpovídajících si stran a velikosti úhlů. Odtud už shodnost trojúhelníků vyplyne.

1.2 Definice obsahu

Nejen z matematického, ale i z praktického hlediska je vhodné mít o mnohoúhelnících informaci, která nám říká, jak je daný mnohoúhelník „velký“. Takový poznatek bude jistě užitečný nejen při porovnávání n-úhelníků mezi sebou, ale bude mít i obrovské praktické využití. Například kolik barvy koupit na vymalování pokoje, kolik dlaždic pořídit pro vydláždění celé terasy a tak dále.

Již jsme zmínili, že pro definici obsahu potřebujeme shodnost mnohoúhelníků. Dále také potřebujeme definici nepřekrývajících se n-úhelníků.

Definice 1.2.1 (Nepřekrývající se mnohoúhelníky)**.** Dva mnohoúhelníky v rovině ρ, které nemají žádné společné vnitřní body, nazýváme *nepřekrývající se mnohoúhelníky.*

Této definici jistě vyhovují i ty n-úhelníky, které nemají žádný společný bod (tedy ani vrchol nebo část obvodu). Mnohoúhelníky, které mají společný vrchol, nebo mají společné části svých obvodů (jejich strany či jejich části se „překrývají“), definici též vyhovují. Vezmeme-li si například čtverec a zkonstruujeme jeho úhlopříčku, rozdělíme tím čtverec na dva shodné nepřekrývající se trojúhelníky.

Přistupme nyní k obsahu, který zavedeme axiomaticky. Všechny tři axiomy v definici níže jsou přirozené a odpovídají vnímání okolního světa.

Definice 1.2.2 (Obsah mnohoúhelníku)**.** Mějme funkci S na M, která každému mnohoúhelníku $U \in M$ přiřadí právě jedno nezáporné reálné číslo $S(U)$ tak, že platí axiomy (i)–(iii) uvedené níže.

(i) Obsahy navzájem shodných mnohoúhelníků jsou si rovny. Tedy

$$\forall\, U, U' \in M: \quad U \cong U' \quad \Rightarrow \quad S(U) = S(U').$$

(ii) Skládá-li se mnohoúhelník U z nepřekrývajících se mnohoúhelníků U_1 a U_2, pak je obsah U roven součtu obsahů U_1 a U_2, tedy

$$\forall\, U, U_1, U_2 \in M: \quad U = U_1 \cup U_2 \quad \Rightarrow \quad S(U) = S(U_1) + S(U_2).$$

(iii) Existuje mnohoúhelník $E \in M$, jehož obsah je 1.

Takovou funkci S nazýváme obsah mnohoúhelníku a číslo přiřazené mnohoúhelníku U značíme $S(U)$.

Z definice vyplývají základní vlastnosti obsahu mnohoúhelníku.

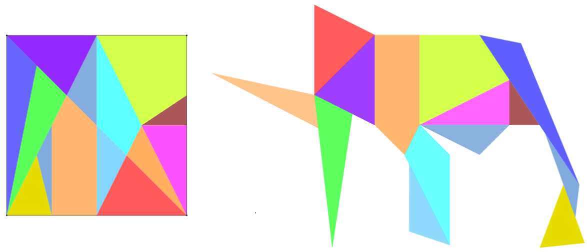
- Existence a jednoznačnost: dá se dokázat, že taková funkce na M existuje, a to právě jedna.
- Jelikož je $S(U)$ právě jedno jednoznačně přiřazené nezáporné reálné číslo mnohoúhelníku $U \in M$, má každý mnohoúhelník z množiny M právě jeden obsah.
- Hodnota obsahu může být rovna i nule. Například obvod mnohoúhelníku má nulový obsah (jedná se tedy jen o obsah lomené čáry, která tvoří hranici mnohoúhelníku).
- Obsah je relativní a jeho výsledná podoba závisí na volbě jednotkového mnohoúhelníku E. V námi známém pojetí obsahu je za útvar E zvolen čtverec o straně 1. Obecně ale předpokládáme existenci jakéhokoliv mnohoúhelníku E, kterému je přiřazen obsah 1. Namísto čtverce o straně 1 by mohl být útvarem E například šestiúhelník, který stejně jako čtverec dokáže „bez mezer“ pokrýt rovinu.

V matematických úlohách je výsledkem výpočtu obsahu vždy číslo – obsah byl právě tak definován. Jednotky, které se častokrát připisují, za číslo nepatří. Je také nesprávné, pokud je v matematických úlohách za výsledek dopisován symbol j^2 (*jednotka na druhou*).

Jednotky jsou výsledkem určité dohody, mají zásadní význam v přírodních vědách a praktickém životě. Objevují se v úlohách aplikačních, kde se na rozdíl od těch matematických v zadání vyskytují hodnoty daných veličin už s příslušnými jednotkami. Například obsah plochy, kterou zaujímá zahrada ve tvaru čtverce o straně 5 m, je 25 m^2. Obsah je stále relativní – v matematických úlohách vzhledem k jednotkovému mnohoúhelníku E, ale v úlohách aplikačních už například vzhledem k m^2.

1.3 Ekvidekomposabilita

Prozkoumejme nyní zajímavou a, jak později uvidíme, důležitou vlastnost dvou mnohoúhelníků, kterou jsme nastínili již v úvodu. Na obrázku 1.3 vlevo vidíme hlavolam stomachion. Jedná se o skládačku tvaru čtverce, jenž je rozdělen na čtrnáct částí. Z jednotlivých dílků je možné skládat různé obrazce ve tvaru zvířat, předmětů či postav – na obrázku vpravo vidíme mnohoúhelník připomínající slona.



Obrázek 1.3: Čtverec a slon – dva ekvidekomposabilní útvary

Každý z mnohoúhelníků je rozdělen na celkem 14 n-úhelníků. Pokud se tyto n-úhelníky nepřekrývají a jsou po dvou disjunktní, pak říkáme, že tvoří *rozklad mnohoúhelníku.* Následující dvě definice byly čerpány z [10], autorem byly zjednodušeny.

Definice 1.3.1 (Rozklad mnohoúhelníku)**.** Mějme mnohoúhelník $P \in M$ a konečný počet mnohoúhelníků $T_1, \ldots, T_n \in M, n \in \mathbb{N}$ a nechť platí následující podmínky.

(i) $P = T_1 \cup \cdots \cup T_n$

(ii) Žádné dva mnohoúhelníky $T_1, \ldots, T_n$ se nepřekrývají.

Pak říkáme, že mnohoúhelníky $T_1, \ldots, T_n$ tvoří *rozklad mnohoúhelníku* P. Říkáme také, že mnohoúhelník P je *rozložen* na mnohoúhelníky $T_1, \ldots, T_n$.

Rozklad se týká každého z mnohoúhelníků na obrázku 1.3. Nyní pozorujme vlastnost této dvojice mnohoúhelníků. Oba mnohoúhelníky jsou tvořeny ze čtrnácti po dvou shodných n-úhelníků (ty jsou vždy označeny stejnou barvou). Takové dva mnohoúhelníky nazýváme *ekvidekomposabilní* neboli *shodně rozložitelné.* Jinými slovy: *být ekvidekomposabilní* znamená *mít společný rozklad.*

Definice 1.3.2 (Ekvidekomposabilita)**.** Mějme mnohoúhelníky $P, P' \in M$ a nechť existují jejich rozklady:

$$P = T_1 \cup \cdots \cup T_n, \;\; P^{'} = T_1^{'} \cup \cdots \cup T_n^{'}, \quad \text{kde} \;\; T_1, \ldots, T_n, \; T_1', \ldots, T_n' \in M$$

Pokud platí, že

$$\forall \; i \in \{1, \ldots, n\} : \quad T_i \cong T_i^{'},$$

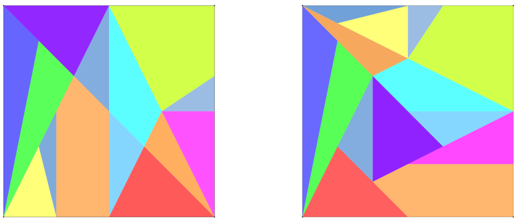
pak takové mnohoúhelníky nazýváme *ekvidekomposabilní* (*shodně rozložitelné*).

Poznámka. V anglicky psaných textech můžeme také ekvidekomposabilitu najít též pod pojmem „scissors congruence“, volně přeloženo se jedná o „shodnost nůžkami“. Toto označení poukazuje na názornou představu dvou shodně rozložitelných mnohoúhelníků. Například právě ve stomachion: jako když čtverec rozstříháme na čtrnáct n-úhelníků a ty pak přeskládáme na mnohoúhelník ve tvaru slona.

Vlastnosti ekvidekomposabilních mnohoúhelníků

Z definice ekvidekomposability (def. 1.3.2) přímo plyne, že sjednocení nepřekrývajících se ekvidekomposabilních mnohoúhelníků je ekvidekomposabilní. Dále poznamenejme, že rozklad není jednoznačný. Touto větou myslíme tři věci zároveň.

- Z hlediska počtu n-úhelníků můžeme daný mnohoúhelník rozložit v podstatě jak se nám zlíbí. Například čtverec bychom úhlopříčkou rozdělili na dva shodné pravoúhlé trojúhelníky, ale ve stomachion je čtverec rozdělen na 14 n-úhelníků.
- Pro stejnou množinu n-úhelníků $T_1, \dots, T_n$ mohou existovat pro jeden mnohoúhelník různé rozklady. Na obrázku 1.4 například vidíme, že pomocí stejných 14 dílků je čtverec poskládán různými způsoby[3].
- Pro dvojici ekvidekomposabilních mnohoúhelníků existují různé společné rozklady. Například na obrázku 1.3 vidíme jeden z nekonečně mnoha společných rozkladů pro čtverec a mnohoúhelník připomínající slona. Kdybychom například v každém z mnohoúhelníků rozdělili úhlopříčkou zelený čtyřúhelník na dva trojúhelníky, dostaneme další společný rozklad.



Obrázek 1.4: Dvě různě poskládaná stomachion

Relace ekvivalence

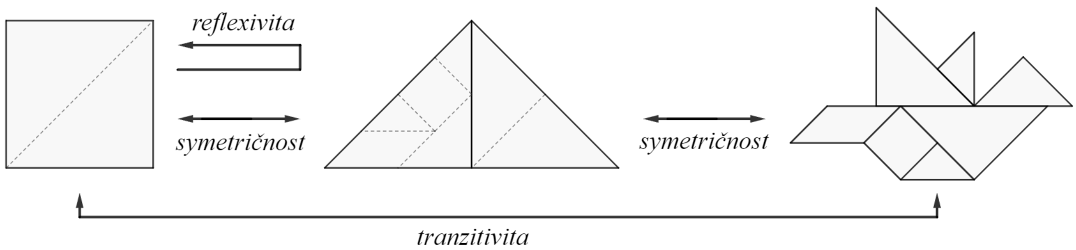
Relace být ekvidekomposabilní mezi dvěma n-úhelníky na množině všech mnohoúhelníků M je relace ekvivalence. Být shodně rozložitelný je tedy relace *reflexivní*, *symetrická* a *tranzitivní*. V odrážkách níže jsou jednotlivé vlastnosti podrobněji rozepsány a ilustrovány na obrázku 1.5, na kterém je čtverec „přeskládán“ na pravoúhlý rovnoramenný trojúhelník a ten dále na mnohoúhelník připomínající letícího ptáčka[4].

- *Reflexivita:* Každý mnohoúhelník je shodně rozložitelný sám se sebou. Žádný rozklad mnohoúhelníku na další n-úhelníky přitom není nutné provádět.
- *Symetričnost:* Je-li mnohoúhelník P ekvidekomposabilní s mnohoúhelníkem P', pak také platí, že P' je ekvidekomposabilní s P (viz čtverec a slon na obrázku 1.3, nebo obrázek 1.5 níže).

[3] V roce 2003 vypočítal americký matematik Bill Cutler pomocí počítačového programu všechny možnosti poskládání stomachion – tedy všechny možné rozklady čtverce na 14 daných dílků. Bez uvážení otočení a zrcadlení existuje celkem 536 různých řešení.

[4] Třetí mnohoúhelník na obrázku je složen ze stejných n-úhelníků, na které je rozložen čtverec ve známém hlavolamu tangram.

- *Tranzitivita:* Je-li mnohoúhelník P ekvidekomposabilní s mnohoúhelníkem P' a zároveň P' je ekvidekomposabilní s P'', pak i P je ekvidekomposabilní s P'' (a díky symetričnosti i naopak). Jinými slovy (viz obrázek 1.5): pokud z čtverce při zachování obsahu poskládáme trojúhelník a z něj opět při zachování obsahu poskládáme mnohoúhelník připomínající ptáčka, jistě bychom dokázali poskládat ptáčka přímo z dílků formující čtverec a naopak (i přes to, že na obrázku společný rozklad pro čtverec a ptáčka není znázorněn).



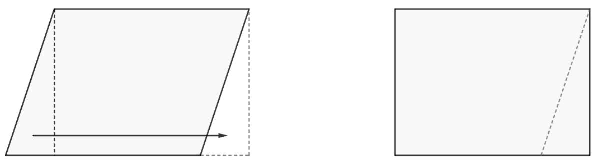
Obrázek 1.5: Schéma k relaci ekvivalence

Důkaz toho, že být ekvidekomposabilní na množině M je relace ekvivalence je v případě reflexivity a symetričnosti triviální. Náročnější je důkaz tranzitivity. V tomto textu ho však neuvádíme (viz například [3] str. 199).

Stejný obsah ekvidekomposabilních mnohoúhelníků

Z axiomů (i) a (ii) definice obsahu vyplývá pro dva ekvidekomposabilní mnohoúhelníky důležitý (a poměrně zřejmý) závěr: **Každé dva ekvidekomposabilní mnohoúhelníky mají stejný obsah.** Tento závěr může být patrný i z obrázku 1.3, kde je vyobrazeno stomachion. Jelikož jsou čtverec a mnohoúhelník připomínající slona složeny ze 14 po dvou shodných n-úhelníků, tak se obsahy těchto mnohoúhelníků musí nutně rovnat.

Tohoto zřejmého důsledku využíváme například při počítání obsahu mnohoúhelníků. Pokud chceme vypočítat obsah rovnoběžníku, můžeme uvažovat následovně: výškou rozdělíme rovnoběžník na lichoběžník a pravoúhlý trojúhelník a tento trojúhelník posuneme tak, aby přepona a nekolmé rameno lichoběžníku splynuly (obrázek 1.6).

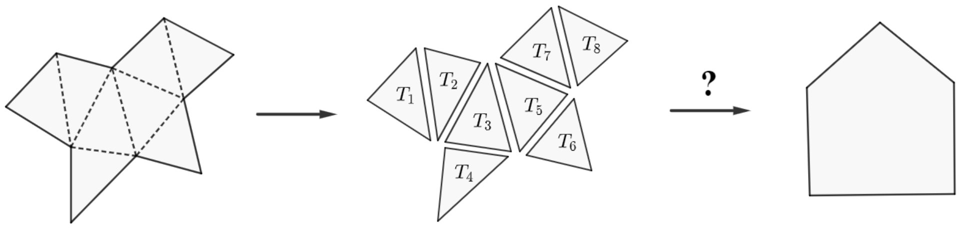


Obrázek 1.6: Společný rozklad rovnoběžníku a obdélníku

Tímto způsobem jsme našli společný rozklad rovnoběžníku a obdélníku. Jelikož jsou tyto mnohoúhelníky shodně rozložitelné, jejich obsahy jsou si rovny.

Z tohoto pozorování plyne zásadní otázka či myšlenka: *Bylo by možné teorii obsahu založit na rozkladu mnohoúhelníku na mnohoúhelníky?* Při zjišťování, zda mají dva mnohoúhelníky stejný obsah, by nebylo nutné provádět žádný výpočet. Stačilo by pouze zjistit, zda mají dané mnohoúhelníky společný rozklad. Abychom mohli obsah založit na ekvidekomposabilitě, musíme dokázat i opačné tvrzení: *každé dva mnohoúhelníky stejného obsahu jsou ekvidekomposabilní.* To je znění Wallace-Bolyai-Gerweinovy věty.

Podívejme se na obrázek 1.7, kde jsou vyobrazeny nekonvexní desetiúhelník (vlevo) a konvexní pětiúhelník (vpravo) o stejném obsahu. Jsou takové n-úhelníky ekvidekopmosabilní? A pokud ano, jakým způsobem ukážeme, že společný rozklad existuje?



Obrázek 1.7: Hledání společného rozkladu

Desetiúhelník je rozdělen na osm nepřekrývajících se trojúhelníků $T_1, \ldots, T_8$. Pokud bychom našli takový rozklad konvexního pětiúhelníku na trojúhelníky $T_1', \ldots, T_8'$, aby každé dva trojúhelníky T_1 a $T_1', \ldots, T_8$ a T_8' byly shodné, našli bychom společný rozklad. Přitom bychom mohli trojúhelníky $T_1, \ldots, T_8$ dále rozložit na jiné n-úhelníky nebo bychom mohli také jednotlivé trojúhelníky při zachování obsahu transformovat na jiné n-úhelníky.

Právě rozdělení mnohoúhelníku na trojúhelníky a jejich následné transformování na jiné n-úhelníky bude klíčem k důkazu existence společného rozkladu a tím i důkazu Wallace-Bolyai-Gerweinovy věty. To je obsahem následující kapitoly.

2. Hledání společného rozkladu

V závěru předchozí kapitoly jsme ukázali, že obsah dvou ekvidekomposabilních mnohoúhelníků je podle axiomů z definice 1.2.2 stejný. Cílem této kapitoly je dokázat, že společný rozklad dvou mnohoúhelníků stejného obsahu vždy existuje. Pak bude možné říci, že *dva mnohoúhelníky mají stejný obsah právě tehdy, když jsou ekvidekomposabilní.* Rovnost obsahů a ekvidekomposabilita dvou mnohoúhelníků se tak stanou ekvivalentními pojmy.

Podívejme se nejprve na jednodušší implikaci výše uvedené ekvivalence. Ta byla v předchozí kapitole již volně popsána a ilustrována na hlavolamu stomachion a na společném rozkladu rovnoběžníku a obdélníku. Důkaz je triviální a vyplývá přímo z definic.

Věta 1. Každé dva ekvidekomposabilní mnohoúhelníky ležící v rovině ρ mají stejný obsah.

Důkaz. Mějme dva ekvidekomposabilní mnohoúhelníky P, P' s příslušnými rozklady na mnohoúhelníky $T_1, \ldots, T_n$ a $T_1', \ldots, T_n'$:

$$P = T_1 \cup \cdots \cup T_n, \quad P' = T_1' \cup \cdots \cup T_n'.$$

Dle axiomu (ii) z definice obsahu (def. 1.2.2) je obsah mnohoúhelníku P, resp. P', roven součtu obsahů jednotlivých nepřekrývajících se mnohoúhelníků, z nichž se původní mnohoúhelník skládá:

$$S(P) = S(T_1) + \cdots + S(T_n), \quad S(P') = S(T_1') + \cdots + S(T_n').$$

Jelikož $\forall i \in \{1, \ldots, n\} : \; T_i \cong T_i'$, pak $S(T_i) = S(T_i')$ a obsahy mnohoúhelníků P, P' jsou si rovny: $S(P) = S(P')$. □

Mnohem významnější je však obrácená implikace, v tomto textu je označována jako *Wallace-Bolyai-Gerweinova věta.* S touto větou se pojí nejen uvedená jména Farkas Bolyai, Paul Gerwein a William Wallace, ale i jméno John Lowry. Dle [2] (strana 222) byl problém vysloven Wallacem kolem roku 1808 a jeho řešení poskytl Lowry v roce 1814. V roce 1831 vydal Wallace své rozšířené řešení. Dále v letech 1832 a 1833 tvrzení nezávisle na sobě dokázali Bolyai a Gerwein. Jedná se tedy o relativně nedávnou historii. Připomeňme, že právě tato věta dává do souvislosti rovnost obsahu a ekvidekomposabilitu.

Věta 2 (Wallace-Bolyai-Gerweinova věta)**.** Každé dva mnohoúhelníky stejného obsahu ležící v rovině ρ jsou ekvidekomposabilní.

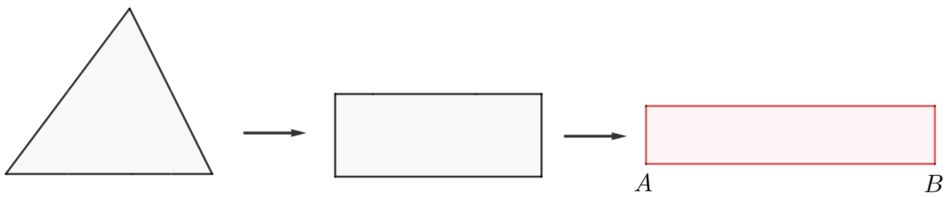
Důkaz této věty je oproti větě 1 podstatně náročnější (spíše delší) a vyžaduje více pomocných tvrzení. Jádrem důkazu bude to, že ekvidekomposabilita je tranzitivní. Existenci společného rozkladu dvou mnohoúhelníků stejného obsahu ukážeme tak, že každý z nich při zachování obsahu transformujeme na tentýž obdélník.

Tento obdélník bude sloužit jako jakýsi „prostředník“ mezi oběma mnohoúhelníky. Pokud na tento obdélník transformujeme mnohoúhelník P (ukážeme existenci společného rozkladu obdélníku a P) a zároveň na tentýž obdélník transformujeme mnohoúhelník P' (ukážeme existenci společného rozkladu obdélníku a P'), tak bude možné díky tranzitivitě ekvidekomposability i mnohoúhelníky P a P' transformovat na sebe – ukážeme tedy, že společný rozklad P a P' existuje.

Při důkazu tedy budeme postupovat dle následujících kroků. V bodech níže zároveň rovnou odkazujeme na příslušná lémmata, důsledky a věty z následujících podkapitol, ve kterých jsou kroky podrobně zpracovány.

1. **Transformace trojúhelníků na společný obdélník:** Pomocí transformace na společný obdélník ukážeme existenci společného rozkladu dvou trojúhelníků o stejném obsahu. První z těchto trojúhelníků transformujeme na šedý obdélník, s nímž má shodnou základnu a výška obdélníku je poloviční oproti výšce trojúhelníku (lémma 1). Dále tento obdélník transformujeme na červený obdélník o základně AB (lémma 2 a 3). Analogicky pak transformujeme i druhý trojúhelník na červený obdélník o základně AB. Úsečka AB (tedy základna obdélníku) je libovolně zvolena.

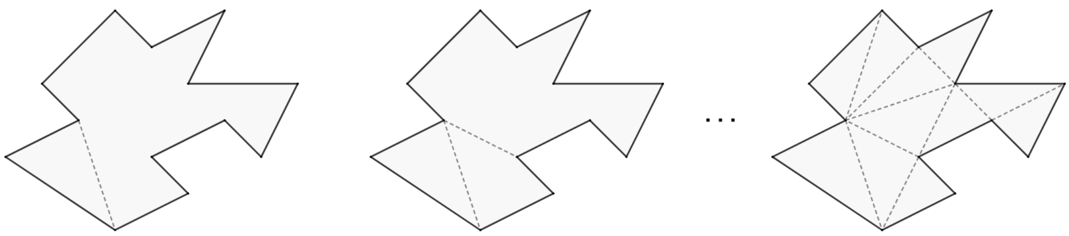
   Tento červený obdélník o základně AB je právě dříve zmíněným „prostředníkem“ obou trojúhelníků. Volíme ho proto, abychom měli jeden společný n-úhelník pro oba trojúhelníky.

   Obrázek 2.1: Transformace jednoho trojúhelníku na obdélník

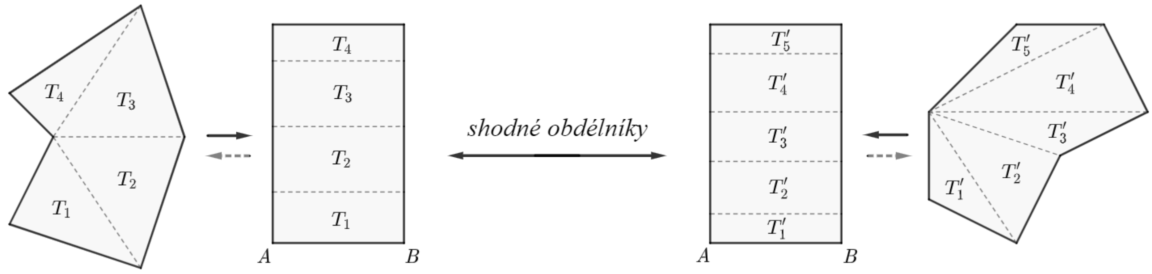
   Každý z trojúhelníků je ekvidekomposabilní se svým šedým obdélníkem a tyto šedé obdélníky jsou ekvidekomposabilní s červeným obdélníkem o základně AB (dvakrát jsme využili tranzitivity). Tudíž i původní trojúhelníky stejného obsahu jsou ekvidekomposabilní – společný rozklad existuje.

2. **Triangulace mnohoúhelníku:** Ukážeme, že každý mnohoúhelník dokážeme triangulovat na konečný počet trojúhelníků (věta 3). Rozklad na trojúhelníky získáme tak, že v daném mnohoúhelníku budeme postupně konstruovat takové úhlopříčky, které v mnohoúhelníku leží.

   Obrázek 2.2: Rozklad mnohoúhelníku na trojúhelníky

3. **Transformace mnohoúhelníků na společný obdélník:** Pomocí transformace na společný obdélník ukážeme existenci společného rozkladu dvou mnohoúhelníků stejného obsahu. Nejprve každý z mnohoúhelníků dle bodu 2 rozdělíme na trojúhelníky a poté každý z trojúhelníků obou původních mnohoúhelníků transformujeme dle bodu 1 na obdélník o straně AB (důsledek 3.1, resp. věta 2). Na obrázku je tento postup ukázán pro šestiúhelník a sedmiúhelník o stejném obsahu.

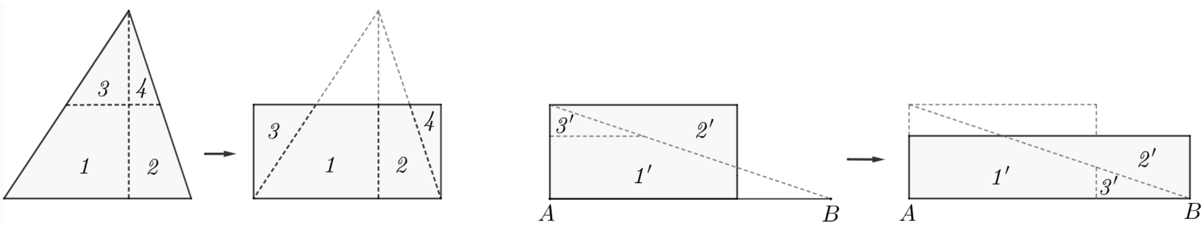


Obrázek 2.3: Společný rozklad dvou mnohoúhelníků stejného obsahu

Díky shodné straně bude možné menší obdélníky získané u prvního i druhého mnohoúhelníku „naskládat na sebe“. Výsledné obdélníky jsou díky stejné straně shodné a tudíž díky tranzitivitě ekvidekomposability jsou ekvidekomposabilní i původní mnohoúhelníky.

2.1 Společný rozklad dvou trojúhelníků stejného obsahu

Jak jsme nastínili v textu výše, existenci společného rozkladu dvou trojúhelníků stejného obsahu ukážeme pomocí transformace na obdélník o dané straně. Názorná transformace jednoho trojúhelníku na obdélník o základně AB, kde jsou zároveň vidět společné rozklady pro příslušnou dvojici mnohoúhelníků, je vidět na obrázku níže.



Obrázek 2.4: Transformace trojúhelníku na obdélník o straně AB

Vidíme, že nejprve najdeme společný rozklad trojúhelníku a obdélníku, který má shodnou základu a poloviční výšku[1] původního trojúhelníku. Poté najdeme i společný rozklad tohoto obdélníku a obdélníku o libovolně zvolené straně AB.

Při psaní podkapitol 2.1, 2.3 a 2.4 bylo čerpáno z [3] (kapitola 24) a též z [4].

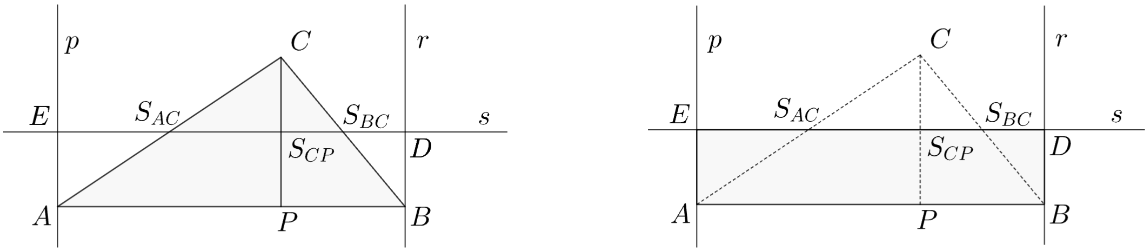
Společný rozklad trojúhelníku a obdélníku

Společný rozklad obecného trojúhelníku a obdélníku můžeme zkonstruovat přímo, popřípadě si pomoci mezikrokem přes rovnoběžník.

Lémma 1. *Ke každému trojúhelníku ležícímu v rovině ρ existuje v rovině ρ obdélník, který má s tímto trojúhelníkem společný rozklad.*

[1] V tomto textu rozumíme výškou úsečku, která je vedená z vrcholu trojúhelníku kolmo k protilehlé straně (délka výšky je tedy rovna vzdálenosti vrcholu od protilehlé strany).

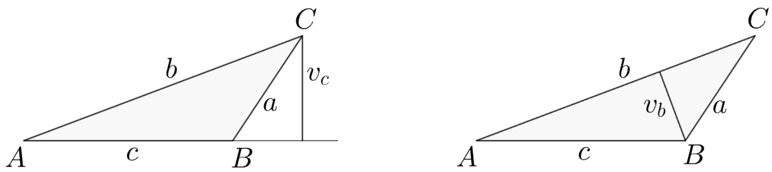
Důkaz. První způsob (transformace v jednom kroku): Rozklad ukážeme pro ostroúhlý trojúhelník ABC (obrázek 2.5). Nechť CP je výška na stranu AB, bod S_{AC} je střed AC a bod S_{BC} střed BC. Body S_{AC} a S_{BC} veďme přímku s. Bodem A, respektive B, veďme kolmici p, respektive r, ke straně AB. Přímka s prochází střední příčkou trojúhelníku a je tak rovnoběžná se stranou AB. Přímky p, r a CP jsou kolmé na AB a jsou tak navzájem rovnoběžné.



Obrázek 2.5: Transformace trojúhelníku na obdélník

Trojúhelníky EAS_{AC} a $CS_{CP}S_{AC}$ jsou shodné (například dle věty *sus*), stejně tak jsou shodné i trojúhelníky $CS_{CP}S_{BC}$ a BDS_{BC}. Našli jsme tedy společný rozklad trojúhelníku ABC a obdélníku $ABDE$.

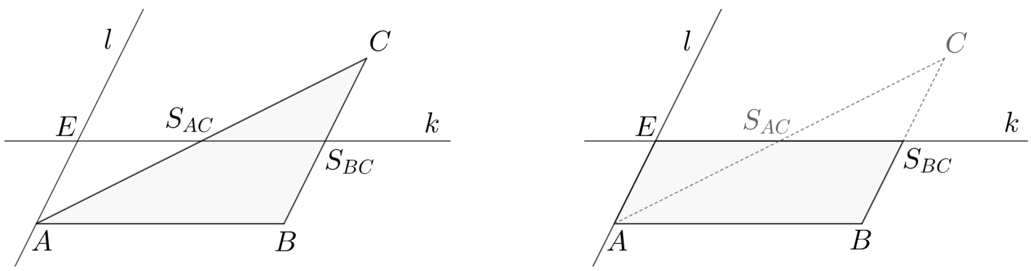
Pro ostroúhlý nebo pravoúhlý trojúhelník je transformace na obdélník jednoduchá, jelikož každá z výšek v trojúhelníku leží. To v případě tupoúhlého trojúhelníku neplatí (viz obrázek 2.6 vlevo).



Obrázek 2.6: Výšky v tupoúhlém trojúhelníku

Abychom mohli provést transformaci pomocí postupu popsaného výše, zvolíme v tupoúhlém trojúhelníku takovou výšku, která v něm leží (obrázek 2.6 vpravo).

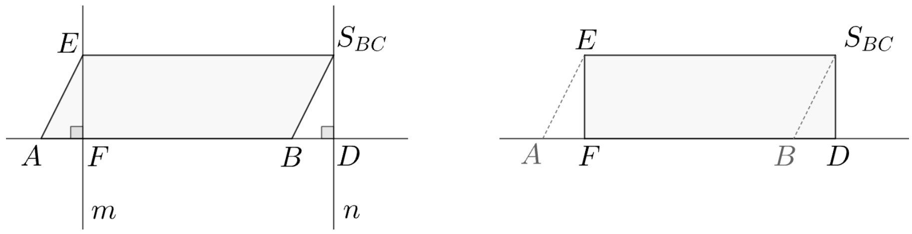
Druhý způsob (transformace ve dvou krocích): Rozklad ukážeme na tupoúhlém trojúhelníku ABC (obrázek 2.7). Trojúhelník nejprve transformujeme na rovnoběžník o shodné základně a poloviční výšce. Poté tento rovnoběžník transformujeme na obdélník o shodné základně a stejné výšce. Nechť S_{BC} je střed BC a S_{AC} je střed AC. Body S_{AC} a S_{BC} veďme přímku k. Dále veďme bodem A rovnoběžku l se stranou BC. Průsečík přímek k a l je bod E.



Obrázek 2.7: Transformace trojúhelníku na rovnoběžník

Přímka k je rovnoběžná se stranou AB, úhly $\sphericalangle AES_{AC}$ a $\sphericalangle CS_{BC}S_{AC}$ jsou díky rovnoběžkám BC a l shodné. Trojúhelníky AES_{AC} a $SC_{BC}S_{AC}$ jsou díky větě *sus* shodné. Našli jsme tak společný rozklad trojúhelníku ABC a rovnoběžníku $ABS_{BC}E$.

Nyní tento rovnoběžník transformujeme na obdélník. Na stranu AB veďme bodem E, respektive S_{BC}, veďme kolmici m, respektive n. Přímky m a n protínají přímku AB v bodech F a D.



Obrázek 2.8: Transformace rovnoběžníku na obdélník

Vzniklé trojúhelníky AFE a BDS_{BC} jsou opět shodné (například dle věty *sus*). Nalezli jsme společný rozklad rovnoběžníku $ABS_{BC}E$ a obdélníku $FDS_{BC}E$.

Díky tranzitivitě ekvidekomposability tak mají i původní trojúhelník a výsledný obdélník společný rozklad.

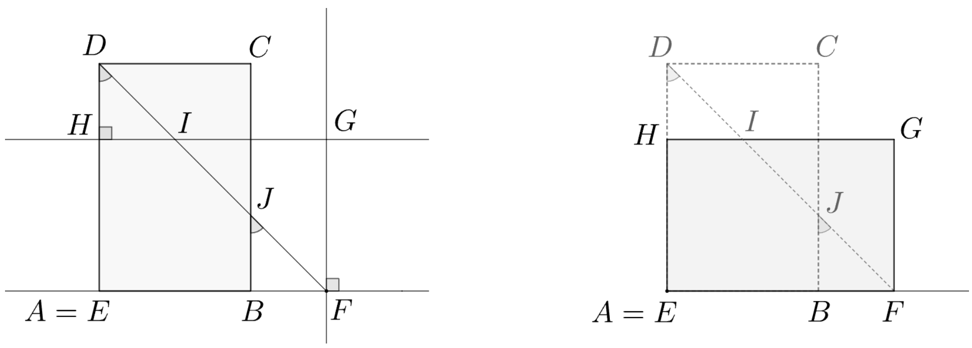
□

Společný rozklad trojúhelníku a obdélníku o zvolené straně

Nyní se podívejme na společný rozklad dvou různých obdélníků.

Lémma 2. *Pro každý obdélník $ABCD$ a zvolenou úsečku EF ležící v rovině ρ, pro něž platí $2|EF| \geq |AB| \geq |EF|$, v rovině ρ existuje obdélník $EFGH$, který má s obdélníkem $ABCD$ společný rozklad.*

Důkaz. Mějme obdélník $ABCD$ (obrázek 2.9), nechť $A = E$ a nechť bod F leží na polopřímce AB (resp. EB). Úsečka FD protíná stranu BC v bodě J. Na úsečce AD sestrojíme takový bod H, že platí $|BJ| = |DH|$, a sestrojíme obdélník $AFGH$, respektive $EFGH$.



Obrázek 2.9: Transformace obdélníku na obdélník o straně EF

Díky rovnoběžným stranám původního obdélníku jsou úhly $\sphericalangle ADF$ a $\sphericalangle BJF$ shodné, trojúhelníky DHI a JBF jsou tedy díky větě *usu* shodné (druhým úhlem je úhel pravý). Jelikož jsou HI a BF shodné, jsou shodné i úsečky DC, AB a IG. Opět podle věty *usu* jsou trojúhelníky DCJ a IGF shodné. Obdélníky $ABCD$ a $EFGH$ tedy mají společný rozklad. □

Poznámka. Pokud platí $|AB| = |EF|$, je konstrukce hotova. Pokud platí $|AB| = 2|EF|$, konstrukce je triviální. Úsečka FD by protla stranu BC v jejím středu S_{BC} a body I a J by splynuly v jediný. Trojúhelníky DCS_{BC} a $S_{BC}GF$ by byly opět shodné.

Je zřejmé, že podmínky kladené na obdélník vzhledem k úsečce EF jsou dosti omezující. V následujícím lémmatu (respektive jeho důkazu) ukážeme, že pomocí jednoduché transformace dokážeme kterýkoliv obdélník převést na případ v lémmatu 2.

Lémma 3. *Pro každý obdélník $ABCD$ ležící v rovině ρ existuje v rovině ρ obdélník $EFGH$ o základně EF libovolně dané délky, který má s obdélníkem $ABCD$ společný rozklad.*

Důkaz. Pro stranu AB a zvolenou úsečku EF může nastat jeden ze tří případů níže.

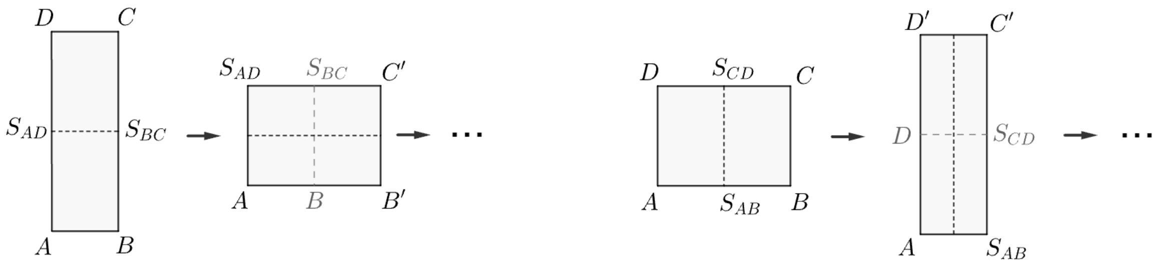
i) $|EF| > |AB|$

ii) $2|EF| \geq |AB| \geq |EF|$

iii) $|AB| > 2|EF|$

Ukážeme, že první a třetí případ dokážeme převést na případ ii), který odpovídá podmínce již dokázaného lémmatu 2.

V případě i) obdélník $ABCD$ „rozpůlíme“ vodorovně a transformujeme ho na obdélník $AB'C'S_{AD}$ (viz obrázek 2.10) o poloviční výšce a dvakrát delší základně. Tento postup opakujeme tolikrát, kolikrát je třeba, aby výsledný obdélník splňoval podmínku ii). Dle lémmatu 2 má pak obdélník $ABCD$ s obdélníkem $EFGH$ společný rozklad.



Obrázek 2.10: „Půlení“ obdélníku

V případě iii) obdélník $ABCD$ „rozpůlíme“ ve svislém směru a transformujeme ho na obdélník $AS_{AB}C'D'$ o poloviční základně a dvojnásobné výšce. Tento postup opět opakujeme tolikrát, než získáme takový obdélník, který splňuje podmínku ii). Opět podle lémmatu 2 má obdélník $ABCD$ s obdélníkem $EFGH$ společný rozklad.

□

Poznámka. V eukleidovské rovině ρ platí *Archimédův axiom*, díky kterému je možné tuto konstrukci provést. Tento axiom říká, že pro každé dvě úsečky AB a AC ležící v rovině ρ existuje číslo $n \in \mathbb{N}$ takové, že $n \cdot |AB|$ je větší než $|AC|$. Tento axiom zajistí, že „půlení“ obdélníku provedeme konečně mnoha kroky.

Závěr

Předchozí lémmata můžeme shrnout do následujícího důsledku a tím naplnit první bod našeho důkazu Wallace-Bolyai-Gerweinovy věty.

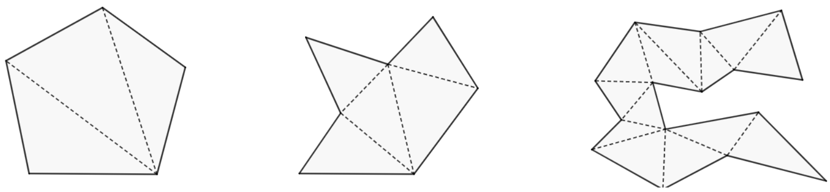
Důsledek 2.1. Každé dva trojúhelníky stejného obsahu ležící v rovině ρ jsou ekvidekomposabilní.

Důkaz. Mějme dva trojúhelníky A, B stejného obsahu, tedy $S(A) = S(B)$. Každý z trojúhelníků má dle lémmatu 1 a 3 společný rozklad s obdélníkem $EFGH$, jehož základna EF má libovolnou délku. Transformujme trojúhelník A, respektive trojúhelník B, na obdélník o stranách a a 1, respektive b a 1. Jelikož $S(A) = S(B)$, pak $a = b$ a výsledné obdélníky jsou shodné, tedy i shodně rozložitelné (reflexivita ekvidekomposability). Díky tranzitivitě ekvidekomposability jsou shodně rozložitelné i původní trojúhelníky A a B. □

2.2 Rozdělení mnohoúhelníků na trojúhelníky

Nyní ukážeme, že každý mnohoúhelník dokážeme rozdělit na konečný počet nepřekrývajících se trojúhelníků. Jak jsme již nastínili, triangulace vychází z postupného konstruování takových úhlopříček, které leží v mnohoúhelníku. Sestrojením jedné takové úhlopříčky dokážeme n-úhelník buď rozdělit na trojúhelník a $(n-1)$-úhelník, nebo rozdělíme n-úhelník na dva menší mnohoúhelníky. Opakujícím se postupem získáme výsledný rozklad na trojúhelníky.

Na obrázku níže je konstrukce ukázána na konvexním pětiúhelníku, nekonvexním sedmiúhelníku a nekonvexním patnáctiúhelníku. Pro konvexní mnohoúhelníky je postup zřejmý. Každá z úhlopříček v n-úhelníku leží. Nicméně to u nekonvexních mnohoúhelníků neplatí a proto je nutné při konstrukci postupovat opatrně.



Obrázek 2.11: Triangulace konvexního a dvou nekonvexních mnohoúhelníků

Důkaz věty o triangulaci je konstruktivní, existence rozdělení mnohoúhelníku na trojúhelníky z něj tedy přímo plyne. Důkaz byl čerpán z [1] a byl mírně upraven.

Věta 3 (Triangulace)**.** Každý mnohoúhelník P ležící v rovině ρ lze rozdělit na konečný počet nepřekrývajících se trojúhelníků.

Důkaz. Provedeme indukcí: Pro $n = 3$ je výsledek triviální, n-úhelníkem je trojúhelník. Nechť $n > 3$. Vezměme si jeden z vrcholů mnohoúhelníku, označme ho A_1, a jeho dva sousední vrcholy, označme je A_2, A_n. Z definice mnohoúhelníků plyne existence sousedních vrcholů, můžeme tedy sestrojit úhlopříčku A_2A_n.

Sestrojme úhlopříčku A_2A_n, přitom mohou nastat tři případy:

a) Všechny body úhlopříčky A_2A_n náleží mnohoúhelníku a úhlopříčka neprotíná žádnou ze stran mnohoúhelníka.

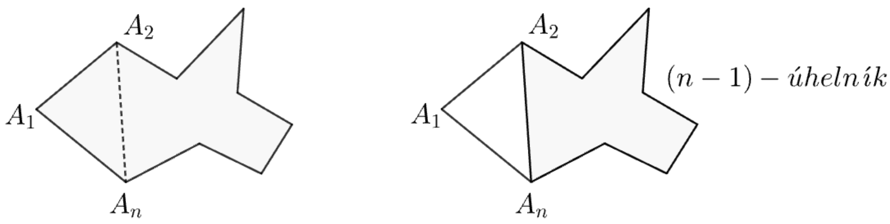
b) Úhlopříčka A_2A_n protíná dvě nebo více stran mnohoúhelníka, některé body A_2A_n tedy nenáleží mnohoúhelníku.

c) Úhlopříčka neprotíná žádnou ze stran a vyjma krajních bodů úhlopříčky žádný bod úhlopříčky nenáleží mnohoúhelníku.

Vždy když sestrojíme úhlopříčku A_2A_n a nastane případ c), vezmeme si takový bod mnohoúhelníku A_i a sestrojíme takovou úhlopříčku $A_{i+1}A_{i-1}$, pro kterou platí bod a) či b).

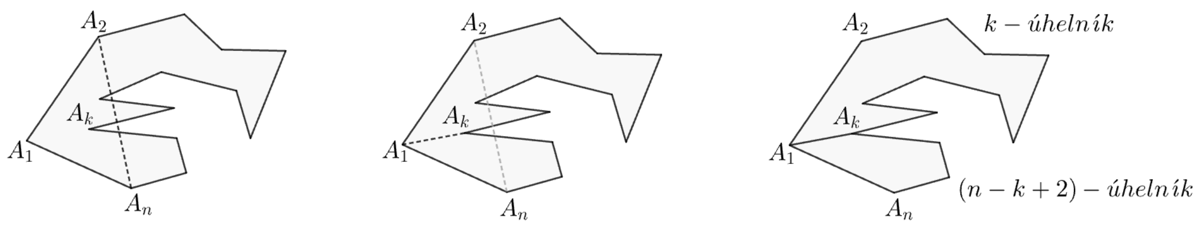
Rozeberme případy a), b).

a) Úhlopříčka náleží n-úhelníku a rozděluje tak n-úhelník na $(n-1)$-úhelník a trojúhelník. Stejným postupem pokračujeme dál a postupně rozdělíme n-úhelník na $n-2$ trojúhelníků. Pokud při konstrukci úhlopříčky nastane situace b), postupujeme podle dle bodu b) níže.



Obrázek 2.12: Triangulace – případ a)

b) V případě, že úhlopříčka A_2A_n protíná strany mnohoúhelníku, zvolíme takový vrchol n-úhelníku A_k, jenž náleží trojúhelníku $A_nA_1A_2$ a jehož vzdálenost je od A_2A_n největší. Pak úhlopříčka A_1A_k rozdělí n-úhelník na k-úhelník a $(n-k+2)$-úhelník, přičemž $3 \leq k \leq n+1$. Původní n-úhelník je tak rozdělen na celkem $(k-2)+(n-k+2-2) = n-2$ trojúhelníků. Pokud při konstrukci úhlopříčky nastane situace a), postupujeme podle dle bodu a) výše.



Obrázek 2.13: Triangulace – případ b)

Kombinací postupů z bodu a) a b) triangulaci vždy provedeme. Rozdělení na trojúhelníky tedy pro každý mnohoúhelník existuje, navíc počet trojúhelníků je $n-2$. Tím je důkaz hotov.

□

2.3 Společný rozklad dvou mnohoúhelníků

Spojením všech předchozích tvrzení získáváme následující klíčový důsledek.

Důsledek 3.1. Pro každý mnohoúhelník P a úsečku EF libovolné délky ležící v rovině ρ existuje v rovině ρ obdélník $EFGH$, který má s mnohoúhelníkem P společný rozklad.

Důkaz. Mnohoúhelník nejprve dle věty 3 rozdělíme na konečný počet trojúhelníků. Každý z trojúhelníků pak dle lémmatu 1 transformujeme na obdélník, dále dle lémmatu 2 na obdélník o základně EF. Transformacemi mnohoúhelníků je jejich obsah vždy zachován. Dostaneme tak konečný počet obdélníků o základně EF. Všechny obdélníky díky společné základně „naskládáme“ na sebe a získáme tak jediný obdélník o základně EF, označme ho $EFGH$. Díky tranzitivitě ekvidekomposability má původní mnohoúhelník P s výsledným obdélníkem $EFGH$ společný rozklad. □

Společný rozklad dvou mnohoúhelníků stejného obsahu (nebo spíše transformaci jednoho mnohoúhelníku na druhý) můžeme pozorovat na interaktivní webové stránce [7]. Po načrtnutí dvou libovolných mnohoúhelníků se spustí animace, během které dojde k transformaci („přeskládání“) jednoho mnohoúhelníku na druhý. Animace probíhá přesně podle kroků, které jsme uvedli v textu výše.

Důsledkem 3.1 jsme naplnili třetí a poslední krok našeho plánu ze začátku kapitoly. Můžeme přejít k samotnému důkazu Wallace-Bolyai-Gerweinovy věty.

Důkaz Wallace-Bolyai-Gerweinovy věty

Nyní už máme dokázána všechna potřebná tvrzení o společných rozkladech a můžeme se vrátit k důkazu věty 2. Při důkazu existence společného rozkladu jakýchkoliv dvou mnohoúhelníků stejného obsahu bude postup prakticky stejný jako ten uvedený v předchozím textu. Lišit se bude jen v počtu trojúhelníků, na než budou mnohoúhelníky rozděleny.

Připomeňme znění věty 2: *Každé dva mnohoúhelníky stejného obsahu ležící v rovině ρ jsou ekvidekomposabilní.*

Důkaz. Mějme dva mnohoúhelníky P a Q stejného obsahu, tedy $S(P) = S(Q)$. Každý z mnohoúhelníků lze při zachování obsahu za využití důsledku 3.1 transformovat na obdélníky o stranách 1, p a 1, q. Jelikož $S(P) = S(Q)$, pak $p = q$ a výsledné obdélníky jsou shodné, a tedy i shodně rozložitelné (reflexivita ekvidekomposability). Díky tranzitivitě ekvidekomposability jsou shodně rozložitelné i původní mnohoúhelníky P a Q. □

Podařilo se nám tedy nejen dokázat, že obsahy každých dvou shodně rozložitelných mnohoúhelníků jsou si rovny, ale že i každé dva mnohoúhelníky stejného obsahu jsou ekvidekomposabilní. Tedy spojením vět 1 a 2 dostáváme, že: **Každé dva mnohoúhelníky mají stejný obsah právě tehdy, když jsou ekvidekomposabilní.**

Poznamenejme, že způsobem popsaným v důkazu byl společný rozklad nalezen, ale z hlediska počtu mnohoúhelníků, na které je původní mnohoúhelník rozložen, nemusí být už tak „efektivní“. Pro nás bylo důležité samotný rozklad najít. Hledání „nejhezčího“ rozkladu – takového, aby počet mnohoúhelníků, na něž zadané n-úhelníky rozdělíme, byl co nejmenší, je už jiná úloha (viz například [8]).

2.4 Další rozklady mnohoúhelníků

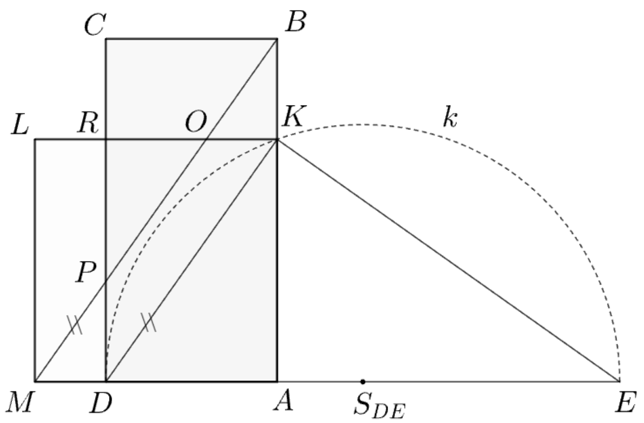
Abychom provedli důkaz Wallace-Bolyai-Gerweinovy věty, dokázali jsme existenci společného rozkladu mnohoúhelníku a obdélníku libovolně dlouhé základny. S transformacemi ale můžeme pokračovat dále. V této podkapitole ukážeme dva další společné rozklady a to společný rozklad mnohoúhelníku a čtverce a společný rozklad mnohoúhelníku a trojúhelníku. Čerpáno z [3] (kapitola 22, 24).

Společný rozklad mnohoúhelníku a čtverce

Abychom ukázali společný rozklad mnohoúhelníku a čtverce, stačí jen ukázat, že existuje společný rozklad obdélníku a čtverce. To je obsahem následujícího lémmatu. Jedná se v podstatě o Eukleidovu větu o výšce[2], kde je plocha obdélníku přeměněna na plochu čtverce (nebo naopak). Abychom tuto přeměnu ploch provedli pomocí společného rozkladu, tak na obdélník klademe jisté požadavky (viz níže).

Lémma 4. *Pro každý obdélník ležící v rovině ρ existuje v rovině ρ čtverec, který má s obdélníkem společný rozklad.*

Důkaz. Mějme obdélník $ABCD$ a nechť platí $4|AD| \geq |AB| > |AD|$ (viz obrázek 2.14). Pokud takovou podmínku nesplňuje, transformujeme ho pomocí lémmatu 3 tak, aby byla podmínka splněna. Na polopřímce DA sestrojíme bod E tak, že platí $|AB| = |AE|$. Nad průměrem DE sestrojme kružnici k (Thalétova kružnice), průsečíkem kružnice k a strany AB je bod K. Nyní sestrojíme čtverec o straně AK, tedy dorýsujeme zbývající vrcholy L, M, přičemž bod M leží na polopřímce AD.



Obrázek 2.14: Transformace obdélníku na čtverec

Jelikož platí $|AB| = |AE|$, $|AK| = |AM|$ a úhly $\sphericalangle BAM$ a $\sphericalangle KAD$ jsou pravé, pak jsou trojúhelníky KAE a MAB podle věty *sus* shodné. Jelikož jsou podle věty *uu* trojúhelníky KAE a DAK podobné a platí $\triangle KAE \cong \triangle MAB$, tak jsou podobné i trojúhelníky DAK a MAB. Přímky KD a BM jsou tak rovnoběžné a platí $|MD| = |OK|$, $|DP| = |KB|$ a úhly $\sphericalangle MDP$ a $\sphericalangle OKB$ jsou pravé. Trojúhelníky MDP a OKB jsou dle věty *sus* shodné. Obdobně bychom ukázali i shodnost trojúhelníků MLO a PCB.

[2] V pravoúhlém trojúhelníku je obsah čtverce nad výškou na přeponu roven obsahu obdélníku, jehož strany jsou shodné s úseky přepony, na něž je přepona rozdělena patou výšky.

Dostáváme tedy, že $\triangle MDP \cong \triangle OKB$ a zároveň $\triangle MLO \cong \triangle PCB$. Odtud plyne, že obdélník $ABCD$ má se čtverce $AKLM$ společný rozklad.

□

Poznámka. Aby bylo možné rozklad provést, musí pro strany obdélníku platit podmínka uvedená v důkazu. Je-li $4|AD| = |AB|$, pak obdélník jen „rozpůlíme“ vodorovně jako v lémmatu 3 a transformujeme na obdélník o dvojnásobné základně a poloviční výšce. Výsledný čtverec dostaneme okamžitě. Pokud by platilo $4|AD| < |AB|$, tak by některé body úsečky MB neležely v mnohoúhelníku $MABCRL$ (sjednocení čtverce a obdélníku) a transformaci by nebylo možné provést.

Důsledek 3.2. Ke každému mnohoúhelníku P ležícímu v rovině ρ existuje v rovině ρ čtverec, který má s mnohoúhelníkem P společný rozklad.

Důkaz. Mějme mnohoúhelník P a zvolme úsečku AB. Podle důsledku 3.1 dokážeme mnohoúhelník transformovat na obdélník o straně AB. Dle lémmatu 4 lze pak tento obdélník transformovat na čtverec. Díky tranzitivitě ekvidekomposability mají původní mnohoúhelník P a výsledný čtverec společný rozklad. □

Společný rozklad mnohoúhelníku a trojúhelníku

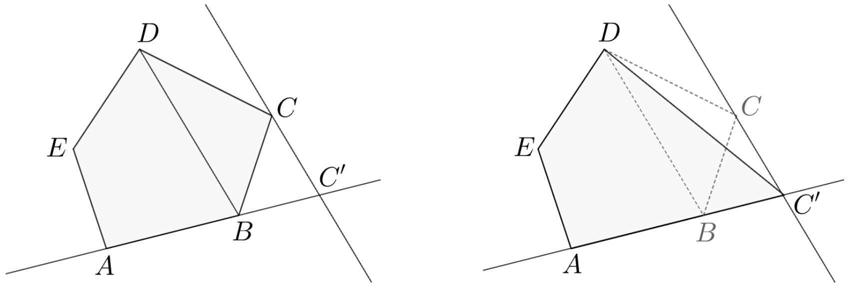
Další společný rozklad, který můžeme ukázat, je společný rozklad mnohoúhelníku a trojúhelníku. Využijeme toho, že trojúhelníky o shodné základně a mezi týmiž rovnoběžkami mají shodný obsah – tím pádem jsou shodně rozložitelné.

Důsledek 3.3. Dva trojúhelníky ležící v rovině ρ, jenž mají shodnou základu a stejnou výšku, jsou ekvidekomposabilní.

Důkaz. Každý z trojúhelníků nejprve dle lémmatu 1 transformujeme na rovnoběžník, jenž bude mít shodnou základu a poloviční výšku. Ten dále transformujeme na obdélník, jenž má shodnou základnu a poloviční výšku jako původní trojúhelník (viz postup v důkazu lémmatu 1). Výsledné obdélníky jsou shodné, tedy i shodně rozložitelné. Díky tranzitivitě ekvidekomposability jsou ekvidekomposabilní i původní trojúhelníky.

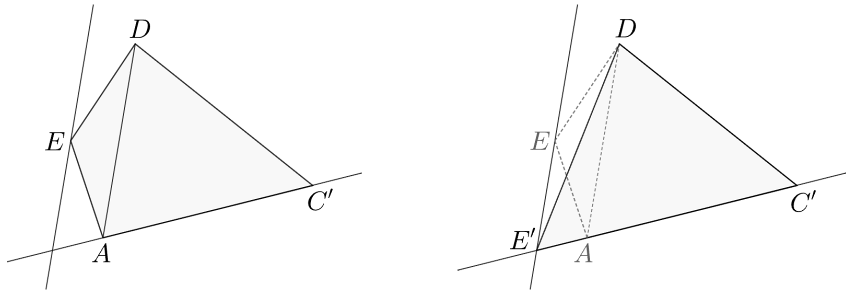
□

Tento důsledek využijeme k tomu, abychom pomocí jednoduché konstrukce při zachování obsahu postupně snižovali počet vrcholů mnohoúhelníku, u kterého chceme společný rozklad s trojúhelníkem ukázat. Daný n-úhelník tak transformujeme na $(n-1)$-úhelník, ten pak na $(n-2)$-úhelník a tak dále. Ve výsledku získáme trojúhelník.



Obrázek 2.15: Transformace pětiúhelníku na čtyřúhelník

Postup konstrukce pro konvexní pětiúhelník je ilustrován na obrázku 2.15 výše. Sestrojíme úhlopříčku BD a přímku rovnoběžnou s touto úhlopříčkou procházející vrcholem C. Tato rovnoběžka protne přímku AB v bodě C'. Trojúhelníky DBC a DBC' mají shodnou základnu a leží mezi týmiž rovnoběžkami, mají stejný obsah a jsou také ekvidekomposabilní (důsledek 3.3).



Obrázek 2.16: Transformace čtyřúhelníku na trojúhelník

Vrchol C jsme tak po rovnoběžce „posunuli“ do bodu C' a původnímu mnohoúhelníku „odebrali“ jeden vrchol. Stejným postupem pokračujeme dále a čtyřúhelník transformujeme na trojúhelník. Konstrukce je ukázána na obrázku 2.16 výše.

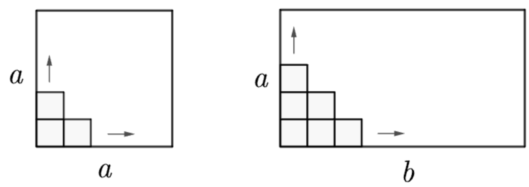
Důsledek 3.4. Ke každému mnohoúhelníku P ležícímu v rovině ρ existuje v rovině ρ trojúhelník, který má s tímto mnohoúhelníkem P společný rozklad.

K výpočtu obsahu pětiúhelníku by nám tak postačilo znát délku strany trojúhelníku $E'C'$ a délku výšky na tuto stranu.

2.5 Vztahy pro výpočet obsahu mnohoúhelníků

Jak již bylo řečeno, obsah je relativní a jeho výsledná podoba závisí na útvaru E v axiomu (iii) v definici obsahu. Za tento útvar je standardně volen čtverec o straně 1. Pomocí tohoto jednotkového čtverce jsou dále vypočítány obsahy všech možných mnohoúhelníků z množiny M. Z didaktického hlediska se při probírání této látky nabízí ukázat společné rozklady daných mnohoúhelníků. Žákům a studentům tak můžeme pomocí názorných rozkladů odpovědět na otázky typu „*Proč ten vzorec vypadá takto?*“ nebo „*Odkud se ten vztah vzal?*“.

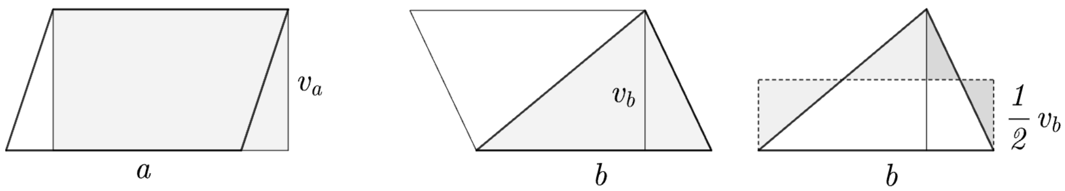
Začněme u čtverce a obdélníku. Vztah pro výpočet čtverce a obdélníku, jejichž strany mají celočíselné délky, odvodíme pomocí jednotkového čtverce. Čtverec o straně a lze „vyplnit“ a^2 jednotkovými čtverci, obdobně obdélník o stranách a, b „pokryjeme“ $a \cdot b$ jednotkovými čtverci. Tak dostáváme známé vztahy pro výpočet obsahu čtverce: $S = a^2$ a obdélníku: $S = a \cdot b$, kde $a, b \in \mathbb{N}$.



Obrázek 2.17: Obsah čtverce a obdélníku

Chceme však odvodit vztah pro obsah mnohoúhelníků, jejichž strany mají délky rovné kladným reálným číslům. Pokročíme tedy dále a od přirozených čísel přejdeme k racionálním. Mnohoúhelníky nebudeme „vyplňovat“ jednotkovými čtverci, ale jejich částmi. Například obdélník o stranách $\frac{3}{4}$ a $\frac{8}{3}$ „vyplníme“ čtverci o straně $\frac{1}{12}$ (nejmenší společný násobek jmenovatelů délek stran). Abychom provedli přechod od racionálních čísel k číslům reálným, musíme si pomoci nástroji matematické analýzy (limity posloupností, jejich konvergence).

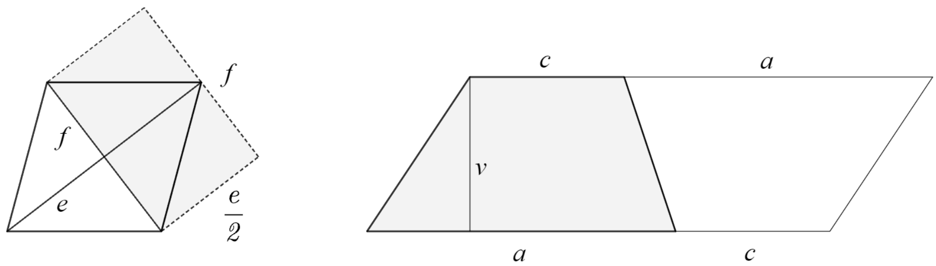
Vztahy pro výpočet obsahů dalších běžných mnohoúhelníků odvodíme právě pomocí obdélníku, respektive pomocí společného rozkladu daného mnohoúhelníku a obdélníku. Na obrázku níže je znázorněn společný rozklad rovnoběžníku a obdélníku (viz důkaz lémmatu 1). Obsah rovnoběžníku se tak rovná obsahu obdélníku o shodné základně a výšce: $S = a \cdot v_a$.



Obrázek 2.18: Obsah rovnoběžníku a trojúhelníku

Trojúhelník můžeme jednak „doplnit“ na rovnoběžník (obrázek 2.18 uprostřed), obsah trojúhelníku se pak rovná polovině obsahu takového rovnoběžníku, tedy $S = \frac{1}{2} \cdot b \cdot v_b$. Nebo také můžeme trojúhelník transformovat na obdélník o shodné základně a poloviční výšce (viz lémma 1). Výsledkem prvního či druhého postupu je jeden a tentýž vztah: $S = \frac{b \cdot v_b}{2}$. Zároveň poznamenejme, že při výpočtu obsahu trojúhelníku nezáleží na volbě základny a výšky (dá se dokázat pomocí vět o podobnosti trojúhelníků).

Obdobným způsobem bychom mohli odvodit vztah pro výpočet kosočtverce nebo lichoběžníku. Na kosočtverec o straně a a výšce v_a bychom mohli pohlížet jako na rovnoběžník a postupem uvedeným výše ho transformovat na obdélník. Jeho obsah je tedy roven $S = a \cdot v_a$. Můžeme ale také využít úhlopříček e a f (obrázek 2.19 vlevo). Ty jsou na sebe kolmé a rozkládají kosočtverec na čtyři shodné pravoúhlé trojúhelníky. Jejich „přesunutím“ získáme obdélník o stranách f a $\frac{e}{2}$. Obdélník i kosočtverec mají stejný rozklad, obsah kosočtverce je tedy: $S = \frac{e \cdot f}{2}$.



Obrázek 2.19: Obsah kosočtverce a lichoběžníku

Při odvození vztahu pro výpočet lichoběžníku k danému lichoběžníku dorýsujeme shodný ale otočený lichoběžník (obrázek 2.19 vpravo). Dostáváme tak rovnoběžník, jehož obsah už spočítat umíme. Obsah lichoběžníku je tak roven polovině obsahu rovnoběžníku, tedy $S = \frac{1}{2} \cdot (a + c) \cdot v$.

3. Ekvidekomposabilita v prostoru

V minulé kapitole jsme ukázali, že společný rozklad dvou obecných mnohoúhelníků stejného obsahu existuje, a tím dokázali, že každé dva mnohoúhelníky v rovině mají stejný obsah právě tehdy, jsou-li ekvidekomposabilní (shodně rozložitelné). Také jsme ukázali, jak pomocí společných rozkladů odvodíme vztahy pro výpočet obsahu rovnoběžníku, kosočtverce a lichoběžníku.

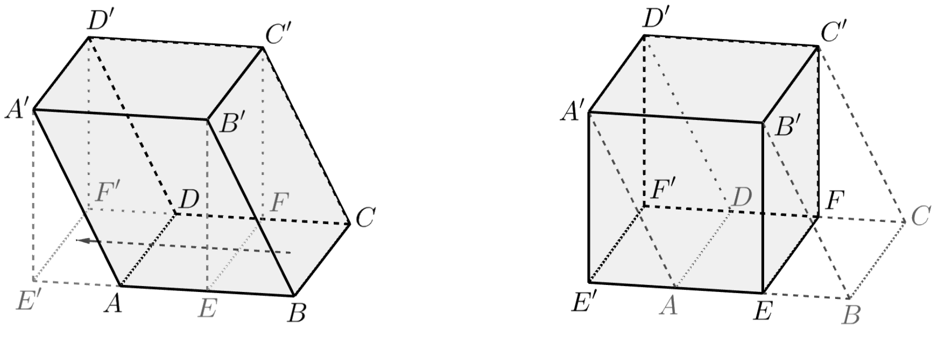
Zkusme se posunout o dimenzi výše. Bylo by možné objem stejně jako obsah zavést pomocí ekvidekomposability? Otázka tedy zní: *Je objem dvou mnohostěnů roven právě tehdy, existuje-li společný rozklad mnohostěnů na mnohostěny?*

V této třetí kapitole ukážeme dvojici mnohostěnů, pro něž společný rozklad existuje, a ukážeme využití tohoto rozkladu pro výpočet objemu (obdobně jako v rovině u některých mnohoúhelníků). Dále se podíváme na dvojici mnohostěnů, pro kterou výše vyslovená hypotéza neplatí a jejich společný rozklad neexistuje. Představíme znění třetího Hilbertova problému a ve stručnosti nastíníme jeho důkaz.

Poznámka. Z roviny si do prostoru „přeneseme“ pár pojmů. Pro práci v eukleidovském prostoru dimenze tři bychom nejprve definovali mnohostěn (nebo obecně těleso), uvedli bychom jeho základní pojmy a zavedli shodnost dvou mnohostěnů. Objem mnohostěnu bychom definovali obdobně jako obsah mnohoúhelníku – jako nezáporné reálné číslo přiřazené mnohostěnu za platnosti tří axiomů. Analogicky bychom také zadefinovali ekvidekomposabilitu mnohostěnů: dva mnohostěny nazýváme ekvidekomposabilní, pokud je lze rozložit na po dvou shodné nepřekrývající se mnohostěny.

3.1 Společný rozklad rovnoběžnostěnu a kvádru

Stejně jako jsme dokázali v rovině najít společný rozklad rovnoběžníku a obdélníku, podívejme se, zdali existuje společný rozklad rovnoběžnostěnu a kvádru. Na obrázku 3.1 je vyobrazen rovnoběžnostěn $ABCDA'B'C'D'$. Stěny $ABA'B'$ a $DCD'C'$ jsou k podstavám $ABCD$ a $A'B'C'D'$ kolmé.



Obrázek 3.1: Transformace rovnoběžnostěnu na kvádr

Převezmeme ideu transformace rovnoběžníku na obdélník z důkazu lémmatu 2.5 a aplikujeme ji na rovnoběžnostěn. Z bodů B', respektive C', spustíme kolmici, která protne stranu AB, resp. CD, v bodě E, resp. F. Rovnoběžnostěn tak rovinou EFC' rozdělíme na mnohostěn $AEFDA'B'C'D'$ a trojboký hranol $EBB'FCC'$. Tento hranol následně posuneme tak, že stěny $BCB'C'$ a $ADA'D'$ splynou (směr posunutí je naznačen šipkou). Původní rovnoběžnostěn jsme transformovali na kvádr a tím nalezli společný rozklad těchto dvou mnohostěnů.

Kdyby stěny $ABA'B'$ a $CDC'D'$ nebyly k podstavám $ABCD$ a $A'B'C'D'$ kolmé (rovnoběžnostěn by byl více „nakloněný“), transformaci na kvádr bychom provedli obdobně, jen ve dvou krocích.

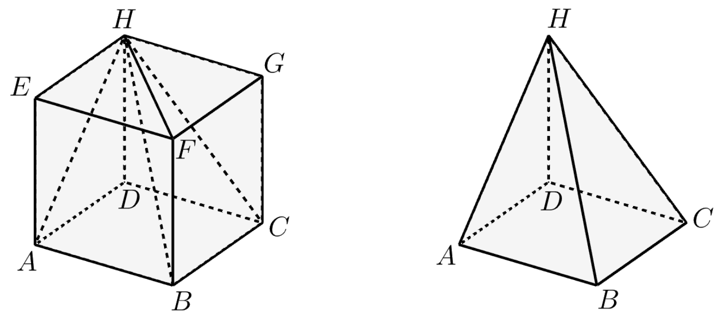
Rovnoběžnostěn tedy dokážeme transformovat na kvádr, jehož obsah podstavy S_p je roven obsahu podstavy rovnoběžnostěnu a výška v je rovna výšce původního rovnoběžnostěnu. Objem rovnoběžnostěnu je tak roven $V = S_p \cdot v = a \cdot v_a \cdot v = a \cdot b \cdot v$, kde a, v_a je základna a výška rovnoběžníku a a, b jsou strany obdélníku – podstavy kvádru.

Podobným způsobem bychom mohli ukázat i společný rozklad dvou kvádrů. Inspirovali bychom se v lémmatu 2 a kvádr bychom transformovali na kvádr s odlišnou podstavou. Namísto úsečky EF bychom zvolili obdélník $EFGH$, který bude tvořit podstavu nového kvádru.

3.2 Rozklad krychle na jehlany

V předchozí podkapitole jsme využili společného rozkladu pro výpočet objemu rovnoběžnostěnu. Mohli bychom si rozkladem pomoci i u jiných mnohostěnů? Vezměme si krychli $ABCDEFGH$ (obrázek 3.2) a sestrojme úhlopříčky AH, BH, CH a FH. Tímto způsobem rozložíme krychli na tři čtyřboké jehlany.

Kdyby byly tyto jehlany shodné, mohli bychom říci, že se objem právě tohoto konkrétního jehlanu rovná jedné třetině objemu právě této krychle, do které je jehlan vepsán. Nicméně jehlany, na které je krychle rozložena, shodné nejsou (dva z nich navzájem shodné jsou, třetí s nimi nikoliv). Objem jehlanu tedy nemůžeme na základě tohoto rozkladu snadno stanovit.



Obrázek 3.2: Krychle a jehlan

Mohli bychom se inspirovat Wallace-Bolyai-Gerweinovou větou, kterou jsme dokázali v předchozí kapitole. V rovině jsme dokázali existenci společného rozkladu dvou trojúhelníků, které mají shodnou základnu a stejnou výšku. Dokázali bychom analogicky najít společný rozklad dvou jehlanů o shodných podstavách a stejných výškách? Pokud ano, pak bychom mohli najít společný rozklad dvou jehlanů, které nejsou shodné. Jak však uvidíme v následující kapitole, žádný takový společný rozklad na mnohostěny neexistuje.

Poznámka. Objem jehlanu můžeme stanovit například pomocí Eudoxovy exhaustační metody, kdy tento jehlan vyplníme posloupností mnohostěnů, jejichž objem umíme určit. A v tomto případě dokonce jejich objemy tvoří geometrickou posloupnost (podrobný výpočet viz [9] str. 67). Objem jehlanu je tedy roven součtu následující geometrické řady

$$V = \frac{1}{4} \cdot S_p v + \frac{1}{4^2} \cdot S_p v + \frac{1}{4^3} \cdot S_p v + \cdots = S_p v \cdot \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{4^i} = S_p v \cdot \frac{\frac{1}{4}}{1 - \frac{1}{4}} = S_p v \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{4}{3} = \frac{1}{3} S_p v.$$

Je s podivem, že pro výpočet objemu relativně jednoduchého mnohostěnu bylo nutné použít nekonečnou geometrickou řadu, respektive její součet. Stěny jehlanu jsou tvořeny poměrně „hezkými“ mnohoúhelníky a tak bychom očekávali, že bude možné výpočet objemu provést jednodušeji. V následující podkapitole prozkoumáme, zda-li bychom mohli využít (obdobně jako v rovině) společných rozkladů a jehlan tak „přeskládat“ na nějaký jiný mnohostěn, jehož objem umíme stanovit.

3.3 Třetí Hilbertův problém

Pokud chceme objem mnohostěnů založit na ekvidekomposabilitě, musíme (obdobně jako v rovině) ukázat, že společný rozklad pro dva mnohostěny stejného objemu vždy existuje. V opačném případě, pokud bychom chtěli hypotézu vyvrátit, stačí najít dva mnohostěny stejného objemu, které společný rozklad nemají. Tento problém je předmětem *třetího Hilbertova problému.*

David Hilbert sestavil seznam 23 matematických problémů, jehož část představil na druhé Mezinárodní konferenci matematiků v Paříži v roce 1900. Předmětem třetího problému bylo předvést důkaz o tom, že není možné *uvést dva čtyřstěny se stejným obsahem podstavy a se stejnou výškou, které nelze žádným způsobem rozložit na shodné čtyřstěny a které nelze ani připojením shodných čtyřstěnů doplnit na takové mnohostěny, pro něž rozklad ve shodné čtyřstěny možný je.*

Hilbert narážel na otázku, zda společný rozklad dvou uvedených čtyřstěnů nebylo možné najít z toho důvodu, že se o to doposud nikdo nepokusil, nebo z toho důvodu, že takový rozklad jednoduše neexistuje. Za pomocí abstraktní algebry našel Hilbertův Žák Max Dehn odpověď – společný rozklad dvou čtyřstěnů na mnohostěny opravdu neexistuje. Už v roce 1900 odvodil Dehn nutnou podmínku rozložitelnosti dvou mnohostěnů a také ukázal, že pro mnohé dvojice mnohostěnů podmínka není splněna. Jedno z řešení třetího Hilbertova problému je na základně tzv. *Dehnových invariantů.* Další řešení poskytli (respektive Dehnův důkaz zjednodušili) matematici V. F. Kagan v roce 1903 a H. Hadwiger v roce 1950.

V této poslední podkapitole stručně naznačíme řešení třetího Hilbertova problému za pomocí Dehnových invariantů. Úlohu nebudeme řešit pro výše zmíněné čtyřstěny, ale pro jednoduchost vyřešíme úlohu pro krychli a pravidelný čtyřstěn stejného objemu. Nejprve nastíníme podstatu Dehnových invariantů a poté je zkonstruujeme. Spočítáme Dehnovy invarianty pro krychli a čtyřstěn a ukážeme tak, že tyto dva mnohostěny nejsou shodně rozložitelné – jejich společný rozklad na mnohostěny neexistuje.

Pro odbornější a rozsáhlejší text odkazujeme čtenáře na diplomovou práci Milana Vaňkáta [9], která se věnuje právě třetímu Hilbertovu problému.

Co jsou to Dehnovy invarianty a k čemu slouží?

V matematice je invariant určitý objekt, který se s danou transformací nemění. Jednoduchým příkladem invariantu je vzdálenost dvou bodů v rovině ρ, která je invariantní vůči zobrazení shodností. Pro naše účely chceme zavést takový invariant, označme jej Δ, který bude splňovat následující podmínky.

- Pokud jsou mnohostěny P a P' shodné, pak $\Delta(P) = \Delta(P')$.
- Rozdělíme-li mnohostěn P rovinou na dva menší mnohostěny T_1, T_2, pak

$$\Delta(P) = \Delta(T_1) + \Delta(T_2).$$

Jinými slovy: chceme, aby byl invariant vůči rozkladu mnohostěnu na mnohostěny invariantní.

V následující podkapitole stručně naznačíme definici tzv. Dehnova invariantu, který obě výše uvedené podmínky splňuje. M. Dehn jej definoval tak, aby bylo možno dokázat, že pokud se invarianty přiřazené mnohostěnům P, P' nerovnají, pak mnohostěny P, P' nejsou navzájem rozložitelné.

Ideou důkazu neexistence společného rozkladu krychle a čtyřstěnu bude tedy výpočet jejich Dehnových invariantů a jejich porovnání. Jelikož se hodnoty Dehnových invariantů rovnat nebudou, bude možné říci, že společný rozklad těchto mnohostěnů neexistuje.

Konstrukce Dehnových invariantů

Nyní velmi zjednodušeně naznačíme zavedení *Dehnových invariantů*. Postup konstrukce čerpáme z [3] (kapitola 27).

Nechť $a_i \in \mathbb{R}$ jsou reálná čísla a $\alpha_i \in \mathbb{R}_\pi$ jsou reálná čísla až na racionální násobek π[1] a $n \in \mathbb{N}$ je počet hran mnohostěnu P. Pro každý mnohostěn odpovídají čísla a_i délkám hran a čísla α_i odpovídají příslušným velikostem dihedrálních úhlů. Dihedrálním úhlem rozumíme takový vnitřní úhel mnohostěnu, který svírají dvě sousední stěny mnohostěnu (viz obrázky 3.3 a 3.4 níže). Každé hraně mnohostěnu a_i tak odpovídá jeden dihedrální úhel α_i.

Sumu

$$\delta(P) = \sum_{i=1}^{n} (a_i, \alpha_i) = (a_1, \alpha_1) + (a_2, \alpha_2) + (a_3, \alpha_3) + \cdots + (a_n, \alpha_n)$$

nazýváme *Dehnovým invariantem* mnohostěnu P a označíme ji $\delta(P)$. Zároveň Dehnovy invarianty $\delta(P)$ mají vlastnosti invariantu Δ uvedené v odrážkách výše.

Množinu všech výrazů $(a_1, \alpha_1) + \cdots + (a_n, \alpha_n)$ označíme G. Dále na této množině G definuje operaci sčítání:

$$(a, \alpha) + (a, \beta) = (a, \alpha + \beta),$$

$$(a, \alpha) + (b, \alpha) = (a + b, \alpha).$$

Dá se dokázat, že G je komutativní grupa (na G tedy existuje neutrální a inverzní prvek) a pro každé $a \in \mathbb{R}$ platí:

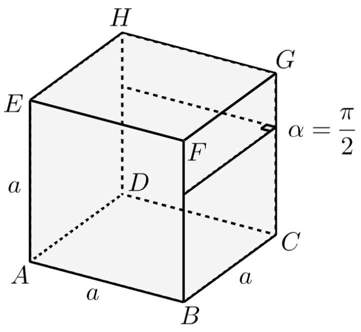
$$(a,\ 0) = (a,\ 0) + (0,\ 0) = (a,\ 0) + (a,\ 0) + (-a,\ 0) = (a,\ 0) + (-a,\ 0) = (0,\ 0).$$

Tato rovnost bude při důkazu třetího Hilbertova problému velmi důležitá. V podstatě říká, že pokud je daný dihedrální úhel roven nule (velikost úhlu je tedy racionální násobek π), pak je výraz $(a, 0)$ roven nule. Nezáleží tedy na délce hrany a mnohostěnu, ale pouze na velikosti dihedrálního úhlu α. Prvek (0,0) označíme 0.

[1] Dvě čísla a, b budeme považovat za sobě rovna až na racionální násobek čísla π, pokud existuje $q \in \mathbb{Q}$ takové, že $a = b + q \cdot \pi$.

Společný rozklad krychle a čtyřstěnu

Abychom dokázali, že krychle a čtyřstěn nejsou shodně rozložitelné, spočítáme jejich Dehnovy invarianty a porovnáme je. Začněme s krychlí K o hraně a. Délky všech jejích hran jsou stejné, tedy $a_1 = a_2 = \cdots = a_{12} = a$. Zároveň všechny dihedrální úhly jsou pravé, tedy $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_{12} = \frac{\pi}{2}$.



Obrázek 3.3: K výpočtu Dehnova invariantu krychle

Dehnův invariant krychle K je tedy roven

$$\delta(K) = (a_1, \alpha_1) + \cdots + (a_{12}, \alpha_{12}) = 12\left(a, \frac{\pi}{2}\right).$$

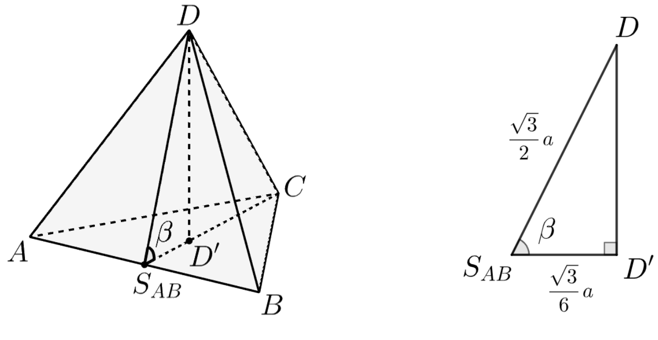
Jelikož je $\frac{\pi}{2}$ racionální násobek čísla π, tak

$$\delta(K) = 12\left(a, \frac{\pi}{2}\right) = 12\ (0{,}0) = 0.$$

Nyní spočítejme Dehnův invariant pravidelného čtyřstěnu o hraně b. Všechny hrany jsou stejné: $b_1 = b_2 = \cdots = b_6 = b$, zároveň všechny dihedrální úhly jsou shodné: $\beta_1 = \beta_2 = \cdots = \beta_6 = \beta$. Dehnův invariant čtyřstěnu P je tedy

$$\delta(P) = (b_1, \beta_1) + \cdots + (b_6, \beta_6) = 6(b, \beta).$$

Nyní nás zajímá velikost úhlu β. Potřebujeme ukázat, že tento dihedrální úhel β není racionálním násobkem čísla π. Abychom velikost dihedrálního úhlu β vypočítali, zkonstruujeme v čtyřstěnu trojúhelník $S_{AB}DD'$. Bod D' je průsečíkem $S_{AB}C$ a kolmice procházející bodem D k podstavě ABC.



Obrázek 3.4: K výpočtu Dehnova invariantu čtyřstěnu

Pomocí Pýthagorovy věty vypočítáme, že

$$|S_{AB}D| = |S_{AB}C| = \frac{\sqrt{3}}{2}a, \quad \text{dále} \quad |S_{AB}D'| = \frac{1}{3}|S_{AB}C| = \frac{\sqrt{3}}{6}a.$$

Odtud dostáváme, že $\cos\beta = \frac{1}{3}$ (viz pravoúhlý trojúhelník $S_{AB}DD'$ na obrázku 3.4). Máme vztah, který jednoznačně určuje velikost úhlu β. Dá se dokázat (viz [3] kapitola 27, nebo [9] kapitola 2.3.3), že takovýto úhel β není racionálním násobkem čísla π. Jelikož $\delta(K) = 0$ a $\delta(P) \neq 0$, tak dostáváme, že $\delta(K) \neq \delta(P)$ a mnohostěny tak nejsou shodně rozložitelné. Krychle a čtyřstěn stejného objemu nemají společný rozklad.

Pomocí Dehnových invariantů jsme tedy zjistili, že krychle a čtyřstěn o stejném objemu nejsou ekvidekomposabilní, a můžeme tak odpovědět na otázku ze začátku kapitoly. Nalezením protipříkladu, tedy dvojice mnohostěnů stejného objemu, které nemají společný rozklad, jsme ukázali, že ekvidekomposabilita a rovnost objemu dvou mnohostěnů v prostoru nejsou ekvivalentní.

Závěr

Cílem této práce bylo přiblížit pojem ekvidekomposability a ukázat její souvislost s obsahem mnohoúhelníku. V první kapitole jsme zavedli mnohoúhelník a jeho obsah a ekvidekomposabilitu dvou mnohoúhelníků. Jednoduchým pozorováním jsme došli k závěru, že ekvidekomposabilní – shodně rozložitelné mnohoúhelníky mají stejný obsah.

V druhé kapitole se nám podařilo dokázat Wallace-Bolyai-Gerweinovu větu, která říká, že *každé dva mnohoúhelníky stejného obsahu jsou ekvidekomposabilní.* Ukázali jsme tak, že společný rozklad dvou mnohoúhelníků stejného obsahu vždy existuje. Rovnost obsahu a ekvidekomposabilita jsou tak ekvivalentní. Pomocí společných rozkladů jsme dále ukázali, jakým způsobem můžeme odvodit vztahy pro výpočet obsahu některých běžných mnohoúhelníků. Aniž bychom to přímo věděli, tak existenci společného rozkladu dvou mnohoúhelníků častokrát při výpočtu obsahu používáme.

Z roviny jsme se přesunuli do prostoru a ve třetí kapitole zkoumali otázku, zda je možné za pomocí ekvidekomposability zavést objem mnohostěnů. Ukázali jsme dvojici mnohostěnů, pro kterou společný rozklad existuje, a poté ukázali dvojici mnohostěnů, jejichž společný rozklad neexistuje. Díky tomuto protipříkladu jsme tak analogii Wallace-Bolyai-Gerweinovy věty v prostoru vyvrátili.

Závěrem doufáme, že díky této práci byl na první pohled děsivý pojem *ekvidekomposabilita* nenásilnou a názornou formou přiblížen.

Literatura

[1] Thaddeus Abiy a Andrew Ellinor. *Polygon triangulation/grids.* URL: https://brilliant.org/wiki/polygon-triangulation-grids/.

[2] Greg N. Frederickson. *Dissections: Plane and Fancy.* Cambridge University Press, 1997. URL: https://rb.gy/1f8q3.

[3] Robin Hartshorne. *Geometry: Euclid and beyond.* Springer, 2000. URL: https://download.tuxfamily.org/openmathdep/euclid/Euclid_and_Beyond-Hartshorne.pdf.

[4] Ryan Kavanagh. In: *Explorations on the Wallace-Bolyai-Gerwien Theorem* (2015). DOI: https://rak.ac/publication/2015-explorations-on-the-wallace-bolyai-gerwien-theorem/wallace-bolyai-gerwien.pdf.

[5] Vlasta Moravcová a Jana Hromadová. *Základy planimetrie pro učitelské studium.* MatfyzPress, 2021. URL: https://www.karlin.mff.cuni.cz/~morava/Zaklady_planimetrie.pdf.

[6] Eva Pomykalová. *Matematika pro gymnázia - Planimetrie.* Prometheus, 2019.

[7] Dima Smirnov a Zivvy Epstein. *Scissors congruence.* URL: https://dmsm.github.io/scissors-congruence/.

[8] Gavin Theobald a Eric W. Weisstein. *Dissection.* URL: https://mathworld.wolfram.com/Dissection.html.

[9] Milan Vaňkát. "Objem jehlanu". Univerzita Karlova v Praze, 2015. URL: https://dspace.cuni.cz/handle/20.500.11956/77272.

[10] Jan Vyšín. *Elementární geometrie I (Planimetrie).* Přírodovědecké vydavatelství, 1952.

Seznam obrázků