



**MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ
FAKULTA**
Univerzita Karlova

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Martina Šuchová

XL-zajištění pro více linií

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí bakalářské práce: RNDr. Lucie Mazurová, Ph.D.

Studijní program: Matematika

Studijní obor: Finanční matematika

Praha 2023

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval(a) samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů. Tato práce nebyla využita k získání jiného nebo stejného titulu.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V dne

Podpis autora

Touto cestou by som sa chcela poďakovať RNDr. Lucii Mazurovej, Ph.D. za trpezlivosť, pomoc a cenné rady pri vedení mojej bakalárskej práce.

Název práce: XL-zajištění pro více linií

Autor: Martina Šuchová

Katedra: Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí bakalářské práce: RNDr. Lucie Mazurová, Ph.D., Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Abstrakt: Táto práca je zameraná na simulačné modelovanie celkového úhrnu plnenia zaistiteľa S pri uvažovaní XL-zaistenia pre viacero poistných odvetví. V prvej časti je definovaná táto zaistná štruktúra. V druhej časti práce je priblížený kolektívny model, ako aj definícia kopúl (kopula komonotonie, nezávislosti, Claytonova či Gumbeltova kopula), a Sklarova veta. Posledná časť pojednáva o simulačnej štúdií, ktorá zobrazuje simulovanie celkového úhrnu plnenia pri uvažovaní nezávislosti ako aj závislosti poistných odvetví. Simulačná štúdia v úvode naznačuje teoretický prístup, vysvetľuje heuristický algoritmus, ktorý využíva pri simulovaní závislých odvetví. Záver štúdie vyobrazuje jednu z praktických aplikácií, a výstupy simulácií.

Klíčová slova: XL-zaistenie pre viacero odvetví, celkový úhrn plnení hradených zaistiteľom, Kautov heuristický algoritmus

Title: Multiline aggregate XL-reinsurance

Author: Martina Šuchová

Department: Department of Probability and Mathematical Statistics

Supervisor: RNDr. Lucie Mazurová, Ph.D., Department of Probability and Mathematical Statistics

Abstract: This paper focuses on simulation modeling of the total aggregate reinsurer claim S when considering XL-reinsurance for multiple insurance lines. In the first part, this reinsurance structure is defined. In the second part of the paper, the collective model is approached, as well as the definition of copulas (comonotony copula, independence copula, Clayton's or Gumbel's copula), and Sklar's theorem. The last part discusses a simulation study that shows the simulation of aggregate claims when considering independence as well as dependence of insurance industries. The simulation study outlines the theoretical approach in the introduction, explaining the heuristic algorithm it uses in simulating dependent industries. The conclusion of the study depicts one of the practical applications, and the outputs of the simulations.

Keywords: Multiline aggregate XL-reinsurance, total sum of performance reimbursed by the insurer, Kaut's heuristic algorithm

Obsah

Obsah	1
Úvod	2
1 XL-zaistenie pre viacero línií	3
2 Modelovanie celkového úhrnu plnenia S	4
2.1 Kolektívny model rizika	4
2.2 Modelovanie závislých poistných odvetví	6
3 Simulačná štúdia	8
3.1 Simulovanie celkového úhrnu plnenia zaistiteľom	8
3.1.1 Uvažovanie nezávislosti poistných odvetví	9
3.1.2 Uvažovanie závislosti medzi poistnými odvetviami	9
3.2 Aplikácia	14
Záver	20
Zoznam použitej literatúry	21
Zoznam obrázkov	22
Zoznam tabuliek	23
A Přílohy	24
A.1 Zdrojový kód v R	24

Úvod

Cielom tejto práce je určenie strednej hodnoty celkového ročného úhrnu plnení zaistiteľom. V prvej časti priblížime XL-zaistenie pre viacero poistných odvetví. V druhej časti uvedieme zvolený kolektívny model rizika, a následne uvedieme niekoľko definícií, ktoré využijeme v poslednej časti práce, simulačnej štúdií.

V simulačnej štúdií budeme uvažovať dve poistné odvetvia. V prvej časti pojednávame o teoretickom prístupe simulovania celkového úhrnu plnení. Rozoberieme si prípady nezávislých ale aj závislých poistných odvetví. V prípade simulovania závislých odvetví využijeme Kautov heuristický algoritmus, vďaka ktorému dostaneme výber poradí charakterizujúci závislostnú štruktúru. Fungovanie algoritmu vysvetlíme za pomoci príkladu. V poslednej časti štúdie uvedieme výstupy pre konkrétne pravdepodobnostné rozdelenia. Tieto rozdelenia môžeme v praxi voliť na základe historických dát a konkrétnych poistných odvetví.

1. XL-zaistenie pre viacero línií

Princíp zaistenia je podobný princípu poistenia. Poistovňa za úplatu v podobe poistného preberá časť rizika od fyzických a právnických osôb, zatiaľ čo časť týchto rizík ďalej predáva zaistovní. Analógia poistného, ktoré platí poistovňa zaistovní sa nazýva zaistné. Motívom k uzavretiu zmluvy so zaistiteľom môže byť napríklad riziko prírodných katastrof, ktoré môžu spôsobiť nadmerne veľké škody, ktoré by mohli ohroziť schopnosť poistovní plniť záväzky voči poistníkom.

V práci sa budeme zaoberať XL-zaistením pre viacero poistných odvetví. Najprv popíšeme jeho konštrukciu (viz Walhin, 2003).

XL-zaistenie, taktiež nazývané aj zaistenie škodového nadmerku, je druh neproporcionálneho zaistenia. To znamená, že podiel, akým sa zaistovňa podieľa na škodách, nie je definovaný percentuálne, ale je zdola a niekedy aj zhora ohraničený zmluvne definovanými konštantami. V práci uvažujeme individuálne XL-zaistenie, ktoré poskytuje zaistné krytie na jednotlivé škody.

Hranicu, do ktorej poistné plnenie plní poistovňa (tzv. cedent) nazývame prioritou alebo vlastný vrub, označujeme D . Hornú hranicu plnenia zaistovňou (tzv. cesionárom) nazývame veľkosť vrstvy, označujeme L .

Ak uvažujeme výšku škody X , zaistovňa sa podieľa na poistnom plnení čiastkou

$$\min(L, \max(0, X - D)). \quad (1.1)$$

Uvažujme poistné odvetvia $k = 1, \dots, n$. Postupne vlastný vrub a veľkosť vrstvy odvetvia k označme ako ${}^k D$ a ${}^k L$. Počet škôd uvažovaného odvetvia k za určité obdobie (v práci uvažujeme jeden rok) označíme ${}^k N$, a škody značíme ako ${}^k X_1, {}^k X_2, \dots, {}^k X_N$.

Podiel zaistovateľa na celkovom poistnom plnení odvetvia k za jeden rok, je vyjadrený ako:

$${}^k S = \sum_{i=1}^{{}^k N} \min({}^k L, \max(0, {}^k X_i - {}^k D)), \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (1.2)$$

Výsledný celkový úhrn plnení S , ktorý hradí cesionár, získame ako súčet úhrnov jednotlivých uvažovaných odvetví, na ktoré aplikujeme globálny ročný súhrnný vlastný vrub $GAAD$, a globálnu ročnú súhrnnú veľkosť vrstvy $GAAL$.

Celkový úhrn plnení je

$$S = \min(GAAL, \max(0, \sum_{k=1}^n {}^k S - GAAD)). \quad (1.3)$$

2. Modelovanie celkového úhrnu plnenia S

V nasledujúcej kapitole pojednávame o rozdelení celkového úhrnu plnenia zaistiteľom S .

V prvej časti sa zameriavame na kolektívny model rizika, a čo môžeme z jeho predpokladov odvodiť. V druhej časti uvádzame definície, ktoré budeme využívať v nasledujúcej kapitole pri simulovaní.

2.1 Kolektívny model rizika

Nižšie uvádzame definíciu kolektívneho modelu a zloženého rozdelenia (viď Mandl a Mazurová, 1999, str. 6).

Kolektívny model rizika vychádza z predpokladu, že v dostatočne homogénnom poistnom kmeni je možné považovať výšky škodových nárokov z jednotlivých poistných udalostí za rovnako rozdelené náhodné veličiny. Úhrn škôd je potom vyjadrený súčtom

$$S^* = \sum_{i=1}^{N^*} X_i^*, \quad (2.1)$$

kde náhodná veličina N^* predstavuje počet všetkých poistných udalostí v uvažovanom období a

$$X_i^*, \quad i = 1, 2, \dots, \quad (2.2)$$

je postupnosť škodových nárokov bez ohľadu na to, ktorej poistnej zmluve prislúchajú. Za predpokladu, že (2.2) je postupnosť vzájomne nezávislých a rovnako rozdelených náhodných veličín a že náhodná veličina N^* nezávisí na (2.2), má úhrn škôd S^* takzvané zložené rozdelenie.

V nasledujúcich odstavcoch sa budeme bližšie venovať príkladu, kedy náhodná veličina N^* má Poissonovo rozdelenie s parametrom λ . Najprv si ale uvedieme definíciu pravdepodobnostnej vytvárajúcej funkcie, ktorú následne využijeme pre odvodenie rozdelenia počtu škôd prekračujúcich prioritu D v uvažovanom XL-zaistení.

Definícia 1. *Pre náhodnú veličinu X^* je pravdepodobnostná vytvárajúca funkcia $P_{X^*}(z) = E(z^{X^*})$ pre všetky z , v ktorých stredná hodnota existuje.*

Táto funkcia jednoznačne určuje rozdelenie náhodnej veličiny. (viď. Klugman a kol., 2012, str. 29)

Nižšie uvedieme pravdepodobnostnú vytvárajúcu funkciu pre Poissonovo a binomické rozdelenie. Pre Poissonovo rozdelenie s parametrom λ platí:

$$P_{X^*}(z) = \sum_{i=0}^{\infty} z^i \frac{\lambda^i e^{-\lambda}}{i!} = e^{-\lambda} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(z\lambda)^i}{i!} = e^{-\lambda} e^{z\lambda} = e^{\lambda(z-1)}, \quad z \in \mathbb{R}. \quad (2.3)$$

Obdobne pre binomické rozdelenie s parametrami n a p platí:

$$P_{X^*}(z) = \sum_{i=0}^{\infty} z^i \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} = (1-p+pz)^n, \quad z \in \mathbb{R}. \quad (2.4)$$

Nech $S^* = \sum_{i=1}^{N^*} X_i^*$ má zložené rozdelenie. Potom je zrejmé, že aj úhrn plnení od zaistiteľa v XL-zaistení s prioritou D a veľkosti vrstvy L :

$$S = \sum_{i=1}^{N^*} \min(L, \max(X_i^* - D)), \quad (2.5)$$

má zložené rozdelenie.

Pre úhrn (2.5) môžeme uvažovať alternatívne vyjadrenie

$$S = \sum_{i=1}^N \min(L, Y_i),$$

kde N je počet škôd prekračujúcich prioritu D a Y_i má rovnaké rozdelenie ako $X_i^* - D$.

Lemma 1. *Pokiaľ má N^* Poissonovo rozdelenie s parametrom λ a $p = P(X_i^* > D)$, má N Poissonovo rozdelenie s parametrom λp .*

Dôkaz. K dôkazu využijeme pravdepodobnostnú vytvorenú funkciu:

$$P_N(z) = Ez^N = EE(z^N | N^*) = \sum_{n=0}^{\infty} E\left(z^{\sum_{i=1}^{N^*} \mathbb{1}\{X_i^* > D\}} | N^* = n\right) P(N^* = n), \quad (2.6)$$

(2.6) je možné prepísať:

$$P_N(z) = \sum_{n=0}^{\infty} E\left(z^{\sum_{i=1}^n \mathbb{1}\{X_i^* > D\}}\right) P(N = n), \quad (2.7)$$

kde $\mathbb{1}\{X_i^* > D\}$ má alternatívne rozdelenie s parametrom $p = P(X_i^* > D)$, teda $\sum_{i=1}^n \mathbb{1}\{X_i^* > D\}$ má binomické rozdelenie s parametrami n a p .

Využitím (2.3) a (2.4) dostávame

$$Ez^N = \sum_{n=0}^{\infty} (1 - p + pz)^n \frac{e^{-\lambda} \lambda^n}{n!} = e^{-\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[(1 - p + pz)\lambda]^n}{n!}. \quad (2.8)$$

Vidíme, že suma uvedená vyššie je Taylorova rada exponenciály. Využitím tohto faktu dostávame:

$$Ez^N = e^{-\lambda} e^{[(1-p+pz)\lambda]} = e^{\lambda p(z-1)}. \quad (2.9)$$

Z pravdepodobnostnej vytvárajúcej funkcie Poissonovho rozdelenia (2.3) vidíme, že N^* má taktiež Poissonove rozdelenie, s parametrom λp . □

Pokiaľ by sme sa zaoberali iba úhrnom plnení od zaistiteľa vrámci jedného odvetvia, mohli by sme použiť napríklad Panjerovu formulu pre výpočet zloženého rozdelenia. Štruktúra nami uvažovaného zaistenia je príliš zložitá, preto sa javí ako nutné v prípade výpočtov súvisujúcich s týmto zaistením využívať simulačný model.

2.2 Modelovanie závislých poistných odvetví

K simulačnej štúdii môžeme pristupovať dvomi spôsobmi. Prvým je polozenie predpokladu nezávislosti jednotlivých poistných odvetví. Druhým spôsobom je uvažovanie závislostnej štruktúry. Túto štruktúru modelujeme tzv. kopulami, ktoré sú nástrojom na získanie združeného rozdelenia $(^1S, \dots, ^nS)$. Nižšie uvedieme potrebné definície. Čerpáme z práce Embrechts a kol. (viď Embrechts a kol., 2005, str. 185-189)

Definícia 2. *d -rozmerná kopula je distribučná funkcia náhodného d -rozmerného náhodného vektoru, ktorého všetky jednorozmerné distribúcie sú rovnomerné na $(0,1)$.*

(viď Embrechts a kol., 2005)

Veta 2 (Sklarova veta). *Nech F je združená distribučná funkcia s marginálnymi distribúciami F_1, \dots, F_d . Potom existuje kopula $C : [0, 1]^d \rightarrow [0, 1]$ taká, že pre všetky body $x_1, \dots, x_d \in [-\infty, \infty]$ platí*

$$F(x_1, \dots, x_d) = C(F_1(x_1), \dots, F_d(x_d)). \quad (2.10)$$

Ak sú marginály spojité, potom C je jedinečná; inak je C jednoznačne určená na $\text{Ran}F_1 \times \text{Ran}F_2 \times \dots \times \text{Ran}F_d$, kde $\text{Ran}F_i$ označuje obor hodnôt F_i . Naopak, ak C je kopula a F_1, \dots, F_d sú jednorozmerné distribučné funkcie, potom funkcia F definovaná v (2.10) je spoločnou distribučnou funkciou s marginálmi F_1, \dots, F_d .

Definícia 3 (Fréchetové hranice). *Pre každú kopulu $C(u_1, \dots, u_d)$ máme hranice*

$$\max\left\{\sum_{i=1}^d u_i + 1 - d, 0\right\} \leq C(u) \leq \min\{u_1, \dots, u_d\}. \quad (2.11)$$

Dôkaz. Dôkaz viď Embrechts a kol. (2005, str. 189). □

Definícia 4. *Kopula nezávislosti je*

$$\Pi(u_1, \dots, u_d) = \prod_{i=1}^d u_i. \quad (2.12)$$

Ako napovedá jej názov, pokiaľ má združená distribučná funkcia náhodných veličín kopulu nezávislosti (2.12), veličiny sú nezávislé.

Definícia 5. *Kopula komonotonie je Fréchetova horná hranica definovaná v (2.11)*

$$M(u_1, \dots, u_d) = \min\{u_1, \dots, u_d\}. \quad (2.13)$$

Pokiaľ má združená distribučná funkcia náhodných veličín kopulu komonotonie (2.13) môžeme zjednodušene povedať, že veličiny vykazujú maximálnu pozitívnu závislosť.

V simulačnej štúdii sa obmedzíme na dve poistné odvetvia, pričom použijeme dvojrozmernú Claytonovu a Gumbelovu kopulu, ktoré definujeme nižšie (viď Embrechts a kol., 2005, str. 192).

Definícia 6. *Dvojrozmernú Claytnovu kopulu definujeme predpisom*

$$C_{\theta}^{Cl}(u_1, u_2) = (u_1^{-\theta} + u_2^{-\theta} - 1)^{-1/\theta}, \quad 0 < \theta < \infty. \quad (2.14)$$

Definícia 7. *Dvojrozmernú Gumbelovu kopulu definujeme predpisom*

$$C_{\theta}^{Gu}(u_1, u_2) = \exp\{-((- \ln u_1)^{\theta} + (- \ln u_2)^{\theta})^{1/\theta}\}, \quad 1 \leq \theta \leq \infty. \quad (2.15)$$

V prípade Claytnovej kopule, pokiaľ parameter θ konverguje k nule zprava, kopula sa približuje ku kopule nezávislosti (2.12). Ak $\theta \rightarrow \infty$, kopula sa blíži ku kopule komonotonie (2.13).

V prípade Gumbelovej kopule, ak $\theta = 1$, dostávame priamo kopulu nezávislosti. Ak $\theta \rightarrow \infty$, kopula sa obdobne blíži ku dvoj dimenzionálnej kopule komonotonie.

3. Simulačná štúdia

Simulačné štúdiu máme rozdelenú do dvoch častí. Prvá časť je zameraná teoreticky, delíme ju na dva prípady podľa vzťahu poistných odvetví. Druhá časť sa zameriava na praktickú aplikáciu, na ktorej konci ukážeme konkrétne výstupy simulácií.

V simulácii uvažujme združenú distribučnú funkciu vektoru $({}^1S, {}^2S)$, ktorú na základe Sklarovej vety (2.10) vieme pomocou určitej zvolenej kopule, označíme C^* , vyjadriť ako:

$$F(x_1, x_2) = P({}^1S \leq x_1, {}^2S \leq x_2) = C^*(F_1(x_1), F_2(x_2)). \quad (3.1)$$

Predpokladáme, že distribučné funkcie F_1 , a F_2 sú absolútne spojité. Nižšie v kapitole uvádzame postup vygenerovania náhodného výberu z tohto dvojrozmerného rozdelenia.

3.1 Simulovanie celkového úhrnu plnenia zaistiteľom

Prvé zvolíme rozdelenie diskretných náhodných veličín ${}^1N^*$ a ${}^2N^*$, ktoré značia počty škodových udalostí z uvažovaných odvetví. Najjednoduchším prípadom takéhoto rozdelenia je Poissonovo rozdelenie, ktoré je určené iba jedným parametrom, intenzitou λ .

Taktiež zvolíme rozdelenie spojitých náhodných veličín ${}^1X^*$ a ${}^2X^*$ označujúcich príslušné výšky škôd z jednotlivých škodných udalostí. Zvoliť je možné napríklad Paretovo rozdelenie, ktoré sa vyznačuje typickou vlastnosťou tzv. ťažkým chvostom. To znamená, že veľmi vysoké hodnoty škôd majú priradenú nezanedbateľnú pravdepodobnosť. (viď Mandl a Mazurová, 1999, str. 9)

Následne na základe zvoleného rozdelenia generujeme počty škôd oboch odvetví. Získavame realizácie náhodných veličín ${}^1N^*$ a ${}^2N^*$. Pokiaľ máme nasimulované počty škôd, pomocou nich vygenerujeme náhodné výbery o rozsahu ${}^1N^*$ a ${}^2N^*$ z rozdelení náhodných veličín ${}^1X^*$ a ${}^2X^*$. Získame dva náhodne výbery nasledujúceho tvaru:

$$\left\{ \begin{array}{l} \{ {}^1X_1^*, {}^1X_2^*, \dots, {}^1X_{1N^*}^* \} \\ \{ {}^2X_1^*, {}^2X_2^*, \dots, {}^2X_{2N^*}^* \} \end{array} \right\}. \quad (3.2)$$

Využitím rovnice (1.2) dostávame čiastky 1S , a 2S , teda hodnoty, akými sa zaistovňa podieľa na poistnom plnení postupne pre odvetvia 1 a 2.

Takýchto simulácií je možné previesť ľubovoľné množstvo. Označme ich počet m . Dostávame tak počty škôd 1N_i , 2N_i , pre $i = 1, 2, \dots, m$. Následným simulovaním výšok jednotlivých škôd, sčítaním, a aplikovaním zaistnej štruktúry ((1.2)) dostávame m realizácií úhrnov škôd pre zaistovňu z oboch odvetví v tvare

$${}^1S_i, {}^2S_i, \quad i = 1, \dots, m. \quad (3.3)$$

Predpokladáme, že 1S_i pre $i = 1, 2, \dots, m$ sú nezávislé náhodné veličiny, a tožný predpoklad kladieme aj na 2S_i , $i = 1, 2, \dots, m$.

3.1.1 Uvažovanie nezávislosti poistných odvetví

Využitím m realizácií vektoru (3.3), dostávame postupným priradením náhodných veličín usporiadané dvojice:

$$({}^1S_i, {}^2S_i), \quad i = 1, \dots, m. \quad (3.4)$$

Využitím m realizácií škodových úhrnov uvedených v (3.4), získavame m navzájom nezávislých celkových úhrnov škôd S_i , pre ktoré platí:

$$S_i = \min(GAAL, \max(0, \sum_{k=1}^2 {}^kS_i - GAAD)), \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (3.5)$$

Každý úhrn škôd je teda podľa vzorca (1.3) sumou škodných úhrnov z uvažovaných odvetví, na ktoré sa navyše aplikuje globálny vlastný vrub $GAAD$ a globálna veľkosť vrstvy $GAAL$.

Uvedený postup nemusí dobre vystihovať realitu, pretože nezachytáva závislostnú štruktúru medzi odvetviami, ktorej skutočnosť si ozrejmime nižšie.

Ako príklad uvádzame dve poistné odvetvia, poistenie nehnuteľnosti a úrazové poistenie, v oblasti s častými výskytmi zemetrasení. Následne by sme očakávali, že prípadné zemetrasenie spôsobí ako škody na nehnuteľnostiach, tak aj úrazy osôb, a zvýši tak poistné (a preto aj zaistné) plnenia v oboch odvetviach. Je teda vidieť, že úhrny škôd z jednotlivých období by pre tieto odvetvia nemali byť nezávislé, čo ale nie je možné vyššie uvedeným spôsobom dostatočne zohľadniť.

Preto sa v nasledujúcich častiach práce budeme zaoberať spôsobmi, ako v simulácii celkového úhrnu škôd z viacerých odvetví zohľadniť aj ich závislostnú štruktúru.

3.1.2 Uvažovanie závislosti medzi poistnými odvetviami

Naším cieľom je vygenerovanie náhodného výberu z rozdelenia (3.1), pričom sa budeme inšpirovať z prezentácie (Daxhelet a Re), ktorá pri modelovaní závislostnej štruktúry medzi poistnými odvetviami využíva heuristický algoritmus prezentovaný v práci (Kaut, 2014).

Heuristický algoritmus

Pre daný náhodný výber o rozsahu m z rozdelenia s distribučnou funkciou F (3.1),

$$({}^1S_k, {}^2S_k)_{k=1, \dots, m} \quad (3.6)$$

označme ako $({}^kS_{(i)})_{i=1, \dots, m}$ ($k = 1, 2$) usporiadané náhodné výbery pre jednotlivé zložky:

$${}^kS_{(1)} \leq {}^kS_{(2)} \leq \dots \leq {}^kS_{(m)}. \quad (3.7)$$

Empirická kopula daná výberom (3.6) je pre $i, j \in \{1, \dots, m\}$ definovaná vzťahom

$$C_{emp}\left(\frac{i}{m}, \frac{j}{m}\right) = \frac{*}{m}, \quad (3.8)$$

kde $*$ označuje počet dvojíc $({}^1S, {}^2S)$ vo výbere určenom (3.6), pre ktoré je ${}^1S \leq {}^1S_{(i)}, {}^2S \leq {}^2S_{(j)}$.

(viď. Nelson, 2006, str. 219)

Z definície (3.8) je zrejmé, že hodnoty empirickej kopuly príslušné výberu (3.6) závisia iba na poradiach jednotlivých zložiek vrámci príslušných jednorozmerných usporiadaných výberov.

Na základe uvedeného budeme ďalej v práci pre výber daného rozsahu uvažovať empirickú kopulu ako funkciu poradí. Označíme

$$C_r(i, j) = C_{emp}\left(\frac{i}{m}, \frac{j}{m}\right), \quad i, j = 1, \dots, m.$$

Uvedené ďalej prepíšeme na

$$C_r(i, j) = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^i \sum_{l=1}^j y_{kl},$$

kde y_{ij} je rovno 1 pokiaľ prvok $(^1S_{(i)}, ^2S_{(j)})$ je jeden z prvkov náhodného výberu.

Odtiaľ plynie pre $j > 1$

$$C_r(i, j) = C_r(i-1, j) + \begin{cases} 1/m, & (^1S_{(i)}, ^2S_{(j)}) \text{ je prvok z náhodného výberu,} \\ 0, & \text{inak.} \end{cases} \quad (3.9)$$

Takzvanú cieľovú kopulu $C^*(u_1, u_2)$, $u_1, u_2 \in \langle 0, 1 \rangle$, považujeme za známu (napríklad Claytonova alebo Gumbelova kopula určená jedným parametrom).

Pre vyjadrenie hodnôt cieľovej kopuly C^* na vyššie uvedenej množine zavedieme značenie

$$C_r^*(i, j) = C^*\left(\frac{i}{m}, \frac{j}{m}\right), \quad i, j = 1, \dots, m.$$

Pre výber o rozsahu m budeme uvažovať priemernú absolútnu odchýlku hodnôt empirickej kopuly a cieľovej kopuly C^* na množine bodov $\{(\frac{i}{m}, \frac{j}{m})\}_{i, j=1, \dots, m}$.

Uvažovaná miera vzdialeností oboch kopúl je odchýlka tvaru

$$d_{avg}(C_{emp}, C^*) = \frac{1}{m^2} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m |\delta(i, j)|, \quad (3.10)$$

kde

$$\delta_r(i, j) = \sum_{l=1}^m |C_r(i, l) - C_r^*(i, l)|, \quad (3.11)$$

postupne pre $i, j = 1, \dots, m$ a C_r odpovedá empirickej kopule výberu, v ktorom je obsiahnutá dvojica s poradím i a j .

(viď. Kaut, 2014)

Cieľom algoritmu je nájdenie výberu určeného dvojicami poradí

$$(i, r_i), \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (3.12)$$

pre ktoré je priemerná odchýlka definovaná v (3.10) jej príslušnej empirickej kopule od cieľovej kopule minimálna.

V nasledujúcej časti popíšeme samotné fungovanie heuristického algoritmu.

Pre pevné i a pre každé posiaľ nepoužité j spočítame odchýlku $\delta(i, j)$, kde C_r je empirická kopula definovaná vyššie. Na základe druhej súradnice najmenej z vypočítaných odchýlok vytvorím i -tu dvojicu (3.12) (i, j) .

Následne uvádzame odvodenie rekurzívneho výpočtu odchýlky $\delta_r(i, j)$, ktorú vieme použitím faktu (3.9) ekvivalentne prepísať na tvar:

$$\begin{aligned}\delta_r(i, j) &= \sum_{l=1}^m \left| C_r(i-1, l) + if(l \geq j, \frac{1}{m}, 0) - C_r^*(i, l) \right| \\ &= \sum_{l=1}^{j-1} |C_r(i-1, l) - C_r^*(i, l)| + \sum_{l=j}^m \left| C_r(i-1, l) + \frac{1}{m} - C_r^*(i, l) \right|.\end{aligned}$$

Obdobným postupom vyjadríme odchýlku $\delta_r(i, j-1)$

$$\delta_r(i, j-1) = \sum_{l=1}^{j-2} |C_r(i-1, l) - C_r^*(i, l)| + \sum_{l=j-1}^m \left| C_r(i-1, l) + \frac{1}{m} - C_r^*(i, l) \right|.$$

Následne odchýlky $\delta_r(i, j)$ a $\delta_r(i, j-1)$ od seba odčítame. Pre $\delta_r(i, j)$ platí

$$\begin{aligned}\delta_r(i, j) &= \delta_r(i, j-1) + |C_r(i-1, j-1) - C_r^*(i, j-1)| \\ &\quad - \left| C_r(i-1, j-1) + \frac{1}{m} - C_r^*(i, j-1) \right|.\end{aligned}\tag{3.13}$$

Dostávame tak rekurzívny výpočet odchýlky, ktorý je inicializovaný $\delta_r(i, 0)$ v tvare

$$\delta_r(i, 0) = \sum_{l=1}^m \left| C_r(i-1, l) + \frac{1}{m} - C_r^*(i, l) \right|.\tag{3.14}$$

(viď. Kaut, 2014)

Algoritmus priblížime na nasledujúcom príklade.

Príklad:

V nasledujúcom príklade si priblížime kroky heuristického algoritmu, ktorý implementujeme v štatistickom programe R.

Nech počet simulácií $m = 5$. Označme pomocnú množinu J_i inicializujúcu nepoužité hodnoty druhej súradnice odchýlky $\delta_r(i, j)$ pri danom i . Pre $i = 1$ je $J_1 = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

Následne zvolíme cieľovú kopulu, a k nej vypočítame hodnoty $C_r^*(i, j)$ pre $i, j = 1, 2, \dots, 5$. Uvažujme Claytonovu kopulu s parametrom $\theta = 0,7$ definovanú v (2.14).

Platí:

$$|C_r^*(i, j)| = \begin{pmatrix} 0,096 & 0,139 & 0,166 & 0,185 & 0,200 \\ 0,139 & 0,230 & 0,299 & 0,354 & 0,400 \\ 0,166 & 0,299 & 0,412 & 0,511 & 0,600 \\ 0,185 & 0,354 & 0,511 & 0,660 & 0,800 \\ 0,200 & 0,400 & 0,600 & 0,800 & 1,000 \end{pmatrix}.\tag{3.15}$$

Nech $\mathbf{i} = \mathbf{1}$.

V prvej časti využijeme vzorec (3.14). Dostávame:

$$\begin{aligned} \delta_r(1,0) &= \left|0 + \frac{1}{5} - 0,096\right| + \left|0 + \frac{1}{5} - 0,139\right| + \left|0 + \frac{1}{5} - 0,166\right| + \left|0 + \frac{1}{5} - 0,185\right| \\ &\quad + \left|0 + \frac{1}{5} - 0,200\right| = 0,104 + 0,061 + 0,034 + 0,015 + 0 = 0,214 \end{aligned}$$

V nasledujúcom kroku postupne pre aplikujeme rekurzívny výpočet odchýlky definovaný v (3.13).

Pre $\delta_r(1,1)$ platí:

$$\delta_r(1,1) = \delta_r(1,0) + |0 - 0| - \left|0 + \frac{1}{5} - 0\right| = 0,214 - \frac{1}{5} = 0,014.$$

Postup obdobne aplikujeme na zvyšné hodnoty j z množiny J_1 . Výsledné hodnoty uvádzame v nasledujúcej tabuľke.

$\delta_r(i,j)$	1	2	3	4	5
1	0,014	0,006	0,083	0,215	0,386

Tabuľka 3.1: Hodnoty odchýlok $\delta_r(1,j)$, pre $j \in J_1$.

Vidíme, že $\delta_r(1,2) = 0,006$ je najmenšou odchýlkou pre $i = 1$, teda prvou usporiadanou dvojicou podľa (3.12) je $(1,2)$. Upravíme množinu J_1 na $J_2 = \{1,3,4,5\}$.

V druhej časti využijeme (3.9), získavame:

$$\left(0, 0 + \frac{1}{5}, 0 + \frac{1}{5}, 0 + \frac{1}{5}, 0 + \frac{1}{5}\right).$$

Postup opakujeme pre všetky hodnoty i .

Pre $\mathbf{i} = \mathbf{2}$ je prvá časť postupu rovná:

$$\begin{aligned} \delta_r(2,0) &= \left|0 + \frac{1}{5} - 0,139\right| + \left|\frac{1}{5} + \frac{1}{5} - 0,230\right| + \left|\frac{1}{5} + \frac{1}{5} - 0,299\right| + \left|\frac{1}{5} + \frac{1}{5} - 0,354\right| \\ &\quad + \left|\frac{1}{5} + \frac{1}{5} - 0,400\right| = 0,061 + 0,230 + 0,101 + 0,046 + 0 = 0,378 \end{aligned}$$

Využitím rekurzívneho vzorca pre odchýlku $\delta_r(2,j)$, pre $j \in J_2$ dostávame:

$\delta_r(i,j)$	1	2	3	4	5
1	0,014	0,006	0,083	0,215	0,386
2	0,178	-	0,156	0,113	0,222

Tabuľka 3.2: Hodnoty odchýlok $\delta_r(1,j)$, pre $j \in J_1$, a $\delta_r(2,j)$, pre $j \in J_2$.

Z toho vyplýva, že druhou usporiadanou dvojicou podľa (3.12) je $(2,4)$. Množina J_3 je tvaru $\{1,3,5\}$.

Opätovným prevedením druhého kroku dostávame druhý riadok C_r rovný

$$\left(0, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5} + \frac{1}{5}, \frac{1}{5} + \frac{1}{5}\right).$$

Obdobne vyčíslime odchýlky pre $\mathbf{i} = \mathbf{3}$, $\mathbf{i} = \mathbf{4}$, a $\mathbf{i} = \mathbf{5}$, a $j \in J_3, J_4, J_5$.

Platí:

$$\delta_r(3,0) = 0,236, \delta_r(4,0) = 0,689, \delta_r(5,0) = 0,400.$$

Zvyšné odchýlky vyznačíme pre lepšiu prehľadnosť opäť v tabuľke:

$\delta_r(i,j)$	1	2	3	4	5
1	0,014	0,006	0,083	0,215	0,386
2	0,178	-	0,156	0,113	0,222
3	0,036	-	0,166	-	0,388
4	-	-	0,089	-	0,032

Tabuľka 3.3: Hodnoty odchýlok $\delta_r(i,j)$.

Dostávame nasledujúce dvojice: (3,1), (4,5), a (5,3).

Postupne pre i -te riadky C_r platí:

$$\begin{aligned} & \left(0 + \frac{1}{5}, \frac{1}{5} + \frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5} + \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{2}{5} + \frac{1}{5}\right), \\ & \left(\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{3}{5} + \frac{1}{5}\right), \\ & \left(\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{2}{5} + \frac{1}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5} + \frac{1}{5}\right). \end{aligned}$$

Dostávame tak:

$$|C_r(i,j)| = \begin{pmatrix} 0 & 0,2 & 0,2 & 0,2 & 0,2 \\ 0 & 0,2 & 0,2 & 0,4 & 0,4 \\ 0,2 & 0,4 & 0,4 & 0,6 & 0,6 \\ 0,2 & 0,4 & 0,4 & 0,6 & 0,8 \\ 0,2 & 0,4 & 0,6 & 0,8 & 1,0 \end{pmatrix}. \quad (3.16)$$

Výstupom algoritmu je 5 usporiadaných dvojíc znázornených nižšie.

(1, 2)
(2, 4)
(3, 1)
(4, 5)
(5, 3)

Pri implementácii algoritmu sme použili prácu (Kaut, 2014), a časť zdrojového kódu v programovacom jazyku C++, ktorý je uvedený na stránke Kaut.

Komentovaný zdrojový kód algoritmu, tak ako aj zdrojový kód simulačnej štúdie je doložený v prvej prílohe (A) na konci bakalárskej práce.

Simulovanie celkových úhrnov škôd s uvažovaním závislosti odvetví

Opäť využívame m realizácií úhrnov plnení ${}^1S_m, {}^2S_m, m = 1, 2, \dots$ uvedených v (3.3).

Na základe usporiadaných dvojíc vyznačených v (3.12), pre danú kopulu preusporiadame nasimulované úhrny.

Dostávame tak m usporiadaných dvojíc:

$$\begin{array}{cc} {}^1S_{(1)} & {}^2S_{(r_1)} \\ {}^1S_{(2)} & {}^2S_{(r_2)} \\ \vdots & \vdots \\ {}^1S_{(m)} & {}^2S_{(r_m)} \end{array} \quad (3.17)$$

${}^1S_{(i)}$ označuje i -tu najmenšiu realizáciu úhrnu škôd odvetvia 1, a ${}^2S_{(r_i)}$ označuje r_i -tu najmenšiu realizáciu úhrn škôd odvetvia 2, $i = 1, 2, \dots, m$.

Pre m navzájom nezávislých celkových úhrnov škôd S_i oboch odvetví spolu potom platí:

$$S_i = \min(GAAL, \max(0, {}^1S_{(i)} + {}^2S_{(r_i)} - GAAD)), \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (3.18)$$

3.2 Aplikácia

Ako sme uviedli v časti 3.1, ako prvé určujeme pravdepodobnostné rozdelenie počtov škodných udalostí, a rozdelenie výšky škôd pre obe odvetvia.

Pre odvetvie 1 volíme:

$${}^1N^* \sim Pois(190), {}^1X^* \sim Pa(1, 170).$$

Pre odvetvie 2 volíme:

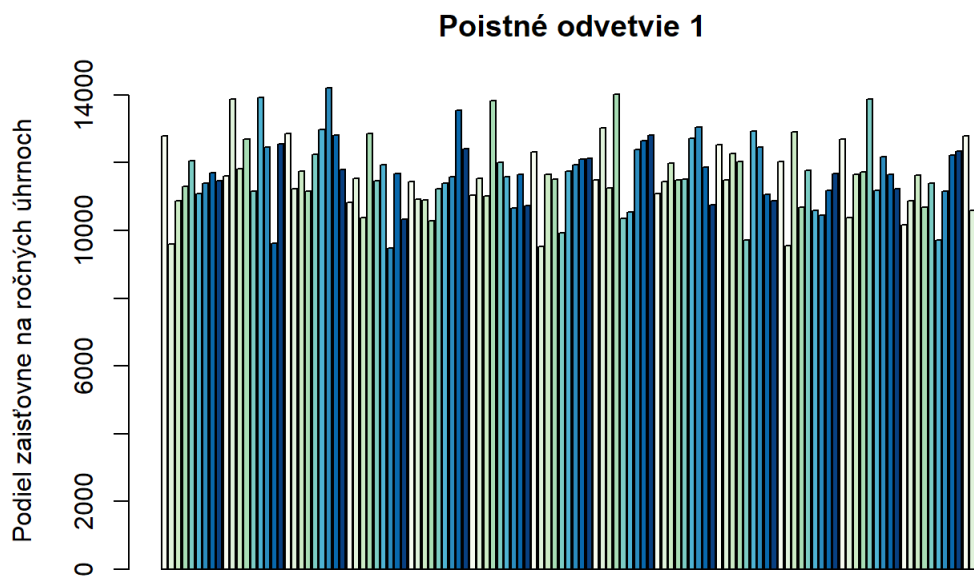
$${}^2N^* \sim Pois(150), {}^2X^* \sim Pa(1, 310).$$

Hodnoty parametrov zaistenej štruktúry uvádzame v nasledujúcej tabuľke:

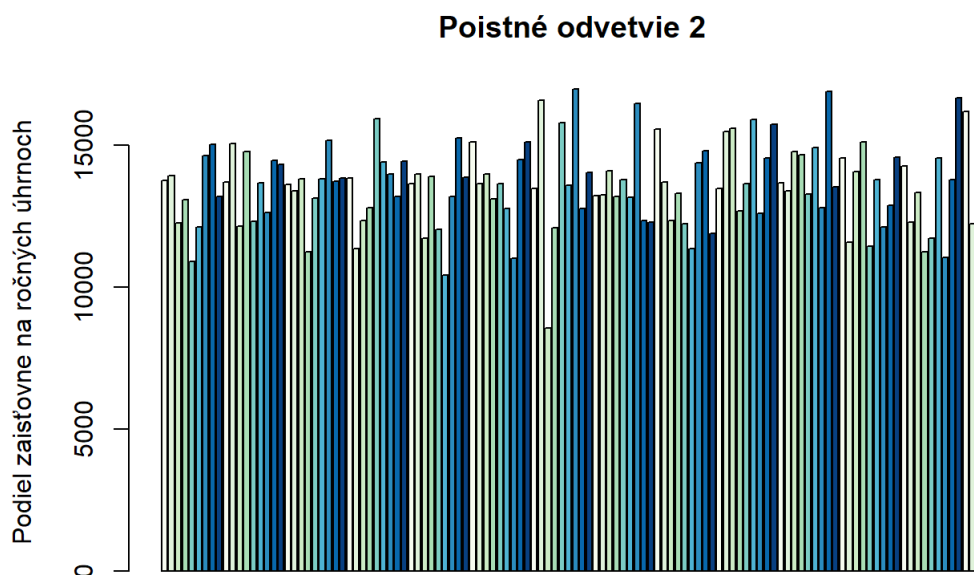
Premenná	Odvetvie 1	Odvetvie 2
priorita kD	250	350
veľkosť vrstvy kL	110	120
globálna ročná súhrnná priorita $GAAD$	3000	3000
globálna ročná súhrnná veľkosť vrstvy $GAAL$	25500	25500

Tabuľka 3.4: Hodnoty parametrov.

Aplikovaním rovnice (1.2) dostávame úhrny plnení postupne pre odvetvia 1 a 2, 1S , a 2S . Volíme počet simulácií $m = 120$. Dostávame:

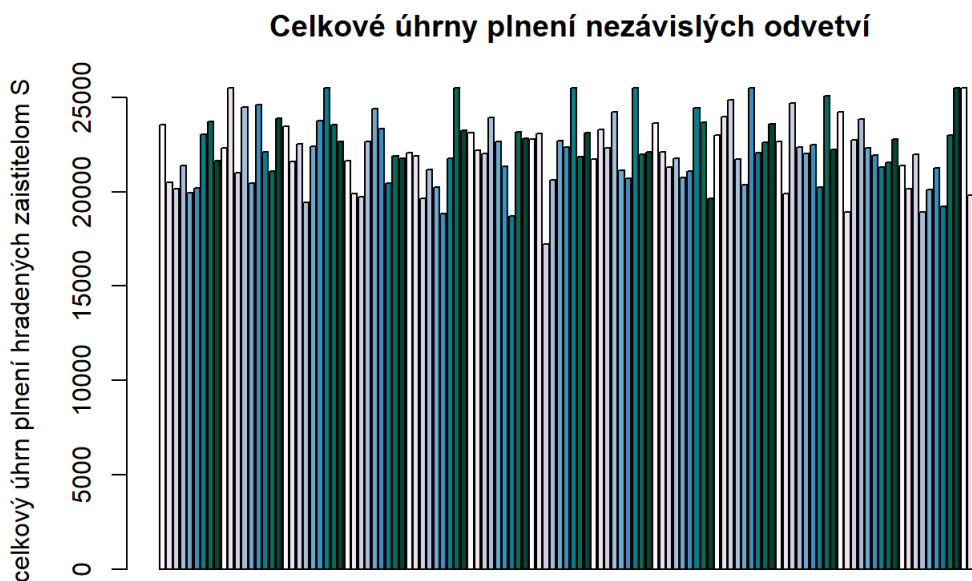


Obr. 3.1: 120 simulácií úhrnov plnení poistného odvetvia 1.



Obr. 3.2: 120 simulácií úhrnov plnení poistného odvetvia 2.

Pre celkový úhrn S nezávislých poistných odvetví využijeme vzorec (3.5). Opäť graficky znázorníme:



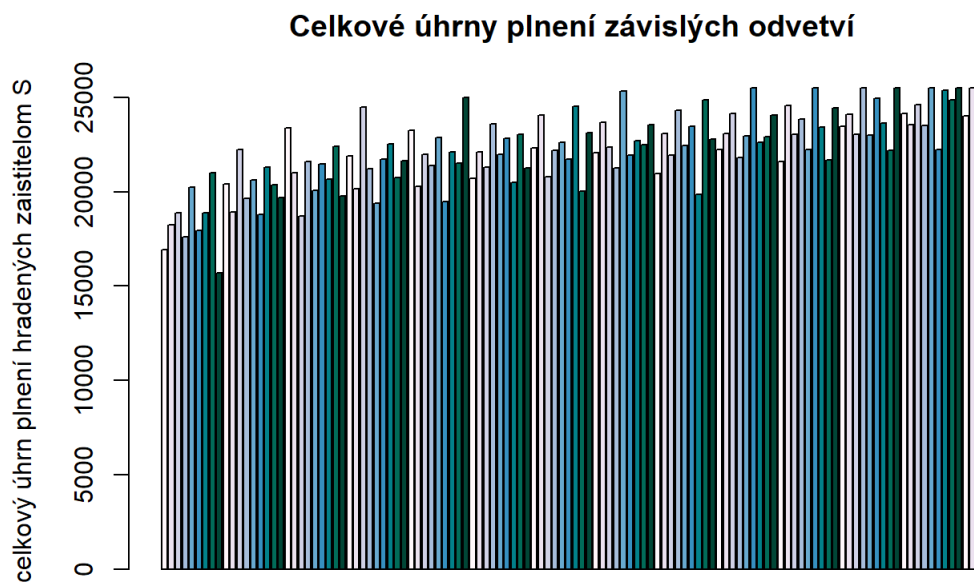
Obr. 3.3: 120 simulácií celkových úhrnov plnení nezávislých odvetví.

Združenú distribučnú funkciu (3.1) popisujeme Claytnovou kopulou (2.14) s parametrom $\theta = 0,7$. Na základe výstupu heuristického algoritmu, dostávame m usporiadaných dvojíc popísaných v (3.17), ktoré aj s ich poradím naznačíme nižšie.

1S_m	poradia odvetvia 1	2S_m	poradia odvetvia 2
9487	1	10420	2
9527	2	11719	13
9543	3	12339	28
9592	4	11014	4
9629	5	13599	56
9722	6	11239	7
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots

Tabuľka 3.5: Závislostná štruktúra poisťných odvetví.

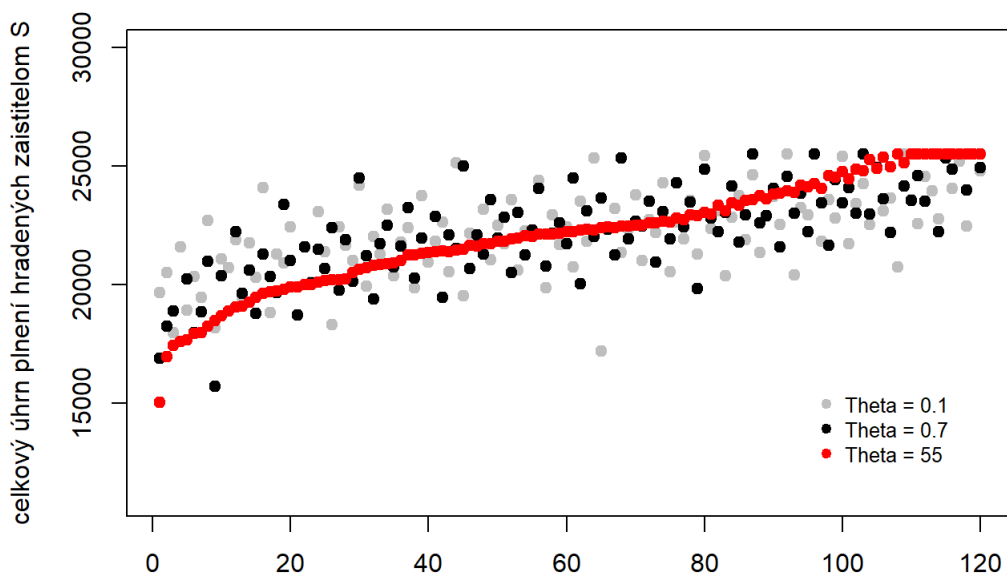
Na tieto hodnoty aplikujeme (3.18), čím znova dostávame 120 simulácií náhodnej veličiny S .



Obr. 3.4: 120 simulácií celkových úhrnov plnění za pomoci Claytnovej kopule s parametrom $\theta = 0,7$.

Vo zvyšnej časti simulačnej štúdií sa zameriame na modifikáciu závislostnej štruktúry medzi poistnými odvetviami. Učiníme tak simulovaním dvoma rôznymi kopulami. Simulujeme Claytnovou kopulou pre rôzne parametry θ . Volíme $\theta = 0,1$; $\theta = 0,7$; a $\theta = 55$.

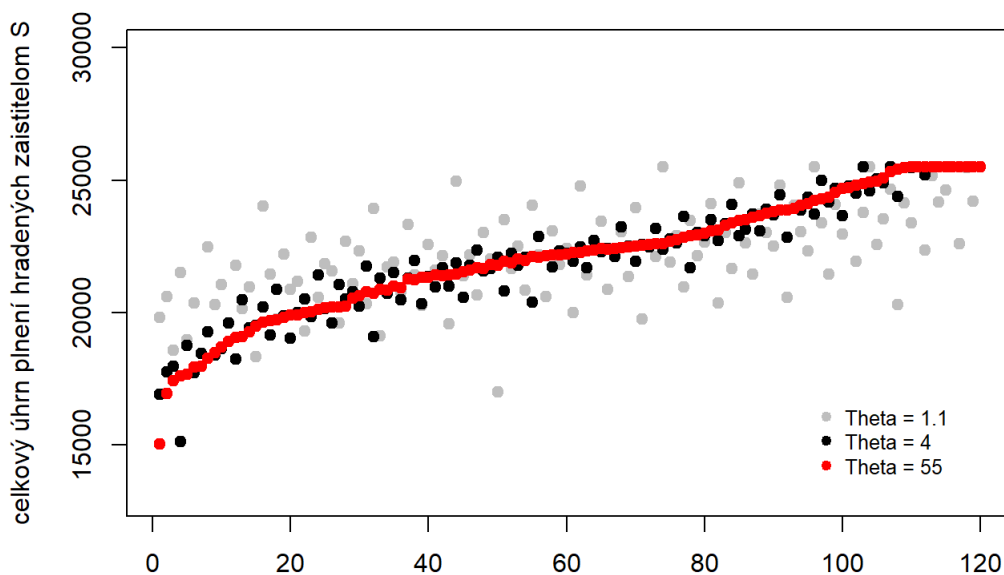
Celkové úhrny plnení simulované Claytnovou kopulou



Obr. 3.5: Celkové škodné úhrny, porovnanie iterácií Claytnovou kopulou.

V druhom prípade na popis závislostnej štruktúry zvolíme Gumbelovu kopulu definovanú v (2.15). Pre porovnanie taktiež uvádzame grafické znázornenie pre tri rôzne hodnoty θ . Konkrétne pre $\theta = 1,1$; $\theta = 4$ a $\theta = 55$.

Celkové úhrny plnení simulované Gumbelovou kopulou



Obr. 3.6: Porovnanie celkových úhrnov plnení pri simulovaní závislostnej štruktúry Gumbelovou kopulou s rôznymi parametrami θ .

Vidíme, že modelovanie Gumbelovou kopulou nie je príliš rozdielne od modelácii Claytonovou kopulou. Narastajúcim parametrom θ narastá závislosť vo dvojici $(^1S, ^2S)$, to znamená párovanie nízkych hodnôt s nízkymi a naopak. Vzhľadom ku zoradeniu hodnôt podľa veľkosti úhrnu 1^S to vysvetľuje výraznejší rastúci trend pre vyššie θ .

V tabuľke nižšie uvádzame empirické charakteristiky ako minimum, medián, stredná hodnota, ako aj maximum nasimulovaných rôznych iterácií náhodnej veľičiny S .

Kopula	Min	Medián	Stredná hodota	Tretí kvartil	Max
Cl(0,1)	17203	22348	22210	23530	25500
Cl(0,7)	15693	22249	22201	23569	25500
Cl(55)	15025	22221	22112	23832	25500
Gu(1,1)	16989	22196	22192	23448	25500
Gu(4)	15130	22188	22114	23707	25500
Gu(55)	15025	22228	22111	23828	25500
Nezávislosť	17203	22146	22210	23378	25500

Tabuľka 3.6: Celkové úhrny plnení.

Rozdielnosť empirickej strednej hodnoty pri iteráciách popísaných vyššie výrazne závisela na zvolených zaistných parametroch uvedených v (3.4). Pri počte simulácii m v nižších stovkách je nutné mať dostatočne veľkú globálnu ročnú súhrnnú veľkosť vrstvy *GAAL*.

Záver

V prvej a druhej kapitole sme uviedli teoretické poznatky potrebné pre získanie empirického rozdelenia celkového úhrnu plnení S . V tretej kapitole je podrobne popísaný heuristický algoritmus, ktorý sme následne podrobne predviedli na ilustračnom príklade. Ďalej sme uviedli príklad simulovania hodnoty náhodnej veličiny S . Združenú distribučnú funkciu sme popisovali Claytnovou a Gumbelovou kopulou pre rôzne parametry θ . Následne sme uviedli porovnanie niektorých charakteristík nasimulovaných hodnôt S .

Výsledky simulovania za použitia Claytnovej a Gumbelovej kopule sa praveľmi nelíšia. S narastajúcim parametrom θ má empirická stredná hodnota veličiny S klesajúcu tendenciu. Taktiež sme uviedli aj empirické charakteristiky ako minimum, medián, tretí kvartil, a maximum. Výstupy simulačnej štúdie by sme mohli spresniť navýšením počtu simulácií m .

Zoznam použitej literatúry

- DAXHELET, N. a RE, A. Pricing multiline aggregate excess of loss with dependence (dostupné dňa 01.11.2021). URL <https://www.actuview.com/video/Pricing-Multiline-Aggregate-Excess-of-Loss-with-Dependence/2f3ed594a>.
- EMBRECHTS, P., FREY, R. a MCNEIL, A. J. (2005). *Quantitative Risk Management*. First Edition. Princeton University Press, New Jersey. ISBN 0-387-98502-6.
- KAUT, M. The new copula-based code (dostupné dňa 01.10.2022). URL <https://work.michalkaut.net/downloads.html>.
- KAUT, M. (2014). A copula-based heuristic for scenario generation. *Computational Management Science*, **11**, 513–516.
- KLUGMAN, S. A., PANJER, H. H. a WILLMOT, G. E. (2012). *Loss Models, From Data to Decisions*. Fourth Edition. John Wiley Sons, Inc., Hoboken. ISBN 978-1-118-31532-3.
- MANDL, P. a MAZUROVÁ, L. (1999). *Matematické základy neživotného pojišťení*. První vydání. Matfyzpress, Praha. ISBN 80-85863-42-1.
- NELSON, R. B. (2006). *An Introduction to Copulas*. Second Edition. Springer, New York. ISBN 0-387-28659-4.
- WALHIN, J. F. (2003). On the optimality of multiline excess of loss covers. *Casualty Actuarial Society Forum*.

Zoznam obrázkov

3.1	120 simulácií úhrnov plnení poistného odvetvia 1.	15
3.2	120 simulácií úhrnov plnení poistného odvetvia 2.	15
3.3	120 simulácií celkových úhrnov plnení nezávislých odvetví.	16
3.4	120 simulácií celkových úhrnov plnení za pomoci Claytnovej kopule s parametrom $\theta = 0,7$	17
3.5	Celkové škodné úhrny, porovnanie iterácií Claytnovou kopulou. . .	18
3.6	Porovnanie celkových úhrnov plnení pri simulovaní závislostnej štruktúry Gumbelovou kopulou s rôznymi parametrami θ	19

Zoznam tabuliek

3.1	Hodnoty odchýlok $\delta_r(1,j)$, pre $j \in J_1$	12
3.2	Hodnoty odchýlok $\delta_r(1,j)$, pre $j \in J_1$, a $\delta_r(2,j)$, pre $j \in J_2$	12
3.3	Hodnoty odchýlok $\delta_r(i,j)$	13
3.4	Hodnoty parametrov.	14
3.5	Závislostná štruktúra poistných odvetví.	16
3.6	Celkové úhrny plnení.	19

A. Přílohy

A.1 Zdrojový kód v R

Nainštalovanie využívaných knižníc.

```
““{r}
library("copula")
library("Pareto")
library("RColorBrewer")
““
```

Vytvorenie cieľovej kopule.

```
““{r}
n <- 120 # počet simulácií, v práci označené ako m
theta <- 0.7
cc <- claytonCopula(theta, dim = 2)
# cc <- gumbelCopula(theta, dim = 2)

Cr_star = matrix(data=NA, nrow=n, ncol=n)

for (i in 1:n) {
  for (j in 1:n) {
    u<- c(i,j)/n
    Cr_star[i,j] <- pCopula(u, copula = cc) # cieľová kopula
  }
}
#round(Cr_star,3)

““
```

Heuristický algoritmus

```
““{r}
probCol <- 1/n #pravdepodobnosť náhodného výskytu
jedeného bodu zo vzorky
prevColCdf <- rep(0,n)
j2iC <- rep(0,n)
i2jC <- rep(0,n)

for (i in 1:n) {
  j_new <- 0
  dist<-0
  minDist<-n

  for (jj in 1:n) # vzdialenosť bodu [i,0]

    dist <- dist + abs(prevColCdf[jj] + probCol - Cr_star[i,jj])
  # print(c(dist, i))
}
```

```

for (j in 1:n) {
  if(j == 1){

    dist <- dist - probCol
    # print(c(dist, i))

  }else{
    dist <- dist + abs(prevColCdf[j-1] - Cr_star[i,j-1]) -
      abs(prevColCdf[j-1] + probCol- Cr_star[i,j-1])
    #print(c(dist, i))
  }

  if (dist < minDist & j2iC[j] ==0) {
    # nové najlepšie riešenie [i,j]
    # odchýlku počítame postupne v každom bode,
    teda pri syntaxe dist <- dist +...
    docielime r(i,j) = r(i ,j-1) +...
    # na rozdiel od postupu uvedeného v práci, algoritmus počíta
    odchýlku vždy v každom bode
    minDist <- dist
    j_new <- j
  }
}

j2iC[j_new] <- i # označíme hodnotu j-tej pozície ako použitú
i2jC[i]<-j_new

for (jj in j_new:n) # inicializovanie empirickej kopule Cr
prevColCdf[jj] <- prevColCdf[jj] + probCol

# print(i2jC) poradia r_i zo vzorca 3.6
}

set.seed(99)
uhrn <- function(claims, vlastny_vrub, velkost_linie){
#funkcia na postupné aplikovanie zaistnej štruktúry

for (i in 1:length(claims)) {
  if (claims[i] - vlastny_vrub > 0){
    if (claims[i] - vlastny_vrub > velkost_linie){
      claims[i] <- velkost_linie
    } else {
      claims[i] <- claims[i] - vlastny_vrub
    }
  } else {
    claims[i] <- 0
  }
}
}

```

```

    }
    return(sum(claims))
}

uhrny_l1 <- rep(0,n)
uhrny_l2 <- rep(0,n)

for (i in 1:n) {
  uhrny_l1[i] <- round(uhrn(rPareto(rpois(1, lambda=190),170, 1 ),
    250, 110),0)
  uhrny_l2[i] <- round(uhrn(rPareto(rpois(1, lambda=150),310, 1 ),
    350, 120),0)
}
'''
'''{r}
#data.frame(uhrny_l1,uhrny_l2)

colors1 <- brewer.pal(n, "GnBu")
colors2 <- brewer.pal(n, "GnBu")

barplot(uhrny_l1, main = "Poistné odvetvie 1", ylab =
"Podiel zaistovne na ročných úhrnoch", col = colors1)

barplot(uhrny_l2, main = "Poistné odvetvie 2", ylab =
"Podiel zaistovne na ročných úhrnoch", col = colors2)

uhrny_celkove_N <- rep(0,n)

for (i in 1:n)
  uhrny_celkove_N[i] <- round(uhrn(uhrny_l1[i] + uhrny_l2[i],
    3000,25500),0)

colors4 <- brewer.pal(n, "PuBuGn")
barplot(uhrny_celkove_N, main =
"Celkové úhrny plnení nezávislých odvetví",
ylab =
"celkový úhrn plnení hradených zaistitelom S", col = colors4)
'''
### celkové úhrny pri neuvažovaní závislosti
'''{r}
#uhrny_celkove_N
'''

### celkové úhrny pri uvažovaní závislostnej štruktúry

'''{r}
sort_uhrny_l2<- rep(0,n)
sort_uhrny_l1 <- sort(uhrny_l1)

```

```

for (i in 1:n)
  sort_uhrny_l2[i] <- sort(uhrny_l2)[i2jC[i]]

#data.frame( sort_uhrny_l1, sequence(n), sort_uhrny_l2, i2jC)
uhrny_celkove_Z <- rep(0,n)

for (i in 1:n)
  uhrny_celkove_Z[i] <- round(uhrn(sort_uhrny_l1[i] +
  sort_uhrny_l2[i], 3000,25500),0)

'''

''{r}
df <- data.frame(sort_uhrny_l1, sequence(n),
                 sort_uhrny_l2,
                 i2jC)

head(df)
#uhrny_celkove_Z

colors3 <- brewer.pal(n, "PuBuGn")
barplot(uhrny_celkove_Z, main =
"Celkové úhrny plnění závislých odvetví",
ylab =
"celkový úhrn plnění hrazených zaistitelom S", col = colors3)

#summary(uhrny_celkove_N)
#summary(uhrny_celkove_Z)
'''

Porovnanie Claytnovou kopulou
''{r}
plot(1, type = "n", xlab = "",ylab =
"celkový úhrn plnění hrazených zaistitelom S",
xlim = c(1, n), ylim = c(11000, 30000), main =
"Celkové úhrny plnění simulované Claytnovou kopulou")

points(c(19663, 20509, 17958, 21599, 18907, 20350, 19471,
22709, 18169, 21072, 20727, 21881,19448, 21747, 20316,
24097, 18834, 21286, 20906, 22454, 19904, 21587, 20090,
23076,21395, 18301, 22433, 21649, 21017, 24193, 19938,
22035, 21285, 23191, 20388, 21804,22408, 19876, 23744,
20958, 21819, 22657, 20552, 25140, 19536, 22181, 21722,
23176,21051, 22514, 21734, 23586, 20597, 22271, 22121,
24391, 19858, 22939, 21678, 22451,20738, 23520, 21819,
25359, 17203, 22392, 23202, 21357, 22320, 23796,21002,

```

```

22730,22215, 24311, 20529, 22650, 21937, 23559, 21286,
25453, 22375, 23102, 20380, 22828,23771, 21905, 24645,
21344, 22878, 23708, 22549, 25500, 20418, 23257, 22929,
24264,21818, 23573, 22807, 25400, 21726, 23423, 24276,
22556, 24964, 23106, 23645, 20749,25500, 23602, 22571,
24579, 23970, 22761, 25500, 24069, 25204, 22484, 25500,
24790
), col = "gray", pch = 19)

points(uhrny_celkove_Z, col = "black", pch = 19)

points(c(15025, 16947, 17428, 17606, 17657, 17951,
17962, 18257, 18492, 18699, 18900, 19053,19089,
19269, 19477, 19621, 19699, 19716, 19816, 19893,
19916, 19993, 20019, 20110,20170, 20212, 20217,
20246, 20513, 20638, 20716, 20809, 20846, 20870,
20926, 21029,21243, 21271, 21308, 21359, 21383,
21409, 21405, 21470, 21499, 21649, 21627, 21734,
21720, 21835, 21840, 21943, 21950, 22073, 22020,
22130, 22149, 22140, 22175, 22220,22221, 22301,
22321, 22318, 22407, 22424, 22393, 22469, 22479,
22499, 22509, 22595,22597, 22681, 22627, 22811,
22738, 22947, 22925, 23058, 22990, 23342, 23106,
23468,23354, 23555, 23603, 23764, 23622, 23821,
23864, 23959, 23880, 24187, 24118, 24264,24075,
24592, 24548, 24782, 24467, 24882, 24793, 25272,
24904, 25389, 24974, 25500,25151, 25500, 25500,
25500, 25500, 25500, 25500, 25500, 25500,
25500, 25500), col = "red", pch = 19)

legend(95, 16000, legend=c("Theta = 0.1", "Theta = 0.7",
"Theta = 55"),
      col=c("gray", "black", "red"),pch = c(19,19,19), cex=0.8,
      box.lty=0)
'''

Simulovanie Gumbelovou kopulou
'''{r}
plot(1, type = "n", xlab = "",
     ylab = "celkový úhrn plnění hrazených zaistitelem S",
     xlim = c(1, n),
     ylim = c(13000, 30000), main =
     "Celkové úhrny plnění simulované Gumbelovou kopulou")

points(c(19817, 20590, 18574, 21496, 18968, 20367,
17962, 22490, 20287, 21066, 19592, 21783,20157,
20976, 18331, 24012, 21434, 19746, 22211, 20877,
21164, 19301, 22847, 20580,21850, 21572, 19601,

```



```
22676, 21091, 22336, 20340, 23942, 19121, 21723,
21897, 20775,23318, 21404, 20280, 22581, 21604,
22132, 19558, 24950, 21382, 22181, 20670, 23032,
22012, 16989, 23508, 21664, 22509, 20831, 24043,
22169, 20601, 23076, 21807, 22418,20008, 24787,
21405, 22401, 23437, 20886, 22293, 23057, 21361,
23950, 19748, 22540,22125, 25500, 21912, 22907,
20977, 23482, 22135, 22669, 24098, 20363, 23021,
21668,24901, 22637, 21444, 23719, 23027, 22501,
24798, 20560, 24047, 23038, 22331, 25500,23400,
21449, 24071, 22971, 24702, 21940, 23768, 25500,
22567, 23547, 24661, 20284,24147, 23400, 25500,
22370, 25169, 24170, 24641, 25500, 22597, 25462,
24193, 25500), col = "gray", pch = 19)
```

```
points(c(16907, 17756, 17958, 15130, 18744, 17736,
18442, 19257, 18394, 18621, 19592, 18231,20472,
19408, 19524, 20213, 19152, 20862, 19879, 19020,
19990, 20519, 19855, 21431,20144, 19588, 21058,
20505, 20785, 20242, 21737, 19089, 21285, 20711,
21506, 20490,21300, 21962, 20321, 21372, 20973,
21688, 21008, 21878, 20585, 21772, 22370, 21567,
21670, 22096, 20812, 22233, 21778, 22073, 20393,
22880, 22143, 21725, 22328, 22234,21923, 22492,
21705, 22722, 22294, 22408, 22124, 23227, 22508,
21926, 22577, 22478,23185, 22395, 22792, 22621,
23634, 21679, 23025, 22896, 23498, 22713, 23357,
24077,22889, 23134, 23711, 23068, 23909, 23679,
24440, 22850, 23941, 23855, 24365, 23706,24993,
24185, 24679, 23660, 24791, 24501, 25500, 24601,
25058, 24911, 25500, 24399,25475, 25485, 25500,
25189, 25500, 25500, 25500, 25500, 25500, 25500,
25500, 25500), col = "black", pch = 19)
```

```
points(c(15025, 16947, 17428, 17606, 17657, 17951,
17962, 18257, 18492, 18699, 18900, 19053,19089, 19269,
19477, 19621, 19699, 19716, 19816, 19893, 19916, 19993,
20019, 20110,20170, 20212, 20221, 20242, 20531, 20620,
20794, 20731, 20868, 20848, 21009, 20946,21270, 21244,
21339, 21315, 21404, 21396, 21413, 21439, 21542, 21608,
21677, 21665,21802, 21781, 21930, 21859, 22012, 21964,
22100, 22087, 22149, 22161, 22175, 22203,22252, 22261,
22321, 22344, 22407, 22392, 22425, 22462, 22473, 22494,
22527, 22569,22597, 22612, 22686, 22745, 22836, 22909,
22933, 23000, 23071, 23102, 23283, 23384,23484, 23516,
23603, 23666, 23742, 23816, 23864, 23871, 23941, 24046,
24118, 24235,24296, 24355, 24548, 24693, 24730, 24822,
24882, 24914, 24964, 25065, 25332, 25406,25475, 25500,
```

```
25500, 25500, 25500, 25500, 25500, 25500, 25500, 25500,  
25500, 25500), col = "red", pch = 19)  
  
legend(95, 17000, legend=c("Theta = 1.1", "Theta = 4",  
"Theta = 55"),  
      col=c("gray","black", "red"),pch = c(19,19,19), cex=0.8,  
      box.lty=0)  
'''
```