POSUDEK VEDOUCÍHO NA BAKALÁŘSKOU PRÁCI TOMÁŠE BERÁNKA

LUBOŠ PICK

Studium optimality prostorů funkcí v Sobolevových vnořeních vychází z problému přenosu regularity z dat na řešení parciálních diferenciálních rovnic. Otázkou je, z jaké třídy vybírat „soupeřící“ prostory. Příklady ukazují, že Lebegueovy prostory tvoří příliš chudou třídu, zatímco například mezi prostory s normou invariatní vůči přerovnáni se sice vždy optimální kandidát najde, může však být popsán příliš složitě nebo dokonce implicitně. Z tohoto důvodu bývá prováděn výzkum optimality mezi *Orliczovými* prostory, které leží kdesi „uprostřed“. Vážný problém spočívá v tom, že optimální Orliczův prostor nemusí existovat.

Bakalářská práce pana Tomáše Beránka je zasvěcena výzkumu existence optimálního Orliczova zdrojového prostoru pro Sobolevova vnoření na podoblastech eukleidovského prostoru $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$, s isoperimetrickým profilem mocninného typu, tedy na oblastech z tzv. *Maz'yových tříd*. Práce vychází z článku [2], ve kterém je otázka vyřešena pro lipschitzovské oblasti. Ty jsou podtřídou *Johnových oblastí*, které jsou vymezeny svým isoperimetrickým profilem $t \mapsto t^{\frac{n-1}{n}}$. Zadáním práce bylo vyzkoumat, jak situace vypadá na oblastech s „horším“ isoperimetrickým chováním, například takových, které obsahovují vnější či vnitřní hroty.

Pro oblasti Maz'yova typu, vymezené isoperimetrickým profilem $t \mapsto t^{\alpha}$ pro $\alpha \in [\frac{n-1}{n}, 1)$, byl úkol beze zbytku splněn. Pan Beránek dokázal metodou „marcinkiewiczovského zlepšováku“ (Theorem 3.5, inspirovanou technikami z předcházejících prací [1, 2]), že optimální zdrojový Orliczův prostor neexistuje pro kterýkoli předem zadaný cílový prostor z limitní fundamentální hladiny. Výsledek využil k ověření toho, že neexistuje největší Orliczův prostor takový, pro který platí Sobolevovo vnoření

$$W^m L^A(\Omega) \hookrightarrow L^{\infty,q;-1+(1-\alpha)m-\frac{1}{q}}(\Omega),$$

kde m je řád derivace a q probíhá škálu $[\frac{1}{1-m(1-\alpha)}, \infty]$. Připomeňme, že pro krajní bod $q = \frac{1}{1-m(1-\alpha)}$ obdržíme maz'yovskou analogii Brézisova–Waingerova prostoru, o němž je známo, že se jedná o optimální cílový prostor v limitním vnoření, zatímco pro druhý krajní bod $q = \infty$ dostaneme exponenciální Zygmundovu třídu.

Ze zpětného pohledu je zřejmé, že zadání je na bakalářskou práci příliš těžké - chyba na straně vedoucího (a to jsem původně choval (nesmyslné) ambice zkoumat situaci také pro gaussovská vnoření). Student se musel naučit přehršel nových pojmů (mimo jiné několik škál prostorů funkcí - Sobolev, Orlicz, Lorentz–Zygmund a další), obecnou teorii prostorů s normou invariatní vůči přerovnáni, a k tomu vyprodukovat nové výsledky. Pan Beránek to kupodivu všechno zvládl. Výsledky jsou zajímavé a po určité dávce další práce budou publikovatelné.

Stinnou stránkou textu je to, že z Theorem 3.1 vypadl předpoklad na funkci I, aby prostor vzniklý operátorem indukovanou normou skutečně splňoval axiomy prostoru s normou invariatní vůči přerovnáni. Pro odkaz v dalším textu je věta zbytečně obecná, protože se používá pouze pro případ, kdy funkce I je mocnina, která chybějící předpoklady splňuje, ale po „vyčištění“ bude i tento výsledek zajímavý a možná nalezne další aplikace.

Na textu je vidět, že vznikal v omezeném čase třetího ročníku bakalářského studia a že důraz byl kladen na vědeckou část projektu, čímž trochu utrpěla část formální. Tyto chyby beru z velké části na sebe. Pan Beránek se do práce pustil s vervou a nadšením, pracoval solidně a spolehlivě, na konsultace docházel často a se spoustou smysluplných dotazů, instrukce plnil svědomitě a rychle. Jde o talentovaného mladého matematika se solidními základy a nadáním pro výzkumnou práci. Doufám, že své výsledky brzy dotáhne do publikovatelné podoby.

Doporučuji práci uznat jako bakalářskou.

Reference

[1] V. Musil, *Optimal Orlicz domains in Sobolev embeddings into Marcinkiewicz spaces*, J. Funct. Anal. 270 (7), 2653–2690 (2016).

[2] V. Musil, L. Pick, J. Takáč, *Optimality problems in Orlicz spaces*, arXiv:2209.14208, přijato k publikaci do Adv. Math.