Oponentský posudek na bakalářskou práci pana Tomáše Beránka

Bakalářská práce pana Beránka zkoumá otázku, zda existuje optimální (=největší) Orliczův prostor L^A, pro který platí Sobolevovo vnoření

$$W^m L^A(\Omega) \hookrightarrow L^{\infty,q,-1+m(1-\alpha)-\frac{1}{q}}(\Omega) \tag{1}$$

pro *všechny* omezené oblasti $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ z tzv. Maz'yovy třídy $\mathcal{J}_\alpha$, kde $\alpha \in [1/(n'), 1)$, $m < 1/(1-\alpha)$ a $q \in [1/(1-m(1-\alpha), \infty]$. Oblasti z Maz'yovo tříd mohou být silně neregulární a „divoké“ (čím blíže je α k 1, tím divočejší mohou být), Lipschitzovské oblasti náleží do Mazy'ovo třídy s $\alpha = 1/(n')$. Negativní odpověď v případě Lipschitzovských oblastí byla nedávno dána v (preprintovém) článku [V. Musil, L. Pick, J. Takáč. *Optimality problems in Orlicz spaces.* arXiv:2209.14208 [math.FA], 2022.], ze kterého předkládaná práce vychází a některé jeho výsledky zobecňuje.

Práce je psána v anglickém jazyce a její jazyková úroveň je myslím dobrá (i když volba některých slov/frází mi občas přišla poněkud zvláštní). Při čtení práce jsem narazil na přiměřený počet překlepů a vynechaný slov (zejména členů) či interpunkčních znamének. Své nálezy dále neuvádím, ale pokud by autor měl zájem práci dále rozvíjet, jak naznačuje na samém závěru práce, rád mu je poskytnu. Práce je pěkně strukturovaná a není problém se v ní orientovat.

První kapitola shrnuje základní teorii prostorů funkcí s normou invariantní vůči přerovnání a jejich důležité podtřídy Orliczových prostorů a dále zavádí nad těmito prostory funkcí postavené Sobolevovy prostory.

Druhá kapitola je ve své podstatě kompilační, autor zde shrnuje některé (často velmi nové a aktuální) výsledky z teorie Sobolevových prostorů postavených nad prostory funkcí s normou invariantní vůči přerovnání.

Kapitola 3 obsahuje autorovy vlastní výsledky, které jsou také hlavní náplní práce. Hlavními výsledky jsou Theorem 3.5 a Theorem 3.9, ve kterém autor dokazuje neexistenci optimálního Orliczova prostoru, pro který by vnoření (1) platilo pro všechny $\Omega \in \mathcal{J}_\alpha$. Autor tedy získal vlastní nové výzkumné výsledky, což myslím rozhodně přesahuje to, co se očekává od bakalářské práce. Navíc je třeba zmínit, že zobecnění, které autor provedl, rozhodně není triviální, jelikož přechod od „pěkných Lipschitzovských oblastí“ k obecným Mazy'ovo třídám oblastí s sebou nese nemalé technické komplikace a záludnosti. S těmito komplikacemi a záludnostmi tak trochu souvisí mé dvě závažnější připomínky/otázky, které k práci mám a na které by měl kolega myslím zareagovat během obhajoby.

(1) Funkce $I\colon [0,1] \to [0,\infty]$ vystupující v Theorem 3.1 jistě nemůže být obecná (to se poté zanese také do Corollary 3.2). Pro začátek by bylo dobré, aby byla měřitelná, ale ani to nestačí. Dá se ukázat, že funkcionál $\|\cdot\|_{X(0,1)}$, který autor definuje, je pro I neklesající (a konečnou), což je zcela přirozené předpokládat vzhledem ke kontextu práce, r.i. norma právě tehdy, když

$$\left((0,1) \ni t \mapsto \int_t^1 \frac{1}{I(s)} ds\right) \in Y(0,1).$$

Autor v důkazu tvrdí, že skutečnost, že $\|\cdot\|_{X(0,1)}$ je r.i. norma plyne z Theorem 2.3. Zmiňovaná věta ovšem pracuje s velmi konkrétní funkcí I. Navíc obsahuje předpoklad na prostor Y, o jehož splnění či nesplnění autor nic neříká. Tento předpoklad je sice ve skutečnosti zbytečný (viz níže), ale uvedený tam je.

(2) Pod Corollary 3.2 autor píše: „We aim to prove, that for Mazy'a classes of domains, Theorem 3.1 may by applied to them directly, omitting the need for presupposition (3.2) entirely.“ Jelikož (3.2) je předpoklad Theorem 3.1, tak je třeba, aby tento předpoklad byl splněn, chceme-li Theorem 3.1 použít. Nechtěl autor spíše říct, že předpoklad (3.2) je splněn? Podobné zvláštní formulace v souvislosti s (3.2) se objeví ještě na pár místech. Spíše mě ale zaujala skutečnost, že autor sice mluví o obecných doménách z Mazy'ovo tříd, ale Corollary 3.4, na které se autor odvolává v důkazu Theorem 3.5, mluví o jedné konkrétní doméně z dané třídy, která je dle autora „worst domain with such [a] property“. Není ale vysvětleno, v jakém smyslu je nejhorší a proč se nám stačí omezit na tuto doménu. To si musí čtenář sám vypátrat a rozmyslet z důkazu Theorem 3.5, kde to také není zdůvodněno. Mohl by to autor trochu osvětlit?

Mé další připomínky a poznámky přikládám na konec, není nutné aby na ně autor reagoval. Rád bych zde zdůraznil, že téma práce, do kterého se autor pustil, rozhodně není jednoduché a vyžaduje pochopení velkého množství netriviálních výsledků a technik, které jsou rozprostřeny v různých článcích, a jejich ovládnutí vyžaduje spoustu znalostí, jejichž rozsah dle mého názoru výrazně převyšuje očekávané znalosti od absolventa bakalářského studia. „Pod povrchem“ se děje spousta jemných věcí a i expert se při studiu Sobolevových vnořeních na neregulárních oblastech snadno „sekne“. Navzdory mým připomínkám si tedy myslím, že autor se tématu chopil se ctí a pěkně ho zpracoval. Práce je rozhodně zajímavá a čtivá. Dále si myslím, že řada mých připomínek by zde nebyla, kdyby autor mohl pracovat v klidu bez deadlinu, a těším se na navazující práci, kterou autor opatrně slibuje na konci své práce. Jsem přesvědčen, že práce rozhodně splňuje nároky kladné na bakalářskou práci studenta MFF UK a **doporučuji ji uznat jako bakalářskou práci**.

Zdeněk Mihula

V KYSUCKÉM LIESKOVCI 12.08.2023

- Místo $T : X \to Y$ (`T: X \to Y`) se dá psát $T\colon X \to Y$ (`T\colon X \to Y`), což obvykle vypadá lépe a bývá doporučováno.
- Dle mého názoru se slovo *sandwich* používá trochu moc často vzhledem k tomu, že se jedná o formální odborný text. Jednou (možná dvakrát) na správném místě ve správnou chvíli je myslím tak akorát.
- Myslím, že je vhodné psát spíše něco jako
$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{(if)/(\dots)/(,)} t \in [a,b], \\ 2 & \text{(if)/(\dots)/(,)} t \in [x,y], \end{cases}$$
než
$$f(t) = \begin{cases} 1 & t \in [a,b], \\ 2 & t \in [x,y]. \end{cases}$$
- Není myslím důvod psát „Lemma“ atp. uprostřed věty, pokud se nejedná o číslovaný odkaz typu „Lemma 11.99“.
- Myslím, že je vhodnější kvantifikátory a logické symboly v textu rozepisovat pomocí slov.
- V celé práci se píše $n \in \mathbb{N}$ (dimenze $\mathbb{R}^n$), mělo by ale myslím být $n \geq 2$, jelikož v případě $n = 1$ se člověk na spoustě míst dostává na tenký led a často se pod něj boří.
- Přijde mi, že se v práci používá $=$ versus $\approx$ poněkud nepořádně.
- Jelikož se v práci používá „non-increasing“ a „non-decreasing“, tak myslím, že by bylo vhodnější f^* nazvat *non-increasing rearrangement* místo *decreasing rearrangement*, jelikož je to obecně pouze nerostoucí funkce.
- V definici kvazikonkávní funkce $\varphi\colon [0\infty) \to [0,\infty)$ myslím chybí informace, že $\varphi(0) = 0$ (funkce ale potom už striktně vzato není „positive“).
- Při definici uvedené v práci je fundamentální funkce Lorentzovo prostoru Λ_φ rovná $\overline{\varphi}$ a je tedy pouze ekvivalentní φ. S tím souvisí skutečnost, že norma vnoření
$$\Lambda(X) \hookrightarrow X$$
pak nemusí být rovna 1, jak se tvrdí pod (1.3).
- Konvence $1/\infty = 0 \cdot \infty = 0$ se používá již dříve, než je zmíněna na straně 7.
- Bylo by myslím dobré zmínit/připomenout, proč jsou L^p a L^A normy invariantní vůči přerovnání, jelikož nejsou definovány skrz f^* ani f_*.
- Na straně 8 bych byl opatrnější s tvrzením, kdy nastává rovnost $L^{p,q}$ prostorů, jelikož pro $1 \leq r < s < \infty = p$ je $L^{\infty,r} = L^{\infty,s} = \{0\}$.
- Na straně 9 se tvrdí, že pro daný r.i. prostor X existuje jednoznačný Orliczův prostor na stejné fundamentální úrovni. Chybí ale jakékoliv vysvětlení/reference. Důvod se poté mimoděk objeví na začátku strany 10.
- Pod definicí isoperimetrické funkce na straně 10 se uvádí nerovnost $I_\Omega \leq ct^{\frac{1}{n'}}$ pro $t \to 0^+$ a následně se píše: „[...] $I_\Omega(t)$ cannot decay more slowly than $t^{\frac{1}{n'}}$ as $t \to 0$, independently of Ω.“ Není pravda, že je to nezávisle na Ω. Konstanta ve zmiňované nerovnosti obecně závisí na Ω. Platí to ale pro každou Ω.
- Věta „By definition, every Lipschitz domain is a John domain.“ na straně 11 mi nepřijde vhodná, protože vyznívá, jako by definice lipschitzovské oblasti byla něco jako „A Lipschitz domain is a John domain such that…“

- Bylo by myslím dobré v práci uvést, co se přesně rozumí symbolem ∇^k. Ne všichni tím značí vektor par. derivací $k$tého řádu. Např. ∇^2 může v některých kruzích znamenat Laplaceův operátor.
- Předpoklad v Theorem 2.3 by měl myslím být $Y(0,1) \hookrightarrow L^{\frac{1}{1-m(1-\alpha)},1}(0,1)$, nikoliv $Y(0,1) \hookrightarrow L^{\frac{1}{1-m(1-\alpha)}}(0,1)$. Předpoklad je ale ve skutečnosti zbytečný, v citovaném zdroji se objevu kvůli interpolační technice, která byla použita. Navíc, jak je tam poznamenáno, je to v podstatě bez újmy na obecnosti (to je ale třeba si rozmyslet, proč to tak je…). Novější zdroje už tento předpoklad neobsahují.
- V důkazu Theorem 3.1 na straně 16 se skrytě používá, že fundamentální funkce je lokálně absolutně spojitá na $(0,1]$, což se ale nikde nezmiňuje. Skutečnost, že má skoro všude derivaci jakožto monotonní funkce, by nám nemusela stačit… Ostatně to už se skrytě používá, když se alternativně vyjadřuje norma $\Lambda(Y)$.
- Myslím, že druhá rovnost v (3.6) by si zasloužila komentář. Dále myslím, že to má být $\min\{t^{1-\alpha}, ts^{-\alpha}\}$, nikoliv $\min\{t^{\alpha}, ts^{-\alpha}\}$. Všechny výskyty α pod (3.6) by pak měly být myslím nahrazeny $1-\alpha$.
- Použití Corollary 3.2 a Corollary 3.4 v důkazu Theorem 3.5 by mělo myslím být podrobněji vysvětleno.
- Jelikož se jedná o bakalářskou práci, nikoliv článek, myslím, že by mělo být alespoň naznačeno, jak se používá citovaný výsledek k důkazu omezenosti supremálního operátoru v důkazu Lemma 3.8. Také argumenty v prvním odstavci důkazu Theorem 3.9 by měly být myslím podrobnější.
- Odkud se vzala dualita na straně 21?
- Přijde mi, že striktně vzato to, co se dokáže pod (3.12), je implikace [platnost (3.12) implikuje $\beta \geq -m(1-\alpha)$]. Cílem ale bylo dokázat opačnou implikaci. Problém vidím ve větě „Suppose the equality (3.12) holds.“, která výpočet uvozuje. Je ale zřejmé, že se jedná pouze o nešťastnou formulaci a výpočet dává, co autor potřebuje.