MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ FAKULTA
Univerzita Karlova

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Igor Böhm

Pólyův-Lundbergův proces

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí bakalářské práce: doc. RNDr. Zbyněk Pawlas, Ph.D.
Studijní obor: Obecná matematika

Praha 2023

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů. Tato práce nebyla využita k získání jiného nebo stejného titulu.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V .... dne ....

Podpis autora

Srdečně bych chtěl poděkovat doc. RNDr. Zbyňku Pawlasovi, Ph.D. za vedení mé bakalářské práce, za veškerý jeho věnovaný čas a za všechny jeho připomínky, díky kterým mohla tato práce vzniknout. Taktéž bych chtěl poděkovat všem mým blízkým, kteří mě vždy podporují.

Název práce: Pólyův-Lundbergův proces

Autor: Igor Böhm

Katedra: Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí bakalářské práce: doc. RNDr. Zbyněk Pawlas, Ph.D., Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Abstrakt: Tématem této bakalářské práce je Pólyův-Lundbergův proces. Jedná se o nehomogenní Markovův řetězec, který představuje jisté zobecnění Poissonova procesu. Cílem práce je popsat některé jeho důležité vlastnosti, dokázat je a uvést tento náhodný proces do kontextu a souvislostí. Práce je členěna do čtyř kapitol, kde první kapitola představuje základní pojmy nutné pro porozumění textu. Ve druhé kapitole je Pólyův-Lundbergův proces definován a jsou odvozeny jeho základní charakteristiky. Třetí kapitola se zabývá souvislostí mezi smíšeným Poissonovým procesem a Pólyovým-Lundbergovým procesem. Závěrečná kapitola se zabývá tzv. urnovým modelem, jeho zobecněním, u kterého se ukáže, že za určitých podmínek konverguje k Pólyovu-Lundbergovu procesu v pevném časovém okamžiku.

Klíčová slova: Pólyův-Lundbergův proces, Poissonův proces, Pólyovy urnové modely

Title: Pólya-Lundberg process

Author: Igor Böhm

Department: Department of Probability and Mathematical Statistics

Supervisor: doc. RNDr. Zbyněk Pawlas, Ph.D., Department of Probability and Mathematical Statistics

Abstract: The main subject of the Bachelor's thesis is the Pólya-Lundberg process. It is a non-homogenous Markov chain that represents a generalization of the Poisson process. The main aim of the thesis is to depict some of its important features, to prove them and to put them into context. The thesis is sectioned into four chapters where the first chapter introduces basic concepts and objects that are crucial for understanding of this text. In the second chapter we define the Pólya-Lundberg process and we derive some of its main characteristics. The third chapter is devoted to the relationship between the Pólya-Lundberg process and the mixed Poisson process. Lastly, the final chapter discusses the so-called urn models, especially its generalization for which there is shown that if several conditions are fulfilled the generalized urn model converges to the Pólya-Lundberg process at a fixed time.

Keywords: Pólya-Lundberg process, Poisson process, Pólya urn models

Obsah

Úvod

Cílem této bakalářské práce je čtenáři přiblížit Pólyův-Lundbergův proces. Tento náhodný proces se dá interpretovat jako zobecnění takzvaného Poissonova procesu. Poissonův proces popisuje počet výskytů nějaké události do času t jako například počet aut, která projela ulicí, počet hovorů, které za časovou jednotku přijdou na telefonní centrálu a podobně. Intenzity pozorování nové události jsou v homogenním Poissonově procesu konstantní a nezávislé na čase. Pólyův-Lundbergův proces však tyto intenzity konstantní nemá, z čehož pramení jeho nehomogenita. Není tedy překvapivé, že užití Pólyova-Lundbergova procesu je podobné jako Poissonova procesu, dá se využít například při sledování rozpadů nukleárních částic (Arley (1949)) nebo hraje důležitou roli v neživotním pojištění (Lundberg (1940)).

Celá práce je z převážné části založena na článku Pfeifer (2006), který představuje důležité vlastnosti Pólyova-Lundbergova procesu, zasazuje ho do kontextu a hlavně ukazuje různé způsoby, jak jej lze definovat, případně jak souvisí s problémy, které zdánlivě s Pólyovým-Lundbergovým procesem nijak nesouvisejí. Ovšem článek je psán stručným způsobem, ve kterém se člověk může lehce ztratit. V tomto textu tento náhodný proces detailně a srozumitelně rozvedeme.

Nejdříve bude Pólyův-Lundbergův proces zaveden axiomatickou definicí jako speciální případ Markovova řetězce se spojitým časem. Prozkoumáme jeho různé charakteristiky jako rozdělení, střední hodnotu, rozptyl aj. Také vypočítáme pravděpodobnosti přechodu, které explicitně vyjádříme (kde podotkněme, že se tyto vzorce ve zmíněném článku vůbec nevyskytují a tím se bakalářská práce od něj nejvíce odlišuje). Dále zavedeme takzvaný smíšený Poissonův proces. I u něj ukážeme některé vlastnosti a především dokážeme, že má pro vhodně zvolenou řídící intenzitu stejné rozdělení jako Pólyův-Lundbergův proces.

Na závěr zavedeme takzvané urnové modely. Zde u specifického urnového modelu prozkoumáme jeho chování, taktéž vypočteme střední hodnotu, rozptyl a zejména dokážeme, že za určitých podmínek takové schéma „konverguje“ k Pólyovu-Lundbergovu procesu v daném čase $t \geq 0$.

1. Základní definice a poznatky

V této kapitole zavedeme některé základní pojmy a případně uvedeme některé jejich vlastnosti, které budou používány ve zbytku textu.

Definice 1. *Systém celočíselných náhodných veličin* $\{X(t),\, t \geq 0\}$ *definovaných na pravděpodobnostním prostoru* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathsf{P})$ *se nazývá Markovův řetězec se spojitým časem a spočetnou množinou stavů, kterou budeme značit* S*, jestliže*

$$\mathsf{P}\left(X(t) = j | X(s) = i, X(t_n) = i_n, \ldots, X(t_1) = i_1\right) = \mathsf{P}\left(X(t) = j | X(s) = i\right) \tag{1.1}$$

pro všechna $i, j, i_1, \ldots, i_n \in S$ *a pro všechna* $0 \leq t_1 < t_2 < \cdots < t_n < s < t$*, pro která* $\mathsf{P}\left(X(s) = i, X(t_n) = i_n, \ldots, X(t_1) = i_1\right) > 0$.

Rovnosti (1.1) *se říká Markovova vlastnost a pravděpodobnostem na pravé straně se říká pravděpodobnosti přechodu ze stavu* i *v čase* s *do stavu* j *v čase* t *a značíme je* $p_{i,j}(s,t) = \mathsf{P}\left(X(t) = j | X(s) = i\right)$*. Maticí pravděpodobností přechodu pak nazveme matici*

$$\boldsymbol{P}(s,t) = \Big(p_{i,j}(s,t)\Big)_{i,j \in S}.$$

Dále budeme pro každý náhodný proces předpokládat, že je množina eficientních stavů $S = \mathbb{N}_0$*, pokud nebude řečeno jinak.*

Věta 2 (Chapmanova-Kolmogorovova rovnost)**.** *Nechť* $\{X(t), t \geq 0\}$ *je Markovův řetězec,* $p_{i,j}(s,t)$ *je pravděpodobnost přechodu ze stavu* i *v čase* s *do stavu* j *v čase* t*,* $\boldsymbol{P}(s,t)$ *matice pravděpodobností přechodu. Potom pro* $i, j \in \mathbb{N}_0$*,* $t \geq s \geq 0$ *a* $h > 0$ *platí, že*

$$\boldsymbol{P}(s,\, t+h) = \boldsymbol{P}(s,\, t)\boldsymbol{P}(t,\, t+h),$$

psáno po prvcích

$$p_{i,j}(s, t+h) = \sum_{k=0}^{\infty} p_{i,k}(s,t) p_{k,j}(t, t+h).$$

Důkaz.

$$\begin{aligned}
p_{i,j}(s,t+h) &= \mathsf{P}(X(t+h) = j | X(s) = i) = \\
&= \sum_{k \in S} \mathsf{P}(X(t+h) = j, X(t) = k | X(s) = i) = \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \mathsf{P}(X(t+h) = j, X(t) = k | X(s) = i) = \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \mathsf{P}(X(t+h) = j | X(t) = k, X(s) = i)\, \mathsf{P}(X(t) = k | X(s) = i) = \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \mathsf{P}(X(t+h) = j | X(t) = k)\, \mathsf{P}(X(t) = k | X(s) = i) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} p_{k,j}(t, t+h) p_{i,k}(s,t),
\end{aligned}$$

kde jsme ve třetím řádku přešli od rozvoje sumy přes množinu S do množiny $\mathbb{N}_0$, neboť $\mathsf{P}(X(t) = k) = 0$ pro všechna $k \in \mathbb{N}_0 \setminus S$. V pátém řádku jsme použili

Markovovu vlastnost.

□

Všimněme si, že v důkazu předchozí věty v úpravě na čtvrtém řádku může nastat situace, kdy $\mathsf{P}(X(t)=k, X(s)=i)=0$. V tomto případě můžeme bez újmy na obecnosti předpokládat, že součin $\mathsf{P}(X(t+h)=j|X(t)=k, X(s)=i)\,\mathsf{P}(X(t)=k|X(s)=i)=0$.

Definice 3. *Markovův řetězec $\{X(t), t\geq 0\}$, který začíná ve stavu 0 (neboli $X(0)=0$), nazveme proces růstu s intenzitami $\lambda_n(t)$, jestliže pro jeho pravděpodobnosti přechodu platí*

$$p_{m,n}(t,t+h)=\begin{cases}0 \quad \text{pro } n<m,\\ 1-\lambda_m(t)h+o(h) \quad \text{pro } n=m,\\ \lambda_m(t)h+o(h) \quad \text{pro } n=m+1,\\ o(h) \quad \text{pro } n>m+1,\end{cases} \tag{1.2}$$

kde $t\geq 0$, $h>0$, $m,n\in\mathbb{N}_0$ a $\lambda_n(t)$ je nějaká funkce. Zde $o(h)$ reprezentuje nějakou funkci, pro kterou platí

$$\lim_{h\to 0_+}\frac{o(h)}{h}=0.$$

Definice 4. *Řekneme, že náhodný proces $N=\{N(t), t\geq 0\}$ je homogenní Poissonův proces, jestliže je N proces růstu s intenzitami $\lambda_n(t)=\lambda$ pro všechna $n\in\mathbb{N}_0, t\geq 0$, kde $\lambda>0$.*

Poznámka. Pro homogenní Poissonův proces $N=\{N(t), t\geq 0\}$ platí, že

1. $N(0)=0$,
2. N má nezávislé přírůstky,
3. pro pevná $t>s\geq 0$ je $N(t)-N(s)$ náhodná veličina s Poissonovým rozdělením s parametrem $\lambda(t-s)$.

Definice 5. *Nechť $\{X(t),\, t\geq 0\}$ je Markovův řetězec. Pro všechna $i,j\in\mathbb{N}_0$, $t\geq 0$ definujme*

$$q_i(t)=\lim_{h\to 0_+}\frac{1-p_{i,i}(t,t+h)}{h},$$

$$q_{i,j}(t)=\lim_{h\to 0_+}\frac{p_{i,j}(t,t+h)}{h},\ j\neq i.$$

Číslo $q_{i,j}(t)$ nazýváme intenzita přechodu v čase t ze stavu i do stavu j, číslo $q_i(t)$ nazýváme celková intenzita v čase t.

Označíme-li $q_{i,i}(t)=-q_i(t)$, pak matici $\boldsymbol{Q}(t)=\{q_{i,j}(t),\, i,j\in\mathbb{N}_0\}$ nazýváme maticí intenzit přechodu v čase t.

Poznámka. Takto definované intenzity vskutku existují a jsou to konečná nezáporná čísla (viz Prášková a Lachout (2012), věta 3.3).

Pro proces růstu platí, že $q_i(t)=\sum_{j\neq i} q_{i,j}(t)$ pro $i\in S$ a $t\geq 0$.

Lemma 6. *Nechť je* $\{X(t), t \geq 0\}$ *proces růstu s intenzitami* $\lambda_j(t)$*. Pak pro jeho intenzity přechodu platí*

$$\begin{aligned} q_{i,i}(t) &= -\lambda_i(t), \\ q_{i,i+1}(t) &= \lambda_i(t), \\ q_{i,j}(t) &= 0 \quad \textit{pro } j > i+1, \\ q_{i,j}(t) &= 0 \quad \textit{pro } j < i. \end{aligned}$$

Důkaz. Ze vzorce (1.2) platí, že pro $i \in \mathbb{N}_0$

$$\begin{aligned} q_{i,i}(t) &= \lim_{h \to 0_+} \frac{p_{i,i}(t, t+h) - 1}{h} = \lim_{h \to 0_+} \frac{1 - \lambda_i(t)h + o(h) - 1}{h} = \\ &= \lim_{h \to 0_+} -\lambda_i(t) + \frac{o(h)}{h} = -\lambda_i(t), \\ q_{i,i+1}(t) &= \lim_{h \to 0_+} \frac{p_{i,i+1}(t, t+h)}{h} = \lim_{h \to 0_+} \frac{\lambda_i(t)h + o(h)}{h} = \lambda_i(t), \\ q_{i,j}(t) &= \lim_{h \to 0_+} \frac{p_{i,j}(t, t+h)}{h} = \lim_{h \to 0_+} \frac{o(h)}{h} = 0 \quad \text{pro } j > i+1, \\ q_{i,j}(t) &= \lim_{h \to 0_+} \frac{p_{i,j}(t, t+h)}{h} = \lim_{h \to 0_+} \frac{0}{h} = 0 \quad \text{pro } j < i. \end{aligned}$$

□

Poznámka. Předchozí lemma nám ukazuje, že nejednoznačnost výrazu intenzita mezi definicemi 3 a 5 nám nebude činit problém a ve zbytku textu bude tento výraz používán v obou smyslech.

Lemma 7 (Kolmogorovovy rovnice pro proces růstu)**.** *Nechť* $\boldsymbol{P}(s,t)$ *je matice pravděpodobností přechodu a* $\boldsymbol{Q}(t)$ *je matice intenzit procesu růstu* $\{X(t),\, t \geq 0\}$*. Pak platí pro* $0 \leq s \leq t$ *rovnost*

$$\frac{\partial}{\partial t} \boldsymbol{P}(s,t) = \boldsymbol{P}(s,t)\, \boldsymbol{Q}(t).$$

Rozepsáno po prvcích

$$\frac{\partial\, p_{i,j}(s,t)}{\partial t} = \sum_{k=0}^{\infty} p_{i,k}(s,t) q_{k,j}(t).$$

Důkaz. Nechť $i, j \in \mathbb{N}_0$, $0 \leq s \leq t$. Dle Chapmanovy-Kolmogorovovy rovnosti (věta 2) je

$$p_{i,j}(s, t+h) = \sum_{k=0}^{\infty} p_{i,k}(s,t)\, p_{k,j}(t, t+h),$$

kde $h > 0$. Potom

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial\, p_{i,j}(s,t)}{\partial t} &= \lim_{h\to 0} \frac{p_{i,j}(s,t+h) - p_{i,j}(s,t)}{h} = \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\sum_{k=0}^{\infty} p_{i,k}(s,t)\, p_{k,j}(t,t+h) - p_{i,j}(s,t)}{h} = \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\sum_{k=0}^{j} p_{i,k}(s,t)\, p_{k,j}(t,t+h) - p_{i,j}(s,t)}{h} = \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\sum_{k=0}^{j-1} p_{i,k}(s,t)\, p_{k,j}(t,t+h) - p_{i,j}(s,t)(1 - p_{j,j}(t,t+h))}{h} = \\
&= \lim_{h\to 0} \left(\sum_{k=0}^{j-1} p_{i,k}(s,t) \frac{p_{k,j}(t,t+h)}{h} - p_{i,j}(s,t) \frac{1 - p_{j,j}(t,t+h)}{h} \right) = \\
&= \sum_{k=0}^{j-1} p_{i,k}(s,t) q_{k,j}(t) - p_{i,j}(s,t)(-q_{j,j}(t)) = \sum_{k=0}^{j-1} p_{i,k}(s,t) q_{k,j}(t) + p_{i,j}(s,t) q_{j,j}(t) = \\
&= \sum_{k=0}^{j} p_{i,k}(s,t) q_{k,j}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} p_{i,k}(s,t) q_{k,j}(t),
\end{aligned}
$$

kde rovnost na třetím řádku platí, protože pro každé $k > j$ je $p_{k,j}(t, t+h) = 0$ z definice procesu růstu, dále poslední rovnost plyne z lemmatu 6, protože pro všechna $k > j$ je $q_{k,j}(t) = 0$, a dále se používaly obyčejné úpravy výrazů a aritmetika limit reálných posloupností.

□

Tvrzení z lemmatu 7 pro obecný homogenní náhodný proces s důkazem, které bylo ze značné části převzato i zde, lze nalézt v Prášková a Lachout (2012, věta 3.10).

Rovnicím, které tady nazýváme pouze Kolmogorovovy, se někdy říká prospektivní Kolmogorovovy rovnice, aby se nepletly s tzv. retrospektivními Kolmogorovovými rovnicemi. Ježto se retrospektivní rovnice v této práci nepoužívají, přichýlíme se ke kratšímu názvu.

2. Pólyův-Lundbergův proces

V této kapitole se dostáváme k samotnému Pólyovu-Lundbergovu procesu. Nejprve ho definujeme.

Definice 8. *Markovův řetězec $\{N(t), t \geq 0\}$ nazveme Pólyův-Lundbergův proces s parametry α, $\lambda > 0$, pokud se jedná o proces růstu s intenzitami*

$$\lambda_n(t) = \lambda \frac{1 + \alpha n}{1 + \alpha\lambda t},$$

kde $n \in \mathbb{N}_0$ a $t \geq 0$.

Jednoduše si pak můžeme uvědomit z definice 3, jak budou vypadat pravděpodobnosti přechodů Pólyova-Lundbergova procesu. Lepší by ovšem bylo odvodit tyto pravděpodobnosti explicitním vzorečkem (takže bez notace $o(h)$).

V dalším nejdříve odvodíme pravděpodobnosti $p_{0,n}(s,t)$, protože je z nich dobře vidět způsob odvození přes řešení Kolmogorovových diferenciálních rovnic. Posléze dokážeme platnost vzorce pro obecné $p_{m,n}(s,t)$.

Ve zbytku práce budeme bez žádného upozornění používat konvenci, že pro libovolná m, $n \in \mathbb{N}_0$, $n < m$ platí $\prod_{k=m}^{n} a_k = 1$, kde $\{a_k\}$ je jakákoli posloupnost.

Věta 9. *Nechť je $\{N(t), t \geq 0\}$ Pólyův-Lundbergův proces s parametry $\alpha, \lambda > 0$. Pak*

$$p_{0,n}(s,t) = \frac{(\lambda(t-s))^n}{n!}(1 + \alpha\lambda s)^{\frac{1}{\alpha}}(1 + \alpha\lambda t)^{-\left(\frac{1}{\alpha}+n\right)} \times \prod_{k=1}^{n-1}(1 + \alpha k) \tag{2.1}$$

pro $n \in \mathbb{N}_0$ a $0 \leq s \leq t$.

Důkaz. Z lemmatu 6 plyne, že matice intenzit se rovná

$$\mathbf{Q}(t) = \begin{pmatrix} -\lambda_0(t) & \lambda_0(t) & 0 & \dots \\ 0 & -\lambda_1(t) & \lambda_1(t) & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Z Kolmogorovových rovnic (lemma 7) víme, že pro $t \geq s \geq 0$, $i, j \in \mathbb{N}_0$

$$\frac{\partial\, p_{i,j}(s,t)}{\partial t} = \sum_{k=0}^{\infty} p_{i,k}(s,t) q_{k,j}(t).$$

Důkaz tvrzení provedeme matematickou indukcí.

Nejdříve pro $n = 0$ dostáváme z lemmat 6 a 7 parciální diferenciální rovnici

$$\frac{\partial\, p_{0,0}(s,t)}{\partial t} = -p_{0,0}(s,t)\lambda_0(t).$$

Pro jednoduchost označme $y(t) = p_{0,0}(s,t)$ a přepišme předchozí rovnici do tvaru

$$y'(t) = \frac{\partial\, y(t)}{\partial t} = -y(t)\lambda_0(t).$$

Vidíme, že se jedná o obyčejnou diferenciální rovnici se separovanými proměnnými. Vyřešíme ji standardním způsobem. Začneme hledáním řešení rovnice

$$\int \frac{1}{y} dy = \int -\lambda_0(t) dt.$$

Zde je levá strana

$$\int \frac{1}{y} dy = \log(|y|) = \log(y),$$

neboť platí $y = y(t) = p_{0,0}(s,t) \geq 0$, protože se jedná o pravděpodobnost. Pro pravou stranu získáváme

$$\begin{aligned}\int -\lambda_0(t) dt &= \int -\lambda \frac{1}{1+\alpha\lambda t} dt = -\lambda \int \frac{1}{1+\alpha\lambda t} dt = \\ &= -\lambda \frac{1}{\alpha\lambda} \log(1+\alpha\lambda t),\end{aligned}$$

protože $1 + \alpha\lambda t \geq 1$. Dohromady dostáváme

$$\begin{aligned}\log(y) &= \log(1+\alpha\lambda t)^{-\frac{1}{\alpha}} + K, \quad K \in \mathbb{R}, \\ y &= C\,(1+\alpha\lambda t)^{-\frac{1}{\alpha}}, \quad C \in \mathbb{R}, \\ p_{0,0}(s,t) &= C(1+\alpha\lambda t)^{-\frac{1}{\alpha}}.\end{aligned}$$

Z počátečních podmínek máme, že

$$1 = p_{0,0}(s,s) = C(1+\alpha\lambda s)^{-\frac{1}{\alpha}} \implies C = ((1+\alpha\lambda s)^{-\frac{1}{\alpha}})^{-1} = (1+\alpha\lambda s)^{\frac{1}{\alpha}},$$

a tedy

$$p_{0,0}(s,t) = \left(\frac{1+\alpha\lambda s}{1+\alpha\lambda t}\right)^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Nyní předpokládejme, že tvrzení platí pro nějaké $n \in \mathbb{N}_0$. Dle lemmatu 7 platí, že

$$\frac{\partial\, p_{0,n+1}(s,t)}{\partial t} = p_{0,n}(s,t)\lambda_n(t) - p_{0,n+1}(s,t)\lambda_{n+1}(t). \tag{2.2}$$

Zde označme $y(t) = p_{0,n+1}(s,t)$ pro $s \geq 0$. Pak rovnici (2.2) přepíšeme do tvaru

$$y'(t) = p_{0,n}(s,t)\lambda_n(t) - y(t)\lambda_{n+1}(t).$$

Tato rovnice je ovšem lineární diferenciální rovnicí prvního řádu, kde nejdříve najdeme její homogenní řešení y_H analogicky jako v případě pro $n = 0$:

$$\begin{aligned}y'(t) &= -y(t)\lambda_{n+1}(t), \\ \int \frac{1}{y} dy &= \int -\lambda_{n+1}(t) dt.\end{aligned}$$

Zde

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{y} dy &= \log(|y|) = \log(y), \\ \int -\lambda_{n+1}(t) dt &= \int -\lambda \frac{1+\alpha(n+1)}{1+\alpha\lambda t} dt = \frac{-(1+\alpha(n+1))}{\alpha} \log(1+\alpha\lambda t).\end{aligned}$$

Z toho tedy dostáváme, že

$$y_H(t) = C(t)(1+\alpha\lambda t)^{-\left(\frac{1}{\alpha}+(n+1)\right)},$$

kde $C : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je nějaká reálná funkce. Dále vypočítáme derivaci

$$\begin{aligned} y_H'(t) &= C'(t)(1+\alpha\lambda t)^{-\left(\frac{1}{\alpha}+(n+1)\right)} - C(t)\frac{1+\alpha(n+1)}{\alpha}(1+\alpha\lambda t)^{-\left(\frac{1}{\alpha}+(n+2)\right)}\alpha\lambda \\ &= C'(t)(1+\alpha\lambda t)^{-\left(\frac{1}{\alpha}+(n+1)\right)} - C(t)\lambda(1+\alpha(n+1))(1+\alpha\lambda t)^{-\left(\frac{1}{\alpha}+(n+2)\right)}. \end{aligned}$$

Dosazením do původní diferenciální rovnice a použitím indukčního kroku získáváme

$$\begin{aligned} & C'(t)(1+\alpha\lambda t)^{-\left(\frac{1}{\alpha}+(n+1)\right)} - \underbrace{\lambda\frac{1+\alpha(n+1)}{1+\alpha\lambda t}}_{=\lambda_{n+1}(t)} C(t)(1+\alpha\lambda t)^{-\left(\frac{1}{\alpha}+(n+1)\right)} + \\ & + \lambda_{n+1}(t)C(t)(1+\alpha\lambda t)^{-\left(\frac{1}{\alpha}+(n+1)\right)} = p_{0,n}(s,t)\lambda_n(t), \\ & C'(t)(1+\alpha\lambda t)^{-\left(\frac{1}{\alpha}+(n+1)\right)} = p_{0,n}(s,t)\lambda_n(t), \\ & C'(t) = (1+\alpha\lambda t)^{\left(\frac{1}{\alpha}+(n+1)\right)}\frac{(\lambda(t-s))^n}{n!}\frac{(1+\alpha\lambda s)^{\frac{1}{\alpha}}}{(1+\alpha\lambda t)^{\frac{1}{\alpha}+n}}\prod_{k=1}^{n-1}(1+\alpha k)\lambda\frac{1+\alpha n}{1+\alpha\lambda t}, \\ & C'(t) = \frac{(\lambda(t-s))^n}{n!}(1+\alpha\lambda s)^{\frac{1}{\alpha}}(1+\alpha\lambda t)\prod_{k=1}^{n-1}(1+\alpha k)\lambda\frac{1+\alpha n}{1+\alpha\lambda t}, \\ & C'(t) = \lambda\frac{(\lambda(t-s))^n}{n!}(1+\alpha\lambda s)^{\frac{1}{\alpha}}\prod_{k=1}^{n}(1+\alpha k), \end{aligned}$$

z čehož získáváme

$$C(t) = \frac{(\lambda(t-s))^{n+1}}{(n+1)!}(1+\alpha\lambda s)^{\frac{1}{\alpha}}\prod_{k=1}^{n}(1+\alpha k) + K, \quad K \in \mathbb{R}.$$

Dohromady dostáváme partikulární řešení diferenciální rovnice

$$y_p(t) = \left(\frac{(\lambda(t-s))^{n+1}}{(n+1)!}(1+\alpha\lambda s)^{\frac{1}{\alpha}}\prod_{k=1}^{n}(1+\alpha k) + K\right)(1+\alpha\lambda t)^{-\left(\frac{1}{\alpha}+(n+1)\right)}.$$

Dosadíme-li počáteční podmínku $0 = p_{0,n+1}(s,s) = y(s)$, najdeme konstantu K

$$\begin{aligned} 0 &= \left(\frac{(\lambda(s-s))^{n+1}}{(n+1)!}(1+\alpha\lambda s)^{\frac{1}{\alpha}}\prod_{k=1}^{n}(1+\alpha k) + K\right)(1+\alpha\lambda s)^{-\left(\frac{1}{\alpha}+(n+1)\right)} \\ &\Rightarrow K = 0, \end{aligned}$$

neboť $(1+\alpha\lambda s)^{-\left(\frac{1}{\alpha}+(n+1)\right)} > 0$. Tímto získáváme pro libovolné $n \in \mathbb{N}$ a $0 \leq s \leq t$, že

$$p_{0,n+1}(s,t) = \frac{(\lambda(t-s))^{n+1}}{(n+1)!}(1+\alpha\lambda s)^{\frac{1}{\alpha}}(1+\alpha\lambda t)^{-\left(\frac{1}{\alpha}+n+1\right)} \times \prod_{k=1}^{n}(1+\alpha k),$$

čímž je důkaz indukcí dokončen.

□

Jednoduchým důsledkem je vzorec pro rozdělení Pólyova-Lundbergova procesu pro $t \geq 0$.

Důsledek 10. *Nechť* $\{N(t),\, t \geq 0\}$ *je Pólyův-Lundbergův proces s parametry* $\alpha, \lambda > 0$*. Pak*

$$\mathsf{P}\left(N(t) = n\right) = \frac{(\lambda t)^n}{n!}(1+\alpha\lambda t)^{-\left(n+\frac{1}{\alpha}\right)} \prod_{k=1}^{n-1}(1+\alpha k) \tag{2.3}$$

pro libovolné $n \in \mathbb{N}_0$ *a* $t \geq 0$.

Důkaz. Plyne okamžitě z věty 9 dosazením $s = 0$ ve vzorci (2.1). $\square$

Poznámka. Pro rozdělení ve vzorci (2.3) z důsledku 10 platí, že pokud $\frac{1}{\alpha} \in \mathbb{N}$, pak má $N(t)$ při pevném $t \geq 0$ negativně binomické rozdělení o parametrech $r = \frac{1}{\alpha}$ a $p = \frac{1}{1+\alpha\lambda t}$.

Věta 11. *Nechť* $\{N(t),\, t \geq 0\}$ *je Pólyův-Lundbergův proces s parametry* $\alpha,\, \lambda > 0$*. Pak*

$$p_{m,n}(s,t) = \frac{(\lambda(t-s))^{n-m}}{(n-m)!} \frac{(1+\alpha\lambda s)^{\frac{1}{\alpha}+m}}{(1+\alpha\lambda t)^{\frac{1}{\alpha}+n}} \prod_{k=m}^{n-1}(1+\alpha k) \tag{2.4}$$

pro $m, n \in \mathbb{N}_0$*,* $m \leq n$ *a* $0 \leq s < t$.

Důkaz. Z lemmat 6 a 7 dostáváme, že

$$\begin{aligned}
\frac{\partial p_{m,n}(s,t)}{\partial t} &= \sum_{k=0}^{\infty} p_{m,k}(s,t) q_{k,n}(t) = \\
&= p_{m,n-1}(s,t) q_{n-1,n}(t) + p_{m,n}(s,t) q_{n,n}(t) = \\
&= \lambda_{n-1}(t) p_{m,n-1}(s,t) - \lambda_n(t) p_{m,n}(s,t) = \\
&= \lambda \frac{1+\alpha(n-1)}{1+\alpha\lambda t} p_{m,n-1}(s,t) - \lambda \frac{1+\alpha n}{1+\alpha\lambda t} p_{m,n}(s,t).
\end{aligned} \tag{2.5}$$

Tvrzení dokážeme dosazením výrazu (2.4) do levé a pravé strany předchozí rovnosti.

Nejdříve uvažujme případ $n = m$. Zde

$$\frac{\partial p_{m,m}(s,t)}{\partial t} = -\lambda \frac{1+\alpha m}{1+\alpha\lambda t} p_{m,m}(s,t).$$

Pro levou stranu rovnosti

$$\begin{aligned}
\frac{\partial p_{m,m}(s,t)}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{(\lambda(t-s))^{m-m}}{(m-m)!} \frac{(1+\alpha\lambda s)^{\frac{1}{\alpha}+m}}{(1+\alpha\lambda t)^{\frac{1}{\alpha}+m}} \prod_{k=m}^{m-1}(1+\alpha k)\right] = \\
&= \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{(1+\alpha\lambda s)^{\frac{1}{\alpha}+m}}{(1+\alpha\lambda t)^{\frac{1}{\alpha}+m}}\right] = -(\frac{1}{\alpha}+m)\alpha\lambda \frac{(1+\alpha\lambda s)^{\frac{1}{\alpha}+m}}{(1+\alpha\lambda t)^{\frac{1}{\alpha}+m+1}} \\
&= -\lambda(1+\alpha m) \frac{(1+\alpha\lambda s)^{\frac{1}{\alpha}+m}}{(1+\alpha\lambda t)^{\frac{1}{\alpha}+m+1}}.
\end{aligned}$$

Pravá strana se rovná

$$-\lambda\frac{1+\alpha m}{1+\alpha\lambda t}\,p_{m,m}(s,t) = -\lambda\frac{1+\alpha m}{1+\alpha\lambda t}\,\frac{(1+\alpha\lambda s)^{\frac{1}{\alpha}+m}}{(1+\alpha\lambda t)^{\frac{1}{\alpha}+m}} =$$
$$= -\lambda(1+\alpha m)\frac{(1+\alpha\lambda s)^{\frac{1}{\alpha}+m}}{(1+\alpha\lambda t)^{\frac{1}{\alpha}+m+1}}.$$

Takže pro $m = n$ tvrzení platí. Toto řešení je dokonce jediné netriviální maximální řešení, jak plyne z Kopáček (2007, sekce 7.3).

Nechť $m < n$. Tvrzení dokážeme obdobně dosazením jako v předchozím případě. Začněme levou stranou:

$$\frac{\partial p_{m,n}(s,t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{(\lambda(t-s))^{n-m}}{(n-m)!}\frac{(1+\alpha\lambda s)^{\frac{1}{\alpha}+m}}{(1+\alpha\lambda t)^{\frac{1}{\alpha}+n}}\prod_{k=m}^{n-1}(1+\alpha k)\right] =$$
$$= \frac{(n-m)\lambda^{n-m}(t-s)^{n-m-1}}{(n-m)!}\frac{(1+\alpha\lambda s)^{\frac{1}{\alpha}+m}}{(1+\alpha\lambda t)^{\frac{1}{\alpha}+n}}\prod_{k=m}^{n-1}(1+\alpha k) -$$
$$- \frac{\lambda^{n-m}(t-s)^{n-m}}{(n-m)!}\frac{\alpha\lambda(\frac{1}{\alpha}+n)(1+\alpha\lambda s)^{\frac{1}{\alpha}+m}}{(1+\alpha\lambda t)^{\frac{1}{\alpha}+n+1}}\prod_{k=m}^{n-1}(1+\alpha k) =$$
$$= \frac{\lambda^{n-m}(t-s)^{n-m-1}}{(n-m-1)!}\frac{(1+\alpha\lambda s)^{\frac{1}{\alpha}+m}}{(1+\alpha\lambda t)^{\frac{1}{\alpha}+n}}\prod_{k=m}^{n-1}(1+\alpha k) -$$
$$- \lambda^{n-m+1}\frac{(t-s)^{n-m}}{(n-m)!}\frac{(1+\alpha\lambda s)^{\frac{1}{\alpha}+m}}{(1+\alpha\lambda t)^{\frac{1}{\alpha}+n+1}}\prod_{k=m}^{n}(1+\alpha k).$$

Pro pravou stranu pak po dosazení obdržíme

$$\lambda\frac{1+\alpha(n-1)}{1+\alpha\lambda t}\,p_{m,n-1}(s,t) - \lambda\frac{1+\alpha n}{1+\alpha\lambda t}\,p_{m,n}(s,t) =$$
$$= \lambda\frac{1+\alpha(n-1)}{1+\alpha\lambda t}\frac{(\lambda(t-s))^{n-m-1}}{(n-m-1)!}\frac{(1+\alpha\lambda s)^{\frac{1}{\alpha}+m}}{(1+\alpha\lambda t)^{\frac{1}{\alpha}+n-1}}\prod_{k=m}^{n-2}(1+\alpha k) -$$
$$- \lambda\frac{1+\alpha n}{1+\alpha\lambda t}\frac{(\lambda(t-s))^{n-m}}{(n-m)!}\frac{(1+\alpha\lambda s)^{\frac{1}{\alpha}+m}}{(1+\alpha\lambda t)^{\frac{1}{\alpha}+n}}\prod_{k=m}^{n-1}(1+\alpha k) =$$
$$= \lambda^{n-m}\frac{(t-s)^{n-m-1}}{(n-m-1)!}\frac{(1+\alpha\lambda s)^{\frac{1}{\alpha}+m}}{(1+\alpha\lambda t)^{\frac{1}{\alpha}+n}}\prod_{k=m}^{n-1}(1+\alpha k) -$$
$$- \lambda^{n-m+1}\frac{(t-s)^{n-m}}{(n-m)!}\frac{(1+\alpha\lambda s)^{\frac{1}{\alpha}+m}}{(1+\alpha\lambda t)^{\frac{1}{\alpha}+n+1}}\prod_{k=m}^{n}(1+\alpha k).$$

Jednoznačnost řešení lze dokázat matematickou indukcí. Případ $m = n$ byl již diskutován. Předpokládejme proto, že (2.5) má jednoznačné řešení pro $n \geq m$. Zde můžeme bez újmy na obecnosti předpokládat, že $s \geq 0$ je pevné, pak rovnici (2.5) můžeme přepsat do tvaru $y' = f(t, y)$, kde f je spojitá funkce. Tato diferenciální rovnice má znova podle Kopáček (2007, sekce 7.3) právě jedno řešení.

$\square$

Čtenáře může napadnout, jak jsme došli ke vzorci (2.4). V této práci byl odhadnut po vypočítání pravděpodobností přechodu pro několik konkrétních hodnot $m, n \in \mathbb{N}_0$ a jejich porovnáním stanoven vzorec, který jsme zde ověřili, že je správný a jediný.

Dále by bylo vhodné pro představu o chování Pólyova-Lundbergova procesu vypočítat jeho střední hodnotu a rozptyl.

Tvrzení 12. *Nechť $N = \{N(t), t \geq 0\}$ je Pólyův-Lundbergův proces s parametry α, λ. Potom pro $t \geq 0$ platí*

$$\mathsf{E}\left[N(t)\right] = \lambda t, \quad \operatorname{var}(N(t)) = \lambda t(1 + \alpha\lambda t).$$

Důkaz. Z definice střední hodnoty a důsledku 10 přímo dostáváme

$$\begin{aligned}
\mathsf{E}\left[N(t)\right] &= \sum_{n=1}^{\infty} n \frac{(\lambda t)^n}{n!}(1+\alpha\lambda t)^{-(n+\frac{1}{\alpha})} \prod_{k=1}^{n-1}(1+\alpha k) \\
&= \lambda t \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}(1+\alpha\lambda t)^{-(n+\frac{1}{\alpha})} \prod_{k=1}^{n-1}(1+\alpha k) \\
&= \frac{\lambda t}{1+\alpha\lambda t} \sum_{n=1}^{\infty}(1+\alpha(n-1)) \underbrace{\frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}(1+\alpha\lambda t)^{-((n-1)+\frac{1}{\alpha})} \prod_{k=1}^{n-2}(1+\alpha k)}_{=p_{n-1}(t)} \\
&= \frac{\lambda t}{1+\alpha\lambda t} \sum_{n=1}^{\infty}(1+\alpha(n-1))p_{n-1}(t) \\
&= \frac{\lambda t}{1+\alpha\lambda t} + \frac{\alpha\lambda t}{1+\alpha\lambda t} \sum_{n=1}^{\infty} p_{n-1}(t)(n-1) = \frac{\lambda t}{1+\alpha\lambda t} + \frac{\alpha\lambda t}{1+\alpha\lambda t}\,\mathsf{E}\left[N(t)\right].
\end{aligned}$$

Odečtením výrazu $\frac{\alpha\lambda t}{1+\alpha\lambda t}\,\mathsf{E}\left[N(t)\right]$ od obou stran dostaneme

$$\begin{aligned}
\mathsf{E}\left[N(t)\right] - \frac{\alpha\lambda t}{1+\alpha\lambda t}\,\mathsf{E}\left[N(t)\right] &= \frac{\lambda t}{1+\alpha\lambda t} \\
\left(1 - \frac{\alpha\lambda t}{1+\alpha\lambda t}\right)\mathsf{E}\left[N(t)\right] &= \frac{\lambda t}{1+\alpha\lambda t} \\
\frac{1}{1+\alpha\lambda t}\,\mathsf{E}\left[N(t)\right] &= \frac{\lambda t}{1+\alpha\lambda t},
\end{aligned}$$

z čehož získáváme, že $\mathsf{E}\left[N(t)\right] = \lambda t$.

Dále druhý faktoriální moment vypočítáme analogicky

$$
\begin{aligned}
&\mathsf{E}\,[N(t)(N(t)-1)] = \sum_{n=2}^{\infty}(n(n-1))\frac{(\lambda t)^n}{n!}(1+\alpha\lambda t)^{-(n+\frac{1}{\alpha})}\prod_{k=1}^{n-1}(1+\alpha k)\\
&= \left(\frac{\lambda t}{1+\alpha\lambda t}\right)^2 \sum_{n=2}^{\infty}\frac{(\lambda t)^{n-2}}{(n-2)!}(1+\alpha\lambda t)^{-((n-2)+\frac{1}{\alpha})}\prod_{k=1}^{n-1}(1+\alpha k)\\
&= \left(\frac{\lambda t}{1+\alpha\lambda t}\right)^2 \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\lambda t)^{n}}{n!}(1+\alpha\lambda t)^{-(n+\frac{1}{\alpha})}\prod_{k=1}^{n+1}(1+\alpha k)\\
&= \left(\frac{\lambda t}{1+\alpha\lambda t}\right)^2 \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\lambda t)^{n}}{n!}(1+\alpha\lambda t)^{-(n+\frac{1}{\alpha})}\left[\prod_{k=1}^{n-1}(1+\alpha k)\right](1+(n+1)\alpha)(1+n\alpha)\\
&= \left(\frac{\lambda t}{1+\alpha\lambda t}\right)^2 \sum_{n=0}^{\infty}p_n(t)(1+(n+1)\alpha)(1+n\alpha)\\
&= \left(\frac{\lambda t}{1+\alpha\lambda t}\right)^2 \sum_{n=0}^{\infty}p_n(t)(1+\alpha(2n+1)+\alpha^2(n^2+n))\\
&= \left(\frac{\lambda t}{1+\alpha\lambda t}\right)^2 \sum_{n=0}^{\infty}p_n(t)(1+2\alpha n+\alpha+\alpha^2(n^2-n)+2\alpha^2 n)\\
&= \left(\frac{\lambda t}{1+\alpha\lambda t}\right)^2 (1+2\alpha\,\mathsf{E}\,[N(t)]+\alpha+\alpha^2\,\mathsf{E}\,[N(t)(N(t)-1)]+2\alpha^2\,\mathsf{E}\,[N(t)]).
\end{aligned}
$$

Podobně jako pro střední hodnotu převedeme $\left(\frac{\alpha\lambda t}{1+\alpha\lambda t}\right)^2 \mathsf{E}\,[N(t)(N(t)-1)]$ na levou stranu a aplikujeme znalost $\mathsf{E}\,[N(t)] = \lambda t$:

$$
\begin{aligned}
\mathsf{E}\,[N(t)(N(t)-1)] - \left(\frac{\alpha\lambda t}{1+\alpha\lambda t}\right)^2 \mathsf{E}\,[N(t)(N(t)-1)] &=\\
&= \left(\frac{\lambda t}{1+\alpha\lambda t}\right)^2 (1+2\alpha\,\mathsf{E}\,[N(t)]+\alpha+2\alpha^2\,\mathsf{E}\,[N(t)]),
\end{aligned}
$$

$$
\frac{2\alpha\lambda t+1}{(1+\alpha\lambda t)^2}\mathsf{E}\,[N(t)(N(t)-1)] = \left(\frac{\lambda t}{1+\alpha\lambda t}\right)^2 (1+2\alpha\,\mathsf{E}\,[N(t)]+\alpha+2\alpha^2\,\mathsf{E}\,[N(t)]),
$$

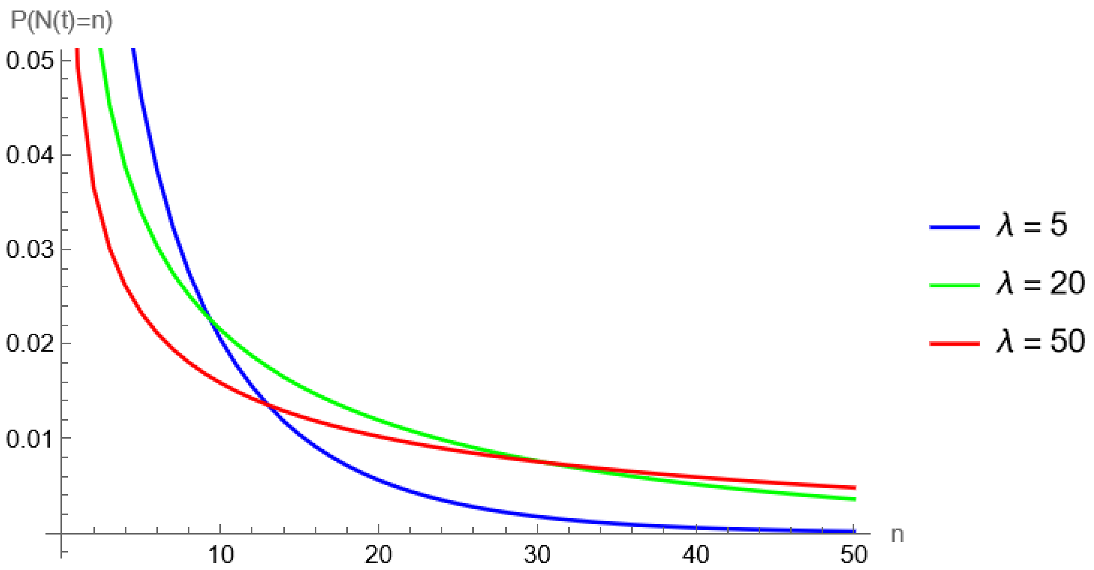
$$
\begin{aligned}
\mathsf{E}\,[N(t)(N(t)-1)] &= \frac{(\lambda t)^2}{2\alpha\lambda t+1}(1+2\alpha\lambda t+\alpha+2\alpha^2\lambda t) =\\
&= \frac{1}{2\alpha\lambda t+1}((\lambda t)^2+2\alpha(\lambda t)^3+\alpha(\lambda t)^2+2\alpha^2(\lambda t)^3).
\end{aligned}
$$

Rozptyl můžeme z definice napsat jako

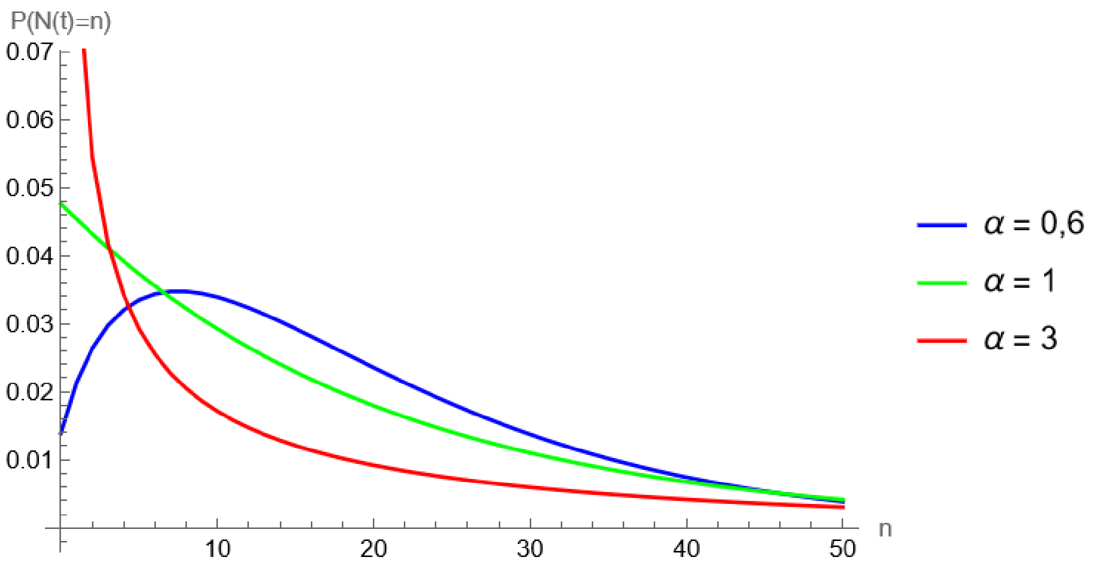
$$
\begin{aligned}
\operatorname{var} N(t) &= \mathsf{E}\,[(N(t))^2] - (\mathsf{E}\,[N(t)])^2 = \mathsf{E}\,[N(t)(N(t)-1)] + \mathsf{E}\,[N(t)] - (\mathsf{E}\,[N(t)])^2\\
&= \frac{1}{2\alpha\lambda t+1}((\lambda t)^2+2\alpha(\lambda t)^3+\alpha(\lambda t)^2+2\alpha^2(\lambda t)^3+\\
&+2\alpha(\lambda t)^2+\lambda t-2\alpha(\lambda t)^3-(\lambda t)^2)\\
&= \frac{\lambda t}{2\alpha\lambda t+1}(\alpha\lambda t+2\alpha^2(\lambda t)^2+2\alpha\lambda t+1)\\
&= \frac{\lambda t}{2\alpha\lambda t+1}(2\alpha^2(\lambda t)^2+3\alpha\lambda t+1)\\
&= \frac{\lambda t}{2\alpha\lambda t+1}(2\alpha\lambda t+1)(\alpha\lambda t+1) = \lambda t(\alpha\lambda t+1).
\end{aligned}
$$

□

Na závěr této kapitoly pro ilustraci uvedeme několik grafů, abychom měli představu, jaký mají jednotlivé koeficienty vliv na Pólyův-Lundbergův proces. Graf by měl samozřejmě ukazovat diskrétní hodnoty pro $n \in \mathbb{N}_0$, pro přehlednost je zde uveden graf diskrétních hodnot proložený spojitou funkcí.



Obrázek 2.1: Obrázek ukazuje závislost změny rozdělení Pólyova-Lundbergova procesu na λ při pevném $t = 1$. Zde jsou $\alpha = 2$ a λ jako v legendě.



Obrázek 2.2: Obrázek ukazuje závislost změny rozdělení Pólyova-Lundbergova procesu na α při pevném $t = 1$. Zde jsou $\lambda = 20$ a α jako v legendě.

3. Smíšený Poissonův proces

V této kapitole zavedeme pojem smíšeného Poissonova procesu, popíšeme některé jeho vlastnosti a hlavně ukážeme jeho spojitost s Pólyovým-Lundbergovým procesem.

Definice 13. *Nechť Λ je nějaká nezáporná náhodná veličina. Smíšeným Poissonovým procesem s řídící intenzitou Λ myslíme takový náhodný proces $\tilde{N} = \{\tilde{N}(t), t \geq 0\}$, pro který platí, že $\tilde{N}|\Lambda$ má rozdělení jako homogenní Poissonův proces s intenzitou Λ.*

Věta 14. *Smíšený Poissonův proces s řídící intenzitou Λ splňuje Markovovu vlastnost* (1.1).

Důkaz. Nechť $0 \leq s < t$ a $i, j \in \mathbb{N}_0$, $i \leq j$. Označme smíšený Poissonův proces s parametry ze znění věty jako $\{\tilde{N}(t), t \geq 0\}$. Potom

$$\begin{aligned}
&\mathsf{P}\left(\tilde{N}(t) = j,\, \tilde{N}(s) = i\right) = \mathsf{P}\left(\tilde{N}(t) - \tilde{N}(s) = j - i,\, \tilde{N}(s) = i\right) = \\
&= \mathsf{E}\left[\mathbb{1}\left[\tilde{N}(t) - \tilde{N}(s) = j - i,\, \tilde{N}(s) = i\right]\right] = \\
&= \mathsf{E}\left[\mathsf{E}\left[\mathbb{1}\left[\tilde{N}(t) - \tilde{N}(s) = j - i, \tilde{N}(s) = i\right]\middle|\Lambda\right]\right] = \\
&= \mathsf{E}\left[\mathsf{E}\left[\mathbb{1}\left[\tilde{N}(t) - \tilde{N}(s) = j - i\right]\mathbb{1}\left[\tilde{N}(s) = i\right]\middle|\Lambda\right]\right] = \\
&= \mathsf{E}\left[\frac{(\Lambda(t-s))^{j-i}}{(j-i)!}e^{-\Lambda(t-s)}\frac{(\Lambda s)^i}{i!}e^{-\Lambda s}\right] = \frac{(t-s)^{j-i}}{(j-i)!}\frac{s^i}{i!}\,\mathsf{E}\left[\Lambda^j e^{-\Lambda t}\right],
\end{aligned} \tag{3.1}$$

kde jsme využili základních vlastností střední hodnoty, podmíněné střední hodnoty, v rovnosti na čtvrtém řádku faktu, že $\tilde{N}(t)|\Lambda$ mají nezávislé přírůstky a v rovnosti na posledním řádku, že přírůstek na časovém intervalu $t - s$ má Poissonovo rozdělení s parametrem $\Lambda(t - s)$ z poznámky za definicí 4. Takže podmíněná pravděpodobnost je rovna

$$\begin{aligned}
\mathsf{P}\left(\tilde{N}(t) = j|\tilde{N}(s) = i\right) &= \frac{\mathsf{P}\left(\tilde{N}(t) = j, \tilde{N}(s) = i\right)}{\mathsf{P}\left(\tilde{N}(s) = i\right)} = \\
&= \frac{\frac{(t-s)^{j-i}}{(j-i)!}\frac{s^i}{i!}\,\mathsf{E}\left[\Lambda^j e^{-\Lambda t}\right]}{\frac{s^i}{i!}\,\mathsf{E}\left[\Lambda^i e^{-\Lambda s}\right]} = \frac{(t-s)^{j-i}}{(j-i)!}\frac{\mathsf{E}\left[\Lambda^j e^{-\Lambda t}\right]}{\mathsf{E}\left[\Lambda^i e^{-\Lambda s}\right]}.
\end{aligned} \tag{3.2}$$

Zde můžeme podobným způsobem jako v (3.1) ukázat, že

$$\mathsf{P}\left(\tilde{N}(s) = i\right) = \mathsf{P}\left(\tilde{N}(s) = i, \tilde{N}(0) = 0\right) = \frac{s^i}{i!}\,\mathsf{E}\left[\Lambda^i e^{-\Lambda s}\right].$$

Nyní uvažujme $n \in \mathbb{N}_0$, $0 \leq t_0 < t_1 < \cdots < t_n < t$ a $i_0, i_1, \ldots, i_n, j \in \mathbb{N}_0$, $i_0 \leq i_1 \leq \cdots \leq i_n \leq j$. Vypočítejme sdruženou pravděpodobnost

$$\mathsf{P}\left(\tilde{N}(t_0) = i_0, \ldots, \tilde{N}(t_n) = i_n, \tilde{N}(t) = j\right).$$

Podobnými úpravami jako výše dostaneme

$$\begin{aligned}
&\mathsf{P}\left(\tilde{N}(t_0) = i_0, \dots, \tilde{N}(t_n) = i_n, \tilde{N}(t) = j\right) = \\
&= \mathsf{P}\left(\tilde{N}(t) - \tilde{N}(t_n) = j - i_n, \dots, \tilde{N}(t_1) - \tilde{N}(t_0) = i_1 - i_0,\, \tilde{N}(t_0) = i_0\right) = \\
&= \mathsf{E}\left[\frac{(\Lambda(t-t_n))^{j-i_n}}{(j-i_n)!} e^{-\Lambda(t-t_n)} \dots \frac{(\Lambda(t_1-t_0))^{i_1-i_0}}{(i_1-i_0)!} e^{-\Lambda(t_1-t_0)} \frac{(\Lambda\, t_0)^{i_0}}{i_0!} e^{-\Lambda t_0}\right] = \\
&= \frac{(t-t_n)^{j-i_n}}{(j-i_n)!} \dots \frac{(t_1-t_0)^{i_1-i_0}}{(i_1-i_0)!} \frac{t_0^{i_0}}{i_0!}\, \mathsf{E}\left[\Lambda^j e^{-\Lambda t}\right].
\end{aligned}$$

Potom se podmíněná pravděpodobnost rovná

$$\begin{aligned}
&\mathsf{P}\left(\tilde{N}(t) = j | \tilde{N}(t_n) = i_n, \dots, \tilde{N}(t_0) = i_0\right) = \\
&= \frac{\mathsf{P}\left(\tilde{N}(t) = j,\, \tilde{N}(t_n) = i_n, \dots, \tilde{N}(t_0) = i_0\right)}{\mathsf{P}\left(\tilde{N}(t_n) = i_n, \dots, \tilde{N}(t_0) = i_0\right)} = \\
&= \frac{(t-t_n)^{j-i_n}}{(j-i_n)!} \frac{\mathsf{E}\left[\Lambda^j e^{-\Lambda t}\right]}{\mathsf{E}\left[\Lambda^{i_n} e^{-\Lambda t_n}\right]}.
\end{aligned} \tag{3.3}$$

Z rovností (3.2), (3.3) vidíme, že (nahradíme-li $s = t_n$ a $i = i_n$)

$$\mathsf{P}\left(\tilde{N}(t) = j | \tilde{N}(t_n) = i_n, \dots, \tilde{N}(t_0) = i_0\right) = \mathsf{P}\left(\tilde{N}(t) = j | \tilde{N}(t_n) = i_n\right),$$

což je přesně Markovova vlastnost.

□

Poznámka. Ve zbytku textu budeme nazývat smíšeným Poissonovým procesem s parametry α, λ náhodný proces z definice 13, kde má náhodná veličina Λ rozdělení $\Gamma(\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\alpha\lambda})$. Připomeňme, že rozdělení $\Gamma(a, b)$ je absolutně spojité rozdělení s hustotou

$$f_{\Gamma(\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\alpha\lambda})}(x) = \frac{b^a}{\Gamma(a)} x^{a-1} e^{-bx} \mathbb{1}[x > 0],$$

kde $\Gamma(a) = \int_0^\infty t^{a-1} e^{-t} dt$.

V dalších dvou větách použijeme následující lemma.

Lemma 15. *Pro náhodnou veličinu Λ s rozdělením $\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\alpha\lambda}\right)$, $t \geq 0$ a $j \in \mathbb{N}_0$ platí rovnost*

$$\mathsf{E}\left[\Lambda^j e^{-\Lambda t}\right] = \lambda^j \left(\alpha\lambda t + 1\right)^{-(\frac{1}{\alpha}+j)} \prod_{k=0}^{j-1} (1 + k\alpha).$$

Důkaz.

$$\begin{aligned}
\mathsf{E}\left[\Lambda^j e^{-\Lambda t}\right] &= \int_0^\infty x^j e^{-xt} f_{\Gamma(\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\alpha\lambda})}\, dx = \int_0^\infty x^j e^{-xt} \frac{x^{\frac{1}{\alpha}-1} e^{-\frac{x}{\alpha\lambda}} \left(\frac{1}{\alpha\lambda}\right)^{\frac{1}{\alpha}}}{\Gamma(\frac{1}{\alpha})}\, dx = \\
&= \frac{\left(\frac{1}{\alpha\lambda}\right)^{\frac{1}{\alpha}}}{\Gamma(\frac{1}{\alpha})} \int_0^\infty x^{\frac{1}{\alpha}+j-1} e^{-x\left(t+\frac{1}{\alpha\lambda}\right)}\, dx.
\end{aligned}$$

Po substituci $y = x(t + \frac{1}{\alpha\lambda})$, $dy = (t + \frac{1}{\alpha\lambda})dx$ získáme

$$\begin{aligned}
\mathsf{E}\left[\Lambda^j e^{-\Lambda t}\right] &= \frac{\left(\frac{1}{\alpha\lambda}\right)^{\frac{1}{\alpha}}}{\Gamma(\frac{1}{\alpha})} \left(\frac{1}{t + \frac{1}{\alpha\lambda}}\right)^{\frac{1}{\alpha}+j} \int_0^\infty y^{\frac{1}{\alpha}+j-1} e^{-y}\, dy = \\
&= \frac{\left(\frac{1}{\alpha\lambda}\right)^{\frac{1}{\alpha}}}{\Gamma(\frac{1}{\alpha})} \left(\frac{1}{t + \frac{1}{\alpha\lambda}}\right)^{\frac{1}{\alpha}+j} \Gamma\left(\frac{1}{\alpha} + j\right) = \\
&= \frac{\left(\frac{1}{\alpha\lambda}\right)^{\frac{1}{\alpha}}}{\Gamma(\frac{1}{\alpha})} \left(\frac{\alpha\lambda}{\alpha\lambda t + 1}\right)^{\frac{1}{\alpha}+j} \Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right) \prod_{k=0}^{j-1} \left(\frac{1}{\alpha} + k\right) = \\
&= (\alpha\lambda)^j \left(\frac{1}{\alpha\lambda t + 1}\right)^{\frac{1}{\alpha}+j} \left(\frac{1}{\alpha}\right)^j \prod_{k=0}^{j-1} (1 + k\alpha) = \\
&= \lambda^j \left(\alpha\lambda t + 1\right)^{-\left(\frac{1}{\alpha}+j\right)} \prod_{k=0}^{j-1} (1 + k\alpha)\,.
\end{aligned}$$

□

Věta 16. *Nechť* $\{\tilde{N}(t),\ t \geq 0\}$ *je smíšený Poissonův proces s parametry* $\alpha,\ \lambda > 0$. *Pak pro* $t \geq 0$ *a* $n \in \mathbb{N}_0$ *platí*

$$\mathsf{P}\left(\tilde{N}(t) = n\right) = \frac{(\lambda t)^n}{n!}(1 + \alpha\lambda t)^{-\left(n+\frac{1}{\alpha}\right)} \times \prod_{k=1}^{n-1}(1 + \alpha k). \tag{3.4}$$

Důkaz. Ze základních vlastností pravděpodobnosti a podmíněné střední hodnoty dostáváme

$$\begin{aligned}
\mathsf{P}\left(\tilde{N}(t) = n\right) &= \mathsf{E}\left[\mathbb{1}_{[\tilde{N}(t)=n]}\right] = \mathsf{E}\left[\mathsf{E}\left[\mathbb{1}_{[\tilde{N}(t)=n]}|\Lambda\right]\right] = \mathsf{E}\left[\frac{(\Lambda t)^n}{n!} e^{-\Lambda t}\right] = \\
&= \frac{t^n}{n!}\, \mathsf{E}\left[\Lambda^n e^{-\Lambda t}\right] = \frac{(\lambda t)^n}{n!}(\alpha\lambda t + 1)^{-\left(\frac{1}{\alpha}+n\right)} \times \prod_{k=0}^{n-1}(1 + \alpha k)
\end{aligned}$$

podle lemmatu 15.

□

Všimněme si, že pravděpodobnost v rovnosti (3.4) je stejná jako pravděpodobnost u Pólyova-Lundbergova procesu (viz důsledek 10). To nás vede k myšlence, že má smíšený Poissonův proces stejné rozdělení jako Pólyův-Lundbergův proces.

Věta 17. *Je-li* $\{\tilde{N}(t), t \geq 0\}$ *smíšený Poissonův proces s parametry* $\alpha, \lambda > 0$, *pak je tento proces Pólyův-Lundbergův.*

Důkaz. Podle věty 14 splňuje $\{\tilde{N}(t), t \geq 0\}$ Markovovu vlastnost. Ze vzorce (3.2) získáme pro $t \geq 0$, $h > 0$ a $i, j \in \mathbb{N}_0$, kde $j \geq i$

$$\mathsf{P}\left(\tilde{N}(t + h) = j|\tilde{N}(t) = i\right) = \frac{(t + h - t)^{j-i}}{(j - i)!} \frac{\mathsf{E}\left[\Lambda^j e^{-\Lambda(t+h)}\right]}{\mathsf{E}\left[\Lambda^i e^{-\Lambda t}\right]}.$$

Víme z lemmatu 15, že

$$\mathsf{E}\left[\Lambda^i e^{-\Lambda t}\right] = \lambda^i \left(\alpha\lambda t + 1\right)^{-\left(\frac{1}{\alpha}+i\right)} \prod_{k=0}^{i-1} \left(1 + k\alpha\right).$$

Podobně dostaneme

$$\mathsf{E}\left[\Lambda^j e^{-\Lambda(t+h)}\right] = \lambda^j \left(\alpha\lambda(t+h) + 1\right)^{-\left(\frac{1}{\alpha}+j\right)} \prod_{k=0}^{j-1} \left(1 + k\alpha\right).$$

Proto

$$\begin{aligned} &\mathsf{P}\left(\tilde{N}(t+h) = j|\tilde{N}(t) = i\right) = \\ &= \frac{(\lambda h)^{j-i}}{(j-i)!} \left(\alpha\lambda(t+h)+1\right)^{-\left(\frac{1}{\alpha}+j\right)} \left(\alpha\lambda t + 1\right)^{\frac{1}{\alpha}+i} \prod_{k=i}^{j-1} \left(1+\alpha k\right). \end{aligned}$$

Pro $j = i + 1$ potom platí

$$\begin{aligned} &\lim_{h\to 0} \frac{\mathsf{P}\left(\tilde{N}(t+h) = i+1|\tilde{N}(t) = i\right)}{h} = \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{(\lambda h)\left(\alpha\lambda(t+h)+1\right)^{-\left(\frac{1}{\alpha}+i+1\right)} \left(\alpha\lambda t+1\right)^{\frac{1}{\alpha}+i} (1+\alpha i)}{h} = \\ &= \lim_{h\to 0} \lambda \left(\alpha\lambda(t+h)+1\right)^{-\left(\frac{1}{\alpha}+i\right)} \left(\alpha\lambda t+1\right)^{\frac{1}{\alpha}+i} \frac{1+\alpha i}{1+\alpha\lambda(t+h)} = \\ &= \lambda \left(\alpha\lambda t+1\right)^{-\left(\frac{1}{\alpha}+i\right)} \left(\alpha\lambda t+1\right)^{\frac{1}{\alpha}+i} \frac{1+\alpha i}{1+\alpha\lambda t} = \lambda_i(t), \end{aligned}$$

takže můžeme psát, že $\mathsf{P}\left(\tilde{N}(t+h) = i+1|\tilde{N}(t) = i\right) = \lambda_i(t)h + o(h)$.

Pro $j > i + 1$

$$\begin{aligned} &\lim_{h\to 0} \frac{\mathsf{P}\left(\tilde{N}(t+h) = j|\tilde{N}(t) = i\right)}{h} = \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{h^{j-i-1}}{(j-i)!} \lambda^{j-i} \left(\alpha\lambda(t+h)+1\right)^{-\left(\frac{1}{\alpha}+j\right)} \left(\alpha\lambda t+1\right)^{\frac{1}{\alpha}+i} \prod_{k=i}^{j-1} (1+\alpha k) = 0, \end{aligned}$$

proto v tomto případě $\mathsf{P}\left(\tilde{N}(t+h) = j|\tilde{N}(t) = i\right) = o(h)$.

Triviálně z faktu, že Poissonův proces je proces růstu, víme, že v případě $j < i$ platí $\mathsf{P}\left(\tilde{N}(t+h) = j|\tilde{N}(t) = i\right) = 0$ a přímo dostáváme, že

$$\mathsf{P}\left(\tilde{N}(t+h) = i|\tilde{N}(t) = i\right) = 1 - \lambda_i(t)h + o(h).$$

Takže smíšený Poissonův proces je proces růstu (definice 3) s takovými intenzitami, které požadujeme pro Pólyův-Lundbergův proces. Tímto jsme ale ověřili všechny axiomy Pólyova-Lundbergova procesu (definice 8), čímž je tvrzení dokázáno.

□

Z předchozí věty je vidět jeden z důvodů zavedení Pólyova-Lundbergova procesu, který byl zmíněn v úvodní části této práce. Vidíme, že se vskutku jedná o zobecnění homogenního Poissonova procesu, jehož parametr je náhodný, ovšem touto úpravou nám vznikne nehomogenní markovský řetězec.

4. Urnový problém

V této kapitole zavedeme Pólyovo-Eggenbergerovo rozdělení, kterým modelujeme rozdělení některých specifických urnových problémů. Cílem bude dojít ke zjištění, že toto rozdělení „konverguje“ k rozdělení Pólyova-Lundbergova procesu.

Pro začátek této kapitoly si představme situaci, ve které máme urnu, v níž se nachází $B \in \mathbb{N}_0$ bílých kuliček, $C \in \mathbb{N}_0$ černých kuliček tak, aby v urně ležela alespoň jedna kulička libovolné barvy. Stanovme číslo $d \in \mathbb{N}$ a předpokládejme, že máme neomezené množství kuliček obou barev v zásobě mimo urnu. Budeme modelovat situaci, ve které táhneme jednu kuličku z urny a posléze ji vrátíme do urny zpět spolu s d kuličkami stejné barvy. Takový pokus opakujme.

Bude účelné zavést značení $p = \frac{B}{B+C}$, $q = 1-p$ a $\beta = \frac{d}{B+C}$. Taky bude vhodné značit $a^{(m,b)} = a(a+b)\cdots(a+(m-1)b)$ pro $a, b \in \mathbb{R}, m \in \mathbb{N}_0$ (řídíme se konvencí $a^{(0,b)} = 1$).

Nechť $k \in \mathbb{N}_0$. Budeme se zabývat otázkou, jaká je pravděpodobnost, že z urny po m pokusech vytáhneme právě k bílých kuliček. Víme, že po každém vytažení kuličky přibude v urně dalších d kuliček stejné barvy. Takže nejdříve můžeme vybrat jednu z B bílých kuliček, následně z $B+d$ a tak dále až do $B+(k-1)d$. To ale také znamená, že v m tazích musíme vytáhnout $m-k$ černých kuliček. Takže při prvním tažení černé kuličky máme k dispozici C černých kuliček, až v $(m-k)$-tém tažení černé kuličky můžeme vytáhnout jednu z $C+(m-k-1)d$ černých kuliček. Ovšem zde bychom předpokládali jedno fixní pořadí tažení bílých a černých kuliček. Takových možných konfigurací je $\binom{m}{k}$. Celkově můžeme bez žádných restrikcí táhnout při prvním tahu jednu z $B+C$ kuliček, při druhém jednu z $B+C+d$, až do m-tého tahu, kde máme $B+C+(m-1)d$ možností, kterou kuličku vytáhnout.

Dohromady shrnuto, pravděpodobnost, že v m tazích z urny vytáhneme právě k bílých kuliček, je

$$\binom{m}{k} \frac{B^{(k,d)} C^{(m-k,d)}}{(B+C)^{(m,d)}}.$$

Vynásobíme-li předchozí výraz zlomkem $\frac{(B+C)^m}{(B+C)^m}$, získáme tentýž výraz, jenom interpretovaný přes poměry vůči počátečnímu počtu kuliček. Dostáváme tak pravděpodobnost

$$\binom{m}{k} \frac{p^{(k,\beta)} q^{(m-k,\beta)}}{1^{(m,\beta)}}.$$

Zobecněním takového modelu je tzv. Pólyovo-Eggenbergerovo rozdělení. Naším cílem bude zkoumat jeho limitní chování.

Definice 18. *Řekneme, že náhodná veličina X má Pólyovo-Eggenbergerovo rozdělení o rozsahu $m \in \mathbb{N}_0$, s poměrem $p \in (0,1)$ a s parametrem $\beta \in (0,1)$, jestliže pro ni platí*

$$\mathsf{P}(X = k) = \binom{m}{k} \frac{p^{(k,\beta)} q^{(m-k,\beta)}}{1^{(m,\beta)}},$$

kde $q = 1-p$, $k \in \mathbb{N}_0$, $k \leq m$.

Nejprve dokažme jedno technické lemma, které budeme potřebovat později a poté pro přehled vypočítáme střední hodnotu a rozptyl náhodné veličiny s Pólyovým-Eggenbergovým rozdělením.

Lemma 19. *Buďte* $a, b, \beta \in (0,1)$, $m \in \mathbb{N}_0$. *Pak platí rovnost*

$$(a+b)^{(m,\beta)} = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} a^{(k,\beta)} \cdot b^{(m-k,\beta)}. \tag{4.1}$$

Důkaz. Důkaz provedeme matematickou indukcí.

Pro $m = 0$ platí $(a+b)^{(0,\beta)} = 1 = a^{(0,\beta)} \cdot b^{(0,\beta)}$.

Předpokládejme, že tvrzení platí pro $m-1$, kde $m \in \mathbb{N}$. Pak

$$\begin{aligned} (a+b)^{(m,\beta)} &= (a+b+(m-1)\beta)(a+b)^{(m-1,\beta)} \\ &= (a+b+(m-1)\beta) \sum_{k=0}^{m-1} \binom{m-1}{k} a^{(k,\beta)} b^{(m-k-1,\beta)}. \end{aligned}$$

Definujme

$$\begin{aligned} A_k &= \binom{m-1}{k} a^{(k+1,\beta)} b^{(m-k-1,\beta)}, \\ B_k &= \binom{m-1}{k} a^{(k,\beta)} b^{(m-k,\beta)}. \end{aligned}$$

Pro každé $k \in \{0, \ldots, m-1\}$

$$\begin{aligned} &(a+b+(m-1)\beta)\binom{m-1}{k} a^{(k,\beta)} b^{(m-k-1,\beta)} = \\ &= [(a+k\beta) + (b+(m-1-k)\beta)]\binom{m-1}{k} a^{(k,\beta)} b^{(m-k-1,\beta)} = \\ &= \binom{m-1}{k} a^{(k+1,\beta)} b^{(m-k-1,\beta)} + \binom{m-1}{k} a^{(k,\beta)} b^{(m-k,\beta)} = A_k + B_k. \end{aligned}$$

Ovšem pro $k+1$ platí

$$\begin{aligned} &[(a+(k+1)\beta) + (b+(m-k-2)\beta)]\binom{m-1}{k+1} a^{(k+1,\beta)} b^{(m-k-2,\beta)} = \\ &= \binom{m-1}{k+1} a^{(k+2,\beta)} b^{(m-k-2,\beta)} + \binom{m-1}{k+1} a^{(k+1,\beta)} b^{(m-k-1,\beta)} = A_{k+1} + B_{k+1}. \end{aligned}$$

Vidíme, že pro každé $k \in \{0, \ldots, m-1\}$ s využitím rovnosti $\binom{m-1}{k} + \binom{m-1}{k+1} = \binom{m}{k+1}$ platí

$$A_k + B_{k+1} = \binom{m}{k+1} a^{(k+1,\beta)} b^{(m-k-1,\beta)}.$$

Při této úpravě jsme vyčerpali všechny členy sumy až na $\binom{m-1}{0} a^{(0,\beta)} b^{(m,\beta)} = b^{(m,\beta)}$ a $\binom{m-1}{m-1} a^{(m,\beta)} b^{(0,\beta)} = a^{(m,\beta)}$, což jsou ale první a poslední sčítance v požadované sumě (4.1).

□

Tvrzení 20. *Pro diskrétní náhodnou veličinu N_m s Pólyovým-Eggenbergerovým rozdělením o rozsahu $m \in \mathbb{N}_0$, s poměrem $p \in (0,1)$ a s parametrem $\beta \in (0,1)$ platí*

$$\mathsf{E}\,(N_m) = mp,$$
$$\operatorname{var}(N_m) = mpq\frac{1+m\beta}{1+\beta}.$$

Důkaz. Pro $m = 0$ je důkaz triviální, nechť je proto $m > 0$. Označme $q = 1 - p$. Z definice střední hodnoty a lemmatu 19 plyne

$$\begin{aligned}
\mathsf{E}\,(N_m) &= \sum_{k=0}^{m} \frac{k\binom{m}{k}p^{(k,\beta)}q^{(m-k,\beta)}}{1^{(m,\beta)}} = \frac{\sum_{k=1}^{m} k\frac{m!}{k!(m-k)!}p^{(k,\beta)}q^{(m-k,\beta)}}{1^{(m,\beta)}} = \\
&= \frac{m\sum_{k=1}^{m}\frac{(m-1)!}{(k-1)!(m-k)!}p^{(k,\beta)}q^{(m-k,\beta)}}{1^{(m,\beta)}} = \frac{m\sum_{k=1}^{m}\binom{m-1}{k-1}p^{(k,\beta)}q^{(m-k,\beta)}}{1^{(m,\beta)}} = \\
&= \frac{mp\sum_{k=1}^{m}\binom{m-1}{k-1}(p+\beta)^{(k-1,\beta)}q^{((m-1)-(k-1),\beta)}}{1^{(m,\beta)}} = \\
&= \frac{mp\sum_{k=0}^{m-1}\binom{m-1}{k}(p+\beta)^{(k,\beta)}q^{((m-1)-k,\beta)}}{1^{(m,\beta)}} \overset{(4.1)}{=} \frac{mp(p+q+\beta)^{(m-1,\beta)}}{1\cdot(1+\beta)^{(m-1,\beta)}} = \\
&= \frac{mp(1+\beta)^{(m-1,\beta)}}{(1+\beta)^{(m-1,\beta)}} = mp.
\end{aligned}$$

Podobně

$$\begin{aligned}
\mathsf{E}\,(N_m(N_m-1)) &= \sum_{k=2}^{m} \frac{k(k-1)\binom{m}{k}p^{(k,\beta)}q^{(m-k,\beta)}}{1^{(m,\beta)}} = \\
&= \frac{m(m-1)\sum_{k=2}^{m}\frac{(m-2)!}{(k-2)!(m-k)!}p^{(k,\beta)}q^{(m-k,\beta)}}{1^{(m,\beta)}} = \\
&= \frac{p(p+\beta)m(m-1)\sum_{k=2}^{m}\frac{(m-2)!}{(k-2)!\cdot((m-2)-(k-2))!}(p+2\beta)^{(k-2,\beta)}q^{((m-2)-(k-2)),\beta)}}{1^{(m,\beta)}} = \\
&= \frac{p(p+\beta)m(m-1)\sum_{k=2}^{m}\binom{m-2}{k-2}(p+2\beta)^{(k-2,\beta)}q^{((m-2)-(k-2)),\beta)}}{1^{(m,\beta)}} = \\
&= \frac{p(p+\beta)m(m-1)\sum_{k=0}^{m-2}\binom{m-2}{k}(p+2\beta)^{(k,\beta)}q^{((m-2)-k),\beta)}}{1^{(m,\beta)}} \overset{(4.1)}{=} \\
&= \frac{m(m-1)p(p+\beta)(p+q+2\beta)^{(m-2,\beta)}}{1\cdot(1+\beta)(1+2\beta)^{(m-2,\beta)}} = \frac{m(m-1)p(p+\beta)}{1+\beta}.
\end{aligned}$$

Ze základních vlastností rozptylu můžeme odvodit

$$\begin{aligned}
\mathrm{var}(N_m) &= \mathsf{E}\,(N_m)^2 - (\mathsf{E}\,(N_m))^2 = \mathsf{E}\,(N_m(N_m-1)) + \mathsf{E}\,(N_m) - (\mathsf{E}\,(N_m))^2 = \\
&= \frac{m(m-1)p(p+\beta)}{1+\beta} + mp - (mp)^2 = \\
&= \frac{m(m-1)p(p+\beta) + (1+\beta)mp - (1+\beta)(mp)^2}{1+\beta} = \\
&= mp\frac{(m-1)(p+\beta) + (1+\beta) - (1+\beta)mp}{1+\beta} = \\
&= mp\frac{mp + m\beta - p - \beta + 1 + \beta - mp - mp\beta}{1+\beta} = \\
&= mp\frac{m\beta - p + 1 - mp\beta}{1+\beta} = mp\frac{m\beta(1-p) + 1 - p}{1+\beta} = \\
&= mp(1-p)\frac{1+m\beta}{1+\beta} = mpq\frac{1+m\beta}{1+\beta}.
\end{aligned}$$

□

Důkaz předchozí věty byl z velké části převzat z Johnson a Kotz (1977, str. 178–179).

Nyní se dostáváme k hlavnímu poznatku této kapitoly.

Věta 21. *Nechť $\lambda, \alpha > 0$, $k \in \mathbb{N}_0$ a $t > 0$. Nechť jsou dále $p_m, \beta_m \in (0,1)$ pro $m \in \mathbb{N}$ posloupnosti takové, že $m \cdot p_m \xrightarrow{m\to\infty} \lambda t$ a $m \cdot \beta_m \xrightarrow{m\to\infty} \alpha\lambda t$ a pro každé $m \in \mathbb{N}$ definujme $q_m = 1 - p_m$. Pak*

$$\lim_{m\to\infty} \binom{m}{k} \frac{p_m^{(k,\beta)} q_m^{(m-k,\beta)}}{1^{(m,\beta)}} = \frac{(\lambda t)^k}{k!}(1+\alpha\lambda t)^{-(k+1/\alpha)} \times \prod_{j=1}^{k-1}(1+j\alpha).$$

Důkaz. Nechť $m \in \mathbb{N}_0$, kde $m \geq k$. Pak

$$\begin{aligned}
&\binom{m}{k} \frac{p_m^{(k,\beta)} q_m^{(m-k,\beta)}}{1^{(m,\beta)}} = \frac{m!}{k!(m-k)!} \\
&\frac{p_m \dots (p_m + (k-1)\beta_m)(1-p_m)\dots(1-p_m+(m-k-1)\beta_m)}{1(1+\beta_m)\dots(1+(m-1)\beta_m)} = \\
&= \frac{m!}{k!(m-k)!}(p_m)^k \\
&\frac{1(1+\frac{\beta_m}{p_m})\dots(1+\frac{(k-1)\beta_m}{p_m})(1-p_m)\dots(1-p_m+(m-k-1)\beta_m)}{1(1+\beta_m)\dots(1+(m-1)\beta_m)} =
\end{aligned}$$

$$= \frac{m!}{k!(m-k)!}(mp_m)^k \frac{1}{m^k}\frac{m^{m-k}}{m^{m-k}}$$

$$\frac{1(1+\frac{\beta_m}{p_m})\dots(1+\frac{(k-1)\beta_m}{p_m})(1-p_m)\dots(1-p_m+(m-k-1)\beta_m)}{1(1+\beta_m)\dots(1+(m-1)\beta_m)} =$$

$$= \frac{(mp_m)^k}{k!}\frac{m!}{(m-k)!}$$

$$\frac{1(1+\frac{\beta_m}{p_m})\dots(1+\frac{(k-1)\beta_m}{p_m})(m-mp_m)\dots(m-mp_m+(m-k-1)m\beta_m)}{m(m+m\beta_m)\dots(m+(m-1)m\beta_m)} =$$

$$= \frac{(mp_m)^k}{k!}\prod_{j=1}^{k-1}(1+j\frac{\beta_m}{p_m})$$

$$\underbrace{\frac{m!}{(m-k)!}\frac{(m-mp_m)\dots(m-mp_m+(m-k-1)m\beta_m)}{m(m+m\beta_m)\dots(m+(m-1)m\beta_m)}}_{:=A_m}.$$

Vidíme, že

$$\frac{(mp_m)^k}{k!}\prod_{j=1}^{k-1}(1+j\frac{\beta_m}{p_m}) \xrightarrow{m\to\infty} \frac{(\lambda t)^k}{k!}\prod_{j=1}^{k-1}(1+j\alpha).$$

Dále vyšetřujme posloupnost A_m:

$$A_m = (m\dots(m-k+1))\frac{(m-mp_m)\dots(m-mp_m+(m-k-1)m\beta_m)}{m(m+m\beta_m)\dots(m+(m-1)m\beta_m)} =$$

$$= \underbrace{\frac{m(m-1)\dots(m-k+1)}{(m+(m-k)m\beta_m)\dots(m+(m-1)m\beta_m)}}_{:=B_m} \times$$

$$\times \underbrace{\left[\frac{m-mp_m}{m}\dots\frac{m-mp_m+(m-k-1)m\beta_m}{m+(m-k-1)m\beta_m}\right]}_{:=C_m}.$$

Jednoduchou úpravou dostáváme, že

$$B_m = \frac{m(m-1)\dots(m-k+1)}{(m+(m-k)m\beta_m)\dots(m+(m-1)m\beta_m)} =$$

$$= \frac{1(1-\frac{1}{m})\dots(1-\frac{k-1}{m})}{(1+(1-\frac{k}{m})m\beta_m)\dots(1+(1-\frac{1}{m})m\beta_m)}.$$

Ovšem pro $m\to\infty$

$$B_m \longrightarrow \frac{1}{\prod_{i=1}^k(1+\alpha\lambda t)} = \left(\frac{1}{1+\alpha\lambda t}\right)^k. \tag{4.2}$$

Zbývá dokázat, že $C_m \xrightarrow{m\to\infty} (1+\alpha\lambda t)^{-1/\alpha}$. Z vlastností logaritmu dostáváme, že

$$C_m = \prod_{j=0}^{m-k-1}\frac{m-mp_m+jm\beta_m}{m+jm\beta_m} = \exp\left(\sum_{j=0}^{m-k-1}\log(1-\frac{mp_m}{m+jm\beta_m})\right).$$

Nejdříve analyzujme, kam konvergují dva integrály. Začneme u tohoto

$$\int_0^{m-k-1} \log\left(1 - \frac{mp_m}{m + xm\beta_m}\right) dx \xrightarrow{m\to\infty} -\frac{1}{\alpha}\log(1+\alpha\lambda t). \tag{4.3}$$

Chceme vytvořit substituci výrazu $\frac{mp_m}{m+xm\beta_m}$, aby

$$\frac{1}{y} = \frac{mp_m}{m + xm\beta_m} = \frac{p_m}{1 + x\beta_m} \Longleftrightarrow 1 + x\beta_m = yp_m \Longleftrightarrow x = \frac{yp_m - 1}{\beta_m},$$
$$0 \longmapsto y_1 := \frac{1}{p_m},\ m-k-1 \longmapsto y_2 := \frac{1 + (m-k-1)\beta_m}{p_m}.$$

Jelikož $x > 0$ a všechny konstanty jsou kladné, substituované y bude také kladné a

$$dx = \frac{p_m}{\beta_m} dy.$$

Dle věty o substituci je integrál na levé straně (4.3) roven integrálu

$$\frac{p_m}{\beta_m}\int_{y_1}^{y_2} \log(1 - \frac{1}{y}) dy.$$

Podle metody per partes pak integrál vychází

$$\frac{p_m}{\beta_m}\int_{y_1}^{y_2} \log(1 - \frac{1}{y})\, dy = \frac{p_m}{\beta_m}\left[y\log(1 - \frac{1}{y}) - \log|y-1|\right]_{y_1}^{y_2} =$$
$$= \frac{p_m}{\beta_m}\left[\left(\frac{1 + (m-k-1)\beta_m}{p_m}\right)\log\left(1 - \frac{p_m}{1+(m-k-1)\beta_m}\right) - \right.$$
$$\left. - \log\left|\frac{1+(m-k-1)\beta_m}{p_m} - 1\right| - \frac{1}{p_m}\log(1-p_m) + \log\left|\frac{1}{p_m} - 1\right|\right].$$

Ze základních vlastností logaritmu ovšem plyne

$$\log\left|\frac{1}{p_m} - 1\right| - \log\left|\frac{1+(m-k-1)\beta_m}{p_m} - 1\right| = \log\left|\frac{1-p_m}{p_m}\right| -$$
$$- \log\left|\frac{1+(m-k-1)\beta_m - p_m}{p_m}\right| = \log\left|\frac{1-p_m}{1+(m-k-1)\beta_m - p_m}\right| =$$
$$= \log\left|\frac{1 - \frac{mp_m}{m}}{1 + \frac{m-k-1}{m}m\beta_m - \frac{mp_m}{m}}\right| \xrightarrow{m\to\infty} \log\left|\frac{1}{1+\alpha\lambda t}\right| = \log\frac{1}{1+\alpha\lambda t},$$

neboť jednoduchou úpravou a z předpokladu $mp_m \to \lambda t$ a $m\beta_m \to \alpha\lambda t$ zjistíme, že se argument logaritmu blíží k $\left|\frac{1}{1+\alpha\lambda t}\right|$. Ze spojitosti funkce logaritmus a Heineovy věty získáme vypočtenou limitu.

Dále víme, že

$$\lim_{x\to\infty} x\log\left(1 - \frac{1}{x}\right) = -1,$$

a tedy znova podle Heineovy věty

$$\left(\frac{1+(m-k-1)\beta_m}{p_m}\right)\log\left(1 - \frac{p_m}{1+(m-k-1)\beta_m}\right) - \frac{1}{p_m}\log(1-p_m) \xrightarrow{m\to\infty}$$
$$\xrightarrow{m\to\infty} -1 + 1 = 0.$$

Dohromady tedy dostáváme

$$\int_0^{m-k-1} \log\left(1 - \frac{mp_m}{m + xm\beta_m}\right) dx \xrightarrow{m\to\infty} -\frac{1}{\alpha}\log(1+\alpha\lambda t).$$

Zcela analogicky lze ukázat, že

$$\int_0^{m-k-1} \log\left(1 - \frac{mp_m}{m + (x-1)m\beta_m}\right) dx \xrightarrow{m\to\infty} -\frac{1}{\alpha}\log(1+\alpha\lambda t). \tag{4.4}$$

Ovšem můžeme nahlédnout například z obrázku 4.1, že pro každé $m \geq k$

$$\begin{aligned}\int_0^{m-k-1} \log\left(1 - \frac{mp_m}{m + (x-1)m\beta_m}\right) dx \geq \sum_{j=0}^{m-k-1} \log(1 - \frac{mp_m}{m + jm\beta_m}) \geq \\ \geq \int_0^{m-k-1} \log\left(1 - \frac{mp_m}{m + xm\beta_m}\right) dx.\end{aligned} \tag{4.5}$$

Z (4.3), (4.4) a věty o sevřené posloupnosti proto platí, že

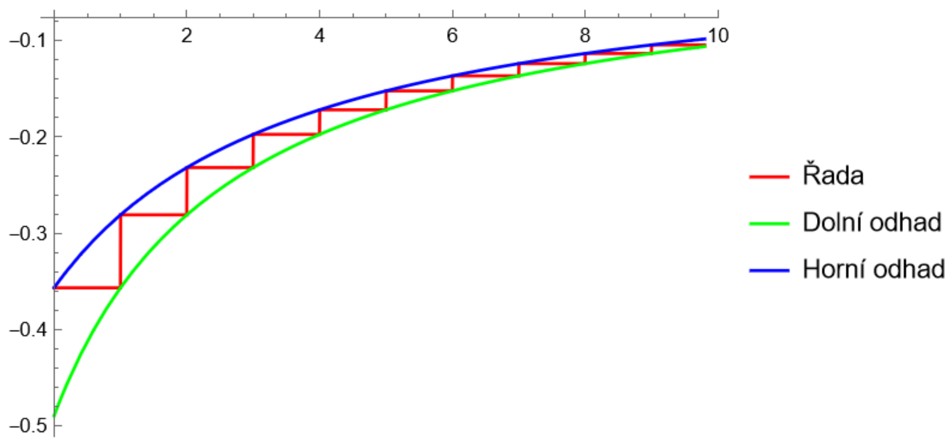
$$\sum_{j=0}^{m-k-1} \log(1 - \frac{mp_m}{m + jm\beta_m}) \xrightarrow{m\to\infty} -\frac{1}{\alpha}\log(1+\alpha\lambda t), \tag{4.6}$$

takže ze spojitosti exponenciální funkce, Heineovy věty a (4.6) platí

$$C_m \xrightarrow{m\to\infty} \exp\left(\log(1+\alpha\lambda t)^{-\frac{1}{\alpha}}\right) = (1+\alpha\lambda t)^{-\frac{1}{\alpha}}. \tag{4.7}$$

Konečně z (4.2) a (4.7) plyne dokazované tvrzení.

□



Obrázek 4.1: Graf ukazuje, jak je odhadnuta řada ve vzorci (4.5). Zde horní odhad reprezentuje funkci v integrálu na levé straně nerovností a dolní odhad reprezentuje funkci v integrálu na pravé straně nerovností.

Předchozí věta se dá také interpretovat i taženími kuliček z urny, které jsme popsali na začátku kapitoly. Máme-li nějaký čas $t > 0$ a zjemňujeme-li interval $[0, t]$ způsobem, který je popsán v podmínkách věty 21, pak rozdělení náhodné veličiny, která reprezentuje vytažení právě k bílých kuliček při m tazích pro $m \to \infty$ konverguje k rozdělení Pólyova-Lundbergova procesu při pevném $t > 0$.

Závěr

Na závěr shrňme, čeho jsme v této práci dosáhli.

První kapitola byla pouze úvodní, i přes to podotkněme, že se nám podařilo najít (prospektivní) Kolmogorovovy rovnice (lemma 7) celkem jednoduše i přes to, že jejich výpočty bývají obvykle velice složité.

Ve druhé kapitole jsme zavedli Pólyův-Lundbergův proces. Jejím hlavním cílem bylo explicitně vyjádřit pravděpodobnosti přechodu Pólyova-Lundbergova procesu. Toho jsme dosáhli nejdříve pro konkrétní případ, kdy počítáme pravděpodobnosti přechodu ze stavu 0. V tomto případě se pravděpodobnosti přechodu dají dobře vyjádřit z diferenciálních rovnic. Dále jsme odvodili obecné pravděpodobnosti přechodu, z nichž jsme vyjádřili i rozdělení Pólyova-Lundbergova procesu.

Ve třetí kapitole jsme definovali smíšený Poissonův proces, o němž jsme dokázali, že splňuje markovskou vlastnost. Dále jsme pro speciální případ smíšeného Poissonova procesu ukázali, že má stejné rozdělení jako Pólyův-Lundbergův proces. Ukázali jsme dokonce, že tento speciální případ splňuje všechny definiční vlastnosti Pólyova-Lundbergova procesu.

Dodejme zde ještě, že je v Pfeifer (2006) zmíněna ještě jedna interpretace Pólyova-Lundbergova procesu. Podle autora článku jej můžeme ekvivalentně vyjádřit posloupností náhodných veličin $T_n, n = 1, 2, \ldots$, kde $T_n > 0$ vyjadřuje čas, ve kterém nastala n-tá událost. Za těchto předpokladů pro $0 \leq s \leq t$ platí, že

$$\mathsf{P}(T_{n+1} > t | T_n = s) = \frac{1 + \alpha\lambda s}{1 + \alpha\lambda t}.$$

Ten ale připomíná vzorec (2.4) pro $m = n$. To samozřejmě není náhoda, neboť $T_{n+1} > t$ nám říká, že k $(n+1)$-ní události došlo v čase větším než t (takže do času t pozorujeme nejvýše n událostí) a z $T_n = s$ víme, že v čase s došlo k n-té události. Proto z předpokladu, že počet pozorovaných událostí při rostoucím čase neklesá, se $\mathsf{P}(T_{n+1} > t | T_n = s)$ dá interpretovat jako pravděpodobnost přechodu ze stavu n v čase s do stavu n v čase t, což přesně vyjadřuje rovnice (2.4).

V závěrečné kapitole jsme zopakovali, co jsou urnová schémata, zavedli speciální urnový problém, kde po každém tažení kuličky do urny vložíme d dalších kuliček stejné barvy. Jeho přímé zobecnění pak je Pólyovo-Eggenbergerovo rozdělení, u nějž jsme vypočítali střední hodnotu a rozptyl. Pokud bychom uvažovali neprázdný časový interval $[0, t]$ a vytvořili posloupnost dělení z věty 21, kde bychom v každém čase dělení táhli kuličku, pak při limitním přechodu bude takovéto schéma konvergovat k Pólyově-Lundbergově procesu s pevným časem t.

Seznam použité literatury

Arley, N. (1949). *Stochastic Processes and Their Application to the Theory of Cosmic Radiation*. Wiley, New York.

Johnson, N. L. a Kotz, S. (1977). *Urn Models and Their Application*. John Wiley & Sons, Ltd. ISBN 0-471-44630-0.

Kopáček, J. (2007). *Matematická analýza nejen pro fyziky. (II)*. Matfyzpress, Praha, 3. upravené vydání. ISBN 80-7378-007-0.

Lundberg, O. (1940). *On Random Processes and Their Application to Sickness and Accident Statistics*. PhD thesis, Stockholm College.

Pfeifer, D. (2006). *Pólya–Lundberg Process*. John Wiley & Sons, Ltd. ISBN 9780471667193. doi: https://doi.org/10.1002/0471667196.ess2011.pub2.

Prášková, Z. a Lachout, P. (2012). *Základy náhodných procesů. I.* Matfyzpress, Praha, druhé vydání. ISBN 978-80-7378-210-8.