MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ FAKULTA
Univerzita Karlova

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Karel Špinka

Intervaly spolehlivosti pro dvouparametrické exponenciální rozdělení

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí bakalářské práce: doc. Mgr. Michal Kulich, Ph.D.
Studijní program: Matematika
Studijní obor: Obecná matematika

Praha 2023

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů. Tato práce nebyla využita k získání jiného nebo stejného titulu.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V .... dne ....

Podpis autora

Název práce: Intervaly spolehlivosti pro dvouparametrické exponenciální rozdělení

Autor: Karel Špinka

Katedra: Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí bakalářské práce: doc. Mgr. Michal Kulich, Ph.D., Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Abstrakt: V práci zkoumáme bodové i intervalové odhady dvouparametrického exponenciálního rozdělení. Vyšetříme nestrannost a konzistenci bodových odhadů a odvodíme přesná rozdělení, ze kterých zkonstruujeme intervalové odhady parametrů. Ukážeme alternativní způsob, kterým můžeme konstruovat konfidenční množiny, jejichž velikost bude za určitých podmínek nejmenší možná na dané hladině spolehlivosti.

Klíčová slova: bodový odhad; interval spolehlivosti; postačující statistika; pivot

Title: Confidence intervals for two-parameter exponential distribution

Author: Karel Špinka

Department: Department of Probability and Mathematical Statistics

Supervisor: doc. Mgr. Michal Kulich, Ph.D., Department of Probability and Mathematical Statistics

Abstract: In this work, we examine both point and interval estimators of two-parameter exponential distribution. We determine whether point estimates are unbiased, consistent, or both, and derive exact distributions from which confidence intervals can be constructed. We also demonstrate another method of creating confidence sets whose volume is, given certain conditions, the smallest possible on a specific confidence level.

Keywords: Point estimate; Confidence interval; Sufficient statistic; Pivotal quantity

Obsah

Úvod

Definice. *Řekneme, že náhodná veličina Y pochází z exponenciálního rozdělení, jestliže její distribuční funkce má tvar*

$$F_Y(x,\lambda) = 1 - e^{-\frac{x}{\lambda}}, \qquad x \geq 0,$$
$$= 0, \qquad x < 0,$$

kde $\lambda > 0$ je neznámý parametr. Značíme $Y \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$.

Za této parametrizace platí, že $\mathsf{E}\, Y = \lambda$ a $\operatorname{var} Y = \lambda^2$ (Anděl, 2007[1]). Budeme uvažovat zobecnění exponenciálního rozdělení, kde náhodnou veličinu $Y \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$ posuneme o konstantu $a \in \mathbb{R}$. Tvar rozdělení se nezmění, nově ale nosičem bude interval $(a;\infty)$ namísto $(0;\infty)$. Formálně tuto transformaci popíšeme v následující definici:

Definice. *Nechť $\lambda > 0$ a $Y \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$. Pro $a \in \mathbb{R}$ definujeme náhodnou veličinu X způsobem $X = Y + a$. Potom řekneme, že náhodná veličina X pochází z dvouparametrického exponenciálního rozdělení s parametrem škály λ a parametrem posunutí a. Značíme $X \sim \mathrm{DvExp}(a,\lambda)$.*

Triviálně vidíme, že se skutečně jedná o rozšíření exponenciálního rozdělení, neboť v případě $a = 0$ platí $X = Y$, a tedy $\mathrm{DvExp}(0,\lambda) \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$. V praxi si můžeme dvouparametrické exponenciální rozdělení představit například jako dobu do poruchy zařízení nebo součástky, kde po prvních a jednotek času máme garantováno, že se zařízení nerozbije, a po uplynutí této doby má zařízení poruchovost odpovídající standardnímu exponenciálnímu rozdělení s parametrem λ. V tomto praktickém případě obvykle uvažujeme $a \geq 0$.

Z definice výše snadno odvodíme střední hodnotu a rozptyl dvouparametrického exponenciálního rozdělení.

$$\mathsf{E}\, X = \mathsf{E}\,(Y + a) = \mathsf{E}\, Y + a = \lambda + a,$$
$$\operatorname{var} X = \operatorname{var}(Y + a) = \operatorname{var} Y = \lambda^2,$$

kde jsme využili vlastností střední hodnoty a rozptylu, že pro každou náhodnou veličinu Z s konečným druhým momentem a libovolnou konstantu $\alpha \in \mathbb{R}$ platí $\mathsf{E}\,(\alpha + Z) = \alpha + \mathsf{E}\, Z$ a $\operatorname{var}(\alpha + Z) = \operatorname{var} Z$ (Anděl, 2007[1]).

V této práci se budeme odkazovat na tři různé modely, podle toho, které parametry považujeme za známé:

- Model $\mathcal{F}_1 : \{X \sim \mathrm{DvExp}(a,\lambda) : a \in \mathbb{R}, \lambda > 0\,\text{známé}\}$
- Model $\mathcal{F}_2 : \{X \sim \mathrm{DvExp}(a,\lambda) : a \in \mathbb{R}\,\text{známé}, \lambda > 0\}$
- Model $\mathcal{F}_3 : \{X \sim \mathrm{DvExp}(a,\lambda) : a \in \mathbb{R}, \lambda > 0\}$

V kapitole 1 najdeme bodové odhady parametrů a, λ a vyšetříme jejich nestrannost a konzistenci. V druhé kapitole odvodíme klasické intervalové odhady pomocí přesných rozdělení náhodných veličin. Třetí kapitola obsahuje alternativní způsob, jak odvodit konfidenční množiny, včetně porovnání obou přístupů. Tato práce z velké části vychází z článku Zhang, 2018[4]. Cílem je článek přeložit, doplnit chybějící důkazy a vysvětlit netriviální kroky.

1. Bodové odhady

1.1 Odvození bodových odhadů

Budeme chtít odhadnout parametry a, λ z náhodného výběru $X_1, ..., X_n \sim \mathrm{DvExp}(a, \lambda)$. K sestrojení věrohodnostní funkce potřebujeme ale znát hustotu dvouparamterického exponenciálního rozdělení. V následujícím lemmatu ukážeme tvar hledané hustoty.

Lemma 1.1. *Nechť* $a \in \mathbb{R}, \lambda > 0$ *a* $X \sim \mathrm{DvExp}(a, \lambda)$. *Potom hustota náhodné veličiny* X *má tvar*

$$f_X(x) = \frac{1}{\lambda} e^{-\frac{x-a}{\lambda}} \mathbb{1}_{[x \geq a]}.$$

Důkaz. Odvodíme nejprve distribuční funkci X. Označme $Y \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$. Potom:

$$\begin{aligned} F_X(x) &= \mathsf{P}[X \leq x] = \mathsf{P}[Y + a \leq x] = \mathsf{P}[Y \leq x - a] = \\ &= 1 - e^{-\frac{x-a}{\lambda}}, && x \geq a, \\ &= 0, && x < a. \end{aligned}$$

Derivací podle proměnné x dostaneme hledanou hustotu

$$f_X(x) = F'_X(x) = \frac{1}{\lambda} e^{-\frac{x-a}{\lambda}} \mathbb{1}_{[x \geq a]}.$$

□

Pro $\lambda > 0$ můžeme tady uvažovat věrohodnostní funkci náhodného výběru $X_1, ..., X_n \sim \mathrm{DvExp}(a, \lambda)$:

$$\begin{aligned} L_n(a, \lambda) &= \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\lambda} e^{-\frac{X_i - a}{\lambda}} \cdot \mathbb{1}_{[X_i \geq a]} \\ &= \frac{1}{\lambda^n} \exp\left\{-\sum_{i=1}^{n} \frac{X_i - a}{\lambda}\right\} \cdot \prod_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{[X_i \geq a]} \end{aligned}$$

Definujme množinu $A = \{(a, \lambda) : \lambda > 0, X_i \geq a \text{ pro všechny } i \in \{1, ..., n\}\}$. Poté platí, že $L_n(a, \lambda) > 0$ právě tehdy, když $(a, \lambda) \in A$, a tedy maximálně věrohodné odhady parametrů budeme hledat maximalizací výše uvedené věrohodnostní funkce na množině A.
Nechť $(a_1, \lambda), (a_2, \lambda) \in A$, $a_1 < a_2$ a označme $u_1 = \frac{na_1}{\lambda}, u_2 = \frac{na_2}{\lambda}$. Potom zřejmě platí $u_1 < u_2$. Spočítáme rozdíl $L_n(a_2, \lambda) - L_n(a_1, \lambda)$:

$$\begin{aligned} L_n(a_2, \lambda) - L_n(a_1, \lambda) &= \frac{1}{\lambda^n} \exp\left\{-\sum_{i=1}^{n} \frac{X_i - a_2}{\lambda}\right\} - \frac{1}{\lambda^n} \exp\left\{-\sum_{i=1}^{n} \frac{X_i - a_1}{\lambda}\right\} \\ &= \frac{1}{\lambda^n} \left[\exp\left\{-\frac{1}{\lambda}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) + \frac{na_2}{\lambda}\right\} - \exp\left\{-\frac{1}{\lambda}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) + \frac{na_1}{\lambda}\right\}\right] \\ &= \frac{1}{\lambda^n} \exp\left\{-\frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{n} X_i\right\} \cdot \left[\exp\left\{\frac{na_2}{\lambda}\right\} - \exp\left\{\frac{na_1}{\lambda}\right\}\right] \\ &= \frac{1}{\lambda^n} \exp\left\{-\frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{n} X_i\right\} \cdot \left[\exp\{u_2\} - \exp\{u_1\}\right] > 0, \end{aligned}$$

kde využíváme toho, že exponenciála je striktně rostoucí funkce. Odsud vidíme, že $L_n(a, \cdot)$ je na množině A striktně rostoucí kladná, a navíc $L_n(a, \cdot) = 0$ pro všechny $(a, \lambda) \notin A$. Maximálně věrohodný odhad hledáme jako argument maxima věrohodnostní funkce, a tedy z předchozích argumentů se maxima $L_n(a, \cdot)$ nabývá v nejnižší napozorované hodnotě $X_{(1)} = x_{(1)}$ z náhodného výběru $X_1, ..., X_n$. Neboli

$$\hat{a} = X_{(1)}, \tag{1.1}$$

kde $X_{(1)}$ označuje první pořádkovou statistiku z náhodného výběru $X_1, ..., X_n$.

Maximálně věrohodný odhad parametru λ budeme na množině A hledat jako řešení věrohodnostní rovnice. Zlogaritmováním $L_n(a, \lambda)$ dostaneme log-věrohodnostní funkci

$$l_n(a, \lambda) = -n \cdot \log(\lambda) - \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^{n} (X_i - a)$$

a její derivace podle λ má tvar

$$\frac{\partial l_n(a, \lambda)}{\partial \lambda} = -\frac{n}{\lambda} + \frac{1}{\lambda^2} \sum_{i=1}^{n} (X_i - a).$$

Položením $\frac{\partial l_n(a,\lambda)}{\partial \lambda} = 0$ a vyřešením rovnice pro λ dostaneme maximálně věrohodný odhad

$$\hat{\lambda}_{\mathcal{F}_2} = \overline{X}_n - a \tag{1.2}$$

v případě modelu $\mathcal{F}_2$, kde $\overline{X}_n$ označuje aritmetický průměr z hodnot $X_1, ..., X_n$. Uvažujeme-li model $\mathcal{F}_3$, musíme neznámý parametr a nahradit jeho maximálně věrohodným odhadem $\hat{a} = X_{(1)}$, a odhad parametru λ potom bude mít tvar

$$\hat{\lambda}_{\mathcal{F}_3} = \overline{X}_n - X_{(1)}. \tag{1.3}$$

Všechny bodové odhady i konfidenční množiny v celé práci budeme ukazovat na numerickém příkladu, kde jsme si vygenerovali náhodný výběr 100 pozorování z dvouparametrického exponenciálního rozdělení se skutečnými hodnotami parametrů $\lambda = 2$ a $a = 1$. V tabulce níže ukážeme základní charakteristiky dat, zaokrouhlená na tři desetinná místa.

V našem numerickém příkladu budou tedy odhady parametrů a, λ mít hodnoty

Charakteristika	Hodnota
$\overline{X}_n$	2,976
$X_{(1)}$	2,004
$X_{(100)}$	6,325

Tabulka 1: Základní charakteristiky numerických dat.

$\hat{a} = 2{,}004$, $\hat{\lambda}_{\mathcal{F}_2} = 0{,}976$ a $\hat{\lambda}_{\mathcal{F}_3} = 0{,}972$.

1.2 Vlastnosti bodových odhadů

Odhady $\hat{a}$ a $\hat{\lambda}_{\mathcal{F}_3}$ závisí na $X_{(1)}$, jehož rozdělení neznáme. Napřed rozdělení odvodíme:

$$\begin{aligned}F_{X_{(1)}}(x) &= \mathsf{P}(X_{(1)} \leq x) = \mathsf{P}(\min\{X_1, ..., X_n\} \leq x) = 1 - \mathsf{P}(\min\{X_1, ..., X_n\} > x)\\ &= 1 - \mathsf{P}(X_i > x\ \forall i \in \{1, ..., n\}) = 1 - [\mathsf{P}(X_1 > x)]^n\\ &= 1 - [1 - \mathsf{P}(X_1 \leq x)]^n = 1 - [1 - F_X(x)]^n\\ &= 1 - [1 - (1 - e^{-\frac{x-a}{\lambda}})]^n\\ &= 1 - (e^{-\frac{x-a}{\lambda}})^n = 1 - e^{-(x-a)\cdot\frac{n}{\lambda}}. \end{aligned} \tag{1.4}$$

S ohledem na důkaz lemmatu 1.1 usoudíme, že $X_{(1)} \sim \mathrm{DvExp}\left(a, \frac{\lambda}{n}\right)$, a tedy hustota $X_{(1)}$ má tvar

$$f_{X_{(1)}}(x) = \frac{1}{\lambda} e^{-\frac{(x-a)n}{\lambda}} \mathbb{1}_{[x \geq a]}. \tag{1.5}$$

Vlastnosti $\hat{a}$. Zkoumejme nestrannost:

$$\mathsf{E}\ \hat{a} = \mathsf{E}\ X_{(1)} = \frac{\lambda}{n} + a \neq a,$$

tedy $\hat{a}$ není nestranný. Odhad $\hat{a}$ je ovšem konzistentní, neboť pro pevně zvolené $\varepsilon > 0$ máme

$$\begin{aligned}\mathsf{P}(X_{(1)} - a > \varepsilon) &= \mathsf{P}(X_{(1)} > a + \varepsilon) = 1 - \mathsf{P}(X_{(1)} \leq a + \varepsilon) = 1 - F_{X_{(1)}}(a + \varepsilon)\\ &= 1 - [1 - e^{-(a+\varepsilon-a)\frac{n}{\lambda}}] = e^{-\frac{n\varepsilon}{\lambda}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.\end{aligned}$$

Vlastnosti $\hat{\lambda}_{\mathcal{F}_2}$. Odhad $\hat{\lambda}_{\mathcal{F}_2}$ je nestranný, neboť

$$\mathsf{E}\ \hat{\lambda}_{\mathcal{F}_2} = \mathsf{E}\,(\overline{X}_n - a) = \mathsf{E}\ X_1 - a = \lambda + a - a = \lambda.$$

Ze zákona velkých čísel máme $\overline{X}_n \xrightarrow{\mathsf{P}} \mathsf{E}\ X_1$ a použitím Cramér-Sluckého věty dostaneme

$$\hat{\lambda}_{\mathcal{F}_2} = \overline{X}_n - a \xrightarrow{\mathsf{P}} \mathsf{E}\ X_1 - a = \lambda + a - a = \lambda,$$

tedy odhad $\hat{\lambda}_{\mathcal{F}_2}$ je konzistentní.

Vlastnosti $\hat{\lambda}_{\mathcal{F}_3}$. Spočítejme střední hodnotu $\hat{\lambda}_{\mathcal{F}_3}$:

$$\begin{aligned}\mathsf{E}\ \hat{\lambda}_{\mathcal{F}_3} &= \mathsf{E}\,(\overline{X}_n - X_{(1)}) = \mathsf{E}\ \overline{X}_n - \mathsf{E}\ X_{(1)} = \mathsf{E}\ X_1 - \mathsf{E}\ X_{(1)}\\ &= \lambda + a - \left(\frac{\lambda}{n} + a\right) = \lambda - \frac{\lambda}{n} = \frac{n-1}{n}\lambda \neq \lambda.\end{aligned}$$

Odhad $\hat{\lambda}_{\mathcal{F}_3}$ tedy není nestranný. Konzistenci dokážeme podobně jako u $\hat{\lambda}_{\mathcal{F}_2}$, zde navíc využijeme konzistenci odhadu $\hat{a}$. Víme, že $\overline{X}_n \xrightarrow{\mathsf{P}} \mathsf{E}\ X_1$, $\hat{a} = X_{(1)} \xrightarrow{\mathsf{P}} a$, a tedy z Cramér-Sluckého věty vyplývá, že

$$\hat{\lambda}_{\mathcal{F}_3} = \overline{X}_n - X_{(1)} \xrightarrow{\mathsf{P}} \mathsf{E}\ X_1 - a = \lambda + a - a = \lambda,$$

z čehož vyplývá konzistence odhadu $\hat{\lambda}_{\mathcal{F}_3}$.

1.3 Nestranné odhady

Odhady $\hat{a}, \hat{\lambda}_{\mathcal{F}_3}$ nejsou nestranné, což by při jejich užívání mohlo vadit. Pro úplnost jsou zde tedy odvozeny i nestranné odhady.
V předchozí sekci jsme odvodili, že $\mathsf{E}\ \hat{a} = \frac{\lambda}{n} + a$. Uvažujeme-li model $\mathcal{F}_1$, hodnotu λ známe, a tudíž můžeme snadno upravit $\hat{a}$ na nestranný odhad způsobem

$$\tilde{a}_{\mathcal{F}_1} = \hat{a} - \frac{\lambda}{n} = X_{(1)} - \frac{\lambda}{n}.$$

V modelu $\mathcal{F}_3$ vyjdeme z rovností

$$\begin{aligned} \mathsf{E}\ \hat{a} &= \frac{\lambda}{n} + a \\ \mathsf{E}\ \hat{\lambda}_{\mathcal{F}_3} &= \frac{n-1}{n}\lambda. \end{aligned}$$

Z druhé rovnosti odvodíme odhad

$$\tilde{\lambda}_{\mathcal{F}_3} = \frac{n}{n-1}\hat{\lambda}_{\mathcal{F}_3} = \frac{n}{n-1}\left(\overline{X}_n - X_{(1)}\right)$$

a $\tilde{\lambda}_{\mathcal{F}_3}$ použijeme jako odhad λ pro

$$\tilde{a}_{\mathcal{F}_3} = \hat{a} - \frac{\tilde{\lambda}_{\mathcal{F}_3}}{n} = X_{(1)} - \frac{\overline{X}_n - X_{(1)}}{n-1}.$$

V našem numerickém příkladu se skutečnými hodnotami parametrů $a = 1, \lambda = 2$ dostaneme odhady

$$\begin{aligned} \tilde{a}_{\mathcal{F}_1} &= 1{,}994 \\ \tilde{\lambda}_{\mathcal{F}_3} &= 0{,}982 \\ \tilde{a}_{\mathcal{F}_3} &= 1{,}994. \end{aligned}$$

Zmíněné odhady jsou skutečně nestranné, neboť

$$\begin{aligned} \mathsf{E}\ \tilde{\lambda}_{\mathcal{F}_3} &= \mathsf{E}\left(\frac{n}{n-1}\hat{\lambda}_{\mathcal{F}_3}\right) = \frac{n}{n-1}\cdot\frac{n-1}{n}\lambda = \lambda, \\ \mathsf{E}\ \tilde{a}_{\mathcal{F}_3} &= \mathsf{E}\left(\hat{a} - \frac{\tilde{\lambda}_{\mathcal{F}_3}}{n}\right) = \mathsf{E}\ \hat{a} - \mathsf{E}\ \frac{\tilde{\lambda}_{\mathcal{F}_3}}{n} = \frac{\lambda}{n} + a - \frac{\lambda}{n} = a. \end{aligned}$$

2. Klasické intervalové odhady

Bodové odhady parametrů a jejich vlastnosti šly odvodit snadno. Konstrukce intervalových odhadů pro dvouparametrické exponenciální rozdělení je ovšem náročnější z toho důvodu, že systém hustot $\{f_X(x, a, \lambda) : a \in \mathbb{R}, \lambda > 0\}$ není regulární (definice regulárního systému hustot viz Anděl, 2007, str. 106-107 [1]), protože množina $\{x : f_X(x, a, \lambda) > 0\} = (a; \infty)$ závisí na neznámém parametru a. Nemůžeme tedy využít asymptotické rozdělení maximálně věrohodných odhadů. Tento problém je vyřešen v článku Zhang, 2018[4], kde autor odvodil přesná rozdělení náhodných veličin, ze kterých už intervalové odhady šly zkonstruovat. Zmíněný článek ovšem přeskakuje některé formální kroky (hlavně důkazy tvrzení 2.2, věty 2.6 a detailní odvození výsledných intervalových odhadů), které jsou v této práci doplněny, včetně formulací a důkazů dalších potřebných tvrzení.

2.1 Pomocná tvrzení

Lemma 2.1. *Nechť $X_1, ..., X_n$ je náhodný výběr ze spojitého rozdělení s hustotou $f_X(x)$ vůči σ-konečné míře na $\mathbb{R}^n$. Označme $X_{(1)}, ..., X_{(n)}$ pořádkové statistiky. Potom sdružená hustota $X_{(1)}, ..., X_{(n)}$ má tvar*

$$f_{X_{(1)},...,X_{(n)}}(x_1, ..., x_n) = n! \prod_{i=1}^{n} f_X(x_i). \tag{2.1}$$

Důkaz. Nechť $\{\tau_j; j \in 1, ..., n!\}$ je množina všech permutací τ_j na množině $\{1, ..., n\}$. Potom

$$\begin{aligned} f_{X_{(1)},...,X_{(n)}}(x_1, ..., x_n) &= \sum_{\tau_j; j \in \{1,...,n!\}} f_{X_{\tau_j(1)},...,X_{\tau_j(n)}}(x_1, ..., x_n) \\ &= \sum_{j=1}^{n!} \prod_{i=1}^{n} f_X(x_i) = n! \prod_{i=1}^{n} f_X(x_i), \end{aligned}$$

kde první rovnost plyne z toho, že máme celkem $n!$ permutací, podle nichž můžeme náhodným veličinám $X_{\tau_j(1)}, ..., X_{\tau_j(n)}$ přiřadit hodnoty $x_1, ..., x_n$. □

Následující tvrzení (převzaté z publikace David, Nagaraja, 2004, str. 17-18 [3]) je klíčové. Díky němu se nám podaří transformovat náhodný výběr z obecného dvouparametrického exponenciálního rozdělení na náhodný výběr, kde rozdělení jednotlivých náhodných veličin již nezávisí na neznámých parametrech.

Tvrzení 2.2. *Nechť $X_1, ..., X_n$ je náhodný výběr z $\mathrm{DvExp}(a, \lambda)$ a $X_{(1)}, ..., X_{(n)}$ jsou pořádkové statistiky. Označme $X_{(0)} = a$. Definujme náhodné veličiny $Z_i = \frac{(n+i-1)(X_{(i)} - X_{(i-1)})}{\lambda}$ pro $i \in \{1, ..., n\}$. Potom $Z_1, ..., Z_n$ jsou nezávislé stejně rozdělené náhodné veličiny z $\mathrm{Exp}(1)$.*

Důkaz. Z lemmatu 2.1 víme, že sdružená hustota $X_{(1)}, ..., X_{(n)}$ má tvar

$$\begin{aligned}
f_{X_{(1)},...,X_{(n)}}(x_1, ..., x_n) &= n! \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\lambda} \exp\left\{-\frac{x_i - a}{\lambda}\right\} \\
&= \frac{n!}{\lambda^n} \exp\left\{-\frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{n}(x_i - a)\right\} \\
&= \frac{n!}{\lambda^n} \exp\left\{-\frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{n}(x_{(i)} - a)\right\} \\
&= \frac{n!}{\lambda^n} \exp\left\{-\frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{n}(n-i+1)(x_{(i)} - x_{(i-1)})\right\},
\end{aligned}$$

kde jsme zvolili $x_{(0)} = a$. Poslední rovnost platí, protože

$$\begin{array}{ccccccc}
x_{(n)} & +x_{(n-1)} & +x_{(n-2)} & \cdots & & +x_{(1)} & -nx_{(0)} = \\ \hline
x_{(n)} & -x_{(n-1)} & & & & & \\
 & +2x_{(n-1)} & -2x_{(n-2)} & & & & \\
 & & +3x_{(n-2)} & -3x_{(n-3)} & & & \\
 & & & \cdots & & & \\
 & & & & +(n-1)x_{(2)} & -(n-1)x_{(1)} & \\
 & & & & & +nx_{(1)} & -nx_{(0)},
\end{array} .$$

kde první suma odpovídá celému prvnímu řádku a kde každý sčítanec v druhé sumě odpovídá jednomu rádku pod čarou.
Definujme transformaci

$$Z_i = \frac{1}{\lambda}(n-i+1)(X_{(i)} - X_{(i-1)}) = h_i(X_{(1)}, ..., X_{(n)}), i \in \{1, ..., n\}, X_{(0)} = a$$

a označme vektorovou funkci

$$\mathbf{h}(\mathbf{X_{(n)}}) = \Big(h_1(\mathbf{X_{(n)}}), h_2(\mathbf{X_{(n)}}), ..., h_n(\mathbf{X_{(n)}})\Big)^T \text{ pro } \mathbf{X_{(n)}} = (X_{(1)}, ..., X_{(n)}).$$

Pro použití věty o transformaci hustot potřebujeme spočítat jakobián $\mathbf{h}$. První složka vektorové funkce $\mathbf{h}(\mathbf{X_{(n)}})$ má tvar

$$h_1(\mathbf{x_{(n)}}) = \frac{n}{\lambda}(x_{(1)} - a),$$

tedy gradient h_1 se rovná

$$\nabla h_1(\mathbf{x_{(n)}}) = \left(\frac{n}{\lambda}, 0, ..., 0\right)^T.$$

Dále platí, že

$$h_2(\mathbf{x_{(n)}}) = \frac{n-1}{\lambda}(x_{(2)} - x_{(1)}),$$

tedy

$$\nabla h_2(\mathbf{x_{(n)}}) = \left(-\frac{n-1}{\lambda}, \frac{n-1}{\lambda}, 0, ..., 0\right)^T.$$

Obdobně se spočítají i zbylé gradienty ∇h_3 až ∇h_n. Všechny gradienty poskládáme do Jacobiho matice

$$D_{\mathbf{h}}\left(\mathbf{x_{(n)}}\right) = \left(\nabla h_1(\mathbf{x_{(n)}}) \quad \nabla h_2(\mathbf{x_{(n)}}) \quad ... \quad \nabla h_n(\mathbf{x_{(n)}})\right)$$
$$= \begin{pmatrix} \frac{n}{\lambda} & -\frac{n-1}{\lambda} & 0 & ... & 0 \\ 0 & \frac{n-1}{\lambda} & -\frac{n-2}{\lambda} & ... & 0 \\ 0 & 0 & \frac{n-2}{\lambda} & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & \frac{1}{\lambda}. \end{pmatrix}$$

Vidíme, že $D_{\mathbf{h}}\left(\mathbf{x_{(n)}}\right)$ je horní trojúhelníková, tedy její determinant se rovná součinu všech prvků na hlavní diagonále, neboli

$$J_{\mathbf{h}}(\mathbf{x_{(n)}}) = \frac{n!}{\lambda^n}.$$

Potom z věty o transformaci hustot dostaneme

$$\begin{aligned} f_{\mathbf{Z_n}}(\mathbf{z_n}) &= \left|J_{\mathbf{h}}(\mathbf{x_{(n)}})\right|^{-1} \cdot f_{\mathbf{X_{(n)}}}\left(\mathbf{h}^{-1}(\mathbf{x_{(n)}})\right) \\ &= \frac{\lambda^n}{n!} \cdot \frac{n!}{\lambda^n} \exp\left\{-\sum_{i=1}^n z_i\right\} \\ &= \prod_{i=1}^n e^{-z_i}. \end{aligned}$$

Odsud vidíme, že $Z_1, ..., Z_n$ jsou nezávislé a mají rozdělení Exp(1). □

Další tři tvrzení popisují vztahy mezi některými pravděpodobnostními rozděleními, které budeme potřebovat.

Tvrzení 2.3. *Nechť* $Z_1, ..., Z_n \overset{iid}{\sim} \text{Exp}(\lambda)$. *Potom* $\sum_{i=1}^n Z_i \sim \Gamma(n, \lambda)$.

Důkaz. Momentová vytvořující funkce náhodné veličiny Z_1 má pro $s < \lambda$ tvar

$$\begin{aligned} M_{Z_1}(s) = \mathsf{E}\left[e^{sZ_1}\right] &= \int_0^\infty e^{st}\frac{1}{\lambda}e^{-\frac{t}{\lambda}}\,dt = \frac{1}{\lambda}\int_0^\infty e^{-t(\frac{1}{\lambda}-s)}\,dt \\ &= \frac{1}{\lambda}\left[-\frac{e^{-t(\frac{1}{\lambda}-s)}}{(\frac{1}{\lambda}-s)}\right]_0^\infty = \frac{1}{\lambda}\cdot\frac{1}{\frac{1}{\lambda}-s} = \frac{1}{1-s\lambda}. \end{aligned}$$

Náhodné veličiny $Z_1, ..., Z_n$ jsou iid, a tedy z vlastností momentové vytvořující funkce platí pro $s < \lambda$

$$M_{Z_1+...+Z_n}(s) = \prod_{i=1}^n M_{Z_i}(s) = \left(\frac{1}{1-s\lambda}\right)^n.$$

Nechť $X \sim \Gamma(\alpha, \beta)$, neboli $f_X(x) = \frac{x^{\alpha-1}e^{-x/\beta}}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha}$. Potom X má momentovou vytvořující funkci

$$
\begin{aligned}
M_X(s) = \mathsf{E}\left[e^{sX}\right] &= \int_0^\infty e^{st} \frac{t^{\alpha-1}e^{-\frac{t}{\beta}}}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha}\, dt = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} \int_0^\infty t^{\alpha-1} e^{-\frac{t}{\beta}+st}\, dt \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} \cdot \frac{1}{\frac{1}{\beta}-s} \int_0^\infty \left(\frac{u}{\frac{1}{\beta}-s}\right)^{\alpha-1} e^{-u}\, du \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} \cdot \left(\frac{\beta}{1-s\beta}\right)^n \int_0^\infty u^{\alpha-1}e^{-u}\, du = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left(\frac{1}{1-s\beta}\right)^n \Gamma(\alpha) \\
&= \left(\frac{1}{1-s\beta}\right)^n,
\end{aligned}
$$

což je momentová vytvořující funkce součtu $Z_1 + ... + Z_n$ pro $\alpha = n$ a $\beta = \lambda$. Používáme tvrzení, že pokud existuje momentová vytvořující funkce náhodné veličiny, potom tato vytvořující funkce jednoznačně určuje rozdělení náhodné veličiny (Bickel, Docksum, 2015, tvrzení A.12.5[2]). □

Tvrzení 2.4. *Nechť $n \in \mathbb{N}$ a $X \sim \Gamma(n, 1)$. Potom náhodná veličina $Y = 2X$ má χ^2-rozdělení s $2n$ stupni volnosti.*

Důkaz. Distribuční funkce náhodné veličiny Y má pro $x > 0$ tvar

$$
F_Y(x) = \mathsf{P}(2X \le x) = \mathsf{P}\left(X \le \frac{x}{2}\right) = F_X\left(\frac{x}{2}\right).
$$

Zderivováním dostaneme hustotu

$$
\begin{aligned}
f_Y(x) &= f_X\left(\frac{x}{2}\right) \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\Gamma(n)} \left(\frac{x}{2}\right)^{n-1} e^{-\frac{x}{2}} \\
&= \frac{x^{n-1}e^{-\frac{x}{2}}}{(n-1)! \cdot 2^n},
\end{aligned}
$$

což je přesně hustota χ^2_{2n}. □

Následující tvrzení je převzaté z publikace Bickel, Docksum, 2015, tvrzení B.2.3[2].

Tvrzení 2.5. *Nechť $m, n \in \mathbb{N}, X \sim \chi^2_m, Y \sim \chi^2_n$ a X je nezávislé s Y. Potom* $U = \frac{X}{X+Y} \sim \mathrm{Beta}(\frac{m}{2}, \frac{n}{2})$, $V = X + Y \sim \chi^2_{m+n}$ a U je nezávislé s V.

Důkaz. Použijeme větu o transformaci hustot. Definujme

$$
\begin{aligned}
U &= g_1(X,Y) = \frac{X}{X+Y}, \\
V &= g_2(X,Y) = X + Y.
\end{aligned}
$$

Inverzní funkce jsou potom

$$
\begin{aligned}
X &= h_1(U,V) = UV, \\
Y &= h_2(U,V) = V(1-U).
\end{aligned}
$$

Vidíme, že $g_1 : (0;\infty) \to (0;1)$, $g_2 : (0;\infty) \to (0;\infty)$ a obě funkce jsou prosté. Jakobián má tvar

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial u} & \frac{\partial h_1}{\partial v} \\ \frac{\partial h_2}{\partial u} & \frac{\partial h_2}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} v & u \\ -v & 1-u \end{vmatrix} = v(1-u)+uv = v-uv+uv = v \neq 0 \; \forall v \in (0;\infty),$$

tedy všechny předpoklady použití věty o transformaci hustot jsou splněny. Tedy

$$\begin{aligned} f_{(U,V)}(u,v) &= f_{(X,Y)}(h_1(u,v), h_2(u,v)) \cdot |J| \\ &= f_{(X,Y)}(uv, v(1-u)) \cdot |v| = f_X(uv) \cdot f_Y(v(1-u)) \cdot v \\ &= \frac{(uv)^{\frac{m}{2}-1} e^{-\frac{uv}{2}}}{\Gamma(\frac{m}{2}) 2^{\frac{m}{2}}} \cdot \frac{(v(1-u))^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{v(1-u)}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2}) 2^{\frac{n}{2}}} \cdot v \\ &= \frac{1}{\Gamma(\frac{m}{2})\Gamma(\frac{n}{2}) 2^{\frac{m+n}{2}}} u^{\frac{m}{2}-1} v^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{uv+v-uv}{2}} v^{\frac{n}{2}-1} (1-u)^{\frac{n}{2}-1} v \cdot \frac{\Gamma(\frac{m+n}{2})}{\Gamma(\frac{m+n}{2})} \\ &= \left[\frac{\Gamma(\frac{m+n}{2})}{\Gamma(\frac{m}{2}\Gamma(\frac{n}{2})} u^{\frac{m}{2}-1} (1-u)^{\frac{n}{2}-1} \right] \cdot \left[\frac{1}{\Gamma(\frac{m+n}{2})} v^{\frac{m+n}{2}-1} e^{-\frac{v}{2}} \frac{1}{2^{\frac{m+n}{2}}} \right] \\ &= f_U(u) \cdot f_V(v), \end{aligned}$$

odkud vidíme, že $U \sim \mathrm{Beta}(\frac{m}{2}, \frac{n}{2})$, $V \sim \chi^2_{m+n}$ a U, V jsou nezávislé. □

2.2 Odvození intervalových odhadů

Nyní můžeme s použitím předchozích tvrzení odvodit rozdělení náhodných veličin, které použijeme při konstrukci klasických intervalových odhadů. Vše potřebné je shrnuto v následující větě.

Věta 2.6. *Nechť* $X_1, ..., X_n \overset{iid}{\sim} \mathrm{DvExp}(a, \lambda)$, $X_{(1)}, ..., X_{(n)}$ *jsou pořádkové statistiky a označme* $X_{(0)} = a$. *Potom:*

(i) $Y_1 = \frac{n}{\lambda}(X_{(1)} - a) \sim \mathrm{Exp}(1)$,

(ii) $Y_2 = \frac{2n}{\lambda}(\overline{X}_n - a) \sim \chi^2_{2n}$,

(iii) $Y_3 = \frac{2n}{\lambda}(\overline{X}_n - X_{(1)}) \sim \chi^2_{2n-2}$,

(iv) $Y_4 = \frac{\overline{X}_n - X_{(1)}}{\overline{X}_n - a} \sim \mathrm{Beta}(n-1{,}1)$.

Navíc Y_1 *je nezávislé s* Y_3 *a* Y_2 *je nezávislé s* Y_4.

Důkaz. Věta je důsledkem všech předchozích tvrzení.

(i) $Y_1 = \frac{n}{\lambda}(X_{(1)} - a) = \frac{n}{\lambda}(X_{(1)} - X_{(0)}) = Z_1$ z tvrzení 2.2, ze kterého víme, že Z_1 má $\mathrm{Exp}(1)$ rozdělení.

(ii) $Y_2 = \frac{2n}{\lambda}(\overline{X}_n - a) = \frac{2}{\lambda}(\sum_{i=1}^n (X_i - a)) = 2\sum_{i=1}^n \frac{(n-i+1)(X_{(i)} - X_{(i-1)})}{\lambda} = 2\sum_{i=1}^n Z_i$ z tvrzení 2.2. Tvrzení 2.3 nám říká, že $\sum_{i=1}^n Z_i \sim \Gamma(n,1)$ a z tvrzení 2.4 máme, že $Y_2 = 2\sum_{i=1}^n Z_i \sim \chi^2_{2n}$.

(iii) $Y_3 = \frac{2n}{\lambda}(\overline{X}_n - X_{(1)}) = \frac{2}{\lambda}(\sum_{i=1}^n (X_i - X_{(1)})) = \frac{2}{\lambda}(\sum_{i=1}^n (X_{(i)} - X_{(1)})) = \frac{2}{\lambda}(\sum_{i=2}^n (X_{(i)} - X_{(1)})) = 2\sum_{i=2}^n \frac{(n-i+1)(X_{(i)} - X_{(i-1)})}{\lambda} = 2\sum_{i=2}^n Z_i$ a stejným agrumentem jako v předchozím kroku se ukáže, že $Y_3 \sim \chi^2_{2n-2}$.

(iv) $Y_4 = \frac{\overline{X}_n - X_{(1)}}{\overline{X}_n - X_{(1)} + X_{(1)} - a} \cdot \frac{(2n/\lambda)}{(2n/\lambda)} = \frac{(2n/\lambda)(\overline{X}_n - X_{(1)})}{\left((2n/\lambda)(\overline{X}_n - X_{(1)})\right) + \left((2n/\lambda)(X_{(1)} - a)\right)} = \frac{Y_3}{Y_3 + 2Y_1}$.
Z tvrzení 2.3 a 2.4 odvodíme, že $2Y_1 \sim \chi^2_2$, a rozdělení Y_4 tedy vyplývá z tvrzení 2.5.

Nezávislost $Y_1 = Z_1$ a $Y_3 = \sum_{i=2}^n Z_i$ je zřejmá, neboť Z_1 je nezávislá se všemi $Z_2, ..., Z_n$, tudíž je nezávislá i s jejich transformací.
Nezávislost Y_2 a Y_4 plyne z tvrzení 2.5 pro $U = Y_4 = \frac{Y_3}{Y_3 + 2Y_1}$ a $V = Y_2 = Y_3 + 2Y_1$. □

Díky této větě můžeme odvodit intervalové odhady parametrů. Nechť $1 - \alpha$ bude požadovaná pravděpodobnost pokrytí, kde $\alpha \in (0; 1)$.

Model $\mathcal{F}_1$. Využijeme rozdělení $Y_1 \sim \text{Exp}(1)$. Distribuční funkce $F_{Y_1}(x) = 1 - e^{-x}$ pro $x \geq 0$ je prostá s oborem hodnot $(0; 1)$, tedy kvantilová funkce náhodné veličiny Y_1 bude přímo $F_{Y_1}^{-1}$.

$$\begin{aligned} F_{Y_1}(x) = y &= 1 - e^{-x} \\ 1 - y &= e^{-x} \\ \log(1 - y) &= -x \\ x &= -\log(1 - y) \end{aligned}$$

Tedy kvantilová funkce Y_1 má tvar $F_{Y_1}^{-1}(\alpha) = -\log(1-\alpha)$ pro $\alpha \in (0; 1)$. Uvažujme $\alpha_1, \alpha_2 \geq 0$ takové, že $\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha$. Potom

$$\begin{aligned} \mathsf{P}\left[F_{Y_1}^{-1}(\alpha_1) \leq Y_1 \leq F_{Y_1}^{-1}(1 - \alpha_2)\right] &= 1 - \alpha \\ \mathsf{P}\left[-\log(1 - \alpha_1) \leq \frac{n}{\lambda}(X_{(1)} - a) \leq -\log(\alpha_2)\right] &= 1 - \alpha \\ \mathsf{P}\left[-\frac{\lambda}{n}\log(1 - \alpha_1) \leq X_{(1)} - a \leq -\frac{\lambda}{n}\log(\alpha_2)\right] &= 1 - \alpha \\ \mathsf{P}\left[X_{(1)} + \frac{\lambda}{n}\log(1 - \alpha_1) \geq a \geq X_{(1)} + \frac{\lambda}{n}\log(\alpha_2)\right] &= 1 - \alpha \end{aligned}$$

Tedy intervalový odhad pro parametr a v modelu $\mathcal{F}_1$ o spolehlivosti $1 - \alpha$ má tvar

$$\left[X_{(1)} + \frac{\lambda}{n}\log(\alpha_2); X_{(1)} + \frac{\lambda}{n}\log(1 - \alpha_1)\right].$$

Hodnoty α_1, α_2 zvolíme v tomto případě tak, aby délka tohoto konfidenčního intervalu byla co nejmenší. Velikost konfidenčního intervalu je rovna

$$X_{(1)} + \frac{\lambda}{n}\log(1 - \alpha_1) - \left(X_{(1)} + \frac{\lambda}{n}\log(\alpha_2)\right) = \frac{\lambda}{n}\left(\log(1 - \alpha_1) - \log(\alpha_2)\right).$$

Zároveň ale chceme $\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha$, můžeme tedy vyjádřit $\alpha_1 = \alpha - \alpha_2$ a budeme hledat takové $\alpha_2 \in (0; \alpha]$, abychom minimalizovali

$$\frac{\lambda}{n}(\log(1 + \alpha_2 - \alpha) - \log(\alpha_2)).$$

Úlohu přeformulujeme na hledání minima funkce $f(x) = \log(x+1-\alpha) - \log(x)$ pro $x \in (0;\alpha]$. Derivace f na otevřeném intervalu $(0;\alpha)$ je rovna

$$\begin{aligned} f^{'}(x) &= \frac{1}{x+1-\alpha} - \frac{1}{x} \\ &= \frac{1}{x+1-\alpha} \cdot \frac{x}{x} - \frac{1}{x} \cdot \frac{x+1-\alpha}{x+1-\alpha} \\ &= \frac{x-(x+1-\alpha)}{x(x+1-\alpha)} = \frac{-1+\alpha}{x(x+1-\alpha)} < 0 \end{aligned}$$

pro všechny $x \in (0;\alpha)$. Funkce f je tedy klesající na intervalu $(0;\alpha]$, a tedy minima se nabývá v hodnotě $x = \alpha$. Znamená to tedy, že pro minimalizaci délky konfidenčního intervalu musíme zvolit $\alpha_2 = \alpha$ a $\alpha_1 = 0$, tudíž optimalizovaný konfidenční interval pro a v modelu $\mathcal{F}_1$ má tvar

$$\left[X_{(1)} + \frac{\lambda}{n}\log(\alpha); X_{(1)}\right]. \tag{2.2}$$

V našem numerickém příkladu se skutečnými hodnotami parametrů $a = 2, \lambda = 1$ se 95% konfidenční interval pro a rovná $[1{,}974; 2{,}004]$.

Model $\mathcal{F}_2$. Využijeme rozdělení $Y_2 \sim \chi^2_{2n}$. Pro $\alpha \in (0;1)$ označme $\chi^2_{2n}(\alpha)$ kvantilovou funkci χ^2-rozdělení s $2n$ stupni volnosti a zvolíme $\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{\alpha}{2}$. Potom

$$\begin{aligned} \mathsf{P}\left[\chi^2_{2n}\left(\frac{\alpha}{2}\right) \le Y_2 \le \chi^2_{2n}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\right] &= 1-\alpha \\ \mathsf{P}\left[\chi^2_{2n}\left(\frac{\alpha}{2}\right) \le \frac{2n}{\lambda}(\overline{X}_n - a) \le \chi^2_{2n}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\right] &= 1-\alpha \\ \mathsf{P}\left[\frac{\chi^2_{2n}\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{2n(\overline{X}_n - a)} \le \frac{1}{\lambda} \le \frac{\chi^2_{2n}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}{2n(\overline{X}_n - a)}\right] &= 1-\alpha \\ \mathsf{P}\left[\frac{2n(\overline{X}_n - a)}{\chi^2_{2n}\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \ge \lambda \ge \frac{2n(\overline{X}_n - a)}{\chi^2_{2n}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}\right] &= 1-\alpha \end{aligned}$$

Tedy intervalový odhad pro parametr λ v modelu $\mathcal{F}_1$ o spolehlivosti $1-\alpha$ má tvar

$$\left[\frac{2n(\overline{X}_n - a)}{\chi^2_{2n}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}; \frac{2n(\overline{X}_n - a)}{\chi^2_{2n}\left(\frac{\alpha}{2}\right)}\right] \tag{2.3}$$

a v našem numerickém příkladu se na hladině spolehlivosti 95 procent rovná $[0{,}810; 1{,}200]$.

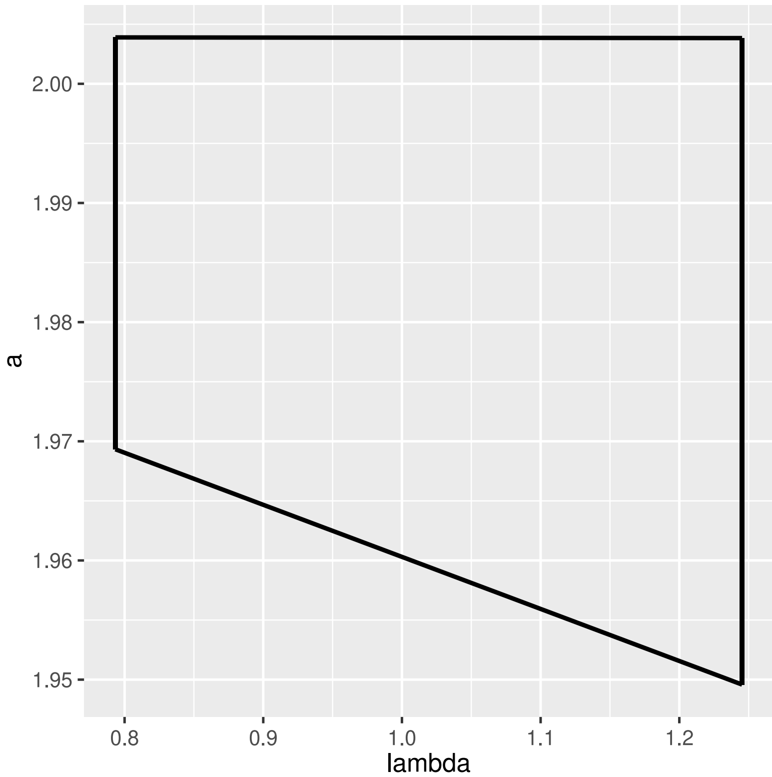
Model $\mathcal{F}_3$, část 1. Využijeme rozdělení $Y_1 \sim \mathrm{Exp}(1)$, $Y_3 \sim \chi^2_{2n-2}$ a jejich nezávislosti. Z rozdělení Y_1 a Y_3 dostáváme nerovnosti

$$\begin{aligned} \mathsf{P}\left[-\log\left(1-\frac{\alpha'}{2}\right) \le \frac{n}{\lambda}\left(X_{(1)} - a\right) \le -\log\left(\frac{\alpha'}{2}\right)\right] &= 1-\alpha' \\ \mathsf{P}\left[\chi^2_{2n-2}\left(\frac{\alpha''}{2}\right) \le \frac{2n}{\lambda}(\overline{X}_n - X_{(1)}) \le \chi^2_{2n-2}\left(1-\frac{\alpha''}{2}\right)\right] &= 1-\alpha'' \end{aligned}$$

pro $(1-\alpha')\cdot(1-\alpha'') = 1-\alpha$ (zde využíváme nezávislosti Y_1 s Y_3, aby výsledná pravděpodobnost pokrytí byla skutečně $1-\alpha$). Zdá se být poměrně rozumné uvažovat $\alpha' = \alpha''$, čímž dostaneme $\alpha' = \alpha'' = 1-\sqrt{1-\alpha}$.
Rutinními úpravami nerovností a dosazením za α', α'' dostaneme konfidenční množinu pro (a, λ) o spolehlivosti $1-\alpha$ danou nerovnostmi

$$\begin{gathered} X_{(1)} + \frac{\lambda}{n}\log\left(\frac{1-\sqrt{1-\alpha}}{2}\right) \leq a \leq X_{(1)} + \frac{\lambda}{n}\log\left(\frac{1+\sqrt{1-\alpha}}{2}\right) \\ \frac{2n(\overline{X}_n - X_{(1)})}{\chi^2_{2n-2}\left(\frac{1+\sqrt{1-\alpha}}{2}\right)} \leq \lambda \leq \frac{2n(\overline{X}_n - X_{(1)})}{\chi^2_{2n-2}\left(\frac{1-\sqrt{1-\alpha}}{2}\right)}. \end{gathered} \tag{2.4}$$

Zde je nutné tuto konfidenční množinu interpretovat jako soustavu čtyř nerovností pro (a, λ), kde dvě nerovnosti dávají omezení pro λ, a pro tyto hodnoty λ ležící unvitř těchto omezení najdeme meze pro parametr a. V našem numerickém příkladu je konfidenční množina pro oba parametry se skutečnými hodnotami $a = 2, \lambda = 1$ daná nerovnostmi (2.4) o spolehlivosti 95 procent ukázána na obrázku 1 níže.



Obrázek 1: Konfidenční množina pro (a, λ) zkonstruovaná z rozdělení náhodných veličin Y_1 a Y_3.

Model $\mathcal{F}_3$, část 2. Jinou možností, jak odvodit konfidenční množinu pro (a, λ), je využít rozdělení $Y_2 \sim \chi^2_{2n}$, $Y_4 \sim \text{Beta}(n-1{,}1)$ a jejich nezávislosti. Nejprve ale potřebujeme odvodit kvantilovou funkci $\text{Beta}(n-1{,}1)$ rozdělení.

Hustota Y_4 má pro $x \in (0;1)$ tvar

$$f_{Y_4}(x) = \frac{\Gamma(n-1+1)}{\Gamma(n-1)\Gamma(1)} x^{(n-1)-1}(1-x)^{1-1} = \frac{(n-1)!}{(n-2)!} x^{n-2} = (n-1)x^{n-2}.$$

Distribuční funkci F_{Y_4} pro $x \in (0;1)$ získáme zintegrováním hustoty.

$$\begin{aligned} F_{Y_4}(x) &= \int_0^x (n-1)t^{n-2}\,dt = (n-1)\left[\frac{t^{n-1}}{n-1}\right]_0^x \\ &= x^{n-1}. \end{aligned}$$

Odsud již můžeme odvodit kvantilovou funkci pro Y_4:

$$\begin{aligned} F_{Y_4}(x) = y &= x^{n-1} \\ x &= \sqrt[n-1]{y} = F_{Y_4}^{-1}(y),\ y \in (0;1). \end{aligned}$$

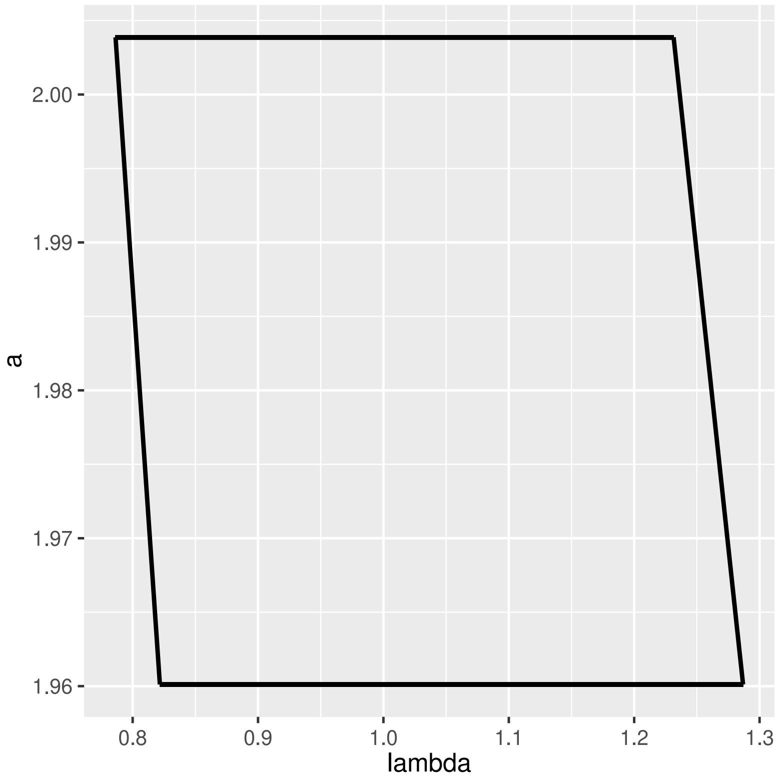
Nyní již můžeme psát

$$\begin{aligned} \mathsf{P}\left[\chi^2_{2n}\left(\frac{\alpha'}{2}\right) \leq \frac{2n}{\lambda}(\overline{X}_n - a) \leq \chi^2_{2n}\left(1-\frac{\alpha'}{2}\right)\right] &= 1-\alpha' \\ \mathsf{P}\left[\sqrt[n-1]{\frac{\alpha''}{2}} \leq \frac{\overline{X}_n - X_{(1)}}{\overline{X}_n - a} \leq \sqrt[n-1]{\frac{1-\alpha''}{2}}\right] &= 1-\alpha'' \end{aligned}$$

pro $(1-\alpha')\cdot(1-\alpha'') = 1-\alpha$ (zde využíváme nezávislosti Y_2 s Y_4, aby výsledná pravděpodobnost pokrytí byla skutečně $1-\alpha$). Zavedeme-li stejný požadavek $\alpha' = \alpha''$, dostaneme opět $\alpha' = \alpha'' = 1-\sqrt{1-\alpha}$. Osamostatněním λ z prvního řádku nerovností a a z druhého řádku nerovností dostaneme konfidenční množinu pro (a, λ) danou nerovnostmi

$$\begin{gathered} \frac{2n(\overline{X}_n - a)}{\chi^2_{2n}\left(\frac{1+\sqrt{1-\alpha}}{2}\right)} \leq \lambda \leq \frac{2n(\overline{X}_n - a)}{\chi^2_{2n}\left(\frac{1-\sqrt{1-\alpha}}{2}\right)}, \\ \overline{X}_n - (\overline{X}_n - X_{(1)})\sqrt[n-1]{\frac{2}{1-\sqrt{1-\alpha}}} \leq a \leq \overline{X}_n - (\overline{X}_n - X_{(1)})\sqrt[n-1]{\frac{2}{1+\sqrt{1-\alpha}}}. \end{gathered} \tag{2.5}$$

Interpretace je stejná jako u konfidenční množiny (2.4), akorát s prohozenou rolí parametrů a, λ. Opět bude mít konfidenční množina v kartézských souřadnicích tvar lichoběžníku. V našem numerickém příkladu je konfidenční množina pro oba parametry se skutečnými hodnotami $a = 2, \lambda = 1$ daná nerovnostmi (2.5) o spolehlivosti 95 procent ukázána na obrázku 2 níže.



Obrázek 2: Konfidenční množina pro (a, λ) zkonstruovaná z rozdělení náhodných veličin Y_2 a Y_4.

3. Konfidenční množiny s minimální velikostí

Článek Zhang, 2018[4] zmiňuje alternativní přístup, kterým můžeme konstruovat konfidenční množiny. Ukáže se, že za určitých podmínek tento přístup bude generovat konfidenční množiny, které na dané hladině $1-\alpha, \alpha \in (0;1)$ mají za určité restrikce nejmenší možnou velikost.

3.1 Věta o konfidenční množině s nejmenší velikostí

Uvažujme obecný náhodný výběr $\boldsymbol{X} = (X_1, ..., X_n)$ s hodnotami v $\mathcal{H} \subset \mathbb{R}^n$ skoro jistě. Dále nechť $\boldsymbol{T} = \boldsymbol{T}(X_1, ..., X_n)$ je vektorová postačující statistika pro obecný parametr $\boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{\Theta} \subseteq \mathbb{R}^d$ s hustotou $f_{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{\theta})$ s nosičem $\mathcal{M}$. Nechť $C(\boldsymbol{T})$ je konfidenční množina pro parametr $\boldsymbol{\theta}$ zkonstruovaná ze statistiky $\boldsymbol{T}$. Označme

$$C(\boldsymbol{\theta}) = \{\boldsymbol{x} : \boldsymbol{\theta} \in C(\boldsymbol{T}(\boldsymbol{x}))\},$$

neboli $C(\boldsymbol{\theta})$ je množina takových hodnot $\boldsymbol{x} \in \mathcal{H}$, že zvolená hodnota $\boldsymbol{\theta}$ je pokryta konfidenční množinou $C(\boldsymbol{T}(\boldsymbol{x}))$ za podmínky $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{x}$. Definujme

$$C^*(\boldsymbol{\theta}) = \{\boldsymbol{t} : \boldsymbol{\theta} \in C(\boldsymbol{t})\},$$

neboli $C^*(\boldsymbol{\theta})$ je množina takových hodnot $\boldsymbol{t} \in \mathcal{M}$, že zvolená hodnota $\boldsymbol{\theta}$ je pokryta konfidenční množinou $C(\boldsymbol{T})$ za podmínky $\boldsymbol{T} = \boldsymbol{t}$. Snadno vidíme, že $\boldsymbol{\theta} \in C(\boldsymbol{T}) \Leftrightarrow \boldsymbol{T} \in C^*(\boldsymbol{\theta})$. Pro obecnou množinu $M \subseteq \mathbb{R}^k$ ještě zavedeme $|M|$ jako $k-$rozměrnou Lebesgueovu míru množiny M.

S použitím předchozího značení můžeme nyní vyslovit větu, která nám umožní konstruovat konfidenční množiny, jejichž velikost je nejmenší ze všech možných konfidenčních množin na stejné hladině $1-\alpha$ splňujících stejné podmínky z této věty.

Věta 3.1. *Předpokládejme následující podmínky:*

(i) $\boldsymbol{T} = \boldsymbol{T}(X_1, ..., X_n)$ *je postačující statistika pro parametr* $\boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{\Theta} \subseteq \mathbb{R}^d$ *s hustotou* $f_{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{\theta})$ *pro* $\boldsymbol{t} \in \mathcal{M}$,

(ii) pro nějakou funkci $p(\boldsymbol{\theta}) > 0$ *je funkce* $\tilde{f}_{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{\theta}) = f_{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{\theta})/p(\boldsymbol{\theta})$ *pivot (tj. rozdělení* $\tilde{f}_{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{T}, \boldsymbol{\theta})$ *nezávisí na neznámém parametru* $\boldsymbol{\theta}$*),*

(iii) Konfidenční množina $C_k(\boldsymbol{T})$ *definovaná jako* $C_k(\boldsymbol{t}) = \left\{\boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{\Theta} : \tilde{f}_{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{\theta}) \geq k\right\}$ *splňuje* $|C_k^*(\boldsymbol{\theta})| = q(\boldsymbol{\theta})\,|C_k(\boldsymbol{\theta})|$ *pro nějakou funkci* $q(\boldsymbol{\theta}) > 0$*, kde hodnota* $k > 0$ *musí splňovat* $P[\boldsymbol{\theta} \in C_k(\boldsymbol{T})] = 1-\alpha$.

Potom $C_k(\boldsymbol{T})$ *je konfidenční množina na hladině* $1-\alpha$ *s minimální velikostí ze všech konfidenčních množin* C *splňujících* $|C^*(\boldsymbol{\theta})| = q(\boldsymbol{\theta})\,|C(\boldsymbol{\theta})|$.

Důkaz. Nechť $C(\boldsymbol{T})$ je nějaká konfidenční množina pro parametr $\boldsymbol{\theta}$ o spolehlivosti $1-\alpha$ splňující podmínku ze závěru znění věty a množina $C_k(\boldsymbol{T})$ je konfidenční množina z bodu *(iii)* ze znění věty s odpovídající hodnotou $k>0$. Potom

$$\begin{aligned}1-\alpha &= \mathsf{P}[\boldsymbol{\theta}\in C(\boldsymbol{T})] = \mathsf{P}[\boldsymbol{T}\in C^*(\boldsymbol{\theta})]\\ &= \int_{C^*(\boldsymbol{\theta})}[f_{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{t},\boldsymbol{\theta})]\,dt \pm |C^*(\boldsymbol{\theta})|\cdot kp(\boldsymbol{\theta})\\ &= |C^*(\boldsymbol{\theta})|\cdot kp(\boldsymbol{\theta}) + \int_{C^*(\boldsymbol{\theta})}[f_{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{t},\boldsymbol{\theta})-kp(\boldsymbol{\theta})]\,dt.\end{aligned}$$

Využijeme tohoto výsledku a počítejme

$$\begin{aligned}0 &= 1-\alpha-(1-\alpha)=\\ &\mathsf{P}[\boldsymbol{\theta}\in C(\boldsymbol{T})]-\mathsf{P}[\boldsymbol{\theta}\in C_k(\boldsymbol{T})]=\\ &= |C^*(\boldsymbol{\theta})|\cdot kp(\boldsymbol{\theta}) + \int_{C^*(\boldsymbol{\theta})}[f_{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{t},\boldsymbol{\theta})-kp(\boldsymbol{\theta})]\,dt\\ &- |C_k^*(\boldsymbol{\theta})|\cdot kp(\boldsymbol{\theta}) - \int_{C_k^*(\boldsymbol{\theta})}[f_{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{t},\boldsymbol{\theta})-kp(\boldsymbol{\theta})]\,dt\\ &= kp(\boldsymbol{\theta})\cdot[|C^*(\boldsymbol{\theta})|-|C_k^*(\boldsymbol{\theta})|]\\ &+ \int_{C^*(\boldsymbol{\theta})}[f_{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{t},\boldsymbol{\theta})-kp(\boldsymbol{\theta})]\,dt - \int_{C_k^*(\boldsymbol{\theta})}[f_{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{t},\boldsymbol{\theta})-kp(\boldsymbol{\theta})]\,dt\\ &= kp(\boldsymbol{\theta})q(\boldsymbol{\theta})\cdot[|C(\boldsymbol{\theta})|-|C_k(\boldsymbol{\theta})|]\\ &+ \int_{C^*(\boldsymbol{\theta})}[f_{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{t},\boldsymbol{\theta})-kp(\boldsymbol{\theta})]\,dt - \int_{C_k^*(\boldsymbol{\theta})}[f_{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{t},\boldsymbol{\theta})-kp(\boldsymbol{\theta})]\,dt.\end{aligned}$$

Rozepíšeme rozdíl integrálů

$$\begin{aligned}&\int_{C^*(\boldsymbol{\theta})}[f_{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{t},\boldsymbol{\theta})-kp(\boldsymbol{\theta})]\,dt - \int_{C_k^*(\boldsymbol{\theta})}[f_{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{t},\boldsymbol{\theta})-kp(\boldsymbol{\theta})]\,dt=\\ &= \int_{C^*(\boldsymbol{\theta})}[f_{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{t},\boldsymbol{\theta})-kp(\boldsymbol{\theta})]\,dt \mp \int_{C^*(\boldsymbol{\theta})\cap C_k^*(\boldsymbol{\theta})}[f_{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{t},\boldsymbol{\theta})-kp(\boldsymbol{\theta})]\,dt\\ &- \int_{C_k^*(\boldsymbol{\theta})}[f_{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{t},\boldsymbol{\theta})-kp(\boldsymbol{\theta})]\,dt=\\ &= \int_{C^*(\boldsymbol{\theta})\setminus C_k^*(\boldsymbol{\theta})}[f_{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{t},\boldsymbol{\theta})-kp(\boldsymbol{\theta})]\,dt - \int_{C_k^*(\boldsymbol{\theta})\setminus C^*(\boldsymbol{\theta})}[f_{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{t},\boldsymbol{\theta})-kp(\boldsymbol{\theta})]\,dt.\end{aligned}$$

Z podmínky *(iii)* z tvrzení věty máme, že $\forall\boldsymbol{t}\in C_k^*(\boldsymbol{\theta})$ platí $\tilde{f}_{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{t},\boldsymbol{\theta})\geq k$, tedy i $f_{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{t},\boldsymbol{\theta})p(\boldsymbol{\theta})\geq kp(\boldsymbol{\theta})$, neboť $p(\boldsymbol{\theta})>0\;\forall\boldsymbol{\theta}\in\boldsymbol{\Theta}$. A protože je $C_k^*(\boldsymbol{\theta})$ tvořena právě těmito $\boldsymbol{t}$, musí nutně platit, že $\forall\boldsymbol{t}\in\mathbb{R}^d\setminus C_k^*(\boldsymbol{\theta})$ platí $\tilde{f}_{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{t},\boldsymbol{\theta})<k$, tedy i $f_{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{t},\boldsymbol{\theta})p(\boldsymbol{\theta})<kp(\boldsymbol{\theta})$. Dostaneme, že rozdíl integrálů je nekladný (využíváme úmluvu, že integrál přes množinu Lebesgueovy míry 0 je roven nule), můžeme jej tedy shora odhadnout nulou. Našli jsme tudíž horní odhad

$$0=\mathsf{P}[\boldsymbol{\theta}\in C(\boldsymbol{T})]-\mathsf{P}[\boldsymbol{\theta}\in C_k(\boldsymbol{T})]\leq kp(\boldsymbol{\theta})q(\boldsymbol{\theta})\cdot[|C(\boldsymbol{\theta})|-|C_k(\boldsymbol{\theta})|]+0.$$

Dostaneme tedy

$$0\leq kp(\boldsymbol{\theta})q(\boldsymbol{\theta})\cdot[|C(\boldsymbol{\theta})|-|C_k(\boldsymbol{\theta})|]$$

a z podmínek věty máme $k>0$ a $p(\boldsymbol{\theta})>0, q(\boldsymbol{\theta})>0\;\forall\boldsymbol{\theta}\in\boldsymbol{\Theta}$. Musí tedy nutně platit $|C(\boldsymbol{\theta})|\geq|C_k(\boldsymbol{\theta})|$, což jsme chtěli dokázat. □

3.2 Odvození konfidenčních množin

Pro konstrukci konfidenčních množin s nejmenší velikostí podle předchozí věty 3.1 potřebujeme znát postačující statistiky pro (a, λ). Zavedeme je v následujícím tvrzení.

Tvrzení 3.2. *Nechť* $X_1, ..., X_n \overset{iid}{\sim} \text{DvExp}(a, \lambda)$. *Potom:*

(i) $X_{(1)}$ *je postačující pro* a,

(ii) $\overline{X}_n$ *je postačující pro* λ,

(iii) $\frac{1}{\overline{X}_n - a}$ *je postačující pro* λ,

(iv) $\left(X_{(1)}, \overline{X}_n\right)$ *je postačující pro* (a, λ),

(v) $\left(\frac{X_{(1)}}{\overline{X}_n - X_{(1)}}, \frac{1}{\overline{X}_n - X_{(1)}}\right)$ *je postačující pro* (a, λ).

Důkaz. Větu dokážeme pomocí Neymannova faktorizačního kritéria (viz Anděl, 2007, str. 125[1]). Označme $\mathbf{X} = (X_1, ..., X_n)^T$ náhodný vektor se složkami $X_1, ..., X_n$.

(i) Faktorizujeme sdruženou hustotu $\mathbf{X}$:

$$
\begin{aligned}
f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}, a, \lambda) &= \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\lambda} \exp\left\{-\frac{x_i - a}{\lambda}\right\} \mathbb{1}_{[x_i \geq a]} \\
&= \frac{1}{\lambda^n} \exp\left\{-\frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^{n} (x_i - a)\right\} \mathbb{1}_{[\min x_i \geq a]} \\
&= \frac{1}{\lambda^n} \exp\left\{-\frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^{n} (x_{(i)} - a)\right\} \mathbb{1}_{[x_{(1)} \geq a]} \\
&= \exp\left\{-\frac{x_{(1)} - na}{\lambda}\right\} \mathbb{1}_{[x_{(1)} \geq a]} \cdot \frac{1}{\lambda^n} \exp\left\{-\frac{\sum_{i=2}^{n} x_{(i)}}{\lambda}\right\} \\
&= g_1(x_{(1)}, a, \lambda) \cdot h_1(\mathbf{x}, \lambda),
\end{aligned}
$$

tedy $X_{(1)}$ je skutečně postačující pro a.

(ii) Faktorizujeme sdruženou hustotu $\mathbf{X}$:

$$
\begin{aligned}
f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}, a, \lambda) &= \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\lambda} \exp\left\{-\frac{x_i - a}{\lambda}\right\} \mathbb{1}_{[x_i \geq a]} \\
&= \frac{1}{\lambda^n} \exp\left\{-\frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^{n} (x_i - a)\right\} \mathbb{1}_{[\min x_i \geq a]} \\
&= \frac{1}{\lambda^n} \exp\left\{-\frac{n(\overline{x}_n - a)}{\lambda}\right\} \cdot \mathbb{1}_{[x_{(1)} \geq a]} \\
&= g_2(\overline{x}_n, a, \lambda) \cdot h_2(\mathbf{x}, a),
\end{aligned}
$$

tedy $\overline{X}_n$ je skutečně postačující pro λ.

(iv) Faktorizujeme sdruženou hustotu $\mathbf{X}$:

$$
\begin{aligned}
f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}, a, \lambda) &= \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\lambda} \exp\left\{-\frac{x_i - a}{\lambda}\right\} \mathbb{1}_{[x_i \geq a]} \\
&= \frac{1}{\lambda^n} \exp\left\{-\frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{n}(x_i - a)\right\} \mathbb{1}_{[\min x_i \geq a]} \\
&= \frac{1}{\lambda^n} \exp\left\{-\frac{n(\overline{x}_n - a)}{\lambda}\right\} \mathbb{1}_{[x_{(1)} \geq a]} \cdot 1 \\
&= g_4(x_{(1)}, \overline{x}_n, a, \lambda) \cdot h_4(\mathbf{x}),
\end{aligned}
$$

tedy $(X_{(1)}, \overline{X}_n)$ je skutečně postačující pro (a, λ).

Zbylé statistiky jsou také postačující, neboť měřitelné vzájemně jednoznačné zobrazení z $\mathbb{R}^k$ do $\mathbb{R}^k$ postačující statistiky, jehož inverze je také měřitelná, je opět postačující statistika (Anděl, 2007: Základy matematické statistiky, str. 126[1]). $\square$

Nyní již můžeme odvodit konfidenční množiny podle věty 3.1.

Model $\mathcal{F}_1$. Z tvrzení 3.2(i) víme, že $T_1 = X_{(1)}$ je postačující pro a. Hustotu $f_{X_{(1)}}$ jsme odvodili již dříve (1.5). Volbou $p(a) = \frac{\lambda}{n}$ dostaneme

$$
\tilde{f}_{T_1}(t, a) = \frac{f_{T_1}(t, a)}{p(a)} = e^{-\frac{n(t-a)}{\lambda}}, \; t \geq a,
$$

což je pivot, neboť $\tilde{f}_{T_1}(T_1, a) = \exp\left\{-\frac{n(T_1 - a)}{\lambda}\right\} = \exp\{-Y_1\}$ z tvrzení 2.6(i) a $Y_1 \sim \text{Exp}(1)$. Z věty 3.1 tedy dostáváme

$$
\begin{aligned}
C_k(T_1) &= \left\{a : \tilde{f}_{T_1}(T_1, a) \geq k\right\} \\
&= \left\{a : \exp\left\{-\frac{n}{\lambda}(X_{(1)} - a)\right\} \geq k\right\} \\
&= \left\{a : -\frac{n}{\lambda}(X_{(1)} - a) \geq \log k\right\} \\
&= \left\{a : X_{(1)} - a \leq -\frac{\lambda}{n}\log k\right\} \\
&= \left\{a : a \geq X_{(1)} + \frac{\lambda}{n}\log k\right\}
\end{aligned}
$$

Zároveň ale víme, že $a \leq X_{(1)}$, tedy dohromady dostáváme

$$
C_k(T_1) = \left[X_{(1)} + \frac{\lambda}{n}\log k; X_{(1)}\right], \; k < 1.
$$

Zbývá určit vztah mezi k a α. Povšimněme si, že $a \in C_k(T_1) \Leftrightarrow \tilde{f}_{T_1}(T_1, a) \geq k$. Hodnota $k > 0$ je z věty 3.1 určena vztahem

$$
\begin{aligned}
1 - \alpha &= \mathsf{P}[a \in C_k(T_1)] \\
&= \mathsf{P}[\tilde{f}_{T_1}(T_1, a) \geq k] \\
&= \mathsf{P}[e^{-Y_1} \geq k] \\
&= \mathsf{P}[Y_1 \leq -\log k] \\
&= 1 - e^{-(-\log k)} = 1 - k.
\end{aligned}
$$

Tedy platí $k = \alpha$, a proto hledaná konfidenční množina $C_k(T_1)$ o spolehlivosti $1-\alpha$ má za restrikce $|C^*(a)| = |C(a)|$ tvar

$$C_k(T_1) = \left[X_{(1)} + \frac{\lambda}{n} \log \alpha; X_{(1)} \right]. \tag{3.1}$$

Dostali jsme tentýž interval spolehlivosti pro a jako optimalizovaný interval spolehlivosti odvozený v kapitole 2, a tedy v našem numerickém příkladu se skutečnými hodnotami parametrů $a = 2, \lambda = 1$ bude mít tento 95% interval spolehlivosti tvar $[1{,}974; 2{,}004]$.

Model $\mathcal{F}_2$. Z tvrzení 3.2(ii) víme, že $T_2 = \frac{1}{\overline{X}_n - a}$ je postačující pro λ. Z věty 2.6(ii) platí, že $Y_2 = \frac{2n}{\lambda}(\overline{X}_n - a) = \frac{2n}{\lambda}\frac{1}{T_2} \sim \chi^2_{2n}$. Hustotu T_2 odvodíme z věty o transformaci hustoty.
Položme $T_2 = g(Y_2) = \frac{2n}{\lambda}\frac{1}{Y_2}$. Vidíme, že g je prostá na celém intervalu $(0;\infty)$ a existuje inverzní funkce $h(t) = g^{-1}(t) = \frac{2n}{\lambda t}$. Derivace $h'(t) = -\frac{2n}{\lambda t^2}$ je nenulová $\forall t \in (0;\infty)$, všechny předpoklady věty o transformaci hustoty jsou splněny. Tedy

$$f_{T_2}(t) = f_{Y_2}(h(t)) \cdot |h'(t)| = f_{Y_2}\left(\frac{2n}{\lambda t}\right) \cdot \left(\frac{2n}{\lambda t^2}\right),\ t > 0.$$

Zvolme $p(\lambda) = \frac{\lambda}{2n}$, potom funkce

$$\tilde{f}_{T_2}(t,\lambda) = \frac{f_{T_2}(t)}{p(\lambda)} = \frac{f_{Y_2}\left(\frac{2n}{\lambda t}\right) \cdot \left(\frac{2n}{\lambda t^2}\right)}{\frac{\lambda}{2n}} = f_{Y_2}\left(\frac{2n}{\lambda t}\right) \cdot \left(\frac{2n}{\lambda t}\right)^2,\ t > 0$$

je pivot, neboť $\tilde{f}_{T_2}(T_2,\lambda) = f_{Y_2}(2n/(\lambda T_2)) \cdot (2n/(\lambda T_2))^2 = f_{Y_2}(Y_2) \cdot Y_2^2$ a $Y_2 \sim \chi^2_{2n}$, tedy $\tilde{f}_{T_2}(T_2,\lambda)$ nezávisí na λ.
Z věty 3.1 a $Y_2 \sim \chi^2_{2n}$ dostáváme

$$\begin{aligned}
C_k(T_2) &= \left\{ \lambda : \tilde{f}_{T_2}(T_2,\lambda) \geq k \right\} \\
&= \left\{ \lambda : f_{Y_2}\left(\frac{2n}{\lambda T_2}\right) \cdot \left(\frac{2n}{\lambda T_2}\right)^2 \geq k \right\} \\
&= \left\{ \lambda : \frac{1}{2^n (n-1)!} \left(\frac{2n}{\lambda T_2}\right)^{n+1} \exp\left\{ -\frac{2n}{\lambda T_2} \cdot \frac{1}{2} \right\} \geq k \right\}
\end{aligned}$$

Vyšetříme průběh funkce $\varphi(u) = u^{n+1} e^{-\frac{u}{2}}, u \in [0;\infty)$:

$$\begin{aligned}
\varphi(0) &= 0, \\
\lim_{u\to\infty} \varphi(u) &= 0, \\
\varphi'(u) &= (n+1)u^n e^{-\frac{u}{2}} - \frac{1}{2} u^{n+1} e^{-\frac{u}{2}}, u > 0.
\end{aligned}$$

Bod, kde $\varphi'(u) = 0$, je $u_2 = 2(n+1)$. Další bod podezřelý z extrému je $u_1 = 0$. Funkční hodnoty v u_1, u_2 jsou $\varphi(u_1) = 0$ a $\varphi(u_2) = (2n+2)^{n+1} e^{-(n+1)} > 0$. Navíc $\forall u \in (0, u_2)$ je $\varphi'(u) > 0$ a $\forall u > u_2$ platí $\varphi'(u) < 0$, tedy u_1 je globální minimum a u_2 je globální maximum φ. Odsud dostáváme, že

$$\begin{gathered}
\forall k > 0, k < \max \tilde{f}_{T_2}(T_2,\lambda)\ \exists k_1, k_2 > 0 : \\
k_1 < k_2 \text{ a } f_{Y_2}(k_1) \cdot k_1^2 = f_{Y_2}(k_2) \cdot k_2^2 = k.
\end{gathered}$$

Potom pro tyto k_1, k_2 nutně platí $\tilde{f}_{T_2}(T_2, \lambda) = f_{Y_2}(\frac{2n}{\lambda T_2}) \cdot (\frac{2n}{\lambda T_2})^2 \geq k \iff k_1 \leq \frac{2n}{\lambda T_2} \leq k_2 \iff k_1 \leq Y_2 \leq k_2$, kde $Y_2 \sim \chi^2_{2n}$. Hodnoty k_1, k_2 určíme z

$$\begin{aligned}1 - \alpha &= \mathsf{P}(\lambda \in C_k(T_2)) = \mathsf{P}(\tilde{f}_{T_2}(T_2, \lambda) \geq k) = \mathsf{P}(Y_2 \in [k_1; k_2]) \\ &= F_{Y_2}(k_2) - F_{Y_2}(k_1),\end{aligned}$$

a tedy

$$k_1 = \chi^2_{2n}(\alpha - \alpha_1), k_2 = \chi^2_{2n}(1 - \alpha_1)$$

pro $\alpha_1 \in (0; \alpha)$, neboť $F_{Y_2}(k_2) - F_{Y_2}(k_1) = F_{Y_2}(\chi^2_{2n}(1 - \alpha_1)) - F_{Y_2}(\chi^2_{2n}(\alpha - \alpha_1)) = 1 - \alpha_1 - (\alpha - \alpha_1) = 1 - \alpha$. Hodnota α_1 je určena tak, aby platilo $f_{Y_2}(k_1) \cdot k_1^2 = f_{Y_2}(k_2) \cdot k_2^2$, a tato rovnice se řeší numericky.
Ze vztahu $k_1 \leq \frac{2n}{\lambda T_2} \leq k_2$ odvodíme úpravami finální konfidenční množinu $C_k(T_2)$ pro λ o spolehlivosti $1 - \alpha$

$$\left[\frac{2n(\overline{X}_n - a)}{\chi^2_{2n}(1 - \alpha_1)}; \frac{2n(\overline{X}_n - a)}{\chi^2_{2n}(\alpha - \alpha_1)}\right] \tag{3.2}$$

za restrikce $|C^*(a)| = |C(a)|$. Je to velmi podobný interval spolehlivosti pro λ jako ten, který jsme odvodili v kapitole 2. Liší se pouze optimálně zvolenou hodnotou α_1, abychom při dané spolehlivosti měli nejkratší možný interval. Při volbě $\alpha_1 = \frac{\alpha}{2}$ jsou oba konfidenční intervaly totožné.
V našem numerickém příkladu s rozsahem náhodného výběru $n = 100$, požadovanou hladinou $\alpha = 0{,}05$ a skutečnými hodnotami parametrů $a = 2, \lambda = 1$ vychází optimální hodnota $\alpha_1 \doteq 0{,}017$ a konfidenční interval pro λ o spolehlivosti 95 procent má tvar $[0{,}799; 1{,}185]$. Pro srovnání, v kapitole 2 měl konfidenční interval pro λ o stejné spolehlivosti tvar $[0{,}810; 1{,}200]$, nově odvozený interval je tedy o 0,9 procent kratší.

Model $\mathcal{F}_3$. Z tvrzení 3.2(v) je $\mathbf{T}_3 = (T_{31}, T_{32}) = \left(\frac{X_{(1)}}{\overline{X}_n - X_{(1)}}, \frac{1}{\overline{X}_n - X_{(1)}}\right)$ postačující pro (a, λ). Z věty 2.6(i), (iii) máme $Y_1 = \frac{n}{\lambda}(X_{(1)} - a) \sim \text{Exp}(\lambda)$, $Y_3 = \frac{2n}{\lambda}(\overline{X}_n - X_{(1)}) \sim \chi^2_{2n-2}$ a Y_1 je nezávislé s Y_3. Definujme transformace

$$\begin{aligned}Y_1 &= h_1(T_{31}, T_{32}) = \frac{n}{\lambda}\left(\frac{T_{31}}{T_{32}} - a\right), \\ Y_3 &= h_2(T_{31}, T_{32}) = \frac{2n}{\lambda T_{32}}.\end{aligned}$$

Jakobián transformace je roven

$$J_{\mathbf{h}} = \begin{vmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial t_1} & \frac{\partial h_1}{\partial t_2} \\ \frac{\partial h_2}{\partial t_1} & \frac{\partial h_2}{\partial t_2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{n}{\lambda t_2} & 0 \\ -\frac{n t_1}{\lambda t_2^2} & -\frac{2n}{\lambda t_2^2} \end{vmatrix} = -\frac{2n^2}{\lambda^2 t_2^3} \neq 0 \, \forall t_1, t_2 > 0 : \frac{t_1}{t_2} \geq a.$$

Předpoklady věty o transformaci hustot máme splněny, tedy sdružená hustota (T_{31}, T_{32}) má tvar

$$\begin{aligned}f_{\mathbf{T}_3}(t_1, t_2) = f_{T_{31}, T_{32}}(t_1, t_2) &= f_{Y_1, Y_3}(h_1(t_1, t_2), h_2(t_1, t_2)) \cdot |J| \\ &= f_{Y_1}\left(\frac{n}{\lambda}\left(\frac{t_1}{t_2} - a\right)\right) \cdot f_{Y_3}\left(\frac{2n}{\lambda t_2}\right) \cdot \frac{2n^2}{\lambda^2 t_2^3} \\ &= \exp\left\{-\frac{n}{\lambda}\left(\frac{t_1}{t_2} - a\right)\right\} \cdot f_{Y_3}\left(\frac{2n}{\lambda t_2}\right) \cdot \frac{2n^2}{\lambda^2 t_2^3}.\end{aligned}$$

Volbou $p(a,\lambda) = \frac{\lambda}{4n}$ dostaneme pivot

$$\tilde{f}_{\mathbf{T}_3}(t_1,t_2,a,\lambda) = \frac{f_{\mathbf{T}_3}(t_1,t_2)}{p(a,\lambda)} = \exp\left\{-\frac{n}{\lambda}\left(\frac{t_1}{t_2}-a\right)\right\} \cdot f_{Y_3}\left(\frac{2n}{\lambda t_2}\right) \cdot \left(\frac{2n}{\lambda t_2}\right)^3,$$

protože $\tilde{f}_{\mathbf{T}_3}(T_{31},T_{32},a,\lambda) = \exp\left\{-\frac{n}{\lambda}\left(\frac{T_{31}}{T_{32}}-a\right)\right\} \cdot f_{Y_3}\left(\frac{2n}{\lambda T_{32}}\right) \cdot \left(\frac{2n}{\lambda T_{32}}\right)^3 = e^{-Y_1} \cdot f_{Y_3}(Y_3) \cdot Y_3^3$ a z věty 2.6(i), (iii) víme, že rozdělení Y_1 ani Y_3 nezávisí na neznámých parametrech.
Nyní budeme chtít odvodit vztah mezi $|C_k^*(a,\lambda)|$ a $|C_k(a,\lambda)|$. Z věty 3.1 máme, že

$$C_k(a,\lambda) = \{(a,\lambda) : \tilde{f}_{\mathbf{T}_3}(t_1,t_2,a,\lambda) \geq k\}$$

a

$$C_k^*(a,\lambda) = \{(t_1,t_2) : \tilde{f}_{\mathbf{T}_3}(t_1,t_2,a,\lambda) \geq k\}.$$

Vyjdeme z

$$|C_k^*(a,\lambda)| = \iint_{\{\tilde{f}_{\mathbf{T}_3}(t_1,t_2,a,\lambda)\geq k\}} dt_1 dt_2$$

a zavedeme substituce $t_1 = \rho_1(u_1,u_2) = a - \lambda u_1 + a u_2$, $t_2 = \rho_2(u_1,u_2) = u_2$. Jakobián této transformace je roven

$$J_{\boldsymbol{\rho}} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \rho_1}{\partial u_1} & \frac{\partial \rho_1}{\partial u_2} \\ \frac{\partial \rho_2}{\partial u_1} & \frac{\partial \rho_2}{\partial u_2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 \\ a & 1 \end{vmatrix} = -\lambda \neq 0.$$

Tedy

$$\begin{aligned}
|C_k^*(a,\lambda)| &= \iint_{\{\tilde{f}_{\mathbf{T}_3}(t_1,t_2,a,\lambda)\geq k\}} dt_1 dt_2 = \\
&= \iint_{\{\tilde{f}_{\mathbf{T}_3}(a-\lambda u_1+a u_2,u_2,a,\lambda)\geq k\}} |J_{\boldsymbol{\rho}}| \, du_1 du_2 = \\
&= \iint_{\{\tilde{f}_{\mathbf{T}_3}(a-\lambda u_1+a u_2,u_2,a,\lambda)\geq k\}} \lambda \, du_1 du_2 = \\
&= \iint_{\{\tilde{f}_{\mathbf{T}_3}(a,\lambda,u_1,u_2)\geq k\}} \lambda \, du_1 du_2 = \lambda \cdot |C_k(a,\lambda)|,
\end{aligned}$$

neboť

$$\begin{aligned}
\tilde{f}_{\mathbf{T}_3}(a-\lambda u_1+a u_2,u_2,a,\lambda) &= \exp\left\{-\frac{n}{\lambda}\left(\frac{a-\lambda u_1+a u_2}{u_2}-a\right)\right\} \cdot f_{Y_3}\left(\frac{2n}{\lambda u_2}\right) \cdot \left(\frac{2n}{\lambda u_2}\right)^3 = \\
&= \exp\left\{-\frac{n}{\lambda}\left(\frac{a}{u_2}-\frac{\lambda u_1}{u_2}+a-a\right)\right\} \cdot f_{Y_3}\left(\frac{2n}{u_2\lambda}\right) \cdot \left(\frac{2n}{u_2\lambda}\right)^3 = \\
&= \exp\left\{-\frac{n}{u_2}\left(\frac{a}{\lambda}-u_1\right)\right\} \cdot f_{Y_3}\left(\frac{2n}{u_2\lambda}\right) \cdot \left(\frac{2n}{u_2\lambda}\right)^3 = \\
&= \tilde{f}_{\mathbf{T}_3}(a,\lambda,u_1,u_2).
\end{aligned}$$

Dále z věty 3.1, $Y_3 \sim \chi^2_{2n-2}$ a nezávislosti Y_1 s Y_3 dostaneme

$$\begin{aligned}
C_k(\mathbf{T}_3) &= \Big\{(a,\lambda) : \tilde{f}_{\mathbf{T}_3}(T_{31},T_{32},a,\lambda) \geq k\Big\} = \\
&= \Big\{(a,\lambda) : e^{-Y_1} \cdot f_{Y_3}(Y_3) \cdot Y_3^3 \geq k\Big\} = \\
&= \left\{(a,\lambda) : e^{-Y_1} \frac{1}{2^{n-1}(n-2)!} Y_3^{n+1} e^{-\frac{Y_3}{2}} \geq k\right\}.
\end{aligned}$$

Vyšetříme průběh funkce $\boldsymbol{\tau}(x_1, x_2) = e^{-x_1} \cdot x_2^{n+1} e^{-\frac{x_2}{2}} = \tau_1(x_1) \cdot \tau_2(x_2)$ pro $x_1, x_2 \geq 0$:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\tau}(0, x_2) &= x_2^{n+1} e^{-\frac{x_2}{2}} \\
\boldsymbol{\tau}(x_1, 0) &= 0 \\
\boldsymbol{\tau}(x_1, x_2) &\geq 0 \\
\lim_{x_1 \to \infty} \boldsymbol{\tau}(x_1, x_2) &= \lim_{x_2 \to \infty} \boldsymbol{\tau}(x_1, x_2) = 0 \\
\tau_1'(x_1) &= -e^{-x_1} < 0 \, \forall x_1 > 0 \\
\tau_2'(x_2) &= (n+1) x_2^n e^{-\frac{x_2}{2}} - \frac{1}{2} x_2^{n+1} e^{-\frac{x_2}{2}}, x_2 > 0.
\end{aligned}$$

Vidíme, že τ_1 je na celém svém definičním oboru klesající, kladná a v nekonečnu se limitně blíží nule, její maximum se tady nabývá v bodě $x_1 = 0$. Funkce τ_2 je kladná, má maximum v bodě $x_2 = 2(n+1)$ a minimum v nule, na intervalu $(0; 2(n+1))$ je rostoucí a na $(2(n+1); \infty)$ klesající.

Vzhledem k těmto vlastnostem budeme, podobně jako v modelu $\mathcal{F}_2$, hledat omezení pro samotné argumenty T_{31}, T_{32}. Obdobně jako v modelu $\mathcal{F}_2$ existují $k_1, k_2 > 0$ omezení taková, že $k_1 \leq \frac{\overline{X}_n - X_{(1)}}{\lambda} \leq k_2$. Myšlenka dalšího postupu je taková, že zapíšeme předchozí nerovnosti jako $g\left(\frac{\overline{X}_n - X_{(1)}}{\lambda}\right) \leq k_\alpha$ pro $g(k_1) = g(k_2) = k_\alpha$, kde $g(x) = x - \frac{n+1}{n} \log x$ je konvexní funkce (neboť $g''(x) = 1/x^2 > 0 \, \forall x > 0$ a k_α bude kritická hodnota taková, aby výsledná konfidenční množina měla pravděpodobnost pokrytí $1 - \alpha$. Funkce g je volena tak, aby pro každé $\lambda \in \left(\frac{\overline{X}_n - X_{(1)}}{k_2}; \frac{\overline{X}_n - X_{(1)}}{k_1}\right)$ platilo $g\left(\frac{\overline{X}_n - X_{(1)}}{\lambda}\right) - k_\alpha < 0$, a tento záporný rozdíl se použije na simultánní pokrytí parametru a.

Dohromady tedy dostáváme

$$C_k(\mathbf{T}_3) = \left\{ (a, \lambda) : g\left(\frac{\overline{X}_n - X_{(1)}}{\lambda}\right) + \frac{X_{(1)} - a}{\lambda} \leq k_\alpha \right\}.$$

Vyjádřením a z výše uvedené nerovnosti dostaneme spodní mez pro a ve tvaru

$$a \geq X_{(1)} + \lambda \cdot \left(g\left(\frac{\overline{X}_n - X_{(1)}}{\lambda}\right) - k_\alpha \right)$$

a horní mez máme zaručenou z $a \leq X_{(1)}$. Spojením všech omezení pro (a, λ) dostaneme hledanou konfidenční množinu danou nerovnostmi

$$\begin{aligned}
X_{(1)} + \left[g\left(\frac{\overline{X}_n - X_{(1)}}{\lambda}\right) - k_\alpha \right] \lambda \leq a \leq X_{(1)} \\
\frac{\overline{X}_n - X_{(1)}}{k_2} \leq \lambda \leq \frac{\overline{X}_n - X_{(1)}}{k_1},
\end{aligned}$$

kde $g(k_1) = g(k_2) = k_\alpha$.
Zmíněnou hodnotu k_a určíme pomocí

$$
\begin{aligned}
1-\alpha &= \mathsf{P}[(a,\lambda)\in C_k(\mathbf{T}_3)] = \\
&= \mathsf{P}\left[g\left(\frac{\overline{X}_n - X_{(1)}}{\lambda}\right) + \frac{X_{(1)}-a}{\lambda} \le k_\alpha\right] = \\
&= \mathsf{P}\left[g\left(\frac{1}{\lambda T_{32}}\right) + \frac{\frac{T_{31}}{T_{32}}-a}{\lambda} \le k_\alpha\right] = \\
&= \iint_{\{g(\frac{1}{\lambda t_2})+\frac{1}{\lambda}(\frac{t_1}{t_2}-a)\le k_\alpha\}} f_{\mathbf{T}_3}(t_1,t_2)\,dt_1dt_2 = \\
&= \iint_{\{g(\frac{1}{\lambda t_2})+\frac{1}{\lambda}(\frac{t_1}{t_2}-a)\le k_\alpha\}} \exp\left\{-\frac{n}{\lambda}\left(\frac{t_1}{t_2}-a\right)\right\}\cdot f_{Y_3}\left(\frac{2n}{\lambda t_2}\right)\cdot\frac{2n^2}{\lambda^2 t_2^3}\cdot\frac{\lambda}{\lambda}\,dt_1dt_2.
\end{aligned}
$$

Zavedeme substituce $x = \frac{1}{\lambda t_2}$ a $y = \frac{1}{\lambda}\left(\frac{t_1}{t_2}-a\right)$, neboli

$$
\begin{aligned}
t_1 &= \psi_1(x,y) = \frac{\lambda y + a}{\lambda x}, \\
t_2 &= \psi_2(x,y) = \frac{1}{\lambda x}.
\end{aligned}
$$

Protože $t_1 > 0, t_2 > 0, \lambda > 0$ a $\frac{t_1}{t_2} > a$, nutně platí $x > 0$ a $y > 0$. Jakobián této transformace je roven

$$
J_\psi = \begin{vmatrix} \frac{\partial\psi_1}{\partial x} & \frac{\partial\psi_1}{\partial y} \\ \frac{\partial\psi_2}{\partial x} & \frac{\partial\psi_2}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\frac{\lambda y+a}{\lambda x} & -\frac{1}{\lambda x^2} \\ \frac{1}{x} & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{\lambda x^3} \neq 0\,\forall x>0, y>0.
$$

Potom

$$
\begin{aligned}
1-\alpha &= \iint_{\{g(x)+y\le k_\alpha\}} e^{-ny}\cdot f_{Y_3}(2nx)\cdot 2n^2\lambda\cdot\left|\frac{1}{\lambda x^3}\right|\,dxdy = \\
&= \iint_{\{g(x)+y\le k_\alpha\}} e^{-ny}\cdot f_{Y_3}(2nx)\cdot 2n^2\,dxdy = \\
&= \int_{\{g(x)\le k_\alpha\}} 2n^2 f_{Y_3}(2nx)\cdot\left[-\frac{1}{n}e^{-ny}\right]_{y=0}^{-g(x)+k_\alpha} dx = \\
&= \int_{k_1}^{k_2} 2nf_{Y_3}(2nx)\cdot(1-e^{ng(x)-nk_\alpha}\,dx = \\
&= \int_{k_1}^{k_2} 2nf_{Y_3}(2nx)\,dx - \int_{k_1}^{k_2} 2nf_{Y_3}(2nx)\cdot e^{ng(x)-nk_\alpha}\,dx = I_1 - I_2
\end{aligned}
$$

Integrály I_1, I_2 spočítáme zvlášť.

$$
\begin{aligned}
I_1 &= \int_{k_1}^{k_2} 2nf_{Y_3}(2nx)\,dx = \begin{vmatrix} u = 2nx \\ du = 2n\,dx \end{vmatrix} = \\
&= \int_{2nk_1}^{2nk_2} f_{Y_3}(u)\,du = F_{Y_3}(2nk_2) - F_{Y_3}(2nk_1)
\end{aligned}
$$

I_2 spočítáme rozepsáním funkcí f_{Y_3} a g.

$$\begin{aligned}
I_2 &= \int_{k_1}^{k_2} 2n f_{Y_3}(2nx) \cdot e^{ng(x)-nk_\alpha}\, dx = \\
&= \int_{k_1}^{k_2} 2n \frac{1}{2^{n-1}(n-2)!}(2nx)^{n-2} e^{-nx} e^{n(x-\frac{n+1}{n}\log x - k_\alpha)}\, dx = \\
&= \int_{k_1}^{k_2} \frac{n^{n-1}}{(n-2)!} x^{n-2} e^{-(n+1)\log x} e^{-nk_\alpha}\, dx = \\
&= \int_{k_1}^{k_2} \frac{n^{n-1}}{(n-2)!} x^{n-2} x^{-n-1} e^{-nk_\alpha}\, dx = \\
&= \frac{n^{n-1}e^{-nk_\alpha}}{(n-2)!} \cdot \int_{k_1}^{k_2} \frac{1}{x^3}\, dx = \\
&= -\frac{n^{n-1}e^{-nk_\alpha}}{(n-2)!} \cdot \left(\frac{1}{k_2^2} - \frac{1}{k_1^2}\right)
\end{aligned}$$

Dohromady tedy dostáváme podmínku pro k_α

$$1-\alpha = F_{Y_3}(2nk_2) - F_{Y_3}(2nk_1) + \frac{n^{n-1}e^{-nk_\alpha}}{(n-2)!} \cdot \left(\frac{1}{k_2^2} - \frac{1}{k_1^2}\right),$$

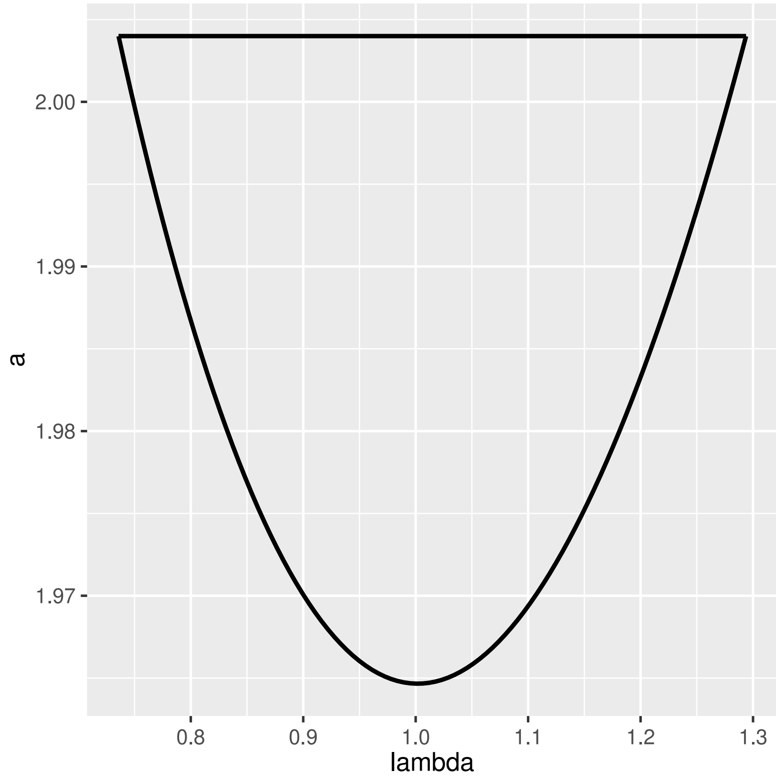
kde $g(k_1) = g(k_2) = k_\alpha$ a $g\left(\frac{\overline{X}_n - X_{(1)}}{\lambda}\right) \leq k_\alpha$ je ekvivalentní s $\lambda \in \left[\frac{\overline{X}_n - X_{(1)}}{k_2}, \frac{\overline{X}_n - X_{(1)}}{k_1}\right]$.

Za výše uvedených podmínek máme tudíž soustavu nerovností určujících $C_k(\mathbf{T}_3)$:

$$\begin{aligned}
X_{(1)} + \left[g\left(\frac{\overline{X}_n - X_{(1)}}{\lambda}\right) - k_\alpha\right]\lambda \leq a \leq X_{(1)} \\
\frac{\overline{X}_n - X_{(1)}}{k_2} \leq \lambda \leq \frac{\overline{X}_n - X_{(1)}}{k_1}.
\end{aligned} \tag{3.3}$$

Interpretace nerovností je stejná jako u konfidenční množiny dané nerovnostmi (2.4). Spodní dvě nerovnosti dávají omezení pro parametr λ, a pro tyto přípustné hodnoty najdeme z horních dvou nerovností meze pro a.
V našem numerickém příkladu s rozsahem dat $n = 100$, požadovanou hladinou $\alpha = 0{,}05$ a skutečnými hodnotami parametrů $a = 2, \lambda = 1$ vychází $k_\alpha \doteq 1{,}04$, $k_1 \doteq 0{,}752$ a $k_2 \doteq 1{,}322$. Konfidenční množina $C_k(\mathbf{T}_3)$ je v tomto numerickém příkladu ukázána na obrázku 3 níže.

Porovnání v modelu $\mathcal{F}_3$. Pro názornost označme M_3 konfidenční množinu danou nerovnostmi (2.4) a M_4 konfidenční množinu danou nerovnostmi (2.5), obě odvozené v předchozí kapitole. Protože mají M_3 i M_4 tvar lichoběžníku, snadno v našem numerickém příkladu spočítáme, že tyto dvě konfidenční množiny mají velikosti $|M_3| \doteq 0{,}0201$ a $|M_4| \doteq 0{,}0199$.



Obrázek 3: Konfidenční množina pro (a, λ) zkonstruovaná podle věty 3.1.

Velikost množiny $C_k(\mathbf{T}_3)$ se obecně spočítá integrálem

$$\begin{aligned}
|C_k(\mathbf{T}_3)| &= \int_{\frac{\overline{X}_n - X_{(1)}}{k_2}}^{\frac{\overline{X}_n - X_{(1)}}{k_1}} \left(\int_{X_{(1)} + \lambda\left[g\left(\frac{\overline{X}_n - X_{(1)}}{\lambda}\right) - k_\alpha\right]}^{X_{(1)}} da \right) d\lambda \\
&= \int_{\frac{\overline{X}_n - X_{(1)}}{k_2}}^{\frac{\overline{X}_n - X_{(1)}}{k_1}} \lambda \left[k_\alpha - g\left(\frac{\overline{X}_n - X_{(1)}}{\lambda}\right)\right] d\lambda = \left| \begin{aligned} z &= \tfrac{\overline{X}_n - X_{(1)}}{\lambda} \\ \lambda &= \tfrac{\overline{X}_n - X_{(1)}}{z} \\ d\lambda &= -\tfrac{\overline{X}_n - X_{(1)}}{z^2}\, dz \end{aligned} \right| \\
&= \int_{k_1}^{k_2} \frac{\overline{X}_n - X_{(1)}}{z} (k_\alpha - g(z)) \frac{\overline{X}_n - X_{(1)}}{z^2}\, dz \\
&= (\overline{X}_n - X_{(1)})^2 \int_{k_1}^{k_2} \frac{k_\alpha - g(z)}{z^3}\, dz.
\end{aligned}$$

V našem numerickém příkladu platí, že $n = 100$, $\overline{X}_n \doteq 2{,}976$, $X_{(1)} \doteq 2{,}004$, $k_\alpha \doteq 1{,}04$, $k_1 \doteq 0{,}752$ a $k_2 \doteq 1{,}322$. Dosazením těchto hodnot dopočítáme, že $|C_k(\mathbf{T}_3)| \doteq 0{,}0146$. Znamená to tedy, na stejné hladině spolehlivosti 95 procent má $C_k(\mathbf{T}_3)$ má o 27,4 procent menší velikost než M_3 a o 26,6 procent menší objem než M_4.

Závěr

V celé práci jsme se věnovali bodovým i intervalovým odhadům dvouparametrického exponenciálního rozdělení. V úvodu jsme zavedli pojem dvouparametrického exponenciálního rozdělení a uvažované tři modely podle toho, které z parametrů známe nebo neznáme. Odvodili jsme bodové odhady metodou maximální věrohodnosti a vyšetřili jsme jejich nestrannost a konzistenci. V případě, že nalezené bodové odhady nebyly nestranné, jsme našli i alternativní bodové odhady, které už nestranné byly.
Pro odvození konfidenčních množin jsme využili dva různé přístupy, oba převzaté z článku Zhang, 2018[4]. Jeden využíval přesná rozdělení náhodných veličin, druhý se opíral o větu o konfidenční množině s minimální velikostí. Oproti zmíněnému článku zde byla formulována a dokázána potřebná pomocná tvrzení a potřebné výpočty a odvozování byly prováděny pečlivěji.
Pro srovnání obou přístupů jsme práci doplnili numerickým příkladem z nasimulovaných dat. Všechny bodové odhady a konfidenční množiny jsou v práci vyčísleny, případně vyznačeny graficky, jednalo-li se o dvourozměrné konfidenční množiny. Na našem příkladu se ukázalo, že pokud jsme jeden z parametrů znali a hledali jsme konfidenční množinu druhého parametru, oba zmíněné přístupy byly srovnatelné. Pokud jsme ovšem počítali konfidenční množinu pro oba parametry zároveň, přístup přes větu o konfidenční množině s minimální velikostí se ukázal jako podstatně lepší. Konfidenční množina získaná druhou metodou byla v našem příkladu zhruba o 27 procent menší než konfidenční množiny získané první zmíněnou metodou.

Literatura

[1] J. Anděl. *Základy matematické statistiky.* Druhé opravené vydání. Matfyzpress, Praha, 2007.

[2] Peter J. Bickel and Kjell A. Doksum. *Mathematical Statistics: Basic Ideas and selected topics, Vol. I.* 2nd Edition. CRC Press, 2015.

[3] Herbert A. David and Haikady N. Nagaraja. *Order Statistics.* Third Edition. John Wiley & Sons, 2004.

[4] Jin Zhang. Minimum Volume Confidence Sets for Two-Parameter Exponential Distributions. *The American Statistician*, 72(3):213–218, 2018.