



**MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ  
FAKULTA**  
Univerzita Karlova

**BAKALÁŘSKÁ PRÁCE**

Eliška Vlková

**Neparametrický odhad funkce intenzity  
bodového procesu závislé na kovariátách**

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí bakalářské práce: RNDr. Jiří Dvořák, Ph.D.

Studijní program: Obecná matematika

Praha 2023

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval(a) samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů. Tato práce nebyla využita k získání jiného nebo stejného titulu.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V ..... dne .....

Podpis autora

Velmi bych chtěla poděkovat zejména svému vedoucímu RNDr. Jiřímu Dvořákovi, Ph.D. za ochotu, trpělivost a vstřícnost při konzultacích, za všechny věnovaný čas a cenné rady při práci na této bakalářské práci. Dále bych chtěla poděkovat své rodině a přátelům za veškerou podporu a pomoc nejen během mého studia.

Název práce: Neparametrický odhad funkce intenzity bodového procesu závislé na kovariátách

Autor: Eliška Vlková

Katedra: Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí bakalářské práce: RNDr. Jiří Dvořák, Ph.D., Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Abstrakt: Bodové procesy modelují náhodné body rozmístěné v prostoru. Jednou z jejich nejdůležitějších charakteristik je funkce intenzity. Pro bodové procesy jsou často k dispozici také doplňující informace o zkoumané oblasti, takzvané kovariáty. Pro funkci, která popisuje vztah mezi funkcí intenzity bodového procesu a kovariátou, odvodíme důležitý vzorec. Na základě tohoto vzorce nalezneme její jádrový odhad a formulujeme vztahy pro střední hodnotu a rozptyl našeho odhadu. Pomocí simulačních experimentů ověříme přesnost tohoto jádrového odhadu.

Klíčová slova: bodové procesy, funkce intenzity, kovariáta, jádrový odhad

Title: Nonparametric estimation of the intensity function of a point process depending on covariates

Author: Eliška Vlková

Department: Department of Probability and Mathematical Statistics

Supervisor: RNDr. Jiří Dvořák, Ph.D., Department of Probability and Mathematical Statistics

Abstract: Point processes describe random point patterns in space. One of their most important characteristics is the intensity function. Furthermore, additional information about the surveyed area, so-called covariates, is often available for point processes. We derive a key formula for the function that describes the relation between the intensity function of the point process and the covariate. Based on this formula, we find its kernel estimate and formulate relations for the mean and variance of the estimate. We use simulation experiments to verify the accuracy of the kernel estimate.

Keywords: point processes, intensity function, covariate, kernel estimation

# Obsah

Úvod	2
<b>1 Bodové procesy</b>	<b>3</b>
1.1 Základní pojmy a definice . . . . .	3
1.2 Charakteristiky bodových procesů . . . . .	4
1.2.1 Charakteristiky prvního řádu . . . . .	4
1.2.2 Charakteristiky druhého řádu . . . . .	5
1.3 Další potřebné definice . . . . .	6
1.4 Modely pro funkci intenzity . . . . .	7
1.4.1 Parametrický model pro funkci intenzity . . . . .	7
1.4.2 Neparametrický model pro funkci intenzity . . . . .	8
<b>2 Funkce intenzity</b>	<b>9</b>
2.1 Coarea formula . . . . .	9
2.2 Věta pro funkci intenzity . . . . .	11
<b>3 Jádrový odhad funkce intenzity</b>	<b>13</b>
<b>4 Simulační experimenty</b>	<b>16</b>
4.1 Jádrový odhad funkce $\rho$ a ISE . . . . .	16
4.2 MISE . . . . .	19
4.3 Vliv středního počtu bodů na MISE . . . . .	19
4.4 M <sub>l</sub> rSE . . . . .	21
4.5 Rozptyl jádrového odhadu funkce $\rho$ . . . . .	23
<b>Závěr</b>	<b>26</b>
<b>Seznam použité literatury</b>	<b>27</b>
<b>Seznam obrázků</b>	<b>28</b>
<b>Seznam tabulek</b>	<b>29</b>
<b>Seznam použitých zkratk</b>	<b>30</b>

# Úvod

Bodové procesy modelují náhodné body rozmístěné v prostoru. Jedná se o důležitý obor prostorové statistiky nacházející uplatnění v nespočtu odvětví, mezi které patří například epidemiologie, ekologie, lesnictví, geologický průzkum, seismologie, astronomie a ekonomie. Pomocí bodových procesů můžeme modelovat například stromy v lese, ložiska minerálů zmapovaná při geologickém průzkumu, výskyt různých druhů onemocnění a podobně.

Mimo to máme často k dispozici doplňující informace o zkoumané oblasti jako například nadmořskou výšku, pH půdy nebo znečištění ovzduší v jednotlivých místech. Tyto informace budeme v textu označovat jako kovariáty. Zaměříme se na bodové procesy závislé pouze na jedné kovariátě.

Ve statistické analýze bodových procesů je často důležité zjistit závislost bodového procesu na prostorových kovariátách. Může nás například zajímat, zda nadmořská výška ovlivňuje místa výskytu určitého druhu stromu v daném lese, či zda má míra znečištění ovzduší vliv na výskyt konkrétní nemoci v daném regionu. Tyto závislosti lze popisovat pomocí parametrických a neparametrických modelů. My se budeme zabývat především neparametrickými modely.

Hlavním cílem této práce je neparametricky odhadnout funkci, která popisuje vztah mezi bodovým procesem a kovariátou.

Zavedeme si jednu z nejdůležitějších charakteristik bodových procesů, a to funkci intenzity. Zaměříme se na procesy, jejichž funkce intenzity lze vyjádřit jako funkce kovariáty a budeme analyzovat funkci popisující tuto závislost. Najdeme její jádrový odhad a formulujeme vztahy pro střední hodnotu a rozptyl našeho odhadu. Na závěr pomocí simulačních experimentů ověříme přesnost tohoto jádrového odhadu.

V první kapitole se seznámíme se základními pojmy a definicemi bodových procesů. Zavedeme jejich základní charakteristiky s důrazem na funkci intenzity a představíme základní model bodového procesu bez interakcí, takzvaný Poissonův proces. Na závěr popíšeme modely pro funkci intenzity.

V druhé kapitole uvedeme pomocné definice a tvrzení Coarea formula. Aplikaci této věty ilustrujeme na jednoduchém příkladu. Formulujeme a důkladně odvodíme důležitý vztah pro funkci intenzity uvedený v článku Baddeley a kol. (2012, vzorec (6)).

Ve třetí kapitole využijeme vztahu pro funkci intenzity, formulovaného v předchozí kapitole, a uvedeme jádrový odhad funkce, která popisuje závislost funkce intenzity na kovariátě. Odvodíme vztahy pro střední hodnotu a rozptyl tohoto odhadu.

Ve čtvrté kapitole doplníme teorii o simulace Poissonových bodových procesů. Vypočítáme integrovanou kvadratickou chybu (ISE), střední integrovanou kvadratickou chybu (MISE) a střední integrovanou relativní kvadratickou chybu (MIRSE) výše uvedeného jádrového odhadu funkce pro dané realizace bodových procesů. Nakonec pro tyto realizace odhadneme rozptyl tohoto odhadu.

# 1. Bodové procesy

## 1.1 Základní pojmy a definice

V této sekci se seznámíme se základními pojmy a pomocnými definicemi, díky kterým následně zavedeme bodový proces. Vycházíme především z definic uvedených v knize Rataj (2006).

Nechť  $(S, \rho)$  je separabilní lokálně kompaktní metrický prostor. Zavedeme si značení  $\mathcal{B}(S)$  pro borelovské množiny na  $S$ , resp.  $\mathcal{B}_0(S)$  pro omezené borelovské množiny na  $S$ . Pokud bude z kontextu patrné o jaký prostor se jedná, budeme stručně psát  $\mathcal{B}$ , resp.  $\mathcal{B}_0$ .

**Definice 1.** *Míra  $\mu$  na  $(S, \mathcal{B})$  je lokálně konečná, jestliže je konečná na  $\mathcal{B}_0$ , tj.*

$$\mu(B) < \infty, \forall B \in \mathcal{B}_0.$$

*Symbolem  $\mathcal{M} \equiv \mathcal{M}(S)$  budeme značit množinu všech lokálně konečných měr na  $(S, \rho)$ . Dále označme*

$$\mathcal{N} \equiv \mathcal{N}(S) = \{\mu \in \mathcal{M} : \mu(B) \in \mathbb{N} \cup \{0, \infty\} \text{ pro každou } B \in \mathcal{B}\}$$

*množinu všech lokálně konečných měr nabývajících pouze celočíselných hodnot.*

Dále definujeme nejmenší  $\sigma$ -algebru  $\mathfrak{M}$  na  $\mathcal{M}$ , vůči níž jsou všechna zobrazení  $\mu \mapsto \mu(B)$ ,  $B \in \mathcal{B}$ , měřitelná. Podobně zavedeme  $\sigma$ -algebru  $\mathfrak{N}$  na  $\mathcal{N}$ .

**Definice 2.** *Zavedme následující  $\sigma$ -algebry na  $\mathcal{M}$  a  $\mathcal{N}$ :*

$$\begin{aligned} \mathfrak{M} &= \sigma\{\mu \mapsto \mu(B) \text{ měřitelné, } B \in \mathcal{B}\} \\ &= \sigma\{\{\mu \in \mathcal{M} : \mu(B) \in [0, r)\} : r \geq 0, B \in \mathcal{B}\}, \\ \mathfrak{N} &= \{\mathcal{M} \cap \mathcal{N} : \mathcal{M} \in \mathfrak{M}\} \end{aligned}$$

**Poznámka.** Množina všech lokálně konečných čítacích měr  $\mathcal{N}$  leží v  $\sigma$ -algebře  $\mathfrak{M}$ :  $\mathcal{N} \in \mathfrak{M}$ . Důkaz lze nalézt v knize Rataj (2006, lemma 2.3).

Nyní již definujeme náhodnou míru a její speciální případ bodový proces.

**Definice 3.** *Bud'  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$  pravděpodobnostní prostor. Měřitelné zobrazení*

$$\Psi : (\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P}) \rightarrow (\mathcal{M}, \mathfrak{M})$$

*se nazývá náhodná míra na  $S$ .*

**Definice 4.** *Bud'  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$  pravděpodobnostní prostor. Měřitelné zobrazení*

$$\Phi : (\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P}) \rightarrow (\mathcal{N}, \mathfrak{N})$$

*se nazývá bodový proces na  $S$ .*

**Definice 5.** *Bodový proces  $\Phi$  je jednoduchý, jestliže  $\mathcal{P}(\Phi \in \mathcal{N}^*) = 1$ , kde*

$$\mathcal{N}^* = \{\nu \in \mathcal{N} : \nu(\{x\}) \leq 1 \text{ pro každé } x \in S\}$$

**Poznámka.** Množina  $\mathcal{N}^*$  leží v  $\sigma$ -algebře  $\mathfrak{M}$  a  $\mathfrak{N}$ :  $\mathcal{N}^* \in \mathfrak{M}$ ,  $\mathcal{N}^* \in \mathfrak{N}$ . Důkaz lze nalézt v knize Rataj (2006, lemma 4.2).

Dále budeme uvažovat pouze jednoduché bodové procesy. Jinými slovy předpokládejme, že každá jednobodová množina má míru menší nebo rovnu jedné.

Existují různé interpretace jednoduchých bodových procesů. Na jednoduchý bodový proces lze nahlížet jako na náhodnou atomickou míru, kde každý z atomů má stejnou jednotkovou váhu. To odpovídá definici výše. Avšak jednoduché bodové procesy lze také uvažovat jako náhodnou lokálně konečnou množinu bodů na množině  $S$ . Mezi těmito interpretacemi lze libovolně přecházet.

Nechť  $\Phi$  je náhodná atomická míra generující jednoduchý bodový proces s nosičem míry  $\text{supp } \Phi = \{x_1, x_2, \dots\}$ . Pak prvky nosiče můžeme uvažovat jako body lokálně konečné množiny  $\mathbf{x} = \{x_1, x_2, \dots\}$  na  $S$ , které opět generují jednoduchý bodový proces. Stejně tak lze body lokálně konečné množiny uvažovat jako prvky nosiče náhodné atomické míry.

## 1.2 Charakteristiky bodových procesů

V této sekci uvažujeme bodový proces  $\Phi$  definovaný na množině  $S = \mathbb{R}^d$ . Rádi bychom zavedli základní charakteristiky popisující bodové procesy. Nejčastějšími charakteristikami při analyzování náhodných veličin jsou momenty. Podobně jako u náhodných veličin můžeme při studiu bodových procesů definovat analogie střední hodnoty, rozptylu, kovariance a momentů vyšších řádů. My se zaměříme na charakteristiky prvního a druhého řádu. Vycházíme především z definic a tvrzení uvedených v knihách Baddeley a kol. (2006, 2. kapitola), Moller a Waagepetersen (2003, 4. kapitola).

### 1.2.1 Charakteristiky prvního řádu

Nyní si definujeme míru intenzity neboli první momentovou míru bodového procesu  $\Phi$ . Míra intenzity nám udává očekávaný počet pozorovaných bodů v dané množině.

**Definice 6.** *Nechť  $\Phi$  je bodový proces na  $\mathbb{R}^d$ . Míra  $\Lambda$  definovaná předpisem*

$$\Lambda(B) = \mathbb{E}[\Phi(B)], \quad B \in \mathcal{B}$$

*se nazývá míra intenzity bodového procesu  $\Phi$ .*

Pokud existuje Radon-Nikodymova derivace pro míru intenzity  $\Lambda$ , nazveme ji funkce intenzity bodového procesu  $\Phi$ .

**Definice 7.** *Nechť  $\Phi$  je bodový proces na  $\mathbb{R}^d$  s mírou intenzity  $\Lambda$  splňující předpis*

$$\Lambda(B) = \int_B \lambda(u) \, du, \quad B \in \mathcal{B}$$

*pro nezápornou měřitelnou funkci  $\lambda$ . Pak funkci  $\lambda$  nazveme funkce intenzity bodového procesu  $\Phi$ .*



**Poznámka.** Zápisem  $\int f(u) du$  rozumíme integrál funkce  $f$  vzhledem k Lebesgueově míře správné dimenze.

Důležitou větou pro bodové procesy, kterou budeme následně používat v kapitole 3, je Campbellova věta. Tu si nyní uvedeme pro charakteristiky prvního řádu.

**Věta 1** (Campbellova věta prvního řádu). *Nechť  $\Phi$  je bodový proces na  $\mathbb{R}^d$  s mírou intenzity  $\Lambda$  a  $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  je měřitelná funkce. Pak náhodná suma*

$$T = \sum_{x \in \Phi} f(x)$$

*je náhodnou veličinou se střední hodnotou*

$$\mathbb{E} \sum_{x \in \Phi} f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) \Lambda(dx).$$

*Existuje-li funkce intenzity  $\lambda$  bodového procesu  $\Phi$ , tak*

$$\mathbb{E} \sum_{x \in \Phi} f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) \lambda(x) dx.$$

*Důkaz.* Jednotlivé kroky důkazu jsou popsány v práci Baddeley a kol. (2006, str. 28). □

## 1.2.2 Charakteristiky druhého řádu

Nyní se podíváme na charakteristiky druhého řádu bodového procesu  $\Phi$ . Definujeme si momentovou míru druhého řádu, faktoriální momentovou míru druhého řádu a součinnou hustotu druhého řádu bodového procesu  $\Phi$ .

**Definice 8.** *Nechť  $\Phi$  je bodový proces na  $\mathbb{R}^d$ . Míra  $\Lambda_2$  na  $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$  definovaná předpisem*

$$\Lambda_2(A \times B) = \mathbb{E}[\Phi(A)\Phi(B)], \quad A, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$$

*se nazývá momentová míra druhého řádu bodového procesu  $\Phi$ .*

**Poznámka.** Definici lze ekvivalentně psát v řeči sum jako

$$\Lambda_2(A \times B) = \mathbb{E} \sum_{x, y \in \Phi} \mathbf{1}\{(x, y) \in A \times B\}, \quad A, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d).$$

**Definice 9.** *Nechť  $\Phi$  je bodový proces na  $\mathbb{R}^d$ . Míra  $\Lambda_{[2]}$  na  $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$  definovaná předpisem*

$$\Lambda_{[2]}(A \times B) = \mathbb{E}[\Phi(A)\Phi(B)] - \mathbb{E}[\Phi(A \cap B)], \quad A, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$$

*se nazývá faktoriální momentová míra druhého řádu bodového procesu  $\Phi$ .*

**Poznámka.** Definici lze opět psát v řeči sum jako

$$\begin{aligned}\Lambda_{[2]}(A \times B) &= \mathbb{E} \left[ \sum_{x \in \Phi} \sum_{y \in \Phi: y \neq x} \mathbf{1}\{(x, y) \in A \times B\} \right] \\ &= \mathbb{E} \sum_{x, y \in \Phi}^{\neq} \mathbf{1}\{(x, y) \in A \times B\}, \quad A, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d).\end{aligned}$$

**Definice 10.** *Nechť  $\Lambda_{[2]}$  je faktoriální momentová míra druhého řádu bodového procesu  $\Phi$  na  $\mathbb{R}^d$  splňující předpis*

$$\Lambda_{[2]}(B) = \int_B \lambda_2(x, y) \, dx \, dy, \quad B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$$

pro nezápornou měřitelnou funkci  $\lambda_2$ . Pak funkci  $\lambda_2$  nazveme součinnou hustotou druhého řádu bodového procesu  $\Phi$ .

Rozšíříme si Campbellovu větu pro charakteristiky druhého řádu.

**Věta 2** (Campbellova věta druhého řádu). *Nechť  $\Phi$  je bodový proces na  $\mathbb{R}^d$  s momentovou mírou druhého řádu  $\Lambda_2$  a s faktoriální momentovou mírou druhého řádu  $\Lambda_{[2]}$  a necht'  $f : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  je měřitelná funkce. Pak*

$$\begin{aligned}\mathbb{E} \sum_{x, y \in \Phi} f(x, y) &= \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} f(x, y) \Lambda_2(dx, dy), \\ \mathbb{E} \sum_{x, y \in \Phi}^{\neq} f(x, y) &= \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} f(x, y) \Lambda_{[2]}(dx, dy).\end{aligned}$$

Existuje-li součinná hustota druhého řádu  $\lambda_2$  bodového procesu  $\Phi$ , tak

$$\mathbb{E} \sum_{x, y \in \Phi}^{\neq} f(x, y) = \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} f(x, y) \lambda_2(x, y) \, dx \, dy.$$

Obecnější verze lze nalézt v knize Moller a Waagepetersen (2003, sekce C.1.1).

### 1.3 Další potřebné definice

Nyní si uvedeme příklad bodového procesu, konkrétně Poissonův bodový proces. Jedná se o nejjednodušší bodový proces, mezi jehož body nedochází k žádné interakci. Svůj název dostal model díky faktu, že počet bodů v libovolné kompaktní množině je náhodná veličina mající Poissonovo rozdělení.

**Definice 11.** *Bodový proces  $\Phi$  na  $\mathbb{R}^d$  je Poissonův bodový proces s mírou intenzity  $\Lambda$ , pokud splňuje následující podmínky:*

- pro každou kompaktní množinu  $B \subseteq \mathbb{R}^d$  má  $\Phi(B)$  Poissonovo rozdělení se střední hodnotou  $\Lambda(B)$ ;
- pokud jsou  $B_1, B_2, \dots, B_m$ ,  $m \in \mathbb{N}$  po dvou disjunktní kompaktní množiny, potom jsou  $\Phi(B_1), \Phi(B_2), \dots, \Phi(B_m)$  nezávislé.

Naše pozorovaná data mohou obsahovat prostorové kovariáty jako jsou například nadmořská výška nebo pH půdy. Kovariáty nejsou předmětem zkoumání, avšak obsahují informace, jež mohou mít vliv na výsledné proměnné a mohou vysvětlit například změny v intenzitě bodového procesu.

**Definice 12.** *Nechť  $W \subseteq \mathbb{R}^d$  je pevná kompaktní množina. Náhodné pole je kolekce reálných náhodných veličin  $\{X(u) : u \in W\}$  definovaných na pravděpodobnostním prostoru  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ .*

**Poznámka.** Podle zavedených konvencí budeme dále náhodné pole nazývat kovariáta.

V této práci se budeme zabývat bodovými procesy závislými pouze na jedné kovariátě. Navíc předpokládejme, že hodnoty kovariáty  $X(u)$  známe ve všech bodech  $u \in W$ ,  $W \subseteq \mathbb{R}^d$ .

## 1.4 Modely pro funkci intenzity

Závislost bodových procesů na kovariátách lze popisovat pomocí parametrických a neparametrických modelů tak, že funkci intenzity bodového procesu vyjádříme jako funkci kovariát.

Parametrické modely mají konečný počet parametrů. A jelikož nám při hledání odpovídajícího odhadu neznámé funkce stačí odhadnout pouze parametry daného parametrického modelu, jsou tyto modely jednodušší než neparametrické modely. Díky jednoduchosti parametrických modelů je také snazší výsledky interpretovat.

Avšak pro použití parametrických metod je potřeba specifikovat model závislé na konečném počtu parametrů. V praxi se však často setkáváme s případy, kdy model pro data nedokážeme určit, či kdy rozdělení dat neodpovídá žádnému běžnému parametrickému modelu, a tedy parametrické metody nejsou vhodné. Když totiž použijeme parametrický model na data, která nemají dané parametrické rozdělení, nemůžeme očekávat smysluplný výsledek. V těchto případech volíme neparametrické modely.

V této práci se budeme zabývat především neparametrickými modely.

### 1.4.1 Parametrický model pro funkci intenzity

Častým parametrickým modelem pro funkci intenzity bodového procesu je loglineární model tvaru:

$$\lambda(u) = \exp(\beta_0 + \beta_1 X_1(u) + \beta_2 X_2(u) + \dots + \beta_k X_k(u)), \quad u \in W$$

kde  $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_k \in \mathbb{R}$ ,  $k \in \mathbb{N}_0$  jsou parametry.

Tento model je podrobněji rozvedený v knize Baddeley a kol. (2015). My se dále zaměříme na neparametrické modely.

### 1.4.2 Neparametrický model pro funkci intenzity

Pokud nemůžeme nebo nechceme použít parametrický model, vyjádříme si funkci intenzity bodového procesu jako funkci kovariáty pomocí nezáporné spojité funkce. Budeme používat značení převzaté z článku Baddeley a kol. (2012).

Uvažujeme bodový proces  $Y$  na kompaktní množině  $W \subseteq \mathbb{R}^d$  s body  $y_i$  a s funkcí intenzity  $\lambda(u)$ ,  $u \in W$ , závisující na kovariátní funkci  $X(u)$ :

$$\lambda(u) = \rho(X(u)), \tag{1}$$

kde  $\rho$  je nezáporná spojitá funkce. Později se budeme zabývat neparametrickými odhady funkce  $\rho$ .

## 2. Funkce intenzity

V této kapitole odvodíme vzorec pro funkci intenzity uvedený v článku Baddeley a kol. (2012, vzorec (6)). Nejprve uvedeme pomocné tvrzení a následně zformulujeme větu pro funkci intenzity. Na závěr ukážeme samotný důkaz této věty, který je v článku Baddeley a kol. (2012, appendix A.2) uveden pouze velmi stručně.

Tento vztah se nám bude hodit při neparametrických odhadech funkce intenzity závislé na kovariátě.

### 2.1 Coarea formula

Nejdříve si zavedeme definice, kterých následně využijeme při formulaci tvrzení Coarea formula. Aplikaci tvrzení si ukážeme na jednoduchém příkladu. Tvrzení poté použijeme v následující sekci. Vycházíme především z definic uvedených v knize Evans a Gariepy (1992).

**Definice 13.** (i) *Nechť  $A \subset \mathbb{R}^d$ ,  $0 \leq s < \infty$ ,  $0 < \delta \leq \infty$ . Definujeme*

$$H_\delta^s(A) := \inf \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \alpha(s) \left( \frac{\text{diam } C_j}{2} \right)^s \mid A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} C_j, \text{diam } C_j \leq \delta \right\},$$

kde

$$\alpha(s) := \frac{\Pi^{s/2}}{\Gamma(\frac{s}{2} + 1)}$$

Tady  $\Gamma(s) := \int_0^\infty e^{-x} x^{s-1} dx$ ,  $0 < s < \infty$ , je gamma funkce.

(ii) *Pro  $A$  a  $s$  jako výše, definujeme*

$$H^s(A) := \lim_{\delta \rightarrow 0} H_\delta^s(A) = \sup_{\delta > 0} H_\delta^s(A).$$

$H^s$  nazveme  $s$ -dimenzionální Hausdorfova míra na  $\mathbb{R}^d$ .

**Definice 14.** *Nechť  $\mu$  je míra na množině  $X$ . Řekneme, že  $\mu$ -měřitelná funkce  $f : X \rightarrow [-\infty, \infty]$ , je  $\mu$ -sčitatelná pokud Lebesgueův integrál z absolutní hodnoty  $f$  existuje a je konečný:*

$$\int_X |f| d\mu < \infty.$$

*Budeme značit  $f \in L_1(\mu)$ .*

Nyní si uvedeme tvrzení Coarea formula převzaté z práce Evans a Gariepy (1992, str. 117).

**Věta 3** (Coarea formula). *Nechť  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  je lipschitzovská,  $n \geq m$ . Potom pro každou funkci  $g : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g \in L_1(L^n)$ :*

$$g|_{f^{-1}(z)} \in L_1(H^{n-m}) \text{ pro } L^m \text{ s.v. } z$$

a

$$\int_{\mathbb{R}^n} g(x) Jf(x) dx = \int_{\mathbb{R}^m} \left[ \int_{f^{-1}(z)} g dH^{n-m} \right] dz,$$

kde  $Jf(x) = \|\nabla f(x)\|$  je 1-dimenzionální Jakobián  $f$  v  $x$ ,  $H^{n-m}$  je  $n - m$  dimenzionální Hausdorffova míra a  $L^n$  je  $n$ -dimenzionální Lebesgueova míra.

*Důkaz.* Jednotlivé kroky důkazu jsou podrobně popsány v práci Evans a Gariepy (1992, str. 117). □

Obecnější tvar Coarea formula lze nalézt v knize Federer (1969, tvrzení 3.2.22).

Použití Coarea formula si ilustrujeme na jednoduchém příkladu vycházejícím z článku Baddeley a kol. (2012, appendix A.1).

**Příklad.** Uvažujme náhodný vektor  $U$  s rovnoměrným rozdělením na  $W$ ,  $W \subseteq \mathbb{R}^d$  a reálnou kovariátní funkci  $X : W \rightarrow \mathbb{R}$ . Předpokládejme, že  $X$  je diferencovatelná funkce s nenulovým gradientem  $\nabla X(u)$  pro každé  $u \in W$ . Chceme zjistit rozdělení náhodné veličiny  $X(U)$  na  $\mathbb{R}$ .

Počítáme distribuční funkci  $G(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , náhodné veličiny  $X(U)$ :

$$\begin{aligned} G(x) &= \mathcal{P}(X(U) \leq x) = \mathcal{P}(X(U) \in (-\infty, x]) = \mathcal{P}(U \in X^{-1}((-\infty, x])) \\ &= \mathbb{E}[\mathbf{1}\{U \in X^{-1}((-\infty, x])\}] = \int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{1}\{u \in X^{-1}((-\infty, x])\} f_U(u) du \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{1}\{X(u) \in (-\infty, x]\} \frac{1}{|W|} \mathbf{1}\{u \in W\} du = \frac{1}{|W|} \int_W \mathbf{1}\{X(u) \leq x\} du, \end{aligned}$$

kde  $|W|$  je  $d$ -dimenzionální objem množiny  $W$ .

Nyní použijeme větu 3 (Coarea formula) a dostaneme:

$$\frac{1}{|W|} \int_W \mathbf{1}\{X(u) \leq x\} du = \frac{1}{|W|} \int_{\mathbb{R}} \left[ \int_{X^{-1}(z)} \mathbf{1}\{X(u) \leq x\} w(u) dH^{d-1}(u) \right] dz,$$

kde  $X^{-1}(z) = \{u \in W : X(u) = z\}$  je množina taková, kde kovariáta nabývá hodnoty  $z$ ,  $w(u) = (\|\nabla X(u)\|)^{-1}$ , kde  $JX(u) = \|\nabla X(u)\|$  je 1-dimenzionální Jakobián  $X$  v  $u$ ,  $H^{d-1}$  je  $d-1$  dimenzionální Hausdorffova míra.

Distribuční funkci upravíme:

$$\begin{aligned} G(x) &= \frac{1}{|W|} \int_{\mathbb{R}} \left[ \int_{X^{-1}(z)} \mathbf{1}\{X(u) \leq x\} w(u) dH^{d-1}(u) \right] dz \\ &= \frac{1}{|W|} \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}\{z \leq x\} \left[ \int_{X^{-1}(z)} w(u) dH^{d-1}(u) \right] dz \\ &= \int_{-\infty}^x \left[ \frac{1}{|W|} \int_{X^{-1}(z)} w(u) dH^{d-1}(u) \right] dz \\ &= \int_{-\infty}^x g(z) dz, \end{aligned}$$

kde  $g(z) := \frac{1}{|W|} \int_{X^{-1}(z)} w(u) dH^{d-1}(u)$ .

Jelikož je integrál přes  $X^{-1}(z)$  konečný pro *s.v.*  $z$ , distribuční funkce  $G(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$  je diferencovatelná skoro všude s hustotou

$$g(x) := \frac{1}{|W|} \int_{X^{-1}(x)} w(u) dH^{d-1}(u), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Tedy náhodná veličina  $X(U)$  má rozdělení dané hustotou  $g$ .

## 2.2 Věta pro funkci intenzity

Vycházejme z předpokladů uvedených v kapitole 1. Dále uvažujme reálnou kovariátní funkci  $X : W \rightarrow \mathbb{R}$  takovou, že  $X$  je diferencovatelná funkce s nenulovým gradientem  $\nabla X(u)$  pro každé  $u \in W$ , s distribuční funkcí  $G$  a s hustotou  $g$  z příkladu ze strany 10.

Definujme nenormalizované verze funkcí  $G$ ,  $g$ :

$$\begin{aligned} G^*(x) &= |W|G(x) \\ g^*(x) &= |W|g(x), \quad x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Ukážeme vztah pro funkce intenzit mezi původním bodovým procesem  $Y$  s body  $y_i$  a s funkcí intenzity  $\lambda$  definovaným na kompaktní množině  $W \subseteq \mathbb{R}^d$  a novým bodovým procesem  $Z$  s body  $z_i = X(y_i)$  a s funkcí intenzity  $f^*$  definovaným na  $\mathbb{R}$ . Bodový proces  $Z$  je vytvořený z bodového procesu  $Y$  pomocí kovariátní funkce  $X : W \rightarrow \mathbb{R}$ .

**Věta 4.** *Hodnoty  $z_i = X(y_i)$  tvoří bodový proces  $Z$  na  $\mathbb{R}$  s funkcí intenzity  $f^*(x)$  danou předpisem:*

$$f^*(x) = \rho(x)g^*(x), \quad x \in \mathbb{R}. \quad (2)$$

*Důkaz.* Nejdříve si vyjádříme míru intenzity  $\mu^*$  bodového procesu  $Z$  definovaného na  $\mathbb{R}$  pomocí funkce intenzity  $\lambda$  bodového procesu  $Y$  definovaného na  $W$  a kovariáty  $X(u)$ ,  $u \in W$ :

$$\begin{aligned} \mu^*(B) &= \mathbf{E}[Z(B)] = \mathbf{E}[Y(X^{-1}(B))] = \Lambda(X^{-1}(B)) = \Lambda(W \cap X^{-1}(B)) \\ &= \int_{W \cap X^{-1}(B)} \lambda(u) \, du = \int_W \lambda(u) \mathbf{1}_B(X(u)) \, du, \quad B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), \end{aligned}$$

kde  $\Lambda$  je míra intenzity bodového procesu  $Y$  na  $W$  s funkcí intenzity  $\lambda(u)$ ,  $u \in W$ . V první, třetí a páté rovnosti vycházíme z definic 6 (míra intenzity), 7 (funkce intenzity). Druhá rovnost platí, jelikož libovolný bod  $x \in X^{-1}(B)$  bodového procesu  $Y$  se po transformaci na bodový proces  $Z$  zobrazí do množiny  $B$  díky předpisu  $z_i = X(y_i)$ , naopak pokud  $x \notin X^{-1}(B)$ , pak  $X(x) \notin B$ . Ve čtvrté rovnosti využíváme vztahu  $X^{-1}(B) = \{u \in W : X(u) \in B\}$ , tedy  $X^{-1}(B) \subseteq W$ .

Z věty 3 (Coarea formula), použité ve třetí rovnosti, dostaneme:

$$\begin{aligned} \mu^*(B) &= \int_W \lambda(u) \mathbf{1}_B(X(u)) \, du \\ &= \int_W \lambda(u) \mathbf{1}_B(X(u)) w(u) w^{-1}(u) \, dH^d(u) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \int_{X^{-1}(x)} \lambda(u) \mathbf{1}_B(X(u)) w(u) \, dH^{d-1}(u) \, dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_B(x) \int_{X^{-1}(x)} \lambda(u) w(u) \, dH^{d-1}(u) \, dx \\ &= \int_B \int_{X^{-1}(x)} \lambda(u) w(u) \, dH^{d-1}(u) \, dx, \quad B \in \mathcal{B}, \end{aligned}$$

kde  $X^{-1}(x) = \{u \in W : X(u) = x\}$  je množina taková, kde kovariáta nabývá hodnoty  $x$ ,  $w(u) = (\|\nabla X(u)\|)^{-1}$ , kde  $JX(u) = \|\nabla X(u)\|$  je 1-dimenzionální Jakobián  $X$  v  $u$ ,  $H^{d-1}$  je  $d-1$  dimenzionální Hausdorffova míra.

Z knihy Evans a Gariepy (1992, str.70) víme, že v  $\mathbb{R}^d$ ,  $d$ -dimenzionální Hausdorffova míra odpovídá  $d$ -dimenzionální Lebesgueově míře. Ve čtvrté rovnosti využijeme vztahu  $X^{-1}(x) = \{u \in W : X(u) = x\}$ .

Jelikož je integrál přes  $X^{-1}(x)$  konečný pro *s.v.x*, míra intenzity  $\mu^*$  je diferencovatelná skoro všude. Tedy funkce intenzity  $f^*$  bodového procesu  $Z$  existuje a je daná předpisem:

$$f^*(x) = \int_{X^{-1}(x)} \lambda(u)w(u) \, dH^{d-1}(u), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Nyní do vzorce pro funkci intenzity  $f^*$  dosadíme vztah pro  $\lambda$  (1) a vzorec upravíme:

$$\begin{aligned} f^*(x) &= \int_{X^{-1}(x)} \lambda(u)w(u) \, dH^{d-1}(u) = \int_{X^{-1}(x)} \rho(X(u))w(u) \, dH^{d-1}(u) \\ &= \rho(x) \int_{X^{-1}(x)} w(u) \, dH^{d-1}(u) = \rho(x)g^*(x), \quad x \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

kde ve třetí rovnosti opět využijeme vztahu  $X^{-1}(x) = \{u \in W : X(u) = x\}$ . Ze strany 11 a z příkladu na straně 10 známe předpis funkce  $g^*(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

Dostáváme vzorec (2), což bylo dokázat.

□



# 3. Jádrový odhad funkce intenzity

Nyní bychom rádi vyjádřili jádrový odhad funkce  $\rho$  zavedené v sekci 1.4.2.

Jádrový odhad je neparametrická metoda využívající se nejenom při odhadech funkce intenzity bodových procesů. U jádrových odhadů není třeba, aby data odpovídala konkrétnímu rozdělení, lze je tedy aplikovat na širokou škálu případů. Jádrový odhad funkce intenzity bodového procesu je inspirován klasickou úlohou jádrového odhadu hustoty rozdělení na základě náhodného výběru.

Opět uvažujeme předpoklady zavedené v předchozích kapitolách. Nechť  $x_i$  jsou body bodového procesu definovaného na množině  $W \subseteq \mathbb{R}^d$ . Jádrový odhad  $\hat{\lambda}$  funkce intenzity  $\lambda$  převzatý z knihy Baddeley a kol. (2015, vzorec (6.8)) je tvaru:

$$\hat{\lambda}(x) = \frac{1}{e(x)} \sum_i k(x_i - x), \quad x \in W, \quad (4)$$

kde  $k(z)$ ,  $z \in \mathbb{R}^d$  je jádrová funkce – nezáporná měřitelná funkce, jejíž integrál přes  $\mathbb{R}^d$  je roven 1. Jádrová funkce závisí na parametru – šířce jádra *bw*. Šířkou jádra *bw* rozumíme směrodatnou odchylku rozdělení s hustotou danou funkcí  $k$ . Šířka jádra má vliv na rozpyl a vychýlení jádrového odhadu funkce intenzity, proto je třeba ji volit rozumně. Vhodná volba šířky jádra je komplexní problém, jehož řešení není předmětem této práce.

Korekce okrajových efektů  $e$  je dána vztahem:

$$e(x) = \int_W k(y - x) dy, \quad x \in W.$$

Jelikož budeme jádrové odhady používat v situaci, kdy po transformaci bodového procesu pozorujeme body na celém prostoru  $\mathbb{R}$ , nemáme omezené pozorovací okno, a tedy se nezabýváme korekcí okrajových efektů jádrového odhadu funkce intenzity.

V kapitole 2 jsme dokázali důležitý vztah mezi funkcí intenzity  $f^*$  transformovaného bodového procesu  $Z$  s pozorováními  $z_i = X(y_i)$  a funkcí  $\rho$  (2), po úpravě pro funkci  $\rho$  dostáváme:

$$\rho(x) = \frac{f^*(x)}{g^*(x)}, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (5)$$

Nyní předpokládejme, že funkce  $g^*$  je známá, tedy  $g^*(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$  pevné, uvažujeme jako konstantu.

Odhad  $\hat{\rho}$  funkce  $\rho$  odvodíme pomocí (5), (4), kde pro odhad funkce intenzity  $f^*$  použijeme jádrový odhad  $\hat{f}^*$ :

$$\hat{\rho}(x) = \frac{\hat{f}^*(x)}{g^*(x)} = \frac{\sum_i k(z_i - x)}{g^*(x)} = \frac{\sum_i k(X(y_i) - x)}{g^*(x)}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Tedy pro pozorované hodnoty  $z_i$  bodového procesu  $Z$  s funkcí intenzity  $f^*$  a součinnou hustotou druhého řádu  $f_2^*$  definovaného na  $\mathbb{R}$  dostaneme odhad:

$$\hat{\rho}(x) = \frac{1}{g^*(x)} \sum_i k(z_i - x), \quad x \in \mathbb{R}. \quad (6)$$

Střední hodnota jádrového odhadu  $\hat{\rho}(x)$  funkce  $\rho(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$  pevné, je z věty 1 (Campbellova věta prvního řádu):

$$\mathbb{E}[\hat{\rho}(x)] = \frac{1}{g^*(x)} \mathbb{E}\left[\sum_i k(z_i - x)\right] = \frac{1}{g^*(x)} \int_{\mathbb{R}} k(z - x) f^*(z) dz.$$

Nyní zjistíme rozptyl jádrového odhadu  $\hat{\rho}(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$  pevné:

$$\begin{aligned} \text{Var}[\hat{\rho}(x)] &= \text{Var}\left[\frac{1}{g^*(x)} \sum_i k(z_i - x)\right] = \frac{1}{g^*(x)^2} \text{Var}\left[\sum_i k(z_i - x)\right] \\ &= \frac{1}{g^*(x)^2} \left[ \mathbb{E}\left[\sum_i k(z_i - x)\right]^2 - \left(\mathbb{E}\left[\sum_i k(z_i - x)\right]\right)^2 \right]. \end{aligned} \quad (7)$$

Rozepíšeme vztahy ze (7):

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[\sum_i k(z_i - x)\right]^2 &= \mathbb{E}\left[\sum_i k(z_i - x)^2 + \sum_i \sum_{j \neq i} k(z_i - x) k(z_j - x)\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\sum_i k(z_i - x)^2\right] + \mathbb{E}\left[\sum_i \sum_{j \neq i} k(z_i - x) k(z_j - x)\right] \\ &= \int_{\mathbb{R}} k(z - x)^2 f^*(z) dz + \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} k(y - x) k(z - x) f_2^*(y, z) dy dz, \\ \mathbb{E}\left[\sum_i k(z_i - x)\right] &= \int_{\mathbb{R}} k(z - x) f^*(z) dz, \end{aligned}$$

kde pro  $\mathbb{E}\left[\sum_i k(z_i - x)^2\right]$ ,  $\mathbb{E}\left[\sum_i k(z_i - x)\right]$  použijeme větu 1 (Campbellova věta 1. řádu), pro  $\mathbb{E}\left[\sum_i \sum_{j \neq i} k(z_i - x) k(z_j - x)\right]$  použijeme větu 2 (Campbellova věta 2. řádu).

Dohromady:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[\sum_i k(z_i - x)\right]^2 - \left(\mathbb{E}\left[\sum_i k(z_i - x)\right]\right)^2 &= \int_{\mathbb{R}} k(z - x)^2 f^*(z) dz \\ &+ \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} k(y - x) k(z - x) f_2^*(y, z) dy dz - \left(\int_{\mathbb{R}} k(z - x) f^*(z) dz\right)^2 \\ &= \int_{\mathbb{R}} k(z - x)^2 f^*(z) dz + \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} k(y - x) k(z - x) f_2^*(y, z) dy dz \\ &- \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} k(y - x) k(z - x) f^*(y) f^*(z) dy dz = \int_{\mathbb{R}} k(z - x)^2 f^*(z) dz \\ &+ \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} k(y - x) k(z - x) \left(f_2^*(y, z) - f^*(y) f^*(z)\right) dy dz. \end{aligned}$$

Dosadíme do (7) a pro  $x \in \mathbb{R}$  pevné dostaneme:

$$\begin{aligned} \text{Var}[\hat{\rho}(x)] &= \frac{1}{g^*(x)^2} \left[ \int_{\mathbb{R}} k(z - x)^2 f^*(z) dz \right. \\ &\left. + \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} k(y - x) k(z - x) \left(f_2^*(y, z) - f^*(y) f^*(z)\right) dy dz \right]. \end{aligned} \quad (8)$$

Speciálně, za předpokladu že původní bodový proces  $Y$  s body  $y_i$  je Poissonův proces na  $W$ , pak hodnoty  $z_i = X(y_i)$  tvoří Poissonův bodový proces  $Z$  na  $\mathbb{R}$

(Baddeley a kol., 2012, sekce 3). Navíc pro Poissonův proces podle knihy Møller a Waagepetersen (2003, sekce 4.1.1) platí:

$$f_2^*(y, z) = f^*(y)f^*(z), \quad y, z \in \mathbb{R}.$$

Tedy

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} k(y-x)k(z-x)(f_2^*(y, z) - f^*(y)f^*(z)) \, dy \, dz = 0.$$

Z (8) pro  $x \in \mathbb{R}$  pevné dostáváme:

$$\text{Var}[\hat{\rho}(x)] = \frac{1}{g^*(x)^2} \int_{\mathbb{R}} k(z-x)^2 f^*(z) \, dz.$$

Drobnou úpravou dostaneme vzorec uvedený v článku Baddeley a kol. (2012, vzorec (4)). Tedy námi uvedený obecnější vzorec (8), pro speciální případ Poissonova bodového procesu, koresponduje s výsledky uvedenými ve výše zmíněném článku.

Hodnoty  $g^*(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$  však vždy nemusíme znát. Při výpočtech v programovacím jazyce R, (R Core Team, 2022), budeme odhad  $\hat{g}^*$  funkce  $g^*$  implementovat pomocí balíčku `spatstat` podle knihy Baddeley a kol. (2015).

Jako pozorovací okno budeme uvažovat množinu  $W \subseteq \mathbb{R}^d$ , na níž máme definovaný původní bodový proces  $Y$ . Na  $W$  vytvoříme pravidelnou mřížku bodů  $u_i \in W$ , ty jsou na  $W$  rozmístěné rovnoměrně. Navíc z předpokladu ze sekce 1.3 pro kovariátní funkci  $X : W \rightarrow \mathbb{R}$  známe hodnoty kovariáty  $X(u)$  pro všechny body  $u \in W$ , tedy můžeme definovat body  $v_i = X(u_i)$  na  $\mathbb{R}$ .

Pomocí hodnot  $v_i \in \mathbb{R}$  zjistíme jádrový odhad  $\hat{g}^*$  funkce  $g^*$ :

$$\hat{g}^*(x) = \sum_i k'(v_i - x), \quad x \in \mathbb{R},$$

kde  $k'(z)$ ,  $z \in \mathbb{R}$  je jádrová funkce (nemusí odpovídat jádru  $k$  pro jádrový odhad funkce intenzity  $f^*$ ).

Na rozdíl od jádrového odhadu funkce intenzity  $f^*$ , kde je počet bodů  $z_i$  (resp.  $y_i$ ) pozorované realizace bodového procesu  $Z$  na  $\mathbb{R}$  (resp.  $Y$  na  $W$ ) daný, lze množství bodů  $v_i$  na  $\mathbb{R}$  (resp.  $u_i$  na  $W$ ) volit.

## 4. Simulační experimenty

V této kapitole ověříme přesnost jádrového odhadu funkce  $\rho$  Poissonova bodového procesu se známým rozdělením, a tedy s danou funkcí  $\rho$ , pro různé šířky jádra  $bw$ . Šířkou jádra  $bw$  opět rozumíme směrodatnou odchylku rozdělení s hustotou danou funkcí  $k$ . Jádrový odhad funkce  $\rho$  značíme  $\hat{\rho}$ .

Konkrétněji porovnáme funkce  $\hat{\rho}$  jedné realizace Poissonova bodového procesu pro různé šířky jádra  $bw$ . Dále funkce  $\hat{\rho}$  pro jednotlivé hodnoty šířky jádra  $bw$  porovnáme s funkcí  $\rho$ . Vypočítáme integrovanou kvadratickou chybu (ISE) funkce  $\hat{\rho}$  pro různé hodnoty šířky jádra  $bw$  z dané realizace bodového procesu.

Dále pro různé hodnoty šířky jádra  $bw$  spočítáme střední integrovanou kvadratickou chybu (MISE) funkce  $\hat{\rho}$  a střední integrovanou relativní kvadratickou chybu (MIRSE) funkce  $\hat{\rho}$  z 1 000 nezávislých realizací simulovaných z uvažovaného modelu. Podíváme se, jak se se změnou intenzity bodového procesu mění MISE a MIRSE.

Nakonec empiricky a pomocí balíčku `spatstat` odhadneme rozptyl funkce  $\hat{\rho}$  s konkrétní volbou šířky jádra  $bw$  z 1 000 realizací. Tyto rozptyly porovnáme.

Pro výpočty používáme programovací jazyk R, (R Core Team, 2022), odhady implementujeme pomocí funkce `rho_hat` z balíčku `spatstat` podle knihy Baddeley a kol. (2015, Sekce 6.6.3).

### 4.1 Jádrový odhad funkce $\rho$ a ISE

Simulujeme jednu realizaci Poissonova bodového procesu  $Y$  na okně  $W = [0,1]^2 \subset \mathbb{R}^2$  s funkcí intenzity  $\lambda((x,y)) = \exp(3 + 3X((x,y)))$ , kde jako kovariátu bereme funkci  $X((x,y)) = x$  (viz obrázek 4.1). A proto platí  $\lambda((x,y)) = \rho(X((x,y))) = \rho(x)$ , kde  $\rho(r) = \exp(3 + 3r)$ .

Vypočítáme funkce  $\hat{\rho}$ , jádrové odhady funkce  $\rho$ , pro šířku jádra  $bw$  s hodnotami 0,01, 0,04, 0,07, 0,10 a 0,30. Funkce  $\hat{\rho}$  počítáme pomocí funkce `rho_hat` z balíčku `spatstat`. Poté funkce  $\hat{\rho}$  pro různé šířky jádra  $bw$  z dané realizace porovnáme graficky (viz obrázek 4.2). Vidíme, že čím větší šířku jádra  $bw$  volíme, tím je křivka funkce  $\hat{\rho}$  hladší.

Dále jednotlivé funkce  $\hat{\rho}$  s danou šířkou jádra  $bw$  porovnáme s funkcí  $\rho$  (viz obrázek 4.3). Vykreslíme 95% interval spolehlivosti pro  $\rho(r)$  pro pevné  $r$  založený na asymptotickém rozptylu pro  $\hat{\rho}$  za předpokladu, že  $Y$  je Poissonův proces, což je v tomto případě splněno. Krajiní body tohoto intervalu nám dává funkce `rho_hat`.

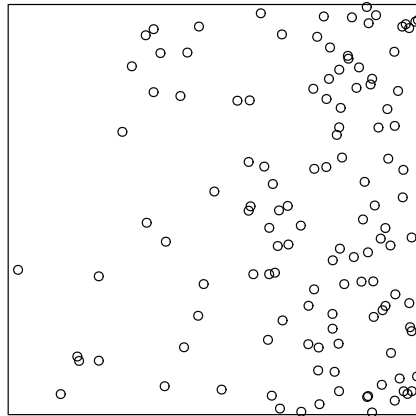
Pro různé hodnoty šířky jádra  $bw$  vypočítáme integrovanou kvadratickou chybu (ISE) funkce  $\hat{\rho}$  dané realizace. Integrovaná kvadratická chyba (ISE) funkce  $\hat{\rho}$  je dána vzorcem:

$$\text{ISE} = \int_0^1 (\hat{\rho}(r) - \rho(r))^2 dr,$$

kde  $\hat{\rho}$  je jádrový odhad funkce  $\rho$  s danou šířkou jádra  $bw$  a  $\rho$  je funkce popisující vztah funkce intenzity Poissonova procesu  $Y$  a kovariáty  $X$ .

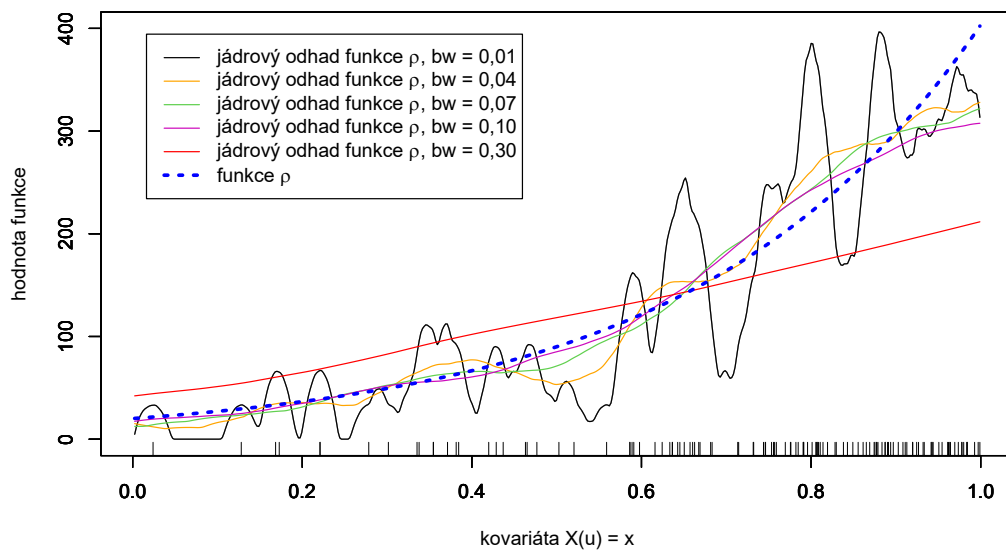
Pozorujeme (viz obrázek 4.4), že pro realizaci Poissonova procesu  $Y$  z obrázku 4.1 a různé šířky jádra  $bw$  je nejmenší integrovaná kvadratická chyba (ISE) funkce  $\hat{\rho}$  pro šířku jádra  $bw = 0,06$ , tato ISE má hodnotu 355 (viz obrázek 4.6a).

### Simulovaná realizace Poissonova procesu $Y$

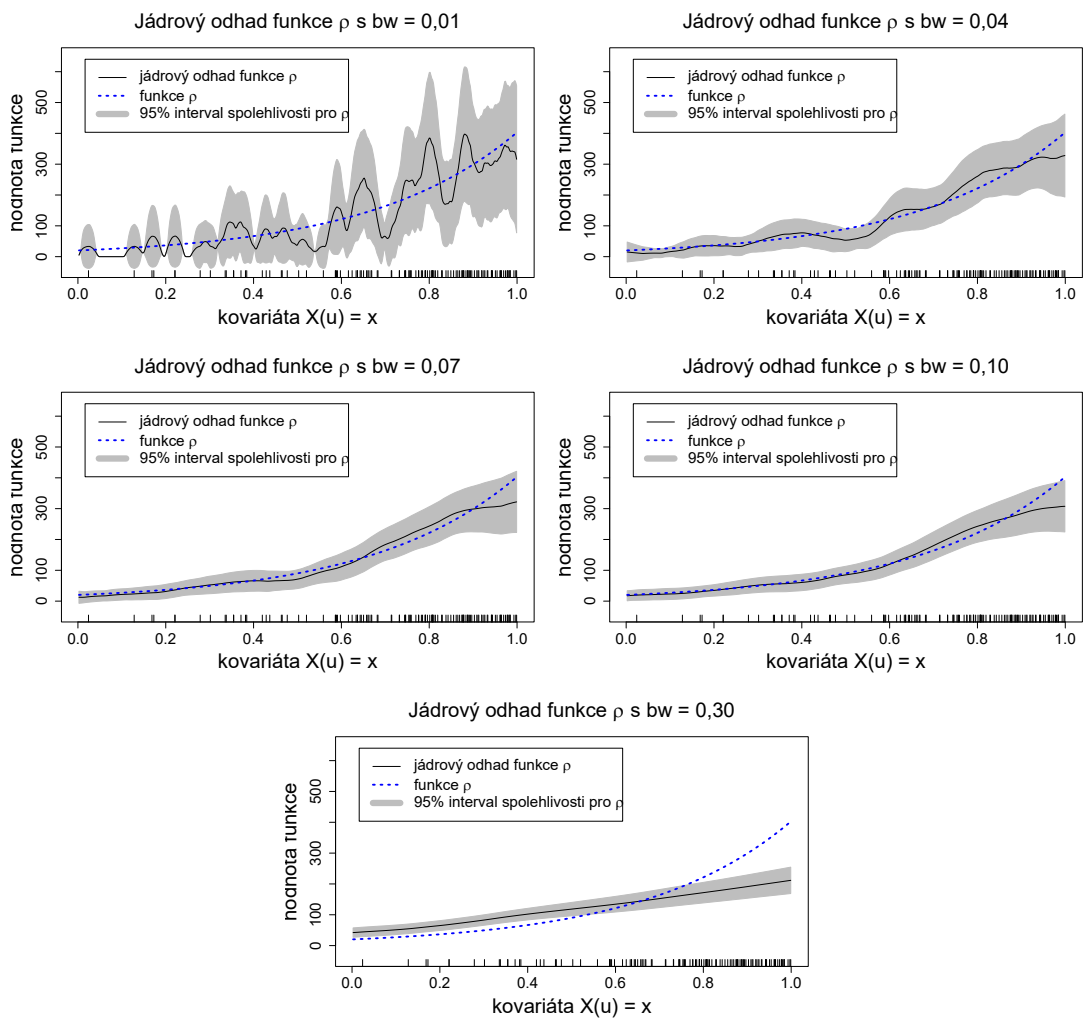


Obrázek 4.1: Simulovaná realizace Poissonova bodového procesu  $Y$  s funkcí intenzity  $e^{(3+3x)}$ .

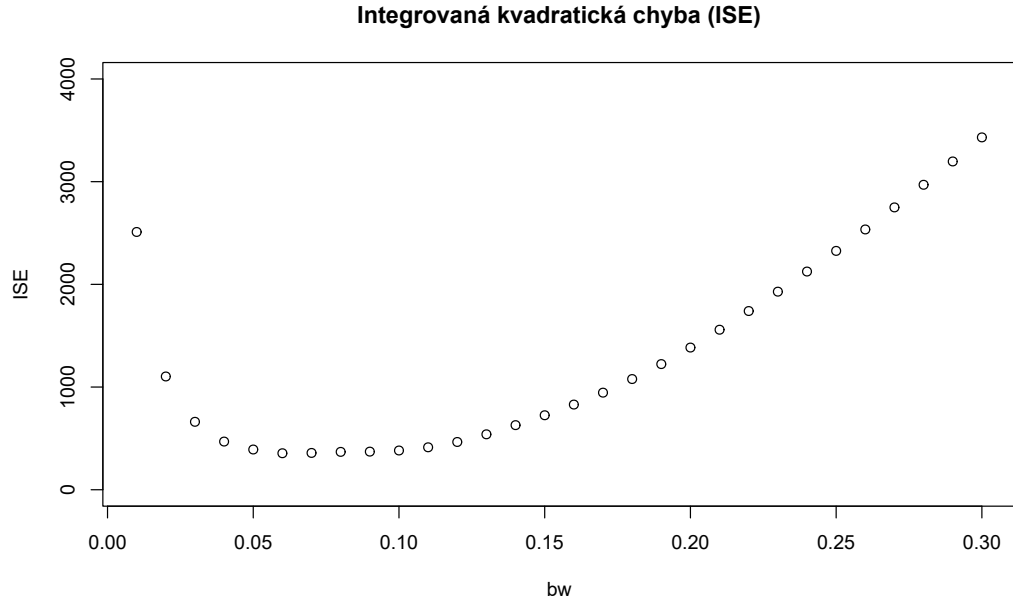
### Jádrové odhady funkce $\rho$



Obrázek 4.2: Jádrové odhady funkce  $\rho$  pro různé šířky jádra  $bw$  pro realizaci Poissonova procesu  $Y$  z obrázku 4.1.



Obrázek 4.3: Jádrové odhady funkce  $\rho$  pro realizaci Poissonova procesu  $Y$  z obrázku 4.1.



Obrázek 4.4: Integrovaná kvadratická chyba (ISE) funkce  $\hat{\rho}$  pro různé šířky jádra  $bw$  pro realizaci Poissonova procesu  $Y$  z obrázku 4.1.

## 4.2 MISE

Pro různé hodnoty šířky jádra  $bw$  spočítáme střední integrovanou kvadratickou chybu (MISE) funkce  $\hat{\rho}$  z 1 000 nezávislých realizací Poissonova procesu  $Y$  na okně  $W = [0,1]^2$  s funkcí intenzity  $\exp(3 + 3x)$ . Střední integrovaná kvadratická chyba (MISE) funkce  $\hat{\rho}$  je dána vzorcem:

$$\text{MISE} = \mathbb{E} \int_0^1 (\hat{\rho}(r) - \rho(r))^2 dr,$$

kde  $\hat{\rho}$  je jádrový odhad funkce  $\rho$  s danou šířkou jádra  $bw$  a  $\rho$  je funkce popisující vztah funkce intenzity Poissonova procesu  $Y$  a kovariáty  $X$ . Odhadujeme ji pomocí vzorce:

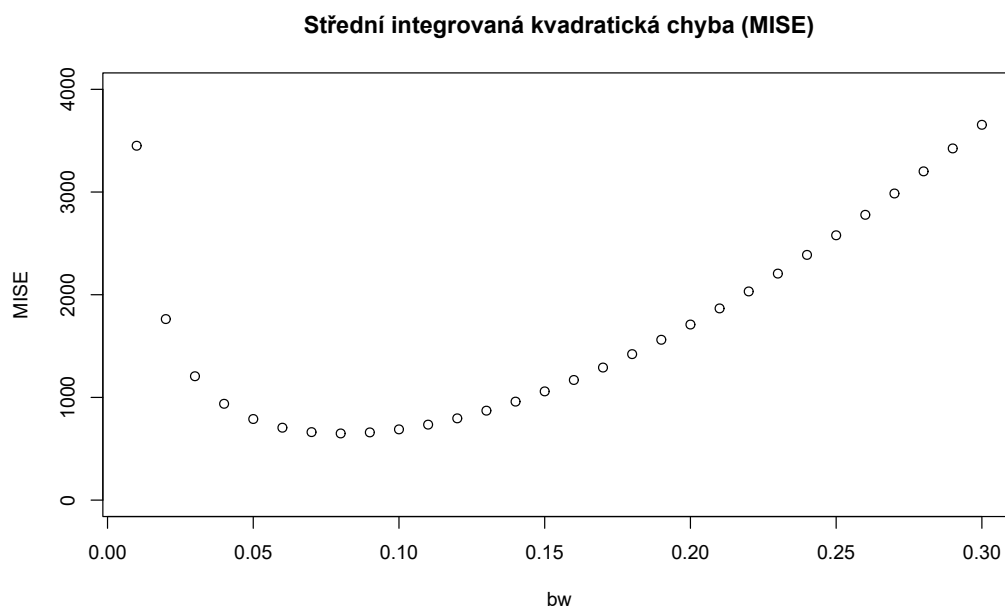
$$\widehat{\text{MISE}} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \int_0^1 (\hat{\rho}_i(r) - \rho(r))^2 dr,$$

kde  $\hat{\rho}_i$  je jádrový odhad funkce  $\rho$  z  $i$ -té realizace s danou šířkou jádra  $bw$  a  $M$  je počet nezávislých realizací. V našem případě je  $M$  rovno 1 000.

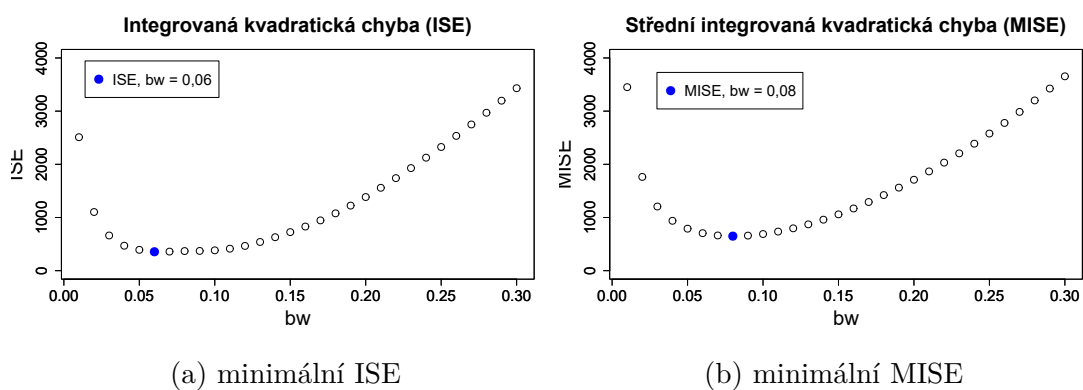
Pozorujeme (viz obrázek 4.5), že nejmenší střední integrovaná kvadratická chyba (MISE) funkce  $\hat{\rho}$  z 1 000 realizací je pro šířku jádra  $bw = 0,08$ , tato MISE má hodnotu 649 (viz obrázek 4.6b).

## 4.3 Vliv středního počtu bodů na MISE

Nyní se podíváme jak se se změnou intenzity Poissonových bodových procesů mění střední integrovaná kvadratická chyba (MISE) funkce  $\hat{\rho}$ . Vypočítáme střední integrovanou kvadratickou chybu (MISE) funkce  $\hat{\rho}$  pro různé šířky jádra  $bw$  z 1 000 nezávislých realizací Poissonova procesu  $Y$  na okně  $W = [0,1]^2$  s funkcí intenzity



Obrázek 4.5: Střední integrovaná kvadratická chyba (MISE) funkce  $\hat{\rho}$  pro různé šířky jádra  $bw$  z 1 000 realizací Poissonova procesu  $Y$  s funkcí intenzity  $e^{(3+3x)}$ .



Obrázek 4.6: Minimální integrovaná kvadratická chyba (ISE) pro realizaci Poissonova procesu  $Y$  z obrázku 4.1 a minimální střední integrovaná kvadratická chyba (MISE) z 1 000 realizací Poissonova procesu  $Y$  s funkcí intenzity  $e^{(3+3x)}$ .



	$a = 1$	$a = 2$	$a = 3$	$a = 4$	$a = 5$	$a = 6$
$\min \widehat{\text{MISE}}$	53	194	649	2362	8721	30720
šířka jádra $bw$	0,15	0,11	0,08	0,06	0,04	0,03

Tabulka 4.1: Hodnota minimální střední integrované kvadratické chyby (MISE) funkce  $\hat{\rho}$  a odpovídající šířka jádra  $bw$  z 1 000 realizací Poissonova procesu  $Y$  s funkcí intenzity  $e^{(a+3x)}$  pro  $a = 1, \dots, 6$ .

$\exp(a + 3x)$  pro  $a$  rovno 1, 2, 3, 4, 5 a 6 (viz obrázek 4.7). Pro lepší názornost hodnot MISE funkce  $\hat{\rho}$  pro různé šířky jádra  $bw$  z 1 000 realizací mají jednotlivá políčka z obrázku 4.7 jiná měřítko. Šířky jádra  $bw$  bereme z intervalu  $[0,01, 0,60]$  s krokem 0,01.

Pro každé  $a = 1, \dots, 6$  dostaneme minimální MISE funkce  $\hat{\rho}$  s konkrétní šířkou jádra  $bw$  z 1 000 realizací Poissonova procesu  $Y$  s funkcí intenzity  $\exp(a + 3x)$ . Hodnotu minimální střední integrované kvadratické chyby (MISE) funkce  $\hat{\rho}$  a odpovídající šířku jádra  $bw$  z 1 000 realizací Poissonova procesu  $Y$  s funkcí intenzity  $\exp(a + 3x)$  pro  $a = 1, \dots, 6$  zapíšeme do tabulky 4.1. Vidíme, že se s rostoucí funkcí intenzity Poissonova procesu  $Y$  a tedy s rostoucím středním počtem bodů Poissonova procesu  $Y$  snižuje šířka jádra pro minimální MISE funkce  $\hat{\rho}$  z 1 000 realizací. Hodnota minimální MISE funkce  $\hat{\rho}$  z 1 000 realizací se s rostoucí funkcí intenzity Poissonova procesu  $Y$  zvětšuje. Zajímalo by nás, zda je rostoucí hodnota minimální MISE funkce  $\hat{\rho}$  z 1 000 realizací při rostoucí intenzitě Poissonova procesu  $Y$  dána zvětšujícími se hodnotami funkce intenzity či zda je minimální MISE funkce  $\hat{\rho}$  z 1 000 realizací pro rostoucí intenzitu Poissonova procesu  $Y$  méně přesná.

## 4.4 M<sub>Ir</sub>SE

Definujeme střední integrovanou relativní kvadratickou chybu (M<sub>Ir</sub>SE) funkce  $\hat{\rho}$ , aby se nám jednotlivé situace lépe porovnávaly. Střední integrovaná relativní kvadratická chyba (M<sub>Ir</sub>SE) funkce  $\hat{\rho}$  je dána vzorcem:

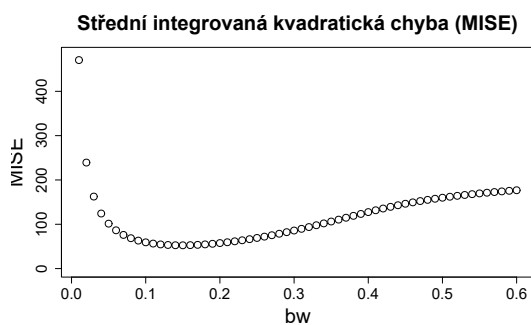
$$\text{M}_{\text{Ir}}\text{SE} = \mathbb{E} \int_0^1 \frac{(\hat{\rho}(r) - \rho(r))^2}{\rho(r)^2} dr,$$

kde  $\hat{\rho}$  je jádrový odhad funkce  $\rho$  s danou šířkou jádra  $bw$  a  $\rho$  je funkce popisující vztah funkce intenzity Poissonova procesu  $Y$  a kovariáty  $X$ . Odhadujeme ji pomocí vzorce:

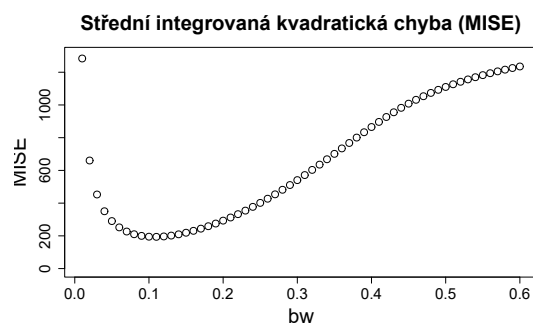
$$\widehat{\text{M}_{\text{Ir}}\text{SE}} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \int_0^1 \frac{(\hat{\rho}_i(r) - \rho(r))^2}{\rho(r)^2} dr,$$

kde  $\hat{\rho}_i$  je jádrový odhad funkce  $\rho$  z  $i$ -té realizace s danou šířkou jádra  $bw$  a  $M$  je počet nezávislých realizací. V našem případě je  $M$  rovno 1 000.

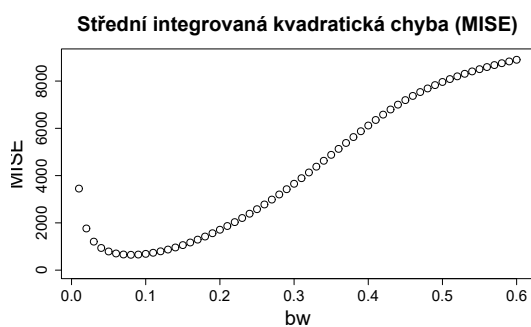
Analogicky jako pro MISE funkce  $\hat{\rho}$  vyšetříme, jak se se změnou intenzity Poissonových procesů mění střední integrovaná relativní kvadratická chyba (M<sub>Ir</sub>SE) funkce  $\hat{\rho}$ . Vypočítáme střední integrovanou relativní kvadratickou chybu (M<sub>Ir</sub>SE) funkce  $\hat{\rho}$  pro různé šířky jádra  $bw$  z 1 000 nezávislých realizací Poissonova procesu



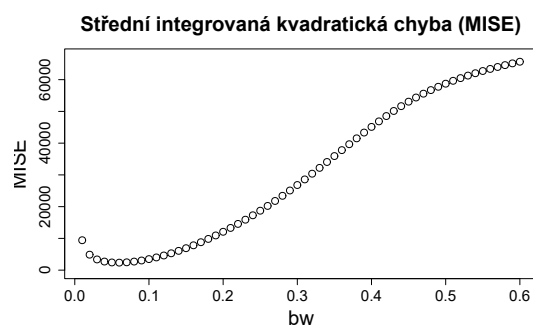
(a) MISE pro  $a = 1$



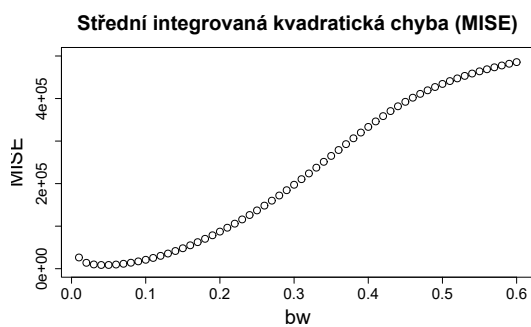
(b) MISE pro  $a = 2$



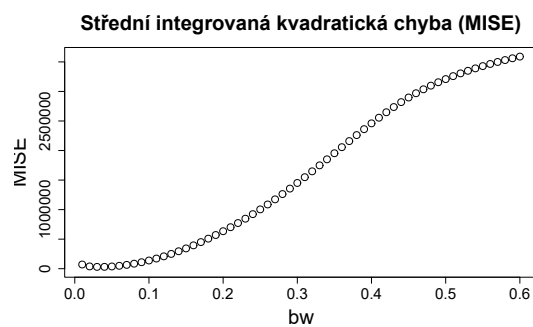
(c) MISE pro  $a = 3$



(d) MISE pro  $a = 4$



(e) MISE pro  $a = 5$



(f) MISE pro  $a = 6$

Obrázek 4.7: Střední integrovaná kvadratická chyba (MISE) funkce  $\hat{\rho}$  pro různé šířky jádra  $bw$  z 1 000 realizací Poissonova procesu  $Y$  s funkcí intenzity  $e^{(a+3x)}$  pro  $a = 1, \dots, 6$ .

	$a = 1$	$a = 2$	$a = 3$	$a = 4$	$a = 5$	$a = 6$
$\min \widehat{\text{MIRSE}}$	0,363	0,148	0,063	0,028	0,013	0,006
šířka jádra $bw$	0,16	0,13	0,11	0,08	0,07	0,05

Tabulka 4.2: Hodnota minimální střední integrované relativní kvadratické chyby (MIRSE) funkce  $\hat{\rho}$  a odpovídající šířka jádra  $bw$  z 1 000 realizací Poissonova procesu  $Y$  s funkcí intenzity  $e^{(a+3x)}$  pro  $a = 1, \dots, 6$ .

$Y$  v  $\mathbb{R}^2$  s funkcí intenzity  $\exp(a + 3x)$  pro  $a$  rovno 1, 2, 3, 4, 5 a 6 (viz obrázek 4.8). Šířky jádra  $bw$  bereme opět z intervalu  $[0,01, 0,60]$  s krokem 0,01.

Pro každé  $a = 1, \dots, 6$  dostaneme minimální MIRSE funkce  $\hat{\rho}$  s konkrétní šířkou jádra  $bw$  z 1 000 realizací Poissonova procesu  $Y$  s funkcí intenzity  $\exp(a + 3x)$ . Hodnotu minimální MIRSE funkce  $\hat{\rho}$  a odpovídající šířku jádra  $bw$  z 1 000 realizací Poissonova procesu  $Y$  s funkcí intenzity  $\exp(a + 3x)$  pro  $a = 1, \dots, 6$  zapíšeme do tabulky 4.2. Analogicky jako u MISE funkce  $\hat{\rho}$  z 1 000 realizací vidíme, že se s rostoucí funkcí intenzity Poissonova procesu  $Y$  a tedy s rostoucím středním počtem bodů Poissonova procesu  $Y$  snižuje šířka jádra pro minimální MIRSE funkce  $\hat{\rho}$  z 1 000 realizací. Hodnota minimální MIRSE funkce  $\hat{\rho}$  z 1 000 realizací s rostoucí funkcí intenzity Poissonova procesu  $Y$  naopak klesá. Odtud tedy plyne, že rostoucí hodnota minimální MISE funkce  $\hat{\rho}$  z 1 000 realizací při rostoucí intenzitě Poissonova procesu  $Y$  je dána zvětšujícími se hodnotami funkce intenzity Poissonova procesu  $Y$ .

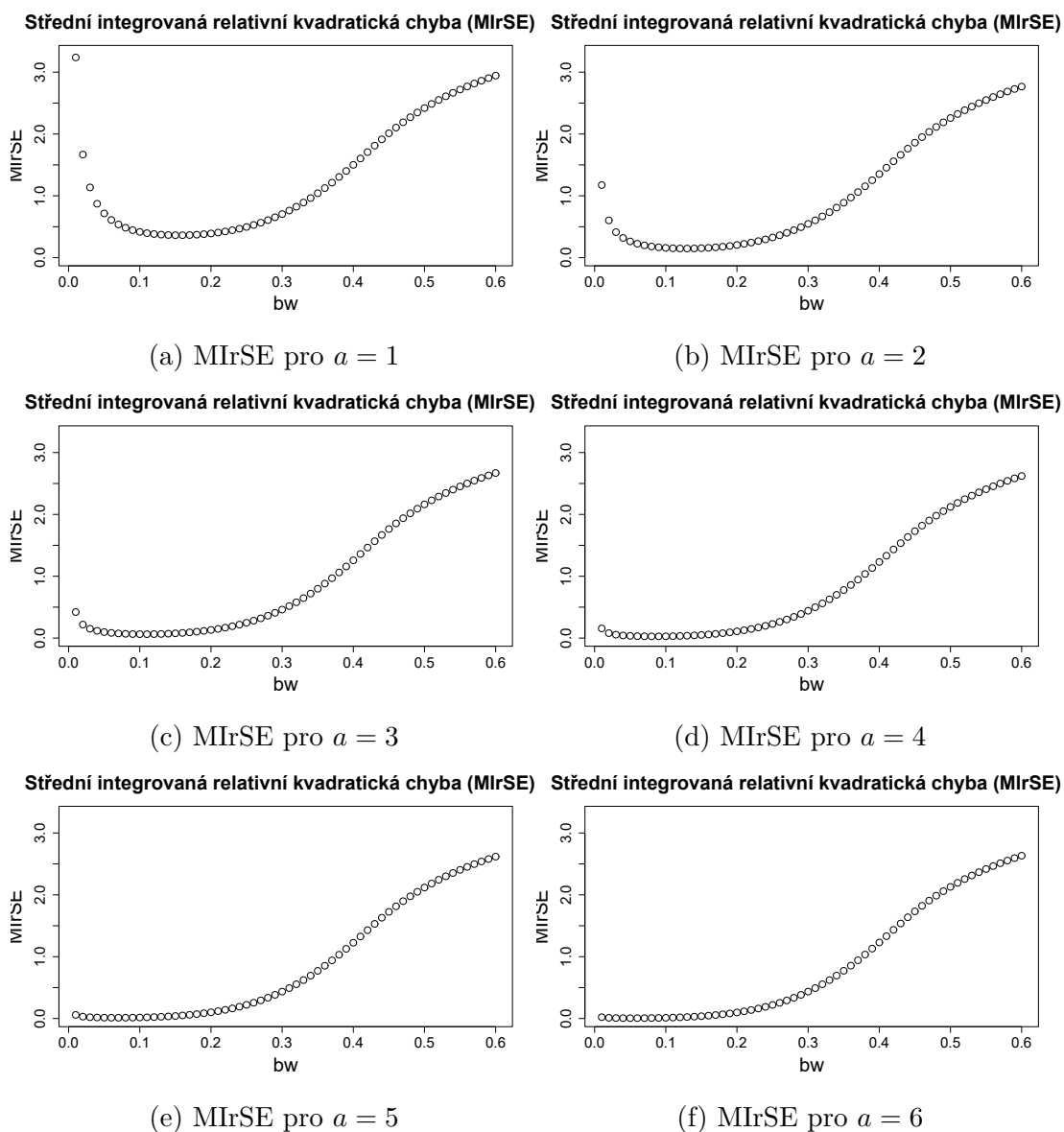
## 4.5 Rozptyl jádrového odhadu funkce $\rho$

Nyní se podíváme na rozptyl jádrového odhadu funkce  $\rho$ . Tento rozptyl vypočítáme dvěma způsoby, následně výsledky porovnáme. Vycházíme z 1 000 nezávislých realizací Poissonova procesu  $Y$  na okně  $W = [0,1]^2$  s funkcí intenzity  $\exp(3 + 3x)$  a s šířkou jádra  $bw = 0,08$ .

Rozptyl  $\text{Var}_1(\hat{\rho})$  odhadneme empiricky. Využijeme hodnot funkce  $\hat{\rho}$  pro konkrétní hodnoty kovariáty  $X(u) = x$  získané pomocí funkce `rho_hat` z balíčku `spatstat`. Tyto hodnoty funkce  $\hat{\rho}$  známe pro 1 000 realizací. Následně z těchto hodnot pomocí známého vzorce pro empirický rozptyl náhodného výběru odhadneme rozptyly  $\hat{\rho}(x)$  pro jednotlivé hodnoty kovariáty  $x$ .

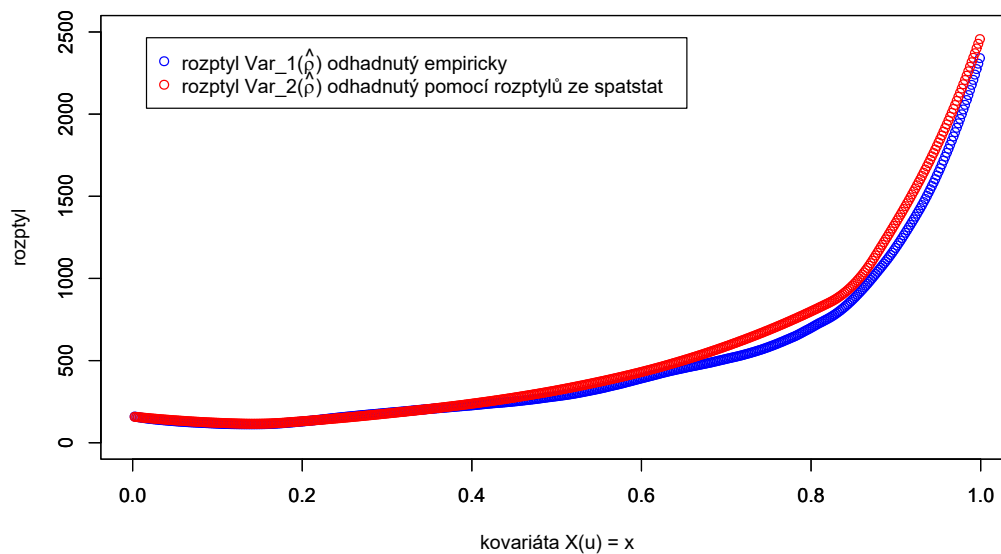
Rozptyl  $\text{Var}_2(\hat{\rho})$  odhadneme pomocí funkce `rho_hat` z balíčku `spatstat`, která pro každou realizaci vypočítá rozptyly pro konkrétní hodnoty kovariáty  $X(u) = x$  podle vzorce (16) z článku Baddeley a kol. (2012). Tyto rozptyly jsou dány asymptotickým rozptylem pro funkci  $\hat{\rho}$  za předpokladu, že  $Y$  je Poissonův proces, což je v tomto případě splněno. Takto vypočtené rozptyly pro konkrétní hodnoty kovariáty  $X(u) = x$  opět známe pro 1 000 realizací. Na tyto rozptyly pro jednotlivé hodnoty kovariáty  $x$  použijeme výběrový průměr a dostaneme výsledné rozptyly  $\text{Var}_2(\hat{\rho})(x)$ .

Rozptyly získané těmito dvěma způsoby porovnáme (viz obrázek 4.9). Vidíme, že oba postupy dávají podobné hodnoty rozptylů pro jednotlivé hodnoty kovariáty. Tedy zvolená metoda pro výpočet rozptylu funkce  $\hat{\rho}$  nemá na konečný výsledek vliv. V případě Poissonova procesu se tedy jeví jako bezpečné používat



Obrázek 4.8: Střední integrovaná relativní kvadratická chyba (MIRSE) funkce  $\hat{\rho}$  pro různé šířky jádra  $bw$  z 1 000 realizací Poissonova procesu  $Y$  s funkcí intenzity  $e^{(a+3x)}$  pro  $a = 1, \dots, 6$ .

Rozptyly jádrového odhadu funkce  $\rho$  s  $bw = 0,08$



Obrázek 4.9: Rozptyly funkce  $\hat{\rho}$   $\text{Var}_1(\hat{\rho})$  a  $\text{Var}_2(\hat{\rho})$  se šířkou jádra  $bw = 0,08$  z 1 000 realizací Poissonova procesu  $Y$  s funkcí intenzity  $e^{(3+3x)}$ .

hodnoty rozptylu odhadnuté z jedné pozorované realizace tak, jak je dává funkce  $\rho$ hat.

# Závěr

V práci jsme se zabývali závislostí bodového procesu na prostorové kovariátě. Naším cílem bylo neparametricky odhadnout funkci intenzity bodového procesu závislou na kovariátě.

V první kapitole jsme vybudovali teorii k bodovým procesům. Zavedli jsme jednu z nejdůležitějších charakteristik bodových procesů, a to funkci intenzity. Současně jsme popsali modely pro funkci intenzity, které závisí na kovariátách. Důraz jsme kladli především na neparametrické modely.

Hlavní přínos této práce se však nachází v druhé, třetí a čtvrté kapitole. V druhé kapitole jsme uvedli pomocné definice a tvrzení Coarea formula. Aplikaci této věty jsme ilustrovali na jednoduchém příkladu vycházejícím z článku Baddeley a kol. (2012, apendix A.1). Formulovali jsme důležitý vztah mezi funkcí intenzity transformovaného bodového procesu, funkcí intenzity závislé na kovariátě a hustotou kovariátní funkce, pomocí níž jsme transformovali původní proces na proces nový. Tento vzorec je uvedený opět v článku Baddeley a kol. (2012, vzorec (6)). Na závěr jsme důkladně rozepsali všechny dílčí kroky důkazu, jež byl v článku Baddeley a kol. (2012, apendix A.2) zmíněn pouze okrajově.

Ve třetí kapitole jsme definovali jádrový odhad funkce intenzity. Využili jsme vztahu pro funkci intenzity, formulovaného v předchozí kapitole, a uvedli jádrový odhad funkce, která popisuje závislost funkce intenzity na kovariátě. Pro odhad této funkce jsme odvodili střední hodnotu a zobecnili vztah pro rozptyl opět z článku Baddeley a kol. (2012, vzorec (4)).

Ve čtvrté kapitole jsme teorii doplnili o simulace Poissonových bodových procesů. Vypočítali jsme integrovanou kvadratickou chybu (ISE), střední integrovanou kvadratickou chybu (MISE) a střední integrovanou relativní kvadratickou chybu (MIRSE) výše uvedeného jádrového odhadu funkce pro dané realizace bodových procesů. Tyto chyby jsme porovnali pro různé šířky jádra a pro různé intenzity bodových procesů. Na závěr jsme pro dané realizace porovnali dva odhadnuté rozptyly tohoto jádrového odhadu funkce.

# Seznam použité literatury

- BADDELEY, A., BÁRÁNY, I., SCHNEIDER, R., HUG, D., WEIL, W., CAPASSO, V. a VILLA, E. (2006). *Stochastic Geometry: Lectures given at the C.I.M.E. Summer School held in Martina Franca, Italy, September 13-18, 2004*. Springer. ISBN 978-3-540-38174-7.
- BADDELEY, A., CHANG, Y.-M., SONG, Y. a TURNER, R. (2012). Nonparametric estimation of the dependence of a spatial point process on spatial covariates. *Statistics and Its Interface*, **5**, 221–236.
- BADDELEY, A., RUBAK, E. a TURNER, R. (2015). *Spatial Point Patterns: Methodology and Applications with R*. 1st ed. Chapman and Hall/CRC. ISBN 978-1482210200.
- EVANS, L. C. a GARIEPY, R. F. (1992). *Measure Theory and Fine Properties of Functions*. CRC PRESS. ISBN 0-8493-7157-0.
- FEDERER, H. (1969). *Geometric Measure Theory*. Springer.
- MOLLER, J. a WAAGEPETERSEN, R. (2003). *Statistical Inference and Simulation for Spatial Point Processes*. 1st ed. Chapman and Hall/CRC. ISBN 9781584882657.
- R CORE TEAM (2022). *R: A Language and Environment for Statistical Computing*. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria. URL <https://www.R-project.org/>.
- RATAJ, J. (2006). *Bodové procesy*. Druhé opravené vydání. Karolinum. ISBN 80-246-1182-1.

# Seznam obrázků

4.1	Simulovaná realizace Poissonova bodového procesu $Y$ s funkcí intenzity $e^{(3+3x)}$ . . . . .	17
4.2	Jádrové odhady funkce $\rho$ pro různé šířky jádra $bw$ pro realizaci Poissonova procesu $Y$ z obrázku 4.1. . . . .	17
4.3	Jádrové odhady funkce $\rho$ pro realizaci Poissonova procesu $Y$ z obrázku 4.1. . . . .	18
4.4	Integrovaná kvadratická chyba (ISE) funkce $\hat{\rho}$ pro různé šířky jádra $bw$ pro realizaci Poissonova procesu $Y$ z obrázku 4.1. . . . .	19
4.5	Střední integrovaná kvadratická chyba (MISE) funkce $\hat{\rho}$ pro různé šířky jádra $bw$ z 1 000 realizací Poissonova procesu $Y$ s funkcí intenzity $e^{(3+3x)}$ . . . . .	20
4.6	Minimální integrovaná kvadratická chyba (ISE) pro realizaci Poissonova procesu $Y$ z obrázku 4.1 a minimální střední integrovaná kvadratická chyba (MISE) z 1 000 realizací Poissonova procesu $Y$ s funkcí intenzity $e^{(3+3x)}$ . . . . .	20
4.7	Střední integrovaná kvadratická chyba (MISE) funkce $\hat{\rho}$ pro různé šířky jádra $bw$ z 1 000 realizací Poissonova procesu $Y$ s funkcí intenzity $e^{(a+3x)}$ pro $a = 1, \dots, 6$ . . . . .	22
4.8	Střední integrovaná relativní kvadratická chyba (MIRSE) funkce $\hat{\rho}$ pro různé šířky jádra $bw$ z 1 000 realizací Poissonova procesu $Y$ s funkcí intenzity $e^{(a+3x)}$ pro $a = 1, \dots, 6$ . . . . .	24
4.9	Rozptyly funkce $\hat{\rho}$ $\text{Var}_1(\hat{\rho})$ a $\text{Var}_2(\hat{\rho})$ se šířkou jádra $bw = 0,08$ z 1 000 realizací Poissonova procesu $Y$ s funkcí intenzity $e^{(3+3x)}$ . . . . .	25



# Seznam tabulek

4.1	Hodnota minimální střední integrované kvadratické chyby (MISE) funkce $\hat{\rho}$ a odpovídající šířka jádra $bw$ z 1 000 realizací Poissonova procesu $Y$ s funkcí intenzity $e^{(a+3x)}$ pro $a = 1, \dots, 6$ . . . . .	21
4.2	Hodnota minimální střední integrované relativní kvadratické chyby (MIRSE) funkce $\hat{\rho}$ a odpovídající šířka jádra $bw$ z 1 000 realizací Poissonova procesu $Y$ s funkcí intenzity $e^{(a+3x)}$ pro $a = 1, \dots, 6$ . . .	23

# Seznam použitých zkratk

- ISE – integrovaná kvadratická chyba
- MISE – střední integrovaná kvadratická chyba
- M<sub>Ir</sub>SE – střední integrovaná relativní kvadratická chyba