Posudek diplomové práce

JAKUB KAŠPAR: *Propagace šumu v algoritmech konstruujících krylovovské regularzační báze pro řešení inverzních úloh*

Vypracoval: Martin Plešinger
Katedra matematiky, Technická univerzita v Liberci
19. srpna 2023

Práce se v širším slova smyslu zabývá řešením fyzikálně motivovaných inverzních úloh se spojitým ale tzv. špatně podmíněným lineárním zobrazením a šumem zatíženým pozorováním. Autor začíná výklad u funkcionálních úloh, na kterých velmi srozumitené vysvětlí řadu vlastností těchto úloh, popíše možnosti diskretizace a ukáže, jak se při vhodně zvolených bázích konečných podprostorů propíšou některé z vlastností do diskrétní — maticové úlohy $Ax \approx b$, kde pravá strana $b = b^{\text{exact}} + e$ je zatížená neznámým šumem e.

Následně autor čtenáře seznámí se třemi klíčovými iteračními algoritmy pro generování ortonormálních bází vhodných podprostorů, konkrétně krylovovských prostorů: *Golubovou–Kahanovou bidiagonalizací*, *Lanczosovou tridiagonalizací* a *Arnoldiho metodou.* Zrekapituluje známé výsedky, jak se šum v původní pravé straně b manifestuje v iteracích prvního ze zmiňovaných algoritmů a jak to lze využít k včasnému zastavení bidiagonalizace (resp. metody LSQR, která bidiagonalizaci využívá) a tím regularizaci úlohy.

Následuje nejdůležitější část práce, ve které autor ukáže jak se šum propaguje Lanczosovou tridiagonalizací a Arnoldiho metodou. Explicitně popíše a dokáže, jak v obou případech vypadá 'šumový' koeficient $\varphi_j(0)$ (konstatní člen algoritmu odpovídajících krylovovských polynomů), který lze jednoduše rekurentně spočítat a nese informaci o odstupu signálu (přesné pravé strany) od šumu. Ačkoliv jsou všechny tři algoritmy blízce příbuzné, tvar 'šumového' koeficientu je velmi odlišný a nelze přenést jednoduchou analogií (srov. větu 7 na str. 20 a věty 14 a 20 na str. 31 a 40). Rád bych v tento okamžik vypíchnul, že obě odvození jsou dle mého názoru zajímavá a kreativní (a zajímavě vysvětlená, např. souvislostí s Fibonacciho posloupností). Oba tyto algoritmy opět slouží jako základ řady metod pro řešení soustav rovnic (např. MINRES, resp. GMRES). Autor také odvodí, jak lze 'šumový' koeficient Lanczosovy tridiagonalizace využít právě v metodě MINRES k jejímu včasnému zastavení a regularizaci úlohy. Všechny tyto výsledky (odvození obou 'šumových' koeficientů i využití v MINRES) se zdají být odvozeny korektně a jsou dle mého názoru původní a origináni. Prezentované výsledy jsou navíc doplněny řadou vhodně zvolených ilustrativních numerických experimentů.

Práce (navzdory drobným překlepům a nekonzistencím; viz např. značení prostoru L^2 vs. L_2, str. 9 první řádek vs. vzorec (1.4)) rozhodně splňuje požadavky obvykle kladené na diplomovou práci, proto ji **navrhuji uznat jako diplomovou práci**. Zároveň **navrhuji klasifikaci práci stupněm výborně**.

K práci mám několik drobných námětů:

- Hned v úvodu zmiňujete, že řešení získané Tichonovovou regularizací lze *vyjádřit* pomocí singulárního rozkladu matice A, k čemuž je přirozeně potřeba onen singulární rozklad. K *výpočtu* tohoto řešení však singulární rozlad potřeba není — Tichonovovu regularizaci úlohy $Ax \approx b$ s regularizačním koeficientem λ lze převést na klasickou úlohu nejmenších čtverců

$$\begin{bmatrix} A \\ \lambda I \end{bmatrix} x \approx \begin{bmatrix} b \\ 0 \end{bmatrix}.$$

  Jak byste takovou úlohu řešil v případě malých rozměrů matice a jak v případě, že by A byla velká a např. řídká?

- V sekci 1.5, ve druhém itemu jako *výhodu* zmiňujete, že lze podprostor volit tak aby byl generován jen hladkými funkcemi. Z příkladu s čárovým kódem je však zřejmé (viz obr. 1.2, druhý řádek), že hledané řešení hladké není. Je to tedy opravdu výhoda?

- Před vyslovením věty 14 poznamenáváte, že $|\mathcal{D}_j| = F_j$, kde F_j je $j$tý člen Fibonacciho posloupnosti. Přitom definujete (definice 6)

$$\mathcal{D}_0 = \emptyset$$

  a zřejmě platí

$$\mathcal{D}_1 = \{(1)\}, \quad \mathcal{D}_2 = \{(1,1),(2)\}, \quad \mathcal{D}_3 = \{(1,1,1),(1,2),(2,1)\},$$
$$\mathcal{D}_4 = \{(1,1,1,1),(1,1,2),(1,2,1),(2,1,1),(2,2)\}\ldots$$

  Dle mého názoru $|\mathcal{D}_0| = 0$ a posloupnost je tvaru $0, 1, 2, 3, 5, \ldots$

  Nebylo by vhodnější (i v návaznosti na analogii s dlážděním chodníku) uvažovat

$$\mathcal{D}_0 = \{\emptyset\},$$

  tj. $|\mathcal{D}_0| = 1$ a $\Delta_\iota \in \mathcal{D}_0$ by byla prázdnou posloupností?

V Liberci, 19. srpna 2023
Martin Plešinger