



**MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ
FAKULTA**
Univerzita Karlova

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Jan Kříž

K rozkladu křivosti v cirkulárních prostoročasech

Ústav teoretické fyziky

Vedoucí bakalářské práce: doc. RNDr. Oldřich Semerák, DSc.

Studijní program: Fyzika

Studijní obor: Fyzika

Praha 2023

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval(a) samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů. Tato práce nebyla využita k získání jiného nebo stejného titulu.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V dne

Podpis autora

Tímto bych rád vřele poděkoval vedoucímu práce doktoru Oldřichu Semerákovi za jeho trpělivost, vstřícnost a vždy optimistický přístup. Také mu vřele děkuji za nakažlivé nadšení pro obecnou relativitu, a za péči, kterou věnuje učení tohoto oboru. Děkuji vřele také oponentovi práce doktoru Davidu Kofroňovi za jeho ochotu, vstřícnost a věcné připomínky k syntaktické stránce balíčku xAct, děkuji také za veškerou poskytnutou motivaci. Za skvělou připravenost a srozumitelnost přednášek, a entuziasmus pro vědu, patří velký dík celému ústavu Teoretické fyziky. V neposlední řadě děkuji i své rodině za neutuchající pomoc poskytnutou při studiu, především pak své přítelkyni Marii Berešové děkuji za všechnu projevenou trpělivost a pochopení. Poslední poděkování patří kolektivu přátel a kolegů z čajovny Buddha za poskytnutí příjemného a přátelského prostředí pro nerušenou práci a studium. Bez vás by tato práce nevznikla.

Název práce: K rozkladu křivosti v cirkulárních prostoročasech

Autor: Jan Kříž

Ústav teoretické fyziky: Ústav teoretické fyziky

Vedoucí bakalářské práce: doc. RNDr. Oldřich Semerák, DSc., Ústav teoretické fyziky

Abstrakt: Výpočet skalárů daných Riemannovým tenzorem křivosti není vždy efektivní provádět v souřadnicových složkách, a to ani v jednoduchých prostoročasech. Postup jednak není intuitivní, druhá např. na horizontu černých děr řada složek diverguje, ačkoli ve výsledku se přesně odečtou. Motivováni připravovaným textem [1], zaměřujeme se v této práci na cirkulární prostoročasy a provádíme $2+1+1$ dekompozici umožňující vyjádřit křivostní skaláry pomocí sekcionálních a vnějších křivostí a pomocí geometrických charakteristik význačných časupodobných kongruencí. Klíčovou součástí práce je implementace a kontrola postupu v softwarovém balíčku xAct pro program Wolfram Mathematica.

Klíčová slova: obecná relativita křivost Gaussovy-Codazziho rovnice kongruence pozorovatelů

Title: On curvature decomposition in circular space-times

Author: Jan Kříž

Institute of theoretical physics: Institute of theoretical physics

Supervisor: doc. RNDr. Oldřich Semerák, DSc., Institute of theoretical physics

Abstract: Calculation of scalars obtained from the Riemann curvature tensor in coordinate components is not always efficient, this is true even in very simple spacetimes. Firstly, the calculation is not intuitive and secondly, many terms involved in such calculations tend to strongly diverge for example on black hole horizons, even though they should precisely “cancel out”. Motivated by [1], main focus of this thesis are circular space times and introduction of 2+1+1 decomposition. The latter allows for rewriting curvature scalar using sectional curvatures, exterior curvatures and geometrically significant timelike congruences. Crucial part of this thesis is software implementation and verification of this approach in Wolfram Mathematica using xAct package.

Keywords: general relativity curvature Gauss-Codazzi equations observer congruences

Obsah

Užité konvence	2
Úvod	3
1 Struktura obecné teorie relativity a Kerrovo řešení	5
1.1 Struktura obecné relativity a problémy s její “představou”	5
1.2 Kerrovo řešení Einsteinových rovnic	9
1.2.1 Souřadnice, metrika a základní vlastnosti řešení	9
1.2.2 Privilegované pohyby a ZAMO	10
2 Ke kongruencím geodetik a 3+1 dekompozici prostoročasu	13
2.1 Vektorové pole a jejich integrální kongruence	13
2.1.1 Kinematika integrálních kongruencí	13
2.1.2 Frobeniova věta	15
2.2 3+1 dekompozice prostoročasu	16
2.2.1 Komentář ke struktuře kódu	16
2.2.2 Zavedení 3+1 dekompozice	17
2.2.3 3D Riemannův tenzor, Gaussovy, Codazziho, Ricciho rovnice	20
2.2.4 3+1 dekompozice Ricciho tenzoru a skaláru	21
2.2.5 Vakuové rovnice, vazby a kolmost k nadplochám	23
2.2.6 3+1 Rozštěpení Kretschmannova skaláru	24
3 (2+1)+1 dekompozice prostoročasu	26
3.1 Problémy s implementací druhé dekompozice v balíčku xAct	26
3.2 Zavedení (2+1)+1 dekompozice	26
3.3 2D Riemannův tenzor, 2+1 dekompozice 3D Riemannova tenzoru a jeho kontrakcí	29
3.4 (2+1)+1 dekompozice Kretschmannova skaláru	31
4 Cirkulární prostoročasy	32
4.1 3+1 dekompozice cirkulárních prostoročasů	32
4.2 2+1 dekompozice nadploch Σ_t	35
Závěr	37
Seznam použité literatury	39

Užití konvence

Tato bakalářská práce se řídí notační konvencí knihy *Gravitation* [1].
Metrika:

$$+g = -(\omega^0)^2 + (\omega^1)^2 + (\omega^2)^2 + (\omega^3)^2$$

Riemannův tenzor:

$$+R^\mu{}_{\nu\kappa\lambda}V_\mu = V_{\nu;\kappa\lambda} - V_{\nu;\lambda\kappa}$$
$$+R^\mu{}_{\nu\kappa\lambda} = \Gamma^\mu{}_{\nu\lambda,\kappa} - \Gamma^\mu{}_{\nu\kappa,\lambda} + \Gamma^\mu{}_{\rho\kappa}\Gamma^\rho{}_{\nu\lambda} - \Gamma^\mu{}_{\rho\lambda}\Gamma^\rho{}_{\nu\kappa},$$

kde středník “;” označuje kovariantní derivaci Levi-Civitova typu, čárka “,” označuje derivaci parciální

Ricciho tenzor:

$$+R_{\mu\nu} = R^\alpha{}_{\mu\alpha\nu}$$

Celá práce je formulována v geometrizovaných jednotkách:

$$G = c = 1$$

Einsteinovy rovnice:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = +8\pi T_{\mu\nu}$$

$$T_{00} > 0$$

Úvod

V obecné relativitě je křivost generického prostoročasu dimenze 4 popsána 14 nezávislými skaláry, které se získají produkty Ricciho a Weylova tenzoru. *Ve vakuu a po zanedbání kosmologického členu* je však Ricciho tenzor triviální, v tomto případě zůstanou nenulové pouze 4 křivostní skaláry. Ty jsou popsány Riemannovým tenzorem $R^\mu{}_{\nu\kappa\lambda}$ a jeho levým duálem $*R_{\mu\nu\kappa\lambda} = \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}R^{\alpha\beta}{}_{\kappa\lambda}$. Netriviálními jsou pouze Kretschmannův skalár $R_{\mu\nu\kappa\lambda}R^{\mu\nu\kappa\lambda}$, skalár Chernův-Pontryaginův $*R_{\mu\nu\kappa\lambda}R^{\mu\nu\kappa\lambda}$ a dva další kubické skaláry. Kretschmannův a Chernův-Pontryaginův skalár jsou tedy hlavní dvě kvadratické invariantní charakteristiky křivosti ve vakuové oblasti prostoročasu. Jejich obecná vyjádření bývají komplikovaná a s jejich explicitním výpočtem na hranicích zdrojů a na horizontech se pojí výpočetní potíže, řada z členů vystupujících v jejich vyjádření má tendenci na těchto oblastech silně divergovat, přestože by se měly přesně odečíst, tj. výsledek by měl být regulární. Problémy lze částečně řešit vhodnou volbou numerických algoritmů. Druhým, pro některé případy výhodnějším přístupem je vyjádřit oba skaláry v řeči jiných geometricky signifikantních veličin, které jsou numericky stabilnější. Jedním z takových přístupů je rozložit prostoročas pomocí nadploch kolmých k integrální kongruenci křivek některého pro prostoročas významného vektorového pole. Tomuto tématu se věnuje nepublikovaná práce [2], jejíž strukturu v tomto textu budeme pevně sledovat.

V kapitole 1 se po zopakování základů obecné relativity zaměříme na důležité aspekty Kerrova řešení Einsteinových rovnic, které je vhodné k uvedení do třídy cirkulárních prostoročasů a k pochopení geometrie spojené s integrálními kongruencemi. Klíčovým pojmem zde budou killingovské symetrie a speciální třída pozorovatelů, tzv. Zero Angular Momentum Observers (ZAMO). ZAMO kongruence slouží jako ilustrační příklad ve všech dalších kapitolách tohoto textu, neboť je přirozené pomocí ní zavést 3+1 dekompozici prostoročasu. Čtyř-rychlost ZAMO kongruence je totiž kolmá k nadplochám konstantního Killingova času t . Následně lze díky kolmosti čtyř-zrychlení ZAMO kongruence na plochy konstantní Lapse funkce sestrojít druhou dekompozici, tzv. (2+1)+1 dekompozici prostoročasu. Jelikož Kerrovo řešení je samo speciálním příkladem cirkulárního prostoročasu, ZAMO kongruence poslouží pro pochopení symetriemi privilegovaného pohybu v prostoročasech tohoto typu.

V kapitole 2 zavedeme obecnou 3+1 dekompozici prostoročasu nadplochami Σ_t a jejich normálovým polem. Úplný přehled této problematiky lze nalézt například v knize [3]. V tomto režimu vyjádříme s užitím Gaussových-Codazziho-Ricciho rovnic dekompozici Kretschmannova skaláru, kterou zjednodušíme pro případ vakuových rovnic.

V kapitole 3 dále zavedeme druhou, obecnou, foliaci plochami Σ_s , která přirozeně zavede na systému nadploch Σ_t dekompozici pomocí (2D) ploch Σ_{ts} a jejich (1D) ortogonálního doplňku. V režimu druhé dekompozice zjednodušíme některé členy vystupující v dekompozici Kretschmannova skaláru do řeči 2D a 3D tenzorů vnější křivosti, čtyř-zrychlení a jejich derivací. Tyto veličiny mají zřejmý geometrický význam související s pojmy známými z analýzy na varietách, jmenovitě střední křivostí, hlavní křivostí, křivostí Gaussovou-Kroneckerovou a celkovou křivostí.

Struktura 3+1 rozkladu prostoročasu je v obecné relativitě často využívána, jmenovitě například v relativistické hydrodynamice a kosmologii. Hlavní uplatnění pak nalézá v numerické relativitě. Další oblastí, kde je využíván formalismus 3+1 a (2+1)+1 dekompozice, je třída cirkulárních (tj. stacionárních, axiálně symetrických a ortogonálně tranzitivních) prostoročasu.

Aplikaci této struktury na třídu cirkulárních prostoročasu se věnujeme v kapitole 4. Zde provedeme explicitní výpočet některých členů vystupujících v 3+1 dekompozici a (2+1)+1 dekompozici Kretschmannova skaláru. V literatuře věnované cirkulárním prostoročasům bývá kanonickým přístupem vybrat první foliaci pomocí nadploch konstantního Killingova času t . Druhá foliace pak bývá zavedena jako plochy konstantní úhlové killingovské souřadnice ϕ . Díky ortogonální tranzitivitě tak vzniká foliace 2D “meridionálními” plochami $\Sigma_{t\phi}$ ortogonálními ke Killingovým polím v každém bodu (oblasti) prostoročasu. V tomto textu se při volbě první dekompozice držíme “tradiční” volby, tj. vybereme nadpochy konstantního Killingova času t . Druhou foliaci vybereme oproti “tradiční volbě” jako plochy konstantní Lapse funkce. Tato volba v prostoročasech *statických* není nijak nová, byla využita například k důkazu jedinečnosti Schwarzschildova řešení [4], avšak nebývá tradiční v prostoročasech *stacionárních*.

Zmíněnou strukturu se pokusíme implementovat v prostředí Wolfram Mathematica opatřeném balíčkem xAct, který Wolfram Language obohatí o efektivní manipulaci s tenzorovými výrazy. Hlavní motivací pro tuto práci je osvojení manipulace s balíčkem xAct a jeho využití pro ověření všech uvedených výsledků.

1. Struktura obecné teorie relativity a Kerrovo řešení

1.1 Struktura obecné relativity a problémy s její “představou”

Obecná relativita pracuje s pojmem pseudo-riemannovských variet. Varietou rozumíme intuitivně “topologický prostor lokálně srovnatelný s kartézským”. Ve vší obecnosti je pojem variety představen v obecné relativitě jako čtyřdimenzi-onální topologický prostor, jehož každý bod má okolí homeomorfní s otevřenou podmnožinou čtyřdimenzionálního kartézského prostoru. Navíc je varieta opatřena ještě metrikou reprezentovanou negenerovanou indefinitní lineární 2-formou. Rozpis metrického tenzoru do kovektorové báze dx^σ , s užitím Einsteinovy sčítací konvence má tvar

$$\mathbf{g} = g_{\mu\nu} dx^\mu \otimes dx^\nu.$$

Speciálním případem pseudo-riemannovských variet jsou variety se signaturou metriky $\text{sign}(\mathbf{g}) = (1, d-1)$, kde d je dimenze - pro nás $d = 4$. Těmto varietám se říká lorentzovské. Dále budeme pracovat pouze v souřadnicové reprezentaci, tu pro libovolný tenzor získáme aplikací tohoto tenzoru jakožto zobrazení na duální bázi. Pro metriku máme

$$\mathbf{g}(\partial_\kappa, \partial_\lambda) = g_{\mu\nu} dx^\mu(\partial_\kappa) \otimes dx^\nu(\partial_\lambda) \equiv g_{\mu\nu} \delta_\kappa^\mu \delta_\lambda^\nu = g_{\kappa\lambda}.$$

Prostoročasový interval (nejdůležitější invariant) má tvar

$$ds^2 := g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu.$$

Význačnou novotou oproti práci s kartézskými souřadnicemi (a to i pokud opatříme kartézský prostor souřadnicemi křivými) je pojem kovariantní derivace. Obecně totiž souřadnicové bázové vektory nejsou konstantní, tj. jsou zadány jako funkce (“polohy”) na varietě. Aby byla změna bázových vektorů vzata v potaz, je třeba derivaci opatřit o nový člen (obsahující Christoffelovy symboly druhého řádu). Uvažme nyní libovolnou hladkou parametrickou křivku $x^\mu = x^\mu(\lambda)$, podél této křivky má pak absolutní derivace vektorového pole V^μ tvar

$$\frac{DV^\mu}{d\lambda} := \frac{dV^\mu}{d\lambda} + \Gamma^\mu_{\sigma\rho} \frac{dx^\sigma}{d\lambda} V^\rho \equiv \left(\frac{\partial V^\mu}{\partial x^\sigma} + \Gamma^\mu_{\sigma\rho} V^\rho \right) \frac{dx^\sigma}{d\lambda}.$$

Výraz v závorce opatříme novou notací (tzv. postfix notací). Výraz

$$V^\mu_{;\sigma} := \left(\frac{\partial V^\mu}{\partial x^\sigma} + \Gamma^\mu_{\sigma\rho} V^\rho \right) \equiv (V^\mu_{,\sigma} + \Gamma^\mu_{\sigma\rho} V^\rho)$$

popisuje komponenty kovariantního gradientu pole V^μ . Symboly “; σ ” a “, σ ” značí kovariantní, resp. parciální derivaci podle proměnné x^σ .

Kovariantní derivace obecného tenzorového pole \mathbf{T} řádu (r,p) má tvar

$$T^{\alpha\dots\beta}_{\gamma\dots\delta;\iota} := T^{\alpha\dots\beta}_{\gamma\dots\delta,\iota} + \Gamma^{\alpha}_{\iota\lambda} T^{\lambda\dots\beta}_{\gamma\dots\delta} + \dots + \Gamma^{\beta}_{\iota\lambda} T^{\alpha\dots\lambda}_{\gamma\dots\delta} - \Gamma^{\lambda}_{\iota\gamma} T^{\alpha\dots\beta}_{\lambda\dots\delta} - \dots - \Gamma^{\lambda}_{\iota\delta} T^{\alpha\dots\beta}_{\gamma\dots\lambda}.$$

Se zavedením kovariantní derivace je nutno dát novou interpretaci pojmu “paralelního přenosu tenzoru” (bez změny) podél křivky. V kartézských souřadnicích je tento pojem naprosto přirozený (kartézské komponenty tenzoru ani souřadnicová báze se nemění). Mění-li se však bázové vektory podél křivky, je třeba explicitně pracovat i se souřadnicovou bází a její změnou. Tuto změnu zachycují právě výše zmíněné složky affinní konexe (v případě Levi-Civitovy konexe reprezentované Christoffelovými symboly). Dalším požadavkem na paralelní přenos je zachování úhlů a velikostí vektorů (tj. musí zachovávat metriku). Speciálním, avšak klíčovým případem tohoto požadavku je zachování prostoročasového charakteru (ko)vektoru (tj. zachování znaménka normy).

Rovnice paralelního přenosu (například vektoru) tedy zní: Absolutní derivace podél křivky je nulová, tj.

$$\frac{DV^{\mu}}{d\lambda} = \frac{dV^{\mu}}{d\lambda} + \Gamma^{\mu}_{\sigma\rho} \frac{dx^{\sigma}}{d\lambda} V^{\rho} \stackrel{!}{=} 0. \quad (1.1)$$

Speciálním případem této rovnice je rovnice geodetiky. Geodetika je definovaná jako světočára, která vznikne paralelním přenosem vektoru podél sebe sama. Tečný vektor k této světočáře se tedy podél ní přenáší paralelně (nejvíc “rovně”, jak je v dané geometrii plně určené komponenty dané affinní konexe - pro nás Levi-Civitovy - možné). Dosadíme-li tedy definici

$$V^{\mu} \equiv \frac{dx^{\mu}}{d\lambda}$$

vektoru tečného k hladké křivce $x^{\mu} = x^{\mu}(\lambda)$ do rovnice pro paralelní přenos, získáme rovnici geodetiky:

$$\frac{D}{d\lambda} \left(\frac{dx^{\mu}}{d\lambda} \right) = \frac{d^2 x^{\mu}}{d\lambda^2} + \Gamma^{\mu}_{\sigma\rho} \frac{dx^{\sigma}}{d\lambda} \frac{dx^{\rho}}{d\lambda} \stackrel{!}{=} 0. \quad (1.2)$$

Rovnice geodetiky je sada čtyř navzájem provázaných nelineárních obyčejných diferenciálních rovnic druhého řádu. Z předem známých komponent affinní konexe a předem známých Cauchyho podmínek pak řešením této sady rovnic získáme parametrický popis geodetiky jako hladké křivky. Doplňme ještě, že požadavek na zachování metriky zde hraje důležitou roli. Znamení normy tečného vektoru geodetiky je zachováno, geodetika tedy nesmí měnit svůj prostoročasový charakter.

Pracujeme s kovariantní derivací Levi-Civitova typu (je svázána s afinní konexí bez torze, konexe navíc zachovává metrický tenzor - je tzv. metricky kompatibilní), platí tady následující:

$$\begin{aligned}\Gamma^\mu_{[\kappa\lambda]} &:= \frac{1}{2} (\Gamma^\mu_{\kappa\lambda} - \Gamma^\mu_{\lambda\kappa}) \equiv 0 && \text{symetrie dolní dvojice indexů,} \\ g_{\mu\nu;\sigma} &\equiv 0 && \text{metrická kompatibilita,} \\ \Gamma_{\mu\nu\kappa} &= \frac{1}{2} (g_{\mu\nu,\kappa} + g_{\kappa\mu,\nu} - g_{\nu\kappa,\mu}) && \text{vztah pro výpočet Chr. symbolů,} \\ \Gamma^\mu_{\kappa\lambda} &\text{ není tenzor} && \text{avšak kovariantní derivace tenzorem je.}\end{aligned}$$

Symbol [...] zde značí antisymetrizaci. Detailní důkazy viz [1].

Nově také (narozdíl od kartézského prostoru a parciální derivace) pozorujeme nenulový komutátor druhých (kovariantních) derivací. Jejich komutátor aplikovaný na kovektorové pole V_μ definuje Riemannův tenzor,

$$R^\mu_{\nu\kappa\lambda} V_\mu := V_{\nu;\kappa\lambda} - V_{\nu;\lambda\kappa} \quad (1.3)$$

$$= 2g_{\mu\sigma} \left(\Gamma^\sigma_{\nu[\lambda,\kappa]} + \Gamma^\sigma_{\rho[\kappa}\Gamma^\rho_{\lambda]\nu} \right) V^\mu \quad (1.4)$$

$$= \left[\frac{1}{2} (g_{\mu\lambda,\nu\kappa} + g_{\nu\kappa,\mu\lambda} - g_{\mu\kappa,\nu\lambda} - g_{\nu\lambda,\mu\kappa}) + g_{\pi\rho} (\Gamma^\pi_{\mu\lambda}\Gamma^\rho_{\nu\kappa} - \Gamma^\pi_{\mu\kappa}\Gamma^\rho_{\nu\lambda}) \right] V^\mu. \quad (1.5)$$

Rovnice (1.4) a (1.5) zároveň skýtají vyjádření Riemannova tenzoru bez nutnosti reference na vektorové pole V^μ . Riemannův tenzor na pseudo-riemannovských varietách má tři hlavní symetrie:

$$R^\mu_{\{\nu\kappa\lambda\}} := R^\mu_{\nu\kappa\lambda} + R^\mu_{\lambda\nu\kappa} + R^\mu_{\kappa\lambda\nu} \quad 1. \text{ Bianciho identita,} \quad (1.6)$$

$$R^\mu_{\nu(\kappa\lambda)} = 0 \quad \text{antisymetrie v druhém páru indexů,} \quad (1.7)$$

$$R_{(\mu\nu)\kappa\lambda} = 0 \quad \text{antisymetrie v prvním páru indexů.} \quad (1.8)$$

Symbol (..) značí symetrizaci přes dané indexy. Z nich plyne ještě symetrie při záměně obou páru souřadnic:

$$R_{\mu\nu\kappa\lambda} - R_{\kappa\lambda\mu\nu} = 0. \quad (1.9)$$

Kontrakcí Riemannova tenzoru získáme Ricciho tenzor,

$$R_{\nu\lambda} := R^\kappa_{\nu\kappa\lambda} \equiv g^{\mu\kappa} R_{\mu\nu\kappa\lambda}, \quad (1.10)$$

který je díky (1.9) symetrický. Další kontrakcí získáme Ricciho skalár,

$$R := R^\mu_{\mu} \equiv g_{\mu\nu} R_{\mu\nu}, \quad (1.11)$$

což jsou díky symetriím Riemannova tenzoru jeho jediné dvě netriviální kontrakce.

Einsteinovy rovnice s užitím geometrizovaných jednotek ($G = c = 1$), zavedením symetrického tenzoru energie-hybnosti $T_{\mu\nu}$ a kosmologické konstanty Λ , mají s námi užitou znaménkovou konvencí tvar

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu}. \quad (1.12)$$

V oblasti bez zdrojů (tj. $T_{\mu\nu} = 0$) a při zanedbání kosmologické konstanty ($\Lambda = 0$) získáváme

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = 0. \quad (1.13)$$

Stopou tohoto vztahu pak získáme vyjádření pro Ricciho skalár a vyjádření vakuových rovnic ve tvarech

$$R = 0 \quad \text{dosadíme zpátky do (1.13),} \quad (1.14)$$

$$R_{\mu\nu} = 0 \quad \text{finální tvar vakuových rovnic.} \quad (1.15)$$

- Stále nelze říct, že ve vakuovém případě je triviální i Riemannův tenzor.
- Rovnice (1.12) jsou nelineární a provázané - do hry vstupují stopy Christoffelových symbolů ve formě (1.4). Interpretace rovnic je však zřejmá: Zdroje tvoří pole, pole říká zdrojům, jak se pohybovat.

Jedním z dalších důležitých křivostních invariantů je Kretschmannův skalár, který vznikne jako kvadrát Riemannova tenzoru

$$K := R_{\mu\nu\kappa\lambda}R^{\mu\nu\kappa\lambda} \quad (1.16)$$

Výše specifikovaná struktura obecné relativity má tedy zjevnou interpretaci. Lokálně je vše podobné kartézskému prostoru, křivost lze popsat jako defekt vektoru při paralelním přenosu po různých drahách, kontrakce křivosti ve srovnání se zdroji dávají popis vzájemného působení pole a zdrojů. Narážíme však na potíže s interpretací - čas a prostorové souřadnice jsou spojeny do prostoročasu. Další nevýhodou je, že obecná relativita přirozeně vyhovuje Lagrangeovskému formalismu, avšak formulovat ji Hamiltonovsky je problematické. Obě nevýhody mohou za jistých podmínek být rozklíčovány pomocí rozštěpení prostoročasu. Zvolíme-li jeden význačný směr - globální kongruenci integrálních křivek nějakého vektorového pole - a tyto integrální křivky opatříme foliací hyperplochou dimenze 3, lze vyjádřit rozštěpení křivostních veličin v tzv. 3+1 formalismu. Pro pochopení této konstrukce je nutné se seznámit s kinematikou integrálních kongruencí vektorových polí. V kapitole 2. budou prve rozpracovány základní vztahy popisující integrální kongruence křivek, pak bude prostoročas a všechny důležité veličny (Riemannův tenzor, Riccho tenzor, Ricciho skalár a Kretschmannův skalár) rozštěpeny do 3+1 formalismu. V kapitole 3. provedeme tentýž postup s 3D nadplochou, která vznikla první dekompozicí. Tu rozdělíme (zatím obecně) opět pomocí integrální kongruence křivek druhého vektorového pole na směr tečný k poli (1D) a vznikne ortogonální plochu (2D). Tím získáme (2+1)+1 formalismus a rozložíme opět všechny zmíněné tenzory křivosti a další veličiny. Využití 3+1 či (2+1)+1 formalismu se objevuje napříč celou obecnou relativitou. Oblastmi časté aplikace jsou například relativistická hydrodynamika a kosmologie. Pro nás budou zejména důležité aplikace na cirkulární prostoročasy, tj. prostoročasy stacionární, axiálně symetrické a ortogonálně tranzitivní.

V kapitole 4. se budeme věnovat aplikaci (2+1)+1 formalismu na třídu cirkulárních prostoročasů. Zde budeme volit foliace pomocí $t = \text{konst}$ a vzniklé 3D nadplochy rozložíme na plochy konstantní Lapse funkce $N = \text{konst}$ a jejich 1D ortogonální doplněk. Pro hlubší pochopení si přejeme pozdější výsledky ilustrovat na výsledcích známých, následující podkapitolu proto věnujeme zopakování

základních vlastností Kerrova řešení Einsteinových rovnic, jakožto (typického) příkladu cirkulárního prostoročasu. Další potenciální využití takto zvolené dekompozice by mohlo zahrnovat například prostoročasy obsahující Schwarzschildovu černou díru “obklopenou” axiálně symetrickými tenkými disky [5].

1.2 Kerrovo řešení Einsteinových rovnic

V této kapitole se omezíme na základní vlastnosti Kerrova řešení. Podrobnější přehled (např. [1], kap. 33.3, [6] kap. 18, 19, [7] kap. 5.3). Hlavním zdrojem inspirace pro tuto kapitolu je však kap. 16 ve skriptech [8] doprovodných k Relativistickým přednáškám učeným na Matematicko-fyzikální fakultě UK (přednášky NTMF111, NTMF037, NTMF038).

1.2.1 Souřadnice, metrika a základní vlastnosti řešení

Kerrovo řešení je exaktním řešením vakuových Einsteinových rovnic popisujícím gravitační pole stacionární černé díry, či nahé singularity. Řešení obsahuje dva parametry, hmotnost gravitačního centra $M \geq 0$ a specifický rotační moment hybnosti $a = J/M \geq 0$. Jak je patrné z následujícího vyjádření Kerrovy metriky v Kerrových-Schildových souřadnicích, pro $a = 0$ se řešení redukuje na Schwarzschildovo řešení a pro $M = 0$ na Minkowského (ploché) prostoročas.

V Kerrových-Schildových souřadnicích (dále jen KS), (T, ρ, z, ψ) , má prostoročasný interval tvar

$$ds^2 = -dT^2 + d\rho^2 + \rho^2 d\psi^2 + dz^2 + \frac{2Mr^3}{r^4 + a^2z^2} \left(dT + \frac{r\rho d\rho - a\rho^2 d\psi}{r^2 + a^2} + \frac{z dz}{r} \right)^2.$$

Poloměr r je svázán se souřadnicemi ρ, z a rotačním parametrem a vztahem

$$r^4 - (\rho^2 - a^2 + z^2)r^2 - a^2z^2 = 0.$$

Zpravidla bývá výhodnější využití souřadnic Boyerových-Lindquistových (dále jen BL), (t, r, θ, ϕ) , ve kterých má metrika tvar

$$ds^2 = -N^2 dt^2 + g_{\phi\phi}(d\phi - \omega dt)^2 + \frac{\Sigma}{\Delta} dr^2 + \Sigma d\theta^2, \quad (1.17)$$

kde

$$N^2 := -g_{tt} - g_{t\phi}\omega = \frac{\Sigma\Delta}{\mathcal{A}}, \quad g_{\phi\phi} := \frac{\mathcal{A}}{\Sigma} \sin^2 \theta, \quad \omega := \frac{-g_{t\phi}}{g_{\phi\phi}} = \frac{2Mar}{\mathcal{A}},$$

$$\Sigma := r^2 + a^2 \cos^2 \theta, \quad \Delta := r^2 - 2Mr + a^2, \quad \mathcal{A} := \Sigma\Delta + 2Mr(r^2 + a^2).$$

Poznamenejme ještě, že BL souřadnice **nejsou sférické**. Dosazením $M = 0$ do zmíněných vztahů a do vyjádření ds^2 sice dostaneme plochou metriku, nikoli však ve sférickém tvaru. Souřadnice jsou zploštělé elipsoidální.

Základní vlastnosti:

- Z BL souřadnic lze nejlépe vidět, že je metrika konkrétním příkladem metriky třídy cirkulárních prostoročasů (tj. prostoročasů stacionárních, axiálně symetrických a ortogonálně tranzitivních):

$$ds^2 := -N^2 dt^2 + g_{\phi\phi} (d\phi - \omega dt)^2 + g_{AB} dx^A dx^B, \text{ kde } A, B = 1, 2 \quad (1.18)$$

Funkce N je tzv. **Lapse funkce**.

- Metrika (1.17) sice nezávisí v žádné z komponent na čase, ale obsahuje smíšený člen $g_{t\phi} dt d\phi$, který způsobí, že při časové inverzi $t \rightarrow -t$ metrika změní právě u smíšených členů znamení. Aby se metrika zachovala v původní formě, je třeba provést buď inverzi rotačního parametru $a \rightarrow -a$, nebo inverzi úhlové souřadnice $\phi \rightarrow -\phi$. *Metrika je tedy stacionární, ale není statická.*
- Stacionarita a axiální symetrie jsou vyjádřeny (viz [9] kapitoly 4.5 a 4.6) v řeči dvou *komutujících* Killingových vektorových polí,

$$\eta^\mu := \frac{\partial x^\mu}{\partial t}, \quad \xi^\mu := \frac{\partial x^\mu}{\partial \phi},$$

z nichž jedno je alespoň pro $r \gg 2M$ časupodobné a druhé prostoropodobné. Tato dvě pole jsou *invariantní* informací o geometrii daného prostoročasu, dávají tedy *invariantní význam* některým funkcím z vyjádření (1.17). Platí totiž

$$g_{\mu\nu} \eta^\mu \eta^\nu = g_{tt}, \quad g_{\mu\nu} \xi^\mu \xi^\nu = g_{\phi\phi}, \quad g_{\mu\nu} \eta^\mu \xi^\nu = g_{t\phi},$$

což jsou *přesně* komponenty metriky užité ve vyjádření funkcí N a ω , a smíšeného členu prostoročasového intervalu $g_{\phi\phi} (d\phi - \omega dt)^2$. Navíc, jelikož Killingova pole komutují, tvoří plochy.

- Invariantní vyjádření polohy horizontu zní $N = 0$, v BL souřadnicích v Kerrově prostoročasu to pak odpovídá řešení podmínky $\Delta = 0$. Za povšimnutí stojí, že horizonty (narozdíl od sféricky symetrických řešení) nejsou ani statickou limitou ani plochou nekonečného rudého posuvu. Obě vlastnosti mají plochy na nichž je $g_{tt} = 0$, tj. $\Sigma = 2Mr$.

1.2.2 Privilegované pohyby a ZAMO

Z předešlé podkapitoly je patrné, že významnou roli v Kerrově prostoročasu hrají pohyby (**obecně urychlené**), které “ctí” symetrie předepsané dvojicí Killingových vektorů. Právě na těchto pohybech se nejlépe nahlédne význam pojmů “rotující černá díra”, “dragging” a “korotování se souřadnicemi”. Uvedme ještě bez dalšího odvozování (viz [6], kap. 19), že až na drobné výjimky jsou všechny cirkulární geodetiky Kerrova prostoročasu pouze v ekvatoriální rovině $\theta = \pi/2$. Následujících několik odstavců tedy popisuje pohyb, který **obecně není geodetický**, ale je privilegován, neboť respektuje symetrie prostoročasu. Pozorovatelé s těmito čtyř-rychlostmi tedy budou vnímat geometrii ve svém bezprostředním okolí jako stacionární.

Pro stacionární pohyby po kruhových orbitách $r = \text{konst}$, $\theta = \text{konst}$ s úhlovou rychlostí $\Omega = d\phi/dt = \text{konst}$ lze napsat čtyř-rychlost za užití Killingových vektorů

$$u^\mu = \frac{\eta^\mu + \Omega\xi^\mu}{|\eta^\mu + \Omega\xi^\mu|} = \frac{\eta^\mu + \Omega\xi^\mu}{\sqrt{-g_{\lambda\kappa}(\eta^\lambda + \Omega\xi^\lambda)(\eta^\kappa + \Omega\xi^\kappa)}}. \quad (1.19)$$

V BL souřadnicích máme

$$\eta^\mu = \delta_t^\mu, \quad \xi^\mu = \delta_\phi^\mu, \quad g_{\lambda\kappa}(\eta^\lambda + \Omega\xi^\lambda)(\eta^\kappa + \Omega\xi^\kappa) = g_{tt} + 2g_{t\phi}\Omega + g_{\phi\phi}\Omega^2,$$

$$u^\mu = u^\mu(1, 0, 0, \Omega), \quad u^t = \frac{1}{\sqrt{-g_{tt} - 2g_{t\phi}\Omega - g_{\phi\phi}\Omega^2}} = \frac{1}{\sqrt{N^2 - g_{\phi\phi}(\Omega - \omega)^2}}.$$

Úhlová rychlost Ω však nemůže být libovolně velká, aby nebyla překročena rychlost světla. Hranicí je

$$g_{\mu\nu}u^\mu u^\nu = (u^t)^2 (g_{tt} + 2g_{t\phi}\Omega + g_{\phi\phi}\Omega^2) = 0, \quad \text{z čehož najdeme}$$

$$\Omega_{\text{max,min}} = \frac{-g_{t\phi} \pm \sqrt{(g_{t\phi})^2 - g_{tt}g_{\phi\phi}}}{g_{\phi\phi}} = \omega \pm \frac{N}{\sqrt{g_{\phi\phi}}}. \quad (1.20)$$

Významným výsledkem je, že povolené hodnoty úhlové rychlosti se “odráží” od hodnoty ω , která je interpretována jako úhlová rychlost rotačního draggingu. Navíc (opět) veličiny vystupující ve vyjádření $\Omega_{\text{max,min}}$ jsou veličiny invariantní (neboť jsou vyjádřeny z Killingových vektorů), celá informace obsažená v (1.20) je tedy sama invariantní.

Hlavní výsledek pro nás však je, že pro hodnotu $N = 0$ se interval redukuje na jedinou povolenou hodnotu úhlové rotace $\Omega = \omega$. Při bližším rozboru zjistíme přímý důsledek. Na horizontu nabývá ω všude stejné hodnoty, $\omega = \frac{a}{r_+^2 + a^2}$, z čehož lze usoudit, že horizont rotuje *rigidně*.

Vypočteme-li čtyř-zrychlení pozorovatelů pohybujících se po stacionárních kruhových drahách, dostaneme:

$$a_\mu = \frac{du_\mu}{d\tau} - \Gamma_{\lambda\mu\kappa}u^\lambda u^\kappa = \frac{1}{2} \frac{g_{tt,\mu} + 2g_{t\phi,\mu}\Omega + g_{\phi\phi,\mu}\Omega^2}{g_{tt} + 2g_{t\phi}\Omega + g_{\phi\phi}\Omega^2} \quad (1.21)$$

Význačnost hodnoty $\Omega = \omega$ lze vidět na vyjádření specifického momentu hybnosti pozorovatele s úhlovou rychlostí Ω a hmotností m ,

$$\frac{L}{m} \equiv u_\phi := g_{\phi\phi}u^\phi + g_{t\phi}u^t = g_{\phi\phi}u^t(\Omega - \omega). \quad (1.22)$$

Pozorovatele pohybující se po stacionárních kruhových drahách s úhlovou rychlostí $\Omega = \omega$ nazýváme proto **Zero Angular Momentum Observers** (zkráceně **ZAMO**). Navíc, jelikož jsou “v klidu” vůči geometrii, jejich čtyř-rychlost v kovariantním vyjádření je $u_\mu = (u_t, 0, 0, 0)$ neboť $u_\phi = 0$. Platí tedy, že jsou kolmé na libovolný vektor $s^\mu = (0, s^i)$, tj. $u_\mu s^\mu = 0$. Vektor s^μ je však tečný k nadplochám $t = \text{konst}$. Světočáry ZAMO jsou tedy **kolmé k nadplochám konstantního Killingova času t** .

Dosazením $\Omega = \omega$ do (1.21) zjistíme, že zrychlení ZAMO kongruence lze zapsat velmi jednoduše,

$$a_\mu = \frac{N_{,\mu}}{N}. \quad (1.23)$$

Hlavní poučení:

Právě ortogonalita ZAMO světočar na $t = \text{konst}$ nadplochy, Killingovy vektory, killingovsky invariantní informace uložená v Lapse funkci N , “draggingové” úhlové rychlosti ω a vyjádření Kerrovy metriky v obecném tvaru (1.18), vyjádření zrychlení ve tvaru (1.23) a celkový geometrický “portrét” Kerrova prostoročasu jsou ilustrativní pro třídu cirkulárních prostoročasů a jsou přímým důsledkem jejich geometrické struktury, nikoli jen specifickými vlastnostmi Kerrova řešení.

Tyto informace budou v následující kapitole zobecněny, což odhalí hlubší geometrické vztahy a význam světočar kolmých na nadplochy. Rozpracován bude postup, jak dojít k rozštěpení (libovolných) prostoročasových veličin do směru “podél kongruence” a podél nadploch, na kterou je kongruence kolmá, tzv. 3+1 dekompozice prostoročasu.

2. Ke kongruencím geodetik a 3+1 dekompozici prostoročasu

2.1 Vektorové pole a jejich integrální kongruence

Ve výkladu následující podkapitoly jsme úzce sledovali rovinu výkladu kap. 24 již zmíněných skript [8].

2.1.1 Kinematika integrálních kongruencí

Mějme náš prostoročas opatřen souřadnicemi x^μ . V něm pak mějme prostoru-podobnou či časupodobnou kongruenci integrálních křivek vektorového pole popsanou dvěma parametry τ, l . Její parametrické vyjádření je tedy $x^\mu = x^\mu(l, \tau)$. Parametr τ náleží posunu podél dané $l = \text{konst}$ světočáry, naopak parametr l pro $\tau = \text{konst}$ značí na kterou z (kontinua) křivek referujeme, tj. spojitě “čísluje” křivky. Derivacemi kongruence podle obou parametrů získáváme

$$u^\mu := \frac{dx^\mu}{d\tau} \quad \text{tečné pole,} \quad (2.1)$$

$$\delta x^\mu := \frac{dx^\mu}{dl} \quad \text{vektor relativní polohy.} \quad (2.2)$$

Po tečném poli budeme vyžadovat normalizaci na $\epsilon := \mp 1$ (dle jeho prostoročasového charakteru) a kolmost na vektor relativní polohy:

$$u^\mu u_\mu := \epsilon = \mp 1 \quad (2.3)$$

$$u_\mu \delta x^\mu = 0. \quad (2.4)$$

Vektor relativní polohy má nulovou Lieovu derivaci podél referenční světočáry, tj.

$$(\mathcal{L}_u \delta \mathbf{x})^\mu = (\delta x^\mu)_{;\nu} u^\nu - u^\mu{}_{;\nu} \delta x^\nu \equiv (\delta x^\mu)_{;\nu} u^\nu - u^\mu{}_{;\nu} \delta x^\nu = 0,$$

neboli

$$\frac{d\delta x^\mu}{d\tau} = \frac{du^\mu}{dl}, \quad \frac{D\delta x^\mu}{d\tau} = \frac{Du^\mu}{dl} = u^\mu{}_{;\nu} \delta x^\nu. \quad (2.5)$$

Z tohoto vyjádření je patrné, že pro evoluci transversálních vlastností kongruence je čtyř-gradient čtyř-rychlosti $u^\mu{}_{;\nu}$ klíčovou veličinou, neboť předepisuje jak se transport vektoru relativní polohy δx^μ podél referenční světočáry liší od paralelního přesunu.

Zavedme projektor do kolmého prostoru k tečnému poli rovnicí

$$h_{\mu\nu} := g_{\mu\nu} - \epsilon u_\mu u_\nu. \quad (2.6)$$

Dále zavedme čtyř-zrychlení tečného pole

$$a_\mu = u_{\mu;\nu} u^\nu, \quad (2.7)$$

antisymetrický tenzor vorticity (krutu)

$$\begin{aligned}\omega_{\mu\nu} &:= h_{\mu}^{\kappa} h_{\nu}^{\lambda} u_{[\kappa;\lambda]} = h_{[\mu}^{\kappa} h_{\nu]}^{\lambda} u_{\kappa;\lambda} = \delta_{[\mu}^{\kappa} h_{\nu]}^{\lambda} u_{\kappa;\lambda} \\ &= h_{[\nu}^{\lambda} u_{\mu];\lambda} = u_{[\mu;\nu]} - \epsilon a_{[\mu} u_{\nu]},\end{aligned}\tag{2.8}$$

symetrický tenzor expanze

$$\begin{aligned}\Theta_{\mu\nu} &:= h_{\mu}^{\kappa} h_{\nu}^{\lambda} u_{(\kappa;\lambda)} = h_{(\mu}^{\kappa} h_{\nu)}^{\lambda} u_{\kappa;\lambda} = \dots \\ &= h_{(\nu}^{\lambda} u_{\mu);\lambda} = u_{(\mu;\nu)} - \epsilon a_{(\mu} u_{\nu)} = \frac{1}{2} \mathcal{L}_{\mathbf{u}} h_{\mu\nu},\end{aligned}\tag{2.9}$$

a jeho kontrakci, expanzní skalár

$$\Theta := h^{\mu\nu} \Theta_{\mu\nu} = u^{\mu}{}_{;\mu}.\tag{2.10}$$

Nakonec zavedme ještě bezestopou část tenzoru expanze, totiž tenzor smyku

$$\sigma_{\mu\nu} := \Theta_{\mu\nu} - \frac{1}{3} \Theta h_{\mu\nu}.\tag{2.11}$$

Rozklad zmíněného klíčového čtyř-gradientu čtyř-rychlosti v řeči právě zavedených veličin shrnuje rovnice

$$u_{\mu;\nu} = \omega_{\mu\nu} + \sigma_{\mu\nu} + \frac{1}{3} \Theta h_{\mu\nu} + \epsilon a_{\mu} u_{\nu}.\tag{2.12}$$

Přirozeně (kvůli zavedení přes ortogonální projektor) platí série rovností

$$\epsilon u^{\mu} a_{\mu} u_{\nu} = u^{\mu} \omega_{\mu\nu} = u^{\mu} \sigma_{\mu\nu} = u^{\mu} h_{\mu\nu} = 0,$$

kde první člen vymizí kvůli zavedené normalizaci čtyř-rychlosti. Kovariantní derivací normy čtyř-rychlosti podél čtyř-rychlosti totiž získáme

$$(u^{\mu} u_{\mu})_{;\nu} u^{\nu} = \begin{cases} (\epsilon)_{;\nu} = 0, \\ (u^{\mu}{}_{;\nu} u_{\mu} + u_{\mu;\nu} u^{\mu}) u^{\nu} = 2u_{\mu;\nu} u^{\nu} u^{\mu} \equiv 2a_{\mu} u^{\mu}, \end{cases}$$

což kolmost již garantuje. Kontrakcí této dekompozice s u^{ν} získáme souhlas s definicí čtyř-zrychlení (2.7).

Dosazením dekompozice 2.12 do vztahu 2.5 získáme vztah

$$\frac{D\delta x^{\mu}}{d\tau} = (\omega^{\mu}{}_{\nu} + \Theta^{\mu}{}_{\nu}) \delta x^{\nu} = (\omega^{\mu}{}_{\nu} + \sigma^{\mu}{}_{\nu}) \delta x^{\nu} + \frac{1}{3} \Theta \delta x^{\mu},\tag{2.13}$$

který (po uvážení analogie s teorií kontinua) má zřejmou geometrickou interpretaci. Expanzní tenzor popisuje změny 3D objemového elementu který “pouštíme po proudnici” (světočáře) a zbylé dva členy objem nemění. $\omega_{\mu\nu}$ vyčísluje jak velkým “krutem” se světočáry svíjejí a $\sigma_{\mu\nu}$ popisuje smyk (deformaci objemového elementu vlivem různých rychlostí a směrů “toku”).

2.1.2 Frobeniova věta

Jak uvidíme v dalších kapitolách, některé kongruence mají triviální tenzor vorticity $\omega_{\alpha\beta} = 0$, světočáry této kongruence se tedy “nesplétají” dohromady (jako vlákna lana). Právě pomocí takovýchto kongruencí půjde přirozeně prostoročas rozštěpit, a pro případ časupodobných kongruencí dokonce explicitně rozdělit na “prostor” + “čas” v intuitivním slova smyslu. Například v již zmíněném Kerrově prostoročasu jsme uvedli, že kovariantní čtyř-rychlost ZAMO kongruence je kolmá na libovolný vektor mající v BL souřadnicích nulovou první komponentu. Platí tedy

$$u_\mu = (u_t, 0, 0, 0) \perp s^\mu = (0, s^i),$$

což nám umožňuje o tomto poli čtyř-rychlostí tvrdit, že je ortogonální na nadplochy, k nimž je druhý z vektorů tečný. Za jakých podmínek lze však tento příklad zobecnit? Je nulový tenzor vorticity nutnou, nebo pouze postačující podmínkou pro ortogonalitu k nadplochám? Odpovědi na tyto otázky dává Frobeniova věta.

Frobeniova věta

Mějme (časupodobnou či prostorupodobnou) kongruenci s čtyř-rychlostí u_α kolmou k nadplochám $\Phi(x^\alpha) = c$, kde parametr c je specifický každé nadploše. Potom čtyř-rychlost kongruence u_α musí být úměrná n_α , tj. normále k nadplochám. Normálu uvažujeme ve tvaru $n_\alpha \propto \Phi_{,\alpha}$. Musí tedy platit

$$u_\alpha = \epsilon \mu \Phi_{,\alpha},$$

kde $\epsilon = \mp$ jako výše, a μ je kladná funkce. Takto zavedená čtyř-rychlost kongruence *garantuje* nulovost tenzoru vorticity.

Opačná implikace platí také. Má-li kongruence s čtyř-rychlostí u_α nulový tenzor vorticity, musí existovat skalární *pole* takové, že $u_\alpha \propto \Phi_{,\alpha}$, a u_α je tedy kolmé na ekviplochy tohoto skalárního pole.

Důkaz první části lze nalézt např. v kap. 2.2.3 [7] a dále např. v [10] appendix C, zde je i návod na důkaz opačné implikace. Důkaz ekvivalence lze najít v jiné formulaci v kap. 24 [8].

Poznámky:

- Ke kontrole $\omega_{\mu\nu} = 0$ stačí zkontrolovat platnost vztahu $u_{[\mu;\beta}u_{\alpha]} = 0$ (podmínky jsou ekvivalentní), neboť platí:

$$\begin{aligned} 0 \stackrel{!}{=} u_{[\mu;\nu}u_{\kappa]} &= \frac{2}{3!} \left(u_{[\mu;\nu}u_{\kappa]} + u_{[\kappa;\mu}u_{\nu]} + u_{[\nu;\kappa}u_{\mu]} \right) \\ &= \frac{2}{3!} (\omega_{\mu\nu}u_\kappa + \omega_{\kappa\mu}u_\nu + \omega_{\nu\kappa}u_\mu). \end{aligned}$$

Následnou kontrakcí posledního výrazu s u^κ získáme $\epsilon \omega_{\mu\nu} = 0$, protože $\omega_{\kappa\nu}u^\kappa = -\omega_{\nu\kappa}u^\kappa = 0$. Lze postupovat i přesně naopak a začít posledním z výrazů (opatření podmínkou $\omega_{\mu\nu} \stackrel{!}{=} 0$) a dospět k $u_{[\mu;\nu}u_{\kappa]} = 0$ jako výsledku.

- Věta platí s lehkou změnou formulace (kvůli nemožnosti normalizace) pro světelné kongruence, platí tedy obecně. Světelných kongruencí v tomto textu však nevyužíváme.
- Důležitou vlastností tohoto tvrzení je jeho praktičnost. Zkontrolovat, zda splňuje nějaká (v našem případě normovaná) čtyř-rychlost kongruence $u_{[\mu;\nu}u_{\kappa]} = 0$, je výpočetně velice jednoduché. Získaná informace o geometrické struktuře je naproti tomu enormní.
- Jelikož μ musí být konstantní (a kladné) *na každé nadploše*, a mění se jen směrem její normály, musí jít vyjádřit jako nějaká funkce pole Φ . Definicí nového skaláru

$$\Psi := \int \mu(\Phi) d\Phi$$

zjistíme, že u_α je nejen úměrná nějakému gradientu kladného skalárního pole, ale dokonce $u_\alpha = \epsilon \Psi_{,\alpha}$, tedy sama je gradientem skalárního pole.

2.2 3+1 dekompozice prostoročasu

Hlavním zdrojem pro tuto kapitolu je [2] a kniha [3], která poskytuje (v geometrické notaci) úplný přehled problematiky 3+1 formalismu i s řešenými příklady. Jelikož hlavní úlohou této práce je potvrdit výsledky [2] v balíčku xAct pro symbolickou algebraickou manipulaci s tenzory, všechny identity a veličiny z této kapitoly byly zaneseny do kódu přiloženého na CD nosiči [Příloha: Zdrojový kód]. Kód pro jeho délku neuvádíme celý, omezíme se pouze na některé (mezi)výsledky a jejich implementaci a výtisk.

2.2.1 Komentář ke struktuře kódu

S Wolfram Language v prostředí Wolfram Mathematica [11] a balíčkem pro tenzorovou algebru xAct (využití xAct balíčky: xTensor, xCoba, xTras) se lze seznámit např. zde: [12], [13], [14], [15], [16], [17].

xAct dovoluje zavést dekompozici prostoročasu do 3+1 formalismu několika způsoby.

- Definovat prostoročas jako varietu vzniklou produktem 3D variety a jejího 1D ortogonálního doplňku.
- Využít xAct balíčku biMEX, který dekompozici zavádí pomocí blokových operátorů. Tento balíček však využívá pokročilou notaci, nebyl proto pro účely bakalářské práce využit.
- Definovat (obecný) prostoročas, opatřit jej metrickým tenzorem (správné konvence) a normálovým polem, jehož normu zavedeme jako v předchozí podkapitole konstantním symbolem ϵ . Tento přístup jsme využili v naší implementaci [Příloha: Zdrojový kód].

xAct má pak vlastní funkci pro definici indukovaného metrického tenzoru (pomocí prostoročasové metriky a normály). Současně s tímto indukovaným metrickým tenzorem je pak mimo jiné definovaná vnější křivost, jeho projekční vlastnosti a čtyř-zrychlení normály. Pomocí indukované metriky a funkce GaussCodazzi pak můžeme získat Gaussovy-Codazziho-Ricciho rovnice pro Riemannův tenzor a následně jeho kontrakce.

Důležité výsledky každé kapitoly kódu ukládáme do konstantního listu (např. `$EquationsNormal` pro důležité rovnice normálového vektoru, či `$EquationsNFactor` pro rovnice zavádějící faktor N , kterému se říká v časupodobných případech Lapse funkce). Tyto listy slouží k průběžnému výtisku výsledků jsme zavedli na počátku každé “podkapitoly” kódu.

Dále se věnujeme vakuovému případu 3+1 dekompozice kontrakcí Riemannova tenzoru, uvažujeme také rovnice tzv. “normálové změny” a vazbu hybnostní a hamiltonovskou. Konec kapitoly je věnován 3+1 dekompozici Kretschmannova skaláru a jejímu zjednodušení na vakuový případ se zmíněnými vazbami.

Veškerý zmíněný kód je čerpán přímo z [Příloha: Zdrojový kód]. Input kódu je citován v bloku, output pak v \TeX ovém formátu, neboť Mathematica výsledky tiskne symbolicky.

2.2.2 Zavedení 3+1 dekompozice

Inspirováni kinematikou kongruencí integrálních křivek vektorových polí nyní postupme k 3+1 dekompozici prostoročasu. Z geometrického pohledu je postup následující: Máme prostoročas opatřen metrikou a jí příslušející derivací Levi-Civita typu. Dále máme k dispozici kongruenci křivek, která je opatřena foliací systémem nadploch Σ_t . **Pozor**, t zatím *neznačí* čas, ani neindikuje časupodobnost normály, resp. prostorupodobnost nadploch Σ_t . Definujme

$$t^\mu := \frac{\partial x^\mu}{\partial t}, \quad (2.14)$$

tj. pole tečné ke kongruenci $x^\mu = x^\mu(t)$. V souladu s Frobeniovou větou zavedeme normálu ve tvaru

$$n_\alpha := \epsilon N \frac{\partial t}{\partial x^\alpha}, \quad (2.15)$$

kde N je faktor vyjadřující úměrnost čtyř-rychlosti a normály (v kapitole o Frobeniově větě byl značen μ). Definicí čtyř-rychlosti kongruence užitou ve Frobeniově větě jsme tak zavedli normálu, tj. normála hraje roli čtyř-rychlosti kongruence.

Z tvaru normálového čtyř-zrychlení

$$a_\mu := n_{\mu;\nu} n^\nu = \frac{N_{;\mu}}{N} \quad (2.16)$$

lze spatřit, že faktor úměrnosti N je pro případ časupodobné normály Lapse funkcí. Tvar je totožný s čtyř-zrychlením ZAMO kongruence (1.23), znovu však zdůrazňujeme, že zde čtyř-rychlost kongruence *není* nutně časupodobná.

Projektor na nadplochy Σ_t má tvar

$$h_{\mu\nu} := g_{\mu\nu} - \epsilon n_\mu n_\nu, \quad (2.17)$$

a na nadplochách hraje roli (3D) metriky.

Normála byla zavedena v souladu s Frobeniovou větou, tenzor vorticity kongruence s čtyř-rychlostí určenou normálou (2.15) tedy vymizí, a tenzor expanze (2.12) není třeba symetrizovat, a popisuje (spolu s čtyř-zrychlením) celou dekompozici gradientu normály. Platí tedy

$$\begin{aligned} n_{\mu;\nu} &= \omega_{\mu\nu} + \sigma_{\mu\nu} + \frac{1}{3}\Theta h_{\mu\nu} + \epsilon a_\mu n_\nu \equiv \\ &\omega_{\mu\nu} + \Theta_{\mu\nu} + \epsilon a_\mu n_\nu \equiv \Theta_{\mu\nu} + \epsilon a_\mu n_\nu. \end{aligned} \quad (2.18)$$

V těchto speciálních případech (daných platností Frobeniovy věty) se na tenzor expanze referuje jako na **druhou fundamentální formu**, či **vnější křivost**, a značí se $K_{\mu\nu}$. Platí:

$$n_{\mu;\nu} = \epsilon a_\mu n_\nu + K_{\mu\nu}, \quad (2.19)$$

což v implementaci v xActu po zavedení normály a indukované metriky získáme s užitím funkce GradNormalToExtrinsicK následovně:

```
In:
CD[-\[Beta]]@
n[-\[Alpha]] == (CD[-\[Beta]]@n[-\[Alpha]] // GradNormalToExtrinsicK)
CDN = %;
```

Out :

$$n_{\alpha;\beta} == K_{\beta\alpha} + \epsilon a_\alpha n_\beta$$

Geometrický význam vnější křivosti lze lépe pochopit, podrobíme-li dekompozici (2.19) projekci na 3D nadplochy Σ_t v obou volných indexech, tj.

$$\begin{aligned} n_{\mu;\nu} h_\alpha^\mu h_\beta^\nu &= \epsilon a_\mu h_\alpha^\mu \cancel{n_\nu} h_\beta^\nu + K_{\mu\nu} h_\alpha^\mu h_\beta^\nu = \\ K_{\mu\nu} (g_\alpha^\mu - \cancel{n}^\mu n_\alpha) (g_\beta^\nu - \cancel{n}^\nu n_\beta) &\equiv K_{\mu\nu} \delta_\alpha^\mu \delta_\beta^\nu \equiv K_{\alpha\beta}, \end{aligned} \quad (2.20)$$

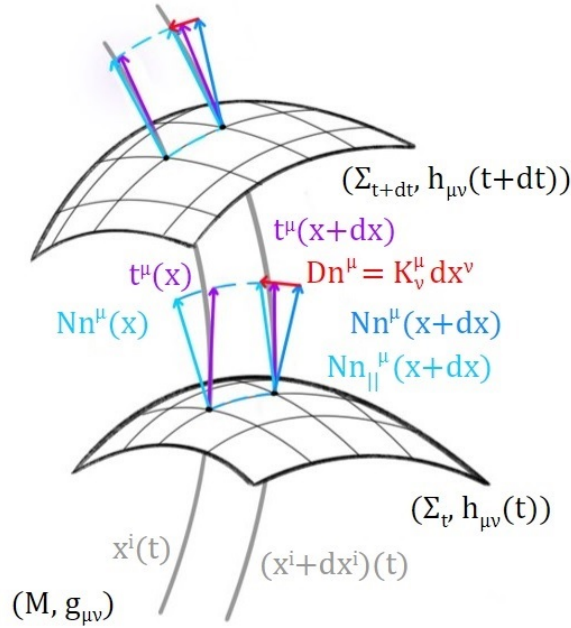
což by šlo chápat jako alternativní definici vnější křivosti. Vnější křivost je projekce gradientu normály k nadplochě Σ_t na kotečný bandl $T^*\Sigma_t$. Kvantifikuje *transverzální změny normály*. Zároveň zjistíme, že vnější křivost jde vyjádřit (až na prefaktor) jako Lieovu derivaci 3D metriky podél normály. Dekompozice (2.19) ve tvaru

$$K_{\alpha\beta} = n_{\alpha;\beta} - \epsilon a_\alpha n_\beta \equiv \frac{1}{2} \mathcal{L}_n h_{\alpha\beta} \quad (2.21)$$

totiž přímo odpovídá komponentovému vyjádření zmíněné Lieovy derivace.

Kontraktí vnější křivosti získáme expanzní skalár:

$$K := g^{\mu\nu} K_{\mu\nu} = \begin{cases} (h^{\mu\nu} + \epsilon \cancel{n}^\mu \cancel{n}^\nu) K_{\mu\nu} = h^{\mu\nu} K_{\mu\nu}, \\ g^{\mu\nu} (n_{\mu;\nu} - \epsilon a_\mu n_\nu) = n^\mu{}_{;\mu} - \epsilon a_\mu \cancel{n}^\mu = n^\mu{}_{;\mu}. \end{cases} \quad (2.22)$$



Obrázek 2.1: K významu tenzoru vnější křivosti

Expazní skalár nese zřejmý geometrický význam, sděluje nám informaci o *zřídlovosti normál*. Je-li divergence nulová, nadplochy zachovávají svůj objem. Je-li kladná, rozšiřují se, a vice-versa pro záporný případ.

Vnější křivost také přímo souvisí s pojmy *střední křivosti*, *křivosti Gaussovy-Kroneckerovy*, *hlavními křivostmi* a *celkovou křivostí*, viz [3] kap. 2.3.4.

- *Střední křivost*, H , d -dimenzionální nadplochy získáme pomocí $1/d$ stopy příslušného operátoru tvaru (který je reprezentován K_β^α), tj. střední křivost nadploch Σ_t má tvar $K/3$. Expazní skalár je, samozřejmě, součet vlastních hodnot operátoru tvaru K_β^α .
- Vlastní čísla K_β^α jsou tzv. *hlavní křivosti*. Střední křivost má pak tvar $H = \frac{K}{3} = \frac{1}{3}(\kappa_1 + \kappa_2 + \kappa_3)$.
- Determinant operátoru tvaru se nazývá Gaussova-Kroneckerova křivost, dle příslušné dimenze variety. Pro variety dimenze $d = 2$ používáme pojem Gaussova křivost, pro variety dimenze $d > 2$ pak Kroneckerova křivost. Pro vyjádření determinantu v řeči hlavních křivostí je však potřeba operátor tvaru diagonalizovat (transformovat do adaptovaných souřadnic, zde $i, j = 1, 2, 3$). Nadplochy Σ_t tedy mají v adaptovaných souřadnicích Kroneckerovu křivost $\det(K_j^i) = \kappa_1 \kappa_2 \kappa_3$.
- Kvadrát operátoru tvaru, $K_\beta^\alpha K_\alpha^\beta$, se nazývá *celková křivost*. Pro nadplochy Σ_t dostáváme v adaptovaných souřadnicích $K_j^i K_i^j = \kappa_1^2 + \kappa_2^2 + \kappa_3^2$.
- Operátor tvaru v lorentzovských varietách nemusí být diagonalizovatelný kvůli semi-definitnosti metriky, avšak ve varietách riemannovských, které mají metriku pozitivně-definitní, lze diagonalizace dosáhnout vždy.

3D kovariantní derivaci tenzoru T z (ko)tečeného bandlu $T^*\Sigma_t$,

$$T^{\alpha\dots}_{\mu\dots|\rho} := T^{\beta\dots}_{\nu\dots;\sigma} h_{\beta}^{\alpha} \dots h_{\mu}^{\nu} \dots h_{\rho}^{\sigma}, \quad (2.23)$$

zavádíme úplnou projekcí ve všech indexech. Speciálně pro (ko)vektor rozepíšme:

$$\begin{aligned} V_{\mu|\lambda} &= V_{\nu;\kappa} h_{\mu}^{\nu} h_{\lambda}^{\kappa} = V_{\mu;\kappa} h_{\lambda}^{\kappa} - \epsilon V_{\nu;\kappa} n^{\nu} n_{\mu} h_{\lambda}^{\kappa} = \\ &V_{\mu;\kappa} h_{\lambda}^{\kappa} + \epsilon V_{\nu} n^{\nu}{}_{;\kappa} n_{\mu} h_{\lambda}^{\kappa} = V_{\mu;\kappa} h_{\lambda}^{\kappa} + \epsilon K_{\lambda}^{\nu} V_{\nu} n_{\mu}, \end{aligned} \quad (2.24)$$

$$\begin{aligned} V^{\mu|\lambda} &= V^{\nu;\kappa} h_{\nu}^{\mu} h_{\kappa}^{\lambda} = V^{\mu;\kappa} h_{\kappa}^{\lambda} - \epsilon V^{\nu;\kappa} n_{\nu} n^{\mu} h_{\kappa}^{\lambda} = \\ &V^{\mu;\kappa} h_{\kappa}^{\lambda} + \epsilon V^{\nu} n_{\nu}{}^{;\kappa} n^{\mu} h_{\kappa}^{\lambda} = V^{\mu;\kappa} h_{\kappa}^{\lambda} + \epsilon K_{\nu}^{\lambda} V^{\nu} n^{\mu}. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Kontrakcí dostáváme 3D divergenci vektoru ve tvaru

$$\begin{aligned} V^{\lambda}{}_{|\lambda} &= h^{\lambda\kappa} V_{\lambda|\kappa} = h^{\lambda\kappa} V_{\alpha;\beta} h_{\kappa}^{\alpha} h_{\lambda}^{\beta} = h^{\alpha\beta} V_{\alpha;\beta} = \\ &V^{\beta}{}_{;\beta} - \epsilon n^{\alpha} n^{\beta} V_{\alpha;\beta} = V^{\beta}{}_{;\beta} + \epsilon n^{\alpha}{}_{;\beta} n^{\beta} V_{\alpha} = V^{\beta}{}_{;\beta} + \epsilon a^{\alpha} V_{\alpha}. \end{aligned} \quad (2.26)$$

2.2.3 3D Riemannův tenzor, Gaussovy, Codazziho, Ricciho rovnice

Pro zavedení (3D) Riemannova tenzoru potřebujeme explicitně znát vyjádření druhých 3D kovariantních derivací. Derivací (2.24) získáme rovnici

$$V_{\nu|\kappa\lambda} = V_{\mu;\alpha\beta} h_{\nu}^{\mu} h_{\kappa}^{\alpha} h_{\lambda}^{\beta} - V_{\mu} K_{\kappa}^{\mu} K_{\nu\lambda} + V_{\mu;\alpha} h_{\nu}^{\mu} n^{\alpha} K_{\kappa\lambda}, \quad (2.27)$$

která nám dovoluje zavést 3D Riemannův tenzor pomocí komutátoru druhých derivací ve tvaru

$${}^{(3)}R^{\mu}{}_{\nu\kappa\lambda} V_{\mu} := V_{\nu|\kappa\lambda} - V_{\nu|\lambda\kappa}. \quad (2.28)$$

Z prostoročasového (4D) Riemannova tenzoru lze kvůli jeho symetriím získat jen tři netriviální a unikátní projekce, totiž $R_{\alpha\beta\gamma\delta} h_{\mu}^{\alpha} h_{\nu}^{\beta} h_{\kappa}^{\gamma} h_{\lambda}^{\delta}$, $R_{\alpha\beta\gamma\delta} n^{\alpha} h_{\nu}^{\beta} h_{\kappa}^{\gamma} h_{\lambda}^{\delta}$ a $R_{\alpha\beta\gamma\delta} n^{\alpha} h_{\nu}^{\beta} n^{\gamma} h_{\lambda}^{\delta}$. Explicitním vyjádřením těchto projekcí získáme

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} h_{\mu}^{\alpha} h_{\nu}^{\beta} h_{\kappa}^{\gamma} h_{\lambda}^{\delta} = {}^{(3)}R_{\mu\nu\kappa\lambda} + K_{\mu\kappa} K_{\nu\lambda} - K_{\mu\lambda} K_{\nu\kappa}, \quad (2.29)$$

tzv. **Gaussovu rovnici**,

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} n^{\alpha} h_{\nu}^{\beta} h_{\kappa}^{\gamma} h_{\lambda}^{\delta} = K_{\beta\gamma|\delta} - K_{\beta\delta|\gamma}, \quad (2.30)$$

tzv. **Codazziho rovnici**, a

$$\begin{aligned} R_{\alpha\beta\gamma\delta} n^{\alpha} h_{\nu}^{\beta} n^{\gamma} h_{\lambda}^{\delta} &= (K_{\beta\gamma;\delta} - K_{\beta\delta;\gamma}) h_{\nu}^{\beta} n^{\gamma} h_{\lambda}^{\delta} + a_{\nu|\lambda} - \epsilon a_{\nu} a_{\lambda} \\ &= a_{\nu|\lambda} - \epsilon a_{\nu} a_{\lambda} - K_{\nu\gamma} K_{\lambda}^{\gamma} - h_{\nu}^{\beta} h_{\lambda}^{\delta} K_{\beta\delta;\gamma} n^{\gamma} \\ &= a_{\nu|\lambda} - \epsilon a_{\nu} a_{\lambda} + K_{\nu\gamma} K_{\lambda}^{\gamma} - \mathcal{L}_{\mathbf{n}} K_{\nu\lambda}, \end{aligned} \quad (2.31)$$

což je tzv. **Ricciho rovnice**. (Pro podrobné odvození viz [3] kap. 2.5).

2.2.4 3+1 dekompozice Ricciho tenzoru a skaláru

3D Ricciho tenzor získáme kontrakcí 3D Riemannova tenzoru pomocí indukované metriky. Opět lze Ricciho tenzor projektovat netriviálně a unikátně jen třemi způsoby. Z Gaussovy rovnice máme

$$\begin{aligned} -\epsilon R_{\beta\delta} h_\nu^\beta h_\lambda^\delta &= -\epsilon {}^{(3)}R_{\nu\lambda} + K K_{\nu\lambda} - a_{\nu|\lambda} + \epsilon a_\nu a_\lambda + h_\nu^\beta h_\lambda^\delta K_{\beta\delta;\gamma} n^\gamma = \\ &= -\epsilon {}^{(3)}R_{\nu\lambda} + K K_{\nu\lambda} - K_{\nu\gamma} K_\lambda^\gamma - R_{\alpha\nu\gamma\lambda} n^\alpha n^\gamma. \end{aligned} \quad (2.32)$$

Z rovnice Codazziho pak máme

$$R_{\alpha\gamma} n^\alpha h_\kappa^\gamma = K_{\kappa|\lambda}^\lambda - K_{|\kappa}, \quad (2.33)$$

a z rovnice Ricciho získáme, s využitím (2.26) pro $a^\lambda_{|\lambda}$, sérii rovností:

$$\begin{aligned} R_{\alpha\gamma} n^\alpha n^\gamma &= a^\lambda_{|\lambda} - \epsilon a^\lambda a_\lambda - K_\gamma^\lambda K_\lambda^\gamma - h^{\beta\delta} K_{\beta\delta;\gamma} n^\gamma = \\ &= a^\lambda_{|\lambda} - \epsilon a^\lambda a_\lambda + K_\gamma^\lambda K_\lambda^\gamma - h^{\nu\lambda} \mathcal{L}_n K_{\nu\lambda} = \\ &= a^\delta_{;\delta} - K_\gamma^\lambda K_\lambda^\gamma - K_{,\gamma} n^\gamma. \end{aligned} \quad (2.34)$$

Podstatným zjednodušením na varietách dimenze 3 je vztah pro nezávislé složky 3D Riemannova tenzoru,

$$\begin{aligned} {}^{(3)}R_{\mu\nu\kappa\lambda} &= \frac{{}^{(3)}R}{2} (h_{\mu\lambda} h_{\nu\kappa} - h_{\mu\kappa} h_{\nu\lambda}) + h_{\mu\kappa} {}^{(3)}R_{\nu\lambda} + h_{\nu\lambda} {}^{(3)}R_{\mu\kappa} \\ &\quad - h_{\mu\lambda} {}^{(3)}R_{\nu\kappa} - h_{\nu\kappa} {}^{(3)}R_{\mu\lambda}. \end{aligned} \quad (2.35)$$

Tuto rovnici využijeme později ke zjednodušení rozštěpení 3D Kretschmannova skaláru.

Kontrakcí 3D Ricciho tenzoru získáme 3D Ricciho skalár. Dekompozici prostorového (4D) Ricciho skaláru lze z (2.32) vyjádřit rovnostmi

$$\begin{aligned} -\epsilon R &= -\epsilon {}^{(3)}R + K^2 + K_\gamma^\lambda K_\lambda^\gamma - 2a_{,\delta}^\delta + 2K_{,\gamma} n^\gamma = \\ &= -\epsilon {}^{(3)}R + K^2 - K_\gamma^\lambda K_\lambda^\gamma - 2R_{\alpha\gamma} n^\alpha n^\gamma. \end{aligned} \quad (2.36)$$

Pro ilustraci implementace opět uvádíme část kódu, kde jsme z funkce GaussCodazzi získali první vyjádření dekompozice Ricciho skaláru.

```

In:
RicciCD[] == GaussCodazzi[RicciScalarCD[], h] /. $Rules /.
  Projectorh -> ProjectWith[h]
PutScalar /@ (-\[Epsilon] %) /. $Rules
NoScalar /@ %;
% // ContractMetric;
% // ToCanonical
RicciScalarFullDeco = %;

```

Out[1]:

$$\begin{aligned}
R = & \epsilon K_\alpha^\beta K_\beta^\alpha - \epsilon K_\alpha^\alpha K_\beta^\beta - \epsilon a_\alpha a^\alpha n_\beta n^\beta - K_\alpha^\gamma K_\gamma^\alpha n_\beta n^\beta - \\
& a_\gamma a^\gamma n_\alpha n^\alpha n_\beta n^\beta - \epsilon K_\gamma^\delta K_\delta^\gamma n_\alpha n^\alpha n_\beta n^\beta + {}^{(3)}R - \epsilon n_\alpha n^\alpha n_\beta n^\beta (n^\beta K_\alpha^\alpha{}_{;\beta}) + \\
& h^{\alpha\beta} n_\gamma n^\gamma a_{\alpha|\beta} + \epsilon n_\alpha n^\alpha n_\beta n^\beta a_\gamma{}^{|\gamma} - h^{\delta\gamma} n_\alpha n^\alpha n^\beta K_{\gamma\delta;\beta}
\end{aligned}$$

Out[2]:

$$\begin{aligned}
-\epsilon R = & -\epsilon {}^{(3)}R + \epsilon (a_\alpha a^\alpha) + \epsilon (a_\gamma a^\gamma) - (K_\alpha^\beta K_\beta^\alpha) + (K_\alpha^\alpha)(K_\beta^\beta) + (K_\alpha^\gamma K_\gamma^\alpha) + \\
& (K_\gamma^\delta K_\delta^\gamma) - (h^{\alpha\beta} a_{\alpha|\beta}) - (a_\gamma{}^{|\gamma}) + (n^\beta K_\alpha^\alpha{}_{;\beta}) + (h^{\delta\gamma} n^\beta K_{\gamma\delta;\beta})
\end{aligned}$$

Out[3]:

$$-\epsilon R = 2\epsilon a_\alpha a^\alpha + K_{\alpha\beta} K^{\alpha\beta} + K^\alpha{}_\alpha K^\beta{}_\beta - \epsilon {}^{(3)}R - 2a^\alpha{}_{|\alpha} + h^{\beta\gamma} n^\alpha K_{\beta\gamma;\alpha} + n^\alpha K^\beta{}_{\beta;\alpha}$$

```

In:
cd3DDivAcc
NCDExtrKContrTONCDScalextrK

```

Out[1]:

$$a^\lambda{}_{|\lambda} = \epsilon a_\beta a^\beta + a^\alpha{}_{;\alpha}$$

Out[2]:

$$h^{\gamma\alpha} n^\beta K_{\alpha\gamma;\beta} = n^\beta K_\alpha^\alpha{}_{;\beta}$$

```

RicciScalarFullDeco
% /. ApplyRule@cd3DDivAcc
% /. ApplyRule@NCDExtrKContrTONCDScalextrK
% // Expand // ToCanonical
RicciScalar3DDecoEquation1 = %;

```

Out[1]:

$$\begin{aligned}
-\epsilon R = & 2\epsilon a_\alpha a^\alpha + K_{\alpha\beta} K^{\alpha\beta} + K^\alpha{}_\alpha K^\beta{}_\beta - \epsilon {}^{(3)}R - 2(\epsilon a_\beta a^\beta + a^\alpha{}_{;\alpha}) + h^{\beta\gamma} n^\alpha K_{\beta\gamma;\alpha} + \\
& n^\alpha K^\beta{}_{\beta;\alpha}
\end{aligned}$$

Out[2]:

$$\begin{aligned}
-\epsilon R = & 2\epsilon a_\alpha a^\alpha + K_{\alpha\beta} K^{\alpha\beta} + K^\alpha{}_\alpha K^\beta{}_\beta - \epsilon {}^{(3)}R - 2(\epsilon a_\beta a^\beta + a^\alpha{}_{;\alpha}) + n^\alpha K^\beta{}_{\beta;\alpha} + \\
& n^\beta K_\alpha^\alpha{}_{;\beta}
\end{aligned}$$

Out[3]:

$$-\epsilon R = K_{\alpha\beta} K^{\alpha\beta} + K^\alpha{}_\alpha K^\beta{}_\beta - \epsilon {}^{(3)}R - 2a^\alpha{}_{;\alpha} + 2n^\alpha K^\beta{}_{\beta;\alpha}$$

2.2.5 Vakuové rovnice, vazby a kolmost k nadplochám

Pro vakuovou část prostoročasu máme $R_{\mu\nu}^* = 0 \Rightarrow R^* = 0$ (asterisk značí, že rovnost platí pouze ve vakuu). Vakuovým případem Gaussovy rovnice pro Ricciho tenzor (2.32) získáme tzv. rovnice “normálové změny”,

$$\begin{aligned} -\epsilon^{(3)}R_{\nu\lambda}^* &\stackrel{*}{=} a_{\nu|\lambda} - \epsilon a_\nu a_\lambda - KK_{\nu\lambda} - h_\nu^\beta h_\lambda^\delta K_{\beta\delta;\gamma} n^\gamma \\ &= R_{\alpha\nu\gamma\lambda} n^\alpha n^\gamma - KK_{\nu\lambda} + K_{\nu\gamma} K_\lambda^\gamma. \end{aligned} \quad (2.37)$$

Jak již bylo zmíněno, Riemannův tenzor *není ve vakuu triviální*. Z Codazziho rovnice pro Ricciho tenzor (2.33) získáme tzv. “hybnostní vazbu” ve tvaru

$$K_{\kappa|\lambda}^\lambda \stackrel{*}{=} K_{|\kappa}. \quad (2.38)$$

Dalším důsledkem je “hamiltonovská vazba”, která vznikne redukcí druhého vyjádření dekompozice Ricciho skaláru (2.36) pro vakuum:

$$-\epsilon^{(3)}R^* \stackrel{*}{=} K_\gamma^\lambda K_\lambda^\gamma + K_{,\gamma} n^\gamma. \quad (2.39)$$

Navíc vzniká z Ricciho rovnice pro Ricciho tenzor (2.34) požadavek

$$(a^\delta{}_{;\delta})a^\lambda{}_{|\lambda} - \epsilon a^\lambda a_\lambda \stackrel{*}{=} K_\gamma^\lambda K_\lambda^\gamma + K_{,\gamma} n^\gamma, \quad (2.40)$$

který zajišťuje platnost kontrakce ${}^{(3)}R_{\nu\lambda} h^{\nu\lambda} \equiv {}^{(3)}R$.

Jelikož jsme normálu definovali v souladu s Frobeniovou větou jako (2.15), je nulovost tenzoru vorticity normály zajištěna, pro čtyř-zrychlení však obecně nic garantováno není. Přesto lze ale zjistit, že i jí příslušející tenzor vorticity vymizí. Pokud vyjádříme $2n_{[\mu;\nu]}$, získáme rovnice

$$n_{\mu;\nu} - n_{\nu;\mu} = n_{\mu,\nu} - n_{\nu,\mu} = \frac{N_{,\nu}}{N} n_\mu - \frac{N_{,\mu}}{N} n_\nu, \quad (2.41)$$

jejichž kontrakcí s n^ν získáme čtyř zrychlení ve tvaru

$$a_\mu = (n_{\mu,\nu} - n_{\nu,\mu})n^\nu = -\epsilon \frac{N_{,\nu}}{N} h_\mu^\nu \equiv -\epsilon \frac{N_{|\nu}}{N}, \quad (2.42)$$

který dále zderivujeme:

$$-\epsilon a_{\mu|\nu} = \left(\frac{N_{|\mu}}{N} \right)_{|\nu} = \frac{N_{|\mu\nu}}{N} - \frac{N_{|\mu} N_{|\nu}}{N^2} = \frac{N_{|\mu\nu}}{N} - a_\mu a_\nu. \quad (2.43)$$

Z tohoto výsledku lze usoudit dekompozice (2.12) čtyř-zrychlení a její divergence, tj.

$$\begin{aligned} a_{\nu|\lambda} - \epsilon a_\nu a_\lambda &= -\epsilon \frac{N_{|\nu\lambda}}{N}, \\ a^\kappa{}_{|\kappa} - \epsilon a^\kappa a_\kappa &= -\epsilon \frac{N_{|\kappa}{}^\kappa}{N}. \end{aligned} \quad (2.44)$$

První z těchto vztahů je ekvivalentní podmínkou nulovosti tenzoru vorticity (příslušejícího čtyř-zrychlení). Jelikož 3D kovariantní derivace “|” stejně jako “;” je také bez torze, je vztah (2.44) popisující dekompozici gradientu čtyř-zrychlení symetrický, a tedy má čtyř-zrychlení normály taktéž nulový tenzor vorticity. Celkově tedy máme:

$$\begin{aligned} n_{\mu;\nu} - \epsilon a_\mu n_\nu & \quad \text{je symetrický z definice } n_\mu = \epsilon N t_{,\mu}, \\ a_{\mu|\nu} - \epsilon a_\mu a_\nu & \quad \text{je symetrický, | je derivace bez torze.} \end{aligned}$$

Nulovost tenzoru vorticity čtyř-zrychlení odůvodňuje možnost celou konstrukci zopakovat. Na 3D nadplochách lze definovat projektor na 2D podprostor pomocí 3D metriky a čtyř-zrychlení normály, to pak hraje roli “čtyř-rychlosti”. Dále by šlo zkonstruovat novou derivaci, nové tenzory vorticity, expanze a smyku na vzniklém 2D podprostoru pomocí 3D derivace “|” a vzniklého projektoru. Tím je dána formulace (2+1)+1 dekompozice prostoročasu.

V sekci 4.2 věnované 2+1 dekompozici nadploch Σ_t pro případ třídy cirkulárních prostoročasů nastane obdobná situace. Normála bude časupodobná ($\epsilon = -1$) a N bude tedy Lapse funkcí. Druhou dekompozici zavedeme právě tak, aby vzniklé 2D podprostory, značené Σ_{tN} , byly plochami $N = \text{konst.}$ Jejich normála tedy má tvar $r_\sigma = N_{|\sigma} / \sqrt{N_{|\nu} N^{|\nu}} \equiv N_{|\sigma} / \kappa$ (κ zatím chápeme jen jako normalizaci). Jelikož $a_\mu = N_{|\mu} / N$, budeme pak psát $r_\sigma = N a_\sigma / \kappa$. Tj. v druhé dekompozici bude normála k Σ_{tN} definována (až na faktor N/κ) jako čtyř-zrychlení a_σ .

2.2.6 3+1 Rozštěpení Kretschmannova skaláru

Nyní máme vše potřebné pro provedení 3+1 dekompozice Kretschmannova skaláru. Obecná dekompozice má tvar

$$\begin{aligned} K &= h^{\alpha\beta} h^{\gamma\delta} h^{\kappa\lambda} h^{\mu\nu} R_{\alpha\gamma\kappa\mu} R_{\beta\delta\lambda\nu} + \\ & \quad 4\epsilon h^{\gamma\delta} h^{\kappa\lambda} h^{\mu\nu} n^\alpha n^\beta R_{\alpha\gamma\kappa\mu} R_{\beta\delta\lambda\nu} + \\ & \quad 4h^{\kappa\lambda} h^{\mu\nu} n^\alpha n^\beta n^\gamma n^\delta R_{\alpha\kappa\beta\mu} R_{\gamma\lambda\delta\nu}, \end{aligned} \tag{2.45}$$

do kterého dosadíme z rovnice Gaussovy (2.29), rovnice Codazziho (2.30) a druhého vyjádření rovnice Ricciho (2.31). Získáváme dekompozici:

$$\begin{aligned} K &= h^{\alpha\mu} h^{\kappa\gamma} h^{\lambda\delta} h^{\nu\beta} (\epsilon K_{\gamma\beta} K_{\delta\alpha} - \epsilon K_{\gamma\alpha} K_{\delta\beta} + {}^{(3)}R_{\delta\gamma\beta\alpha}) \times \dots \\ & \quad (\epsilon K_{\kappa\nu} K_{\lambda\mu} - \epsilon K_{\kappa\mu} K_{\lambda\nu} + {}^{(3)}R_{\lambda\kappa\nu\mu}) + \\ & \quad 4\epsilon h^{\kappa\gamma} h^{\lambda\delta} h^{\nu\beta} (-K_{\beta\delta|\gamma} + K_{\beta\gamma|\delta})(-K_{\nu\lambda|\kappa} + K_{\nu\kappa|\lambda}) + \\ & \quad 4h^{\beta\nu} h^{\delta\lambda} (-\epsilon a_{\beta\gamma} a_\delta - K_\beta^\alpha K_{\delta\alpha} + a_{\beta|\delta} - h_{\beta\gamma} h_{\delta\lambda} n^\alpha K_{\gamma\mu;\alpha}) \times \dots \\ & \quad (-\epsilon a_\lambda a_\nu - K_{\lambda\kappa} K_\nu^\kappa + a_{\nu|\lambda} - h_\lambda^\rho h_\nu^\mu n^\kappa K_{\mu\rho;\kappa}). \end{aligned} \tag{2.46}$$

Ve vakuu pak máme výrazné zjednodušení ve tvaru

$$\begin{aligned}
K^* &= \left({}^{(3)}R_{\mu\nu\kappa\lambda} - \epsilon K_{\mu\kappa} K_{\nu\lambda} + \epsilon K_{\mu\lambda} K_{\nu\kappa} \right) \times \dots \\
&\quad \left({}^{(3)}R^{\mu\nu\kappa\lambda} - \epsilon K^{\mu\kappa} K^{\nu\lambda} + \epsilon K^{\mu\lambda} K^{\nu\kappa} \right) + \\
&\quad 4\epsilon \left(K_{\nu\kappa|\lambda} - K_{\nu\lambda|\kappa} \right) \left(K^{\nu\kappa|\lambda} - K^{\nu\lambda|\kappa} \right) + \\
&\quad 4 \left(\epsilon {}^{(3)}R_{\nu\lambda} + K_{\nu\kappa} K_{\lambda}^{\kappa} - K K_{\nu\lambda} \right) \left(\epsilon {}^{(3)}R^{\nu\lambda} + K_{\gamma}^{\nu} K^{\gamma\lambda} - K K^{\nu\lambda} \right),
\end{aligned} \tag{2.47}$$

což po roznásobení a přeuspořádání členů dává

$$\begin{aligned}
K^* &= {}^{(3)}R_{\mu\nu\kappa\lambda} {}^{(3)}R^{\mu\nu\kappa\lambda} - 4\epsilon {}^{(3)}R_{\mu\nu\kappa\lambda} K^{\mu\kappa} K^{\nu\lambda} + 4 {}^{(3)}R_{\nu\lambda} {}^{(3)}R^{\nu\lambda} + \\
&\quad 8\epsilon {}^{(3)}R_{\nu\lambda} \left(K_{\gamma}^{\nu} K^{\gamma\lambda} - K K^{\nu\lambda} \right) + 2 \left(K_{\mu\kappa} K^{\mu\kappa} \right)^2 + \\
&\quad 2K_{\mu\kappa} K^{\mu\lambda} K_{\nu\lambda} K^{\nu\kappa} - 8K K_{\nu\kappa} K_{\lambda}^{\kappa} K^{\nu\lambda} + 4K^2 K_{\nu\lambda} K^{\nu\lambda} + \\
&\quad 4\epsilon \left(K_{\nu\kappa|\lambda} - K_{\nu\lambda|\kappa} \right) \left(K^{\nu\kappa|\lambda} - K^{\nu\lambda|\kappa} \right).
\end{aligned} \tag{2.48}$$

Navíc, díky rovnici pojící 3D Riemannův tenzor s 3D Ricciho tenzorem (2.35), lze členy ${}^{(3)}R_{\mu\nu\kappa\lambda} {}^{(3)}R^{\mu\nu\kappa\lambda}$ a ${}^{(3)}R_{\mu\nu\kappa\lambda} K^{\mu\kappa} K^{\nu\lambda}$ dále zjednodušit ve tvarech

$${}^{(3)}R_{\mu\nu\kappa\lambda} {}^{(3)}R^{\mu\nu\kappa\lambda} = 4 {}^{(3)}R_{\nu\lambda} {}^{(3)}R^{\nu\lambda} - {}^{(3)}R^2, \tag{2.49}$$

resp.

$$\begin{aligned}
{}^{(3)}R_{\mu\nu\kappa\lambda} K^{\mu\kappa} K^{\nu\lambda} &= \frac{{}^{(3)}R}{2} \left(K_{\lambda}^{\kappa} K_{\kappa}^{\lambda} - K^2 \right) - 2 \left(K_{\kappa}^{\nu} K^{\kappa\lambda} - K K^{\nu\lambda} \right) {}^{(3)}R_{\nu\lambda} \\
&\stackrel{*}{=} -\epsilon \frac{{}^{(3)}R^2}{2} - 2 \left(K_{\kappa}^{\nu} K^{\kappa\lambda} - K K^{\nu\lambda} \right) {}^{(3)}R_{\nu\lambda}.
\end{aligned} \tag{2.50}$$

Poslední vztah plyne z použití hamiltonovské vazby (2.39). Po substituci obou zjednodušení do (2.48) získáme

$$\begin{aligned}
K^* &= 8 \left(\epsilon {}^{(3)}R_{\nu\lambda} + K_{\nu\kappa} K_{\lambda}^{\kappa} - K K_{\nu\lambda} \right) \left(\epsilon {}^{(3)}R^{\nu\lambda} + K_{\gamma}^{\nu} K^{\gamma\lambda} - K K^{\nu\lambda} \right) + \\
&\quad {}^{(3)}R^2 + 2 \left(K_{\mu\kappa} K^{\mu\kappa} \right)^2 - 6K_{\mu\kappa} K^{\mu\lambda} K_{\nu\lambda} K^{\nu\kappa} + 8K K_{\nu\kappa} K_{\lambda}^{\kappa} K^{\nu\lambda} - \\
&\quad 4K^2 K_{\nu\lambda} K^{\nu\lambda} + 4\epsilon \left(K_{\nu\kappa|\lambda} - K_{\nu\lambda|\kappa} \right) \left(K^{\nu\kappa|\lambda} - K^{\nu\lambda|\kappa} \right),
\end{aligned} \tag{2.51}$$

kde provedeme poslední úpravu. Členy mimo závorku obsahující vnější křivost jsou totiž rovny $24 \det(K_{\beta}^{\alpha})$. Detailní odvození neuvádíme, i tento výsledek byl však ověřen za užití balíčku xCoba ("pod"balíček xAct-u) v [Příloha: Zdrojový kód]. Finální tvar 3+1 dekompozice Kretschmannova skaláru ve vakuové oblasti prostoročasu má tedy tvar

$$\begin{aligned}
K^* &= 8 \left(\epsilon {}^{(3)}R_{\nu\lambda} + K_{\nu\kappa} K_{\lambda}^{\kappa} - K K_{\nu\lambda} \right) \left(\epsilon {}^{(3)}R^{\nu\lambda} + K_{\gamma}^{\nu} K^{\gamma\lambda} - K K^{\nu\lambda} \right) + \\
&\quad 24 \det \left(K_{\beta}^{\alpha} \right) + 4\epsilon \left(K_{\nu\kappa|\lambda} - K_{\nu\lambda|\kappa} \right) \left(K^{\nu\kappa|\lambda} - K^{\nu\lambda|\kappa} \right).
\end{aligned} \tag{2.52}$$

3. (2+1)+1 dekompozice prostoročasu

3.1 Problémy s implementací druhé dekompozice v balíčku xAct

Jak jsme již zmínili, xAct je vybaven funkcí pro definici indukované metriky. Z již zadané prostoročasové metriky $g_{\mu\nu}$ a normálového vektoru n^μ se znamením normy $\epsilon = \mp 1$ je možné zdefinovat indukovanou metriku. Je však nutno zvolit znaménkovou konvenci. Po zvolení konvence $IMdetmet := 1$ jako determinantu indukované metriky a $k\text{sign} := 1$, $a\text{sign} := \epsilon$ jako znaménka vzniklého tenzoru vnější křivosti a čtyř-zrychlení normály (v souladu s předchozími kapitolami) jsme zavedli indukovanou metriku následujícím příkazem:

```
DefMetric[IMdetmet, h[-\[Mu], -\[Nu]], cd, {"|", "D"},  
  InducedFrom -> {g, n}]  
$ExtrinsicKSign = ksign;  
$AccelerationSign = asign;
```

Tento proces však nelze znovu zopakovat. Naším prvním pokusem bylo definovat novou (2D) metriku pomocí funkce DefMetric, a pomocí možnosti InducedFrom zajistit patřičné vlastnosti (tj. zdefinovat nové vektorové pole r^α automaticky kolmé na normálu n^μ a indukovat novou 2D metriku pomocí 3D indukované metriky $h_{\mu\nu}$). Tento proces však není ve funkci DefMetric povolen, neboť argumentem InducedFrom nemůže být již indukovaná metrika. Jedním z dalších pokusů bylo indukovanou metriku zdefinovat pomocí dvou vektorových polí r^α a n^α ($r_\alpha n^\alpha = 0$) a prostoročasové metriky $g_{\mu\nu}$. Avšak funkce InducedFrom žádá dva argumenty, prvním argumentem musí být protoročasná metrika, druhým vektor.

Nedostatek se nám nepodařilo nijak obejít, proto jsme museli definovat 2D metriku jako metriku prostoročasnou (4D), a upřesnit všechny tenzory, symetrie, kolmosti, kontrakce (mezi nimi i užité zvedání a snižování indexu) explicitně tak, aby naše definice odpovídala 2D metrice. Přímou využití nešlo ani funkce GaussCodazzi, která implementaci předchází (3+1) dekompozice značně usnadnila. Wolfram Language však obsahuje funkci Rule, která dovozuje provádět substituce do již existujících výrazů, což plně nahradilo funkci GaussCodazzi a urychlilo provedení všech základních dekompozic (3D Riemannova a Ricciho tenzoru a 3D Ricciho skaláru) v řeči 2+1 formalismu.

3.2 Zavedení (2+1)+1 dekompozice

Následující kapitola je čerpána přímo z [2]. Předpokládejme nyní, že existuje druhá dekompozice prostoročasu podle parametru s , tj. systémem nadploch Σ_s . Průnikem nadploch Σ_t a Σ_s získáme foliaci Σ_t pomocí systému 2D ploch, ty označíme Σ_{ts} .

Metriku na plochách Σ_{ts} zavedeme pomocí indukované metriky nadploch Σ_t vztahem

$$f_{\mu\nu} := h_{\mu\nu} - \zeta r_\mu r_\nu = g_{\mu\nu} - \epsilon n_\mu n_\nu - \zeta r_\mu r_\nu, \quad (3.1)$$

kde, **a to je klíčové**, r_μ je normovanou *projekcí* normály n_μ na Σ_s . Normály foliací Σ_t a Σ_s nemusí být obecně kolmé. Normu projekce jsme označili $\zeta := \mp 1$.

Z definice přímo plynou následující vlastnosti:

$$r_\mu n^\mu = 0, \quad h_\alpha^\mu r^\alpha = r^\mu, \quad f_\alpha^\mu n^\alpha = h_\alpha^\mu n^\alpha = 0, \quad f_\alpha^\mu h_\nu^\alpha = f_\nu^\mu, \quad r_{\mu|\nu} r^\mu = 0.$$

Jelikož je r_μ z kotečného bandlu $T^*\Sigma_t$, její čtyř-zrychlení získáme pomocí 3D derivace, tedy

$$b_\mu := r_{\mu|\nu} r^\nu = r_{\alpha;\beta} h_\mu^\alpha r^\beta = r_{\mu;\beta} r^\beta + \epsilon K_{\alpha\beta} r^\alpha r^\beta n_\mu. \quad (3.2)$$

Pro ilustraci uvedeme, jak jsme získali třetí rovnost v xActu. Z kódu jsou vynechané některé příkazy (zejména na ukládání rovnic), aby byl čitelnější.

- `Acc2DDefCD` je druhý výsledek v pořadí, tj. rovnice $b_\mu = r_{\alpha;\beta} h_\mu^\alpha r^\beta$.
- `ApplyRule@hTOg`: `ApplyRule` je námi implementovaná funkce, která hledá (včetně permutace indexů) a substituuje ve výrazu `Acc2DDefCD` na předchozí řádce levou stranu jejího argumentu za pravou stranu jejího argumentu. Argumentem funkce `ApplyRule` je rovnice `hTOg` definována jako $h_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - \epsilon n_\mu n_\nu$.
- `cd3DCovector` je 3D derivace (označena `cd`) kovektoru V_μ z kotečného bandlu $T^*\Sigma_t$, tj. vztah (2.24).
- `%/.V → r` provádí v předchozím řádku substituci vektoru V za vektor r .
- `MakeRule` je funkcí `xAct`-u pro hledání a nahrazování ve výrazu. Tato funkce žádá dva argumenty. Prvním argumentem je výraz, ve kterém si přejeme některý z členů nahradit, druhým argumentem je list o dvou elementech. První element udává výraz, který bude nahrazován, druhý element výraz, kterým bude nahrazen. V našem případě využíváme kolmosti $n^\alpha r_\alpha = 0$ a pomocí funkce `MakeRule` používáme Leibnizovo pravidlo.
- `GradNormalToExtrinsicK` je funkcí `xAct`-u pro rozklad $n_{\mu;\nu}$ do vnější křivosti (2.19).
- `Expand` roznásobí všechny závorky. Při tom se vyhodnotí všechna automatická pravidla (zde $n_\beta r^\beta = 0$).


```

In:
Acc2DDefCD
% /. ApplyRule@hT0g;
% // Expand // ScreenDollarIndices
% /. MakeRule[{n[\[Alpha]] CD[-\[Nu]]@
  r[-\[Alpha]], -CD[-\[Nu]]@n[-\[Alpha]] r[\[Alpha]]},
  ContractMetrics -> True, MetricOn -> All]
% // GradNormalToExtrinsicK
% // Expand

```

Out[1] :

$$b_\mu = h_\mu^\alpha r^\beta r_{\alpha;\beta}$$

Out[2] :

$$b_\mu = r^\alpha r_{\mu;\alpha} - \epsilon n^\alpha n_\mu r^\beta r_{\alpha;\beta}$$

Out[3] :

$$b_\mu = r^\alpha r_{\mu;\alpha} + \epsilon n_\mu r^\alpha r^\beta n_{\alpha;\beta}$$

Out[4] :

$$b_\mu = \epsilon (K_{\beta\alpha} + \epsilon a_\alpha n_\beta) n_\mu r^\alpha r^\beta + r^\alpha r_{\mu;\alpha}$$

Out[5] :

$$b_\mu = \epsilon K_{\beta\alpha} n_\mu r^\alpha r^\beta + r^\alpha r_{\mu;\alpha}$$

Dále zavedeme 2D (symetrický) tenzor vnější křivosti ploch Σ_{ts} . Možných vyjádření tohoto tenzoru je více (v [2] je jich uvedeno 10, v [Příloha: Zdrojový kód] jsou všechny postupně implementovány), my se omezíme na vyjádření

$$\begin{aligned}
k_{\mu\nu} &:= r_{\alpha|\beta} f_\mu^\alpha f_\nu^\beta = r_{\mu|\beta} f_\nu^\beta = r_{\mu|\nu} - \zeta b_\mu r_\nu = \dots \\
&= r_{\mu;\beta} f_\nu^\beta + \epsilon K_{\alpha\beta} r^\alpha f_\nu^\beta n_\mu,
\end{aligned} \tag{3.3}$$

jejichž stopou pak získáme 2D expanzní skalár

$$k := f^{\mu\nu} k_{\mu\nu} = f_\mu^\mu = r^\mu|_\mu = r^\mu{}_{;\mu} + \epsilon a^\mu r_\mu. \tag{3.4}$$

Jelikož b_μ a $k_{\mu\nu}$ jsou z kotečného bandlu $T^*\Sigma_{ts}$, dostáváme další ortogonální vztahy:

$$b_\mu r^\mu = 0, \quad k_{\mu\nu} r^\nu = 0, \quad b_\mu n^\mu = 0, \quad k_{\mu\nu} n^\nu = 0.$$

S metrikou $f_{\mu\nu}$ se pojí 2D kovariantní derivace (opět Levi-Civitova typu). Pro libovolné tenzorové pole $T^{\alpha\dots\beta}_{\mu\dots\nu}$ z (ko)tečného bandlu $T^*\Sigma_{ts}$ ji definujeme vztahem

$$\begin{aligned} T^{\alpha\dots\beta}_{\mu\dots\nu||\sigma} &:= T^{\gamma\dots\delta}_{\kappa\dots\lambda;\rho} f_{\gamma}^{\alpha} \dots f_{\delta}^{\beta} f_{\mu}^{\kappa} \dots f_{\nu}^{\lambda} f_{\sigma}^{\rho} \\ &= T^{\gamma\dots\delta}_{\kappa\dots\lambda|\rho} f_{\gamma}^{\alpha} \dots f_{\delta}^{\beta} f_{\mu}^{\kappa} \dots f_{\nu}^{\lambda} f_{\sigma}^{\rho}, \end{aligned} \quad (3.5)$$

tedy kontrakcí přes všechny indexy derivace prostoročasové (4D), či derivace spojené s 3D metrikou $h_{\mu\nu}$. Druhá formulace plyne přímo z kolmosti n_{μ} na nadplochy Σ_{ts} . Konkrétně ji pak v analogii s předchozí kapitolou vyjádříme pro kovektor z kotečného bandlu $T^*\Sigma_{ts}$, tj.

$$\begin{aligned} V_{\mu||\nu} &:= V_{\alpha|\beta} f_{\mu}^{\alpha} f_{\nu}^{\beta} = V_{\mu|\beta} f_{\nu}^{\beta} + \zeta k_{\nu}^{\alpha} V_{\alpha} r^{\mu} \\ &= V_{\mu;\kappa} f_{\nu}^{\kappa} + \epsilon K_{\beta}^{\kappa} f_{\nu}^{\beta} V_{\kappa} n_{\mu} + \zeta k_{\nu}^{\alpha} V_{\alpha} r_{\mu}, \end{aligned} \quad (3.6)$$

a jeho divergenci

$$V^{\nu}{}_{||\nu} = f^{\mu\nu} V_{\mu||\nu} = f^{\alpha\beta} V_{\alpha|\beta} = V^{\nu}{}_{|\nu} + \zeta b^{\nu} V_{\nu} \quad (3.7)$$

$$= V^{\nu}{}_{;\nu} + (\epsilon a^{\nu} + \zeta b^{\nu}) V_{\nu}. \quad (3.8)$$

3.3 2D Riemannův tenzor, 2+1 dekompozice 3D Riemannova tenzoru a jeho kontrakcí

2D Riemannův tenzor je definován komutátorem

$$V_{\nu||\kappa\lambda} - V_{\nu||\lambda\kappa} := {}^{(2)}R_{\mu\nu\kappa\lambda} V^{\mu}, \quad (3.9)$$

avšak pro prostory dimenze 2 nastává výrazné zjednodušení. Zde totiž má Riemannův tenzor jen jedinou nezávislou komponentu - jeho korespondující 2D Ricciho skalár. Platí:

$${}^{(2)}R_{\mu\nu\kappa\lambda} = \frac{{}^{(2)}R}{2} (f_{\mu\kappa} f_{\nu\lambda} - f_{\mu\lambda} f_{\nu\kappa}), \quad (3.10)$$

což pro výše zmíněný komutátor dává:

$$V_{\nu||\kappa\lambda} - V_{\nu||\lambda\kappa} = \frac{{}^{(2)}R}{2} (V_{\kappa} f_{\nu\lambda} - V_{\lambda} f_{\nu\kappa}). \quad (3.11)$$

3D Riemannův tenzor lze opět podrobit projekcím analogickým (2.29)-(2.31), získáme Gaussovu rovnici:

$${}^{(3)}R_{\alpha\beta\gamma\delta} f_{\alpha}^{\mu} f_{\nu}^{\beta} f_{\kappa}^{\gamma} f_{\lambda}^{\delta} = {}^{(2)}R_{\mu\nu\kappa\lambda} - \zeta k_{\mu\kappa} k_{\nu\lambda} + \zeta k_{\mu\lambda} k_{\nu\kappa}, \quad (3.12)$$

rovnici Codazziho:

$${}^{(3)}R_{\alpha\beta\gamma\delta} r_{\alpha} f_{\nu}^{\beta} f_{\kappa}^{\gamma} f_{\lambda}^{\delta} = k_{\nu\kappa|\lambda} - k_{\nu\lambda|\kappa}, \quad (3.13)$$

a rovnici Ricciho (opět v analogických třech vyjádřeních) jako

$$\begin{aligned} {}^{(3)}R_{\alpha\beta\gamma\delta} r_{\alpha} f_{\nu}^{\beta} r^{\gamma} f_{\lambda}^{\delta} &= {}^{(3)}R_{\alpha\nu\gamma\lambda} r^{\alpha} r^{\gamma} = \\ &= b_{\nu||\lambda} - \zeta b_{\nu} b_{\lambda} - k_{\nu\gamma} k_{\lambda}^{\gamma} - f_{\nu}^{\beta} f_{\lambda}^{\delta} k_{\beta\delta|\gamma} r^{\gamma} \\ &= b_{\nu||\lambda} - \zeta b_{\nu} b_{\lambda} + k_{\nu\gamma} k_{\lambda}^{\gamma} - {}^{(3)}\mathcal{L}_{\mathbf{r}} k_{\nu\lambda}. \end{aligned} \quad (3.14)$$

2D Ricciho tenzor vznikne kontrakcí 2D Riemannova tenzoru pomocí indukované metriky $f_{\mu\nu}$. Dále potřebujeme získat dekompozice 3D Ricciho tenzoru analogické k (2.32)-(2.34). Z předchozího rozpisu Gaussových, Codazziho a Ricciho rovnic získáváme:

$$\begin{aligned}\zeta {}^{(3)}R_{\beta\delta}f_{\nu}^{\beta}f_{\lambda}^{\delta} &= \zeta {}^{(2)}R_{\nu\lambda} - kk_{\nu\lambda} + b_{\nu\|\lambda} - \zeta b_{\nu}b_{\lambda} - f_{\nu}^{\beta}f_{\lambda}^{\delta}k_{\beta\delta|\gamma}r^{\gamma} \\ &= \zeta {}^{(2)}R_{\nu\lambda} - kk_{\nu\lambda} + k_{\nu\gamma}k_{\lambda}^{\gamma} + {}^{(3)}R_{\alpha\nu\gamma\lambda}r^{\alpha}r^{\gamma},\end{aligned}\quad (3.15)$$

$${}^{(3)}R_{\beta\delta}f_{\nu}^{\beta}r^{\delta} = k_{\nu\|\kappa}^{\kappa} - k_{\|\nu}, \quad (3.16)$$

$$\begin{aligned}{}^{(3)}R_{\beta\delta}r^{\beta}r^{\delta} &= b^{\delta}_{\|\delta} - \zeta b^{\delta}b_{\delta} - k_{\gamma}^{\delta}k_{\delta}^{\gamma} - f^{\beta\delta}k_{\beta\delta|\gamma}r^{\gamma} = \\ &= b^{\delta}_{\|\delta} - \zeta b^{\delta}b_{\delta} + k_{\gamma}^{\delta}k_{\delta}^{\gamma} - f^{\beta\delta}{}^{(3)}\mathcal{L}_{\mathbf{r}}k_{\beta\delta} = \\ &= b^{\delta}_{|\delta} - k_{\gamma}^{\delta}k_{\delta}^{\gamma} - k_{,\gamma}r^{\gamma},\end{aligned}\quad (3.17)$$

kde jsme poslední úpravu provedli v analogii s 3+1 dekompozicí využitím vztahu (3.8) pro $b^{\mu}_{\|\mu}$.

Jak jsme již viděli, 3D Riemannův tenzor lze vyjádřit pomocí 3D metriky a 3D Ricciho tenzoru (2.35). Analogický vztah (3.10) platí i pro 2D Riemannův tenzor, jeho jedinou nezávislou komponentou je 2D Ricciho skalár. Vztahy se tedy redukuje na relace mezi 3D Ricciho tenzorem a 2D Ricciho skalárem. Dekompozici 3D Ricciho skaláru získáme v analogii s (2.36) ve tvarech

$$\begin{aligned}\zeta {}^{(3)}R &= \zeta {}^{(3)}R_{\nu\lambda}h^{\nu\lambda} = \zeta {}^{(3)}R_{\nu\lambda}f^{\nu\lambda} + {}^{(3)}R_{\nu\lambda}r^{\nu}r^{\lambda} = \\ &= \zeta {}^{(2)}R - k^2 - k_{\gamma}^{\delta}k_{\delta}^{\gamma} + 2b^{\lambda}_{|\lambda} - 2k_{,\gamma}r^{\gamma} = \\ &= \zeta {}^{(2)}R - k^2 + k_{\gamma}^{\delta}k_{\delta}^{\gamma} + 2{}^{(3)}R_{\nu\lambda}r^{\nu}r^{\lambda}.\end{aligned}\quad (3.18)$$

Zejména poslední vyjádření je velice ilustrativní.

Představme si situaci v \mathbb{E}^3 . Zde k_{β}^{α} hraje roli operátoru tvaru, 3D Ricciho tenzor i 3D Ricciho skalár jsou (triviálně) nulové a $\zeta = 1$. Operátor tvaru lze diagonalizovat (vybrat souřadnice adaptované dekompozici, $A, B = 1, 2$) a získat tím $k_{AB} = \text{diag}(\kappa_1, \kappa_2)$ a $k^{AB} = \text{diag}(\kappa_1, \kappa_2)$. Na její diagonále vystupují hlavní křivosti κ_1, κ_2 , platí tedy $k = \kappa_1 + \kappa_2$. Díky diagonalizaci snadno zjistíme i celkovou křivost $k_{AB}k^{AB} = \kappa_1^2 + \kappa_2^2$. Člen $-k^2 + k_{\beta}^{\alpha}k_{\alpha}^{\beta}$ se za užití obou těchto výsledků redukuje na $-2\det(k_{\beta}^{\alpha})$, což reprezentuje (záporný) dvojnásobek gaussovské křivosti plochy. Rovnice (3.18) pak má tvar

$${}^{(2)}R - k^2 + k_{AB}k^{AB} = 0 \Rightarrow {}^{(2)}R = 2\kappa_1\kappa_2.$$

Tento výsledek je Gaussova slavná **Theorema Egregium**.

3.4 (2+1)+1 dekompozice Kretschmannova skaláru

V sekci 2.2.6 jsme získali vakuovou 3+1 dekompozici prostoročasového Kretschmannova skaláru (2.52). Ta lze dále zjednodušit rozštěpením 3D vnější křivosti $K_{\mu\nu}$, kterému se obecně věnovat nebudeme. Zjevně zde ale vystupuje další člen, ${}^{(3)}R_{\nu\lambda}{}^{(3)}R^{\nu\lambda}$, který jde dále zjednodušit. Tento člen jde rozložit podobně jako Kretschmannův skalár ve formě projekcí

$$\begin{aligned} {}^{(3)}R_{\nu\lambda}{}^{(3)}R^{\nu\lambda} &= \left({}^{(3)}R_{\beta\delta}f_{\nu}^{\beta}f_{\lambda}^{\delta}\right) \left({}^{(3)}R^{\alpha\gamma}f_{\alpha}^{\nu}f_{\gamma}^{\lambda}\right) + \\ &2\zeta \left({}^{(3)}R_{\beta\delta}f_{\nu}^{\beta}r^{\delta}\right) \left({}^{(3)}R^{\alpha\gamma}f_{\alpha}^{\nu}r_{\gamma}\right) + \left({}^{(3)}R_{\beta\delta}r^{\beta}r^{\delta}\right)^2, \end{aligned} \quad (3.19)$$

do tohoto vyjádření se však nevyplatí přímo dosadit. Využijeme-li kontrakce vztahu pro nezávislé komponenty 2D Riemannova tenzoru (3.10), získáme

$${}^{(2)}R_{\nu\lambda} = f^{\mu\kappa}{}^{(2)}R_{\mu\nu\kappa\lambda} = \frac{1}{2}{}^{(2)}Rf_{\nu\lambda}, \quad (3.20)$$

což dosazením do výrazu (3.19) pro ${}^{(3)}R_{\nu\lambda}{}^{(3)}R^{\nu\lambda}$ dává

$$\begin{aligned} {}^{(3)}R_{\nu\lambda}{}^{(3)}R^{\nu\lambda} &= \\ &\frac{1}{2}{}^{(2)}R^2 + \zeta{}^{(2)}R \left(b^{\lambda}{}_{|\lambda} - k^2 - k_{|\gamma}r^{\gamma}\right) + \\ &\left(b_{\nu||\lambda} - \zeta b_{\nu}b_{\lambda} - k k_{\nu\lambda} - f_{\nu}^{\beta}f_{\lambda}^{\delta}k_{\beta\delta|\gamma}r^{\gamma}\right) \times \dots \\ &\left(b^{\nu||\lambda} - \delta b^{\nu}b^{\lambda} - k k^{\nu\lambda} - f_{\rho}^{\nu}f_{\sigma}^{\lambda}k^{\rho\sigma|\kappa}r_{\kappa}\right) + \\ &2\zeta \left(k^{\kappa}{}_{\nu||\kappa} - k_{||\nu}\right) \left(k_{\lambda}{}^{\nu||\lambda} - k^{||\nu}\right) + \left(b^{\delta}{}_{|\delta} - k_{\gamma}^{\delta}k_{\delta}^{\gamma} - k_{|\gamma}r^{\gamma}\right)^2. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Toto je finální zjednodušení (2+1)+1 dekompozice Kretschmannova skaláru, které bez reference na konkrétní souřadnice uvedeme. V další kapitole se budeme věnovat vyjádření některých z členů vystupujících v dekompozicích Kretschmannova skaláru (2.52) a (3.21) pro případ cirkulárních prostoročasů.

4. Cirkulární prostoročasy

Vycházíme opět z [2]. Vztahy v této kapitole **již nejsou softwarově implementovány**.

V této kapitole se budeme věnovat exkluzivně prostoročasům (či oblastem prostoročasů), které jsou stacionární, axiálně symetrické a ortogonálně tranzitivní. Tyto tři vlastnosti prostoročasu (nebo jeho oblasti) nesou souhrnný název **cirkulární**. Se zmíněnými symetriemi jsou spojeny existence dvou Killingových polí - časupodobného pole η^μ a prostorupodobného pole ξ^μ s uzavřenými kruhovými orbity. Tato Killingova pole komutují, a tedy tvoří plochu. Lokálně pak máme existenci dvou (komplementárních) směrů kolmých na obě Killingova pole, které díky ortogonální tranzitivitě také tvoří (tzv. “meridionální”) plochy. V asymptoticky plochých prostoročasech dostáváme Frobeniovu podmínku pro nulovost tenzoru vorticity ve tvarech $\eta_{[\mu}\xi_\nu\xi_{\kappa;\lambda]}$ a $\xi_{[\mu}\eta_\nu\eta_{\kappa;\lambda]}$. Ty jsou pak ekvivalentní

$$\eta^\alpha R_{\alpha[\nu}\eta_\kappa\xi_\lambda] = 0, \quad \xi^\alpha R_{\alpha[\nu}\xi_\kappa\eta_\lambda] = 0,$$

což jsou podmínky pro křivost. Jejich důkaz lze najít například v sekci 19.3.1 [8]. Tyto podmínky se skrze Einsteinovy rovnice promítnou na požadavek cirkularitivy tenzoru energie-hybnosti. Pro zdroje přípustný pohyb je tedy rovnoměrný podél kruhů axiální symetrie.

Metrika cirkulárního prostoročasu lze v souřadnicích t, ϕ adaptovaných Killingovým vektorům napsat ve tvaru

$$ds^2 = -N^2 dt^2 + g_{\phi\phi} (d\phi - \omega dt)^2 + g_{AB} dx^A dx^B, \quad (4.1)$$

kde indexy A, B prochází zbylé koordináty popisující meridionální plochy. V těchto souřadnicích máme (jako v Kerrově řešení):

$$\begin{aligned} \eta^\mu &= \frac{\partial x^\mu}{\partial t}, & \xi^\mu &= \frac{\partial x^\mu}{\partial \phi}; & g_{tt} &= g_{\mu\nu} \eta^\mu \eta^\nu, & g_{\phi\phi} &= g_{\mu\nu} \xi^\mu \xi^\nu, \\ g_{t\phi} &= g_{\mu\nu} \eta^\mu \xi^\nu, & \omega &= \frac{-g_{t\phi}}{g_{\phi\phi}}, \\ N^2 &= -g_{tt} - g_{t\phi} \omega = -\eta_\mu (\eta^\mu + \omega \xi^\mu) = -(\eta_\mu + \omega \xi_\mu) (\eta^\mu + \omega \xi^\mu). \end{aligned} \quad (4.2)$$

4.1 3+1 dekompozice cirkulárních prostoročasů

Jelikož je prostoročas (nebo jeho oblast) cirkulární, je přirozené první dekompozici formulovat vzhledem k nadplochám konstantního Killingova času t . Normála je pak reprezentována (normalizovanou) komponentou η^ν kolmou k ξ^ν , tj. vektorem

$$n^\mu = N^{-1} \left(\delta_\nu^\mu - \frac{\xi^\mu \xi_\nu}{\xi^\kappa \xi_\kappa} \right) \eta^\nu = N^{-1} (\eta^\mu + \omega \xi^\mu). \quad (4.3)$$

V tomto výsledku opět poznáváme vlastnosti Kerrova řešení. Toto pole je totiž tečné k ZAMO kongruenci, má tedy axiální úhlovou rychlost $\Omega = \frac{d\phi}{dt} = \omega$. Dále zjišťujeme $\epsilon = g_{\mu\nu} n^\mu n^\nu = -1$ a

$$a_\mu = n_{\mu;\nu} = \frac{N_{|\mu}}{N} = \frac{N_{;\mu}}{N}. \quad (4.4)$$

Přímým dosazením také zjistíme:

$$\begin{aligned} n_\alpha \eta^\alpha &= -N, & n_\alpha \xi^\alpha &= 0, & a_\alpha \eta^\alpha &= 0, \\ a_\alpha \xi^\alpha &= 0, & h_\nu^\mu \eta^\nu &= -\omega \xi^\mu, & h_\nu^\mu \xi^\nu &= \xi^\mu. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Také, jelikož je n^μ definováno pomocí Killingových vektorů, musí pro každý skalár X vyjádřený pomocí Killingových vektorů platit $X_{|\mu} = X_{,\mu}$.

Tenzor vnější křivosti získáme přímým dosazením vztahů (4.5) ve tvaru

$$\begin{aligned} K_{\mu\nu} &= n_{\alpha;\beta} h_\mu^\alpha h_\nu^\beta = N^{-1} \left[-N_{;(\beta} n_{\alpha)} + \eta_{(\alpha;\beta)} + \omega \xi_{(\alpha;\beta)} + \omega_{;(\beta} \xi_{\alpha)} \right] h_\mu^\alpha h_\nu^\beta \\ &= N^{-1} \xi_{(\mu} \omega_{|\nu)} = N^{-1} \xi_{(\mu} \omega_{,\nu)}, \end{aligned} \quad (4.6)$$

jehož významnou vlastností je, že má **nulovou stopu**

$$K = K_{\mu\nu} h^{\mu\nu} = N^{-1} \omega_{,\nu} \xi^\nu = 0. \quad (4.7)$$

Poslední rovnost platí kvůli axiální symetrii - metrika nesmí být funkcí ϕ . To znamená, že expanzní skalár ZAMO kongruence je nulový, a tedy expanzní tenzor (vnější křivost) je identická tenzoru smyku - viz dekompozice (2.12), kde $u_\mu \rightarrow n_\mu$. Uvedme ještě explicitně, že ze stacionarity platí také $\omega_{,\mu} \eta^\mu = 0$, čehož využijeme dohromady s axiální symetrií a vztahy (4.5) pro získání:

$$K_{\mu\nu} \eta^\nu = (2N)^{-1} g_{t\phi} \omega_{,\mu}, \quad K_{\mu\nu} \xi^\nu = (2N)^{-1} g_{\phi\phi} \omega_{,\mu}, \quad K_{\mu\nu} a^\nu = (2N)^{-1} \omega_{,\beta} a^\beta \xi_\mu, \quad (4.8)$$

$$K_{\mu\nu} \eta^\mu \eta^\nu = 0, \quad K_{\mu\nu} \xi^\mu \xi^\nu = 0, \quad K_{\mu\nu} \eta^\mu \xi^\nu = 0, \quad K_{\mu\nu} a^\mu a^\nu = 0. \quad (4.9)$$

Tyto vztahy explicitně udávají komponenty kontravariantního vyjádření vnější křivosti. Pro "časové" komponenty platí $K^{tj} = K^{jt} = 0$, a "prostorové" komponenty K^{ij} mají velice jednoduchý tvar,

$$K^{ij} = \frac{1}{2N} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \omega^{,1} \\ 0 & 0 & \omega^{,2} \\ \omega^{,1} & \omega^{,2} & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.10)$$

z něhož jde vidět, že tenzor vnější křivosti **není nulový**, ale má **nulový determinant**, tedy

$$\det(K_\beta^\alpha) = 0. \quad (4.11)$$

Nulovost tenzoru vnější křivosti lze zajistit *pouze ve statické limitě* $\omega = 0$.

Dále budeme potřebovat rozklady kontrakcí vnější křivosti. Ze vztahů (4.8) a (4.9) získáme

$$2K_{\alpha\gamma} K_\beta^\gamma = \frac{1}{2N^2} (g_{\phi\phi} \omega_{,\alpha} \omega_{,\beta} + \omega_{,\gamma} \omega^{,\gamma} \xi_\alpha \xi_\beta), \quad (4.12)$$

$$K_{\alpha\gamma} K^{\alpha\gamma} = \frac{g_{\phi\phi}}{2N^2} \omega_{,\gamma} \omega^{,\gamma}, \quad (4.13)$$

$$K_{\alpha\beta} K^{\beta\gamma} K_{\gamma\delta} K^{\delta\alpha} = \frac{1}{2} \left(\frac{g_{\phi\phi}}{2N^2} \omega_{,\gamma} \omega^{,\gamma} \right)^2 = \frac{1}{2} (K_{\mu\nu} K^{\mu\nu})^2. \quad (4.14)$$

Pro gradient vnější křivosti máme:

$$\begin{aligned} K_{\mu\nu;\gamma} &= -\frac{N_{;\gamma}}{N} K_{\mu\nu} + \frac{1}{N} \xi_{(\mu} \omega_{;\nu)\gamma} + \frac{1}{N} \omega_{,(\nu} \xi_{\mu);\gamma} \\ &= -K_{\mu\nu} a_\gamma + \frac{\omega_{;\gamma} \nu \xi_\mu}{N} - \frac{\xi_{\gamma;(\mu} \omega_{;\nu)}}{N}. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Tento výsledek spočteme podél normály a zprojektujeme na Σ_t . Díky symetriím ($n^\sigma \omega_{,\sigma} = n^\sigma \xi_\sigma = 0$) zjistíme, že

$$h_\alpha^\mu h_\beta^\nu K_{\mu\nu;\gamma} n^\gamma = \frac{1}{2N^2} (g_{\phi\phi} \omega_{,\alpha} \omega_{,\beta} - \omega_{,\gamma} \omega^{,\gamma} \xi_\alpha \xi_\beta). \quad (4.16)$$

Tento výraz společně s podmínkou nulovosti tenzoru vorticity čtyř-zrychlení (2.44) a $K = 0$ ihned využijeme, neboť vystupují v rovnicích normálové změny (2.37). Dostáváme

$$\begin{aligned} {}^{(3)}R_{\nu\lambda} &\stackrel{*}{=} a_{\nu|\lambda} + a_\nu a_\lambda - K K_{\nu\lambda} - h_\nu^\beta h_\lambda^\delta K_{\beta\delta;\gamma} n^\gamma \\ &= a_{\nu|\lambda} + a_\nu a_\lambda - h_\nu^\beta h_\lambda^\delta K_{\beta\delta;\gamma} n^\gamma \\ &= \frac{N_{|\mu\nu}}{N} - \frac{1}{2N^2} (g_{\phi\phi} \omega_{,\alpha} \omega_{,\beta} - \omega_{,\gamma} \omega^{,\gamma} \xi_\alpha \xi_\beta). \end{aligned} \quad (4.17)$$

Díky nulové stopě vnitřní křivosti se výrazně zjednoduší i vazba na hybnost (2.38),

$$K_{\kappa|\lambda}^\lambda \stackrel{*}{=} K_{|\kappa} \equiv 0. \quad (4.18)$$

Zjednoduší se i vazba hamiltonovská (2.39) a požadavek (4.19) zajišťující správnost kontrakce $h^{\mu\nu} {}^{(3)}R_{\mu\nu} = {}^{(3)}R$, ta mají po dosazení (4.12) a $K = 0$ tvar

$$a^\delta_{;\delta} = a^\lambda_{|\lambda} + a^\lambda a_\lambda \left. \vphantom{a^\delta_{;\delta}} \right\} \stackrel{*}{=} K_\kappa^\lambda K_\lambda^\kappa + K_{,\gamma} n^\gamma = K_\kappa^\lambda K_\lambda^\kappa = \frac{g_{\phi\phi}}{2N^2} \omega_{,\gamma} \omega^{,\gamma}. \quad (4.19)$$

4.2 2+1 dekompozice nadploch Σ_t

V této podkapitole provedeme 2+1 dekompozici nadploch Σ_t . V literatuře bývá běžné volit první foliaci $t = \text{konst}$ a následovně druhou foliaci zavést jako $\phi = \text{konst}$. Tento přístup aplikovaný na obecný necirkulární prostoročas lze najít například v [18], dále pro nestatický ortogonálně tranzitivní prostoročas pak v kap. 3 [19] a sekci 7.2 [20]. Námi zvolenou foliací nadploch Σ_t však budou plochy konstantní Lapse funkce, tj. $N = \text{konst}$, které označíme Σ_{tN} . Tento přístup byl užit pro případ *statických* prostoročasů např. v Israelově článku [4], dále například v sekcích 2.6 a 9.1 knihy [19] a sekci 7.2 knihy [20].

V zavedení vektoru r_α , podél kterého budeme dekompozici provádět, potřebujeme zachytit kolmost k plochám $N = \text{konst}$. Volíme jej tedy jako normovaný 3D gradient Lapse funkce. Označme $\kappa^2 := h^{\mu\nu} N_{|\mu} N_{|\nu} = N^2 a_\mu a^\mu$. Těto veličině (v první mocnině) se říká *graviční zrychlení* a *na horizontu* je konstantní, tam nese jméno *povrchová gravitace*, viz sekce 19.4 [8]. K plochám $N = \text{konst}$ tedy definujeme ortonormální vektor

$$r_\alpha = \frac{N_{|\alpha}}{\sqrt{h^{\mu\nu} N_{|\mu} N_{|\nu}}} = \frac{N_{|\alpha}}{\kappa} = \frac{N a_\alpha}{\kappa}, \quad (4.20)$$

který je prostorupodobný, a tedy jej normujeme na kladnou jednotku: $\zeta = +1$. Dále vyjádříme 2D metriku, čtyř-zrychlení b_μ vektoru r_μ a vnější křivost Σ_{tN} ploch:

$$\begin{aligned} f_{\mu\nu} &= h_{\mu\nu} - r_\mu r_\nu = g_{\mu\nu} + n_\mu n_\nu - r_\mu r_\nu, \\ b_\mu &= r_{\alpha|\beta} r^\beta, \quad k_{\mu\nu} = r_{\alpha|\beta} f_\mu^\alpha f_\nu^\beta. \end{aligned} \quad (4.21)$$

Z toho plynou ortogonální vztahy

$$\begin{aligned} b_\mu a^\mu &= r_{\mu|\sigma} r^\sigma a^\mu = \left(\frac{N_{|\mu\sigma}}{\kappa} - \frac{N_{|\mu}}{\kappa^2} \kappa_{|\sigma} \right) \frac{N^{|\sigma}}{\kappa} \frac{N_{|\mu}}{N} \\ &= \frac{N_{|\mu\sigma} N^{|\mu} N^{|\sigma}}{N \kappa^2} - \frac{N_{|\mu\sigma} N^{|\mu} N^{|\sigma}}{N \kappa^4} N_{|\iota} N^{|\iota} = 0, \end{aligned} \quad (4.22)$$

$$f_{\mu\nu} a^\nu = a_\mu - \frac{N_{|\mu} N_{|\nu} N^{|\nu}}{N \kappa^2} = a_\mu - a_\mu = 0, \quad k_{\mu\nu} a^\nu = 0. \quad (4.23)$$

Jelikož je r^α zadán pomocí derivací Lapse funkce, která “respektuje” symetrie, platí:

$$r_\mu \eta^\mu = 0, \quad r_\mu \xi^\mu = 0, \quad b_\mu \eta^\mu = 0, \quad b_\mu \xi^\mu = 0, \quad (4.24)$$

$$f_\sigma^\mu \eta^\sigma = -\omega \xi^\mu, \quad f_\sigma^\mu \xi^\sigma = \xi^\mu. \quad (4.25)$$

Determinanty metrik g , h a f jsou svázány vztahem (viz [3] rce 4.50 - 4.55)

$$-g = N^2 h = \frac{N^2}{\kappa^2}, \quad (4.26)$$

pomocí kterého vyjádříme metriku náležící plochám Σ_{tN} jako

$$\begin{aligned} ds^2|_{\Sigma_{tN}} &= g_{\phi\phi} d\phi^2 \left[g_{\theta\theta} + g_{rr} \left(\frac{dr}{d\theta} \right)_{N=\text{konst}}^2 \right] d\theta^2 \\ &= g_{\phi\phi} d\phi^2 + \frac{\det(g_{AB})}{(N_{,r})^2} \kappa^2 d\theta^2. \end{aligned} \quad (4.27)$$

V analogii se sekci 3.2 uvedeme některé formulace pro čtyř-zrychlení b_α normály r_α , vnější křivost ploch Σ_{tN} a z ní vzniklé stopy. Pro čtyř-zrychlení b_α máme

$$\begin{aligned} b_\alpha &= r_{\alpha|\delta} r^\delta (= r_{\alpha;\delta} r^\delta) = \frac{N_{|\beta\delta}}{\kappa} f_\alpha^\beta r^\delta \\ &= \frac{(N_{|\delta} N^{|\delta})_{|\beta}}{2\kappa^2} f_\alpha^\beta = \frac{\kappa_{|\beta}}{\kappa} f_\alpha^\beta \left(= \frac{\kappa_{;\beta}}{\kappa} f_\alpha^\beta \right) = \frac{\kappa_{\parallel\alpha}}{\kappa}. \end{aligned} \quad (4.28)$$

Pro vnější křivost pak

$$k_{\mu\nu} = r_{\alpha|\delta} f_\mu^\alpha f_\nu^\delta = r_{\alpha;\delta} f_\mu^\alpha f_\nu^\delta = \frac{N_{|\beta\delta}}{\kappa} f_\mu^\beta f_\nu^\delta = \frac{N_{;\beta\delta}}{\kappa} f_\mu^\beta f_\nu^\delta, \quad (4.29)$$

z čehož vyjádříme stopu:

$$k = f^{\mu\nu} k_{\mu\nu} = r_{\alpha|\delta} f^{\alpha\delta} = r_{\alpha;\delta} f^{\alpha\delta} = \frac{N_{|\beta\delta}}{\kappa} f^{\beta\delta} = \frac{N_{;\beta\delta}}{\kappa} f^{\beta\delta}. \quad (4.30)$$

Pozor, stopa 2D vnější křivosti *není nulová*, jako tomu bylo v případě 3+1 dekompozice (tam stopa tenzoru vnější křivosti K vymizela). Konkrétně:

$N_{|\beta\delta} f_\mu^\beta f_\nu^\delta \neq N_{\parallel\mu\nu} \equiv 0$. $N_{|\beta}$ totiž *není* obecně z kotečného bandlu $\Gamma^*\Sigma_{tN}$:

$$N_{|\beta} = N_{;\beta} \equiv N_{,\beta}, \text{ avšak } N_{\parallel\beta} = N_{|\iota} h_\beta^\iota \equiv N_{|\beta} - N_{|\iota} r^\iota r_\beta \equiv N_{,\beta} - N_{,\iota} r^\iota r_\beta.$$

Zaměříme se nyní na podmínku nulovosti tenzoru vorticity pro čtyř-zrychlení b_μ . Situace zde je analogická s otázkou, kterou jsme si položili koncem odstavce o obecné 3+1 dekompozici, jejíž odpověď byla podána ve formě vztahů (2.44). Zde roli normalizačního faktoru N (3D) čtyř-zrychlení a_ν hraje normalizační faktor κ (2D) čtyř-zrychlení b_ν . Roli znaménka normály $\epsilon = -1$ zde hraje $\zeta = +1$. Z posledního vyjádření v sérii rovnic (4.28) vidíme:

$$\begin{aligned} b_{\nu\parallel\lambda} + b_\nu b_\lambda &= \frac{\kappa_{\parallel\nu\lambda}}{\kappa} \iff b_{\nu\parallel\lambda} - b_\nu b_\lambda = -\frac{(\kappa^{-1})_{\parallel\nu\lambda}}{\kappa^{-1}}, \\ b^\delta_{\parallel\delta} + b^\delta b_\delta &= \frac{\kappa_{\parallel\delta}^\delta}{\kappa} \iff (b^\delta_{|\delta} =) b^\delta_{\parallel\delta} - b^\delta b_\delta = -\frac{(\kappa^{-1})_{\parallel\delta}^\delta}{\kappa^{-1}}. \end{aligned} \quad (4.31)$$

Závěr

Kapitolu 1 této bakalářské práce jsme dedikovali (zejména) Kerrovu řešení Einsteinových rovnic. Zde jsme se účelně věnovali vlastnostem ZAMO kongruence, která byla ilustračním příkladem napříč celou prací. V kapitole 2 jsme uvedli definice a některé vlastnosti tenzorů podstatných pro kinematický popis kongruencí světočar, podstatné zde byly tenzory expanze a vorticity. Dále jsme se věnovali 3+1 dekompozici prostoročasu a zejména velký důraz jsme kladli na ilustrace geometrické signifikance tenzoru vnější křivosti a jeho interpretacím v pojmech dobře známých z analýzy na varietách. Po uvedení vakuového tvaru rovnic a s ním souvisejících podmínek jsme v 3+1 režimu provedli obecnou dekompozici Kretschmannova skaláru a tu pro případ vakua výrazně zjednodušili. V kapitole 3 jsme 3D nadplochy vzniklé první dekompozicí dále rozložili bez reference na konkrétní kongruenci a podařilo se nám získat částečné zjednodušení $(2+1)+1$ dekompozice Kretschmannova skaláru. Všechny tyto výsledky byly implementovány a ověřeny v prostředí Wolfram Mathematica.

Jmenovitě vnější křivost a její derivace jsme však do režimu $(2+1)+1$ nerozložili. Zřejmě jedinou chybějící částí pro vyjádření úplné vakuové $(2+1)+1$ dekompozice Kretschmannova skaláru je právě dekompozice zmíněných derivací a případné finální úpravy vzniklého výrazu. Jednou z těchto úprav zřejmě bude zjednodušit členy obsahující vnější křivost vzniklé z vyjádření $(2+1)$ Ricciho rovnice do tvaru determinantu 2D vnější křivosti.

V kapitole věnované cirkulárním prostoročasům jsme po provedení 3+1 dekompozice podél nadploch konstantního Killingova času zjistili, že vnější křivost má nulový determinant a nulovou stopu. To je významným výsledkem, neboť obecná 3+1 dekompozice Kretschmannova skaláru oba tyto členy obsahuje. Další zjednodušení dekompozice nastane vlivem jednoduchosti kontravariantního vyjádření vnější křivosti. Některé z členů 3+1 a $(2+1)+1$ dekompozic jsme explicitně vyjádřili pomocí veličin významných pro cirkulární prostoročasy. Implementace této části práce do software Wolfram Mathematica však zatím neproběhla.

Pro budoucí pokračování ve výzkumu se zaměříme na $(2+1)$ dekompozice vnější křivosti a jí příslušejících derivací. Jejich získání by poskytlo možnost kompletního vyjádření $(2+1)+1$ dekompozice Kretschmannova skaláru. Touto linií dalšího výzkumu v principu lze dosáhnout za užití zde získaných výsledků i dekompozice Chernova-Pontryaginova skaláru a zbylých dvou ve vakuu netriviálních kubických skalárů vzniklých z vnitřních součinů Riemannova tenzoru a jeho levého duálu, které jsme zmínili v úvodu. Tím by vznikla sada $(2+1)+1$ dekompozic všech netriviálních skalárů pro vakuovou oblast prostoročasu, která by mohla být využita k získání dalších teoretických výsledků při aplikaci na konkrétní prostoročasy, či k numerické implementaci. Teorie zahrnující dekompozice v kapitolách 2 a 3 byla vypracována jen pro kongruence časupodobné a prostorupodobné - kongruencím světelným jsme se nevěnovali. Pojem kolmosti ke světelné kongruenci není jednoznačný, formalismus 3+1 dekompozice tedy nelze pro případ světelných kongruencí využít, avšak se zavedením pomocného nulového pole lze dojít k tzv. 2+2 dekompozici. Rozložení všech zmíněných skalárů tímto způsobem skýtá další možné navázání na naši práci.

Pro dokončení $(2+1)+1$ dekompozice Kretschmannova skaláru v cirkulárních prostoročasech je, kromě vypracování výše zmíněné obecné teorie, třeba najít vhodné vyjádření všech členů v ní vystupujících. V principu je pak možné volit dekompozice jinak - další přirozenou volbou je druhou dekompozici vybrat jako $\kappa = \text{konst}$, tj. plochy konstantního gravitačního zrychlení.

Potenciální využití dále skýtá i algebraický balíček xAct, konkrétně jeho “pod” balíček xCoba, který lze využít (nejen) ke kontrole kapitoly 4. Wolfram Mathematica a xAct se jeví jako silný nástroj pro symbolické výpočty. Po překonání strmé učící křivky jsme byli efektivitou xActu překvapeni, jmenovitě jednoduchostí získání všech $3+1$ dekompozic. Další z nevýhod tohoto balíčku je - kromě zmíněné strmé učící křivky - absence implementace $(2+1)+1$ dekompozice, která naši práci značně zpomalila. Po vytvoření všech pravidel potřebných k implementaci $(2+1)+1$ dekompozice však xAct hodnotíme jako velmi vhodný nástroj pro případné další pokračování ve výzkumu.

Seznam použité literatury

- [1] Charles W. Misner. *Gravitation*. W. H. Freeman, 1973.
- [2] Oldřich Semerák. On curvature decomposition in circular space-times (Unpublished Research). 2013.
- [3] Ericourgoulhon. *3+1 Formalism in General Relativity*. Springer Berlin Heidelberg, 2012.
- [4] Werner Israel. Event Horizons in Static Vacuum Space-Times. *Physical Review*, 164(5):1776–1779, 1967.
- [5] Oldřich Semerák. K některým vlastnostem polí černých děr, 2009. DSc thesis.
- [6] Valeria Ferrari, Leonardo Gualtieri, and Paolo Pani. *General Relativity and Its Applications Black Holes, Compact Stars and Gravitational Waves*. Taylor & Francis Group, 2020.
- [7] Eric Poisson. *A Relativist's Toolkit*. Cambridge University Press, 2004.
- [8] Jiří Bičák and Oldřich Semerák. RELATIVISTIC PHYSICS lecture notes for a course taught at Prague math-phys, 2023. Accessible at <http://utf.mff.cuni.cz/semerak/GTR.pdf>.
- [9] Marián Fecko. *Differential Geometry and Lie Groups for Physicists*. Cambridge University Press, 2011.
- [10] Sean M. Carroll. *Spacetime and Geometry*. Benjamin Cummings, 2003.
- [11] Wolfram Research, Inc. Mathematica, Version 13.3, 2023. Champaign, IL.
- [12] José M. Martín-García, Alfonso García-Parrado, Alessandro Stecchina, Barry Wardell, Cyril Pitrou, David Brizuela, David Yllanes, Guillaume Faye, Leo Stein, Renato Portugal, Teake Nutma, and Thomas Bäckdahl. xAct: Efficient tensor computer algebra for the Wolfram Language. Official documentation package webpage: online, 2002-2022. xact: Efficient tensor computer algebra for the wolfram language.
- [13] José M. Martín-García, Alfonso García-Parrado, Alessandro Stecchina, Barry Wardell, Cyril Pitrou, David Brizuela, David Yllanes, Guillaume Faye, Leo Stein, Renato Portugal, Teake Nutma, and Thomas Bäckdahl. xAct‘xTensor’. Official documentation package, online, 2002-2022. Accessible at: <http://www.xact.es/Documentation/PDF/xTensorDoc.nb.pdf>.
- [14] José M. Martín-García, Alfonso García-Parrado, Alessandro Stecchina, Barry Wardell, Cyril Pitrou, David Brizuela, David Yllanes, Guillaume Faye, Leo Stein, Renato Portugal, Teake Nutma, and Thomas Bäckdahl. xAct‘xCoba’. Official documentation package, online, 2002-2022. Accessible at: <http://www.xact.es/Documentation/PDF/xCobaDoc.nb.pdf>.

- [15] José M. Martín-García, Alfonso García-Parrado, Alessandro Stecchina, Barry Wardell, Cyril Pitrou, David Brizuela, David Yllanes, Guillaume Faye, Leo Stein, Renato Portugal, Teake Nutma, and Thomas Bäckdahl. xAct’xTras’. Official documentation package, online, 2002-2022. Accesible at: <http://www.xact.es/xtras/documentation/guide/xTras.html>.
- [16] José M. Martín-García. xPerm: fast index canonicalization for tensor computer algebra. *Computer Physics Communications*, 179(8):597–603, 2008.
- [17] José M. Martín-García. The Invar tensor package. *Computer Physics Communications*, 177(8):640–648, 2007.
- [18] Eric Gourgoulhon and Silvano Bonazzola. Noncircular axisymmetric stationary spacetimes. *Physical Review D*, 48(6):2635–2652, 1993.
- [19] Markus Heusler. *Black Hole Uniqueness Theorems*. Cambridge University Press, 1996.
- [20] Norbert Straumann. *General Relativity With Applications to Astrophysics*. Springer Berlin / Heidelberg, 2010.