MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ
FAKULTA
Univerzita Karlova

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Ondřej Macháč

Klasifikace konečně dimenzionálních modulů nad řetězcovými algebrami

Katedra algebry

Vedoucí bakalářské práce: doc. RNDr. Jan Šťovíček, Ph.D.
Studijní program: Obecná matematika
Studijní obor: Obecná matematika

Praha 2023

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů. Tato práce nebyla využita k získání jiného nebo stejného titulu.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V .... dne ....

Podpis autora

Za ochotu, čas mně věnovaný a velmi cenné rady při vedení práce bych chtěl poděkovat doc. RNDr. Janu Šťovíčkovi, Ph.D. Krátkost tohoto poděkování nevyjadřuje míru radosti ze spolupráce.

Dále bych chtěl poděkovat rodičům za podporu a jejich pochopení.

Název práce: Klasifikace konečně dimenzionálních modulů nad řetězcovými algebrami

Autor: Ondřej Macháč

Katedra: Katedra algebry

Vedoucí bakalářské práce: doc. RNDr. Jan Šťovíček, Ph.D., katedra algebry

Abstrakt: V této práci klasifikujeme nerozložitelné konečně dimenzionální moduly nad řetězcovými algebrami. V úvodní části definujeme řetězcové algebry a řetězcové a náramkové moduly. Ve třetí kapitole dokážeme klasifikační větu a zavedeme funktory z této věty. Ve čtvrté a páté kapitole ověřujeme vlastnosti funktorů s ohledem na řetězcové, respektive náramkové moduly. V poslední kapitole ukážeme, že tyto funktory stačí a dokážeme zbývající předpoklady hlavní věty. Nakonec ukážeme příklady klasifikace.

Klíčová slova: řetězcová algebra, teorie reprezentací, funktorová filtrace

Title: Classification of finite dimensional modules over string algebras

Author: Ondřej Macháč

Department: Department of algebra

Supervisor: doc. RNDr. Jan Šťovíček, Ph.D., department of algebra

Abstract: In this thesis we classify indecomposable finite dimensional modules over string algebras. In the introductory part we define string algebras and string modules and band modules. In the third chapter we prove the classification theorem and define functors used. In the fourth and fifth chapter we verify assumptions on the functors regarding string modules or band modules, respectively. In the last chapter we show that these functors are sufficient and we finish proofs of all the remaining assumptions of the main theorem. At last we show examples of classification.

Keywords: string algebra, representation theory, functor filtration

Obsah

Úvod

V této práci podrobně rozpracujeme výsledek klasifikace konečně dimenzionálních modulů nad řetězcovými algebrami, se kterou přišel Butler a Ringel v [1], avšak vypouštíme podmínku na konečnost dimenze algebry.

Již dříve přišel Ringel v [2] v roce 1975 s klasifikací pro speciální případ, řetězcovou algebru $k\langle x,y\rangle/\langle x^2, y^2\rangle$ (x a y nekomutují). Využíval přitom metody funktorové filtrace, jejíž autorství připisuje Gel'fandu a Ponomarevovi z [3]. Později, v roce 1987, Butler a Ringel používají v [1, str. 161] obecnější klasifikaci nad konečně dimenzionálními řetězcovými algebrami. Důkaz této klasifikace je však velmi zkratkovitý a vynechává podstatné detaily; bez dalších podrobností se odkazuje na předchozí specicální případ. Cílem této práce je podat ucelený důkaz klasifikace z [1], navíc rozšířenou o nekonečně dimenzionální řetězcové algebry.

Ringelovy myšlenky procházejí i v našem obecnějším případě, neboť lokálně obecný případ vypadá podobně jako v $k\langle x,y\rangle/\langle x^2, y^2\rangle$, avšak nemáme zaručenu existenci vhodných šipek, což nás nutí postupovat obezřetněji.

Celá klasifikace stojí na větě 3. Její důkaz není obtížný, většina práce je s ověřováním předpokladů této věty.

1. Úvodní definice

1.1 Řetězcové algebry a řetězce

Toulec Q definujeme jako čveřici (Q_0,Q_1,s,t), kde Q_0 je konečná množina vrcholů, Q_1 je konečná množina šipek, a kde dovolujeme libovolné množství šipek mezi dvěma vrcholy i smyček na jednom vrcholu. Funkce s,t : $Q_1 \cup Q_0 \to Q_0$ udávají počáteční, respektive koncové vrcholy šipek, tedy pro šipku $\alpha \in Q_1$ z v do w máme $s(\alpha) = v$ a $t(\alpha) = w$, a pro vrchol $v \in Q_0$ máme $s(v) = t(v) = v$. Šipku α, kde $s(\alpha) = v$ a $t(\alpha) = w$ budeme občas značit $\alpha : v \to w$.

Cestou délky k v Q, kde $k \geq 1$, rozumíme posloupnost $C = \alpha_1 \cdots \alpha_k$ šipek z Q_1, kde $s(\alpha_{i-1}) = t(\alpha_i)$ pro $i \in \{2, \ldots, k\}$. Cestou délky nula v Q rozumíme posloupnost $C = v$, kde $v \in Q_0$ a klademe $v\alpha = \alpha$, pokud $t(\alpha) = v$, a analogicky klademe $\alpha v = \alpha$, pokud $s(\alpha) = v$, kde $v \in Q_0$ a $\alpha \in Q_1$. Funkce s a t rozšíříme na cestách předpisy $s(C) = s(\alpha_n)$ a $t(C) = t(\alpha_1)$.

Na toulci Q definujeme pro těleso k *algebru cest* kQ, kde prvky algebry jsou formální lineární kombinace cest, tedy

$$kQ = \left\{ \sum_{C \text{ cesta}} \lambda C : \lambda \in k, C \text{ cesta v } Q \right\},$$

kde pro cesty $C = \alpha_1 \cdots \alpha_n$ a $D = \beta_{n+1} \cdots \beta_m$ definujeme skládání cest

$$CD = \begin{cases} \alpha_1 \cdots \alpha_n \beta_{n+1} \cdots \beta_m & \text{pokud } t(D) = s(C), \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Tuto definici skládání lineárně rozšíříme.

Šipkovým ideálem v kQ rozumíme ideál $R_Q = \langle Q_1 \rangle$. Pro faktoralgebru kQ/I, kde $I \subseteq R_Q^2$, budeme ztotožňovat Q_0 s $\{v + I : v \in Q_0\}$ a také Q_1 s $\{\alpha + I : \alpha \in Q_1\}$.

Definice 1. *Řekneme, že kQ/I je* řetězcová algebra*, pokud I je ideál generovaný cestami, kde $I \subseteq R_Q^2$, a navíc platí*

1. *$\forall v \in Q_0$ existují nejvýše dvě šipky s počátečním vrcholem v,*
2. *$\forall v \in Q_0$ existují nejvýše dvě šipky s koncovým vrcholem v,*
3. *$\forall \alpha \in Q_1$ existuje nejvýše jedna šipka β tak, že $s(\alpha) = t(\beta)$ a $\alpha\beta \notin I$,*
4. *$\forall \alpha \in Q_1$ existuje nejvýše jedna šipka β tak, že $s(\beta) = t(\alpha)$ a $\beta\alpha \notin I$.*

Pro tuto algebru si definujeme libovolné pomocné funkce $\sigma, \varepsilon : Q_1 \to \{-1, 1\}$ takové, že pro každé α,$\beta \in Q_1$ platí

1. pokud $\alpha \neq \beta$ a $s(\alpha) = s(\beta)$, pak $\sigma(\alpha) = -\sigma(\beta)$,
2. pokud $\alpha \neq \beta$ a $t(\alpha) = t(\beta)$, pak $\varepsilon(\alpha) = -\varepsilon(\beta)$,
3. pokud $s(\alpha) = t(\beta)$ a $\alpha\beta \notin I$, pak $\sigma(\alpha) = -\varepsilon(\beta)$.

Tyto funkce σ a ε nám zachycují podmínky definice řetězcové algebry.

Pro šipky $\alpha \in Q_1$ definujeme formální inverzy α^{-1}. Již definované funkce dodefinujeme následovně:

$$\begin{gathered}(\alpha^{-1})^{-1} = \alpha,\\ s(\alpha^{-1}) = t(\alpha) \quad \text{a} \quad t(\alpha^{-1}) = s(\alpha),\\ \sigma(\alpha^{-1}) = \varepsilon(\alpha) \quad \text{a} \quad \varepsilon(\alpha^{-1}) = \sigma(\alpha).\end{gathered}$$

Označme množinu formálních inverzů $Q_1^{-1} = \{\alpha^{-1} : \alpha \in Q_1\}$ disjuktní s Q_1. Prvkům množiny $Q_1 \cup Q_1^{-1}$ budeme říkat *písmena*, prvkům z Q_1 *přímá písmena* a konečně prvkům z Q_1^{-1} budeme říkat *inverzní písmena*.

Definice 2. *Řekneme, že posloupnost písmen $\alpha_1 \cdots \alpha_n$ je* řetězec*, pokud*

1. $s(\alpha_{i-1}) = t(\alpha_i) \quad \forall i \in \{2, \ldots, n\}$,
2. $\alpha_{i-1} \neq \alpha_i^{-1} \quad \forall i \in \{2, \ldots, n\}$,
3. *neexistuje podposloupnost $\alpha_j \cdots \alpha_i, 1 \leq j < i \leq n$, taková, že $\alpha_j \cdots \alpha_i \in I$ nebo $\alpha_i^{-1} \cdots \alpha_j^{-1} \in I$.*

Pro řetězce $C = \alpha_1 \cdots \alpha_n$ dodefinujeme funkce následovně:

$$\begin{gathered}C^{-1} = \alpha_n^{-1} \cdots \alpha_1^{-1},\\ s(C) = s(\alpha_n) \quad \text{a} \quad t(C) = t(\alpha_1),\\ \sigma(C) = \sigma(\alpha_n) \quad \text{a} \quad \varepsilon(C) = \varepsilon(\alpha_1).\end{gathered}$$

Pro řetězce $C = \alpha_1 \cdots \alpha_n$ a $D = \beta_{n+1} \cdots \beta_m$ definujeme složení $CD = \alpha_1 \cdots \alpha_n \beta_{n+1} \cdots \beta_m$ pokud je tato posloupnost také řetězec. Nakonec pro každý vrchol $v \in Q_0$ definujeme *dva* řetězce nulové délky $1_{(v,i)}$, kde $i \in \{-1,1\}$, a pokládáme

$$\begin{gathered}s(1_{(v,i)}) = t(1_{(v,i)}) = v,\\ \sigma(1_{(v,i)}) = -i \quad \text{a} \quad \varepsilon(1_{(v,i)}) = i,\\ 1_{(v,i)}^{-1} = 1_{(v,-i)},\\ 1_{(v,i)}C = C, \text{ pokud } t(C) = v, \varepsilon(C) = i, \text{ kde } C \text{ je řetězec},\\ C1_{(v,i)} = C, \text{ pokud } s(C) = v, \sigma(C) = -i, \text{ kde } C \text{ je řetězec}.\end{gathered}$$

Pro potřebu šesté kapitoly budeme krátce uvažovat nekonečné řetězce tvaru $C = \alpha_1\alpha_2 \cdots$, kde pro každé $n \in \mathbb{N}$ označujeme řetězce $C_{[n]} = \alpha_1 \cdots \alpha_n$ a $C^{[n]} = \alpha_{n+1}\alpha_{n+2} \cdots$ tak, že $C = C_{[n]}C^{[n]}$.

Řekneme, že konečný řetězec C je *cyklický*, pokud pro každé $n \in \mathbb{N}$ existuje řetězec C^n. Řekneme, že cyklický řetězec délky alespoň 1 je *primitivní*, pokud neexistuje řetězec D takový, že $C = D^n$ pro nějaké $n \in \mathbb{N}$. Množinu konečných řetězců (včetně těch nulové délky) budeme značit $\mathcal{W}$, množinu primitivních cyklických řetězců budeme značit $\mathcal{W}'$, množinu nekonečných řetězců budeme značit $\mathcal{W}^\infty$. Dále budeme značit $\mathcal{W}_{v,i} = \{C \in \mathcal{W} : \varepsilon(C) = i \text{ a } t(C) = v\}$ a $\mathcal{W}'_{v,i} = \{C \in \mathcal{W}' : \varepsilon(C) = i \text{ a } t(C) = v\}$ pro $i \in \{-1, 1\}$ a $v \in Q_0$.

2. Řetězcové a náramkové moduly

Pro k-algebru R budeme značit R-mod kategorii konečně dimenzionálních (nad k) levých R-modulů. Dále po zbytek textu bude $A = kQ/I$ značit řetězcovou algebru. Zavedeme kategorii rep(Q,I) ekvivalentní této kategorii.

2.1 Ekvivalence A-mod a rep(Q,I)

Definice 3. *Máme-li toulec Q a těleso k, pak (konečně dimenzionální) k-lineární* reprezentací *toulce Q rozumíme dvojici $(M_v, M_\alpha)_{\alpha \in Q_1}^{v \in Q_0}$, kde*

1. *M_v je konečně dimenzionální k-vektorový prostor pro každé $v \in Q_0$,*
2. *M_α je k-lineární zobrazení $M_\alpha : M_v \to M_w$ pro každé $(\alpha : v \to w) \in Q_1$.*

Homomorfismem $\gamma : (M_v, M_\alpha)_{\alpha \in Q_1}^{v \in Q_0} \to (N_v, N_\alpha)_{\alpha \in Q_1}^{v \in Q_0}$ rozumíme soubor lineárních zobrazení $(\gamma_v : M_v \to N_v)_{v \in Q_0}$ takový, že pro každé $(\alpha : v \to w) \in Q_1$ platí $\gamma_w M_\alpha = N_\alpha \gamma_v$, neboli všechny čtverce komutují.

Řekneme, že $\rho \in kQ$ je *relace*, pokud je to prvek tvaru

$$\rho = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i C_i,$$

kde $\lambda_i \in k$ a C_i jsou cesty délky alespoň dva takové, že $s(C_1) = \cdots = s(C_n)$ a $t(C_1) = \cdots = t(C_n)$.

Poté říkáme, že reprezentace M toulce Q je podřízená ideálu I, pokud pro každou relaci $\rho \in I$ platí

$$M_\rho = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i M_{C_i} = 0,$$

kde $M_{C_i} = M_{\alpha_{i_1}} \cdots M_{\alpha_{i_m}}$ pro $C_i = \alpha_{i_1} \cdots \alpha_{i_m}$.

Kategorii (konečně dimenzionálních) k-lineárních reprezentací toulce Q podřízených ideálu I budeme značit rep(Q,I).

Věta 1. *Kategorie* rep(Q,I) *je ekvivaletní kategorii kQ/I*-mod.

Důkaz. Například v [4, Theorem III.1.6]. Podmínka $R_Q^n \subseteq I$, kterou my neuvažujeme, není potřeba.

V důsledku této věty můžeme mezi těmito dvěma pohledy volně přecházet podle toho který je v dané chvíli výhodnější.

Nyní si zavedeme řetězcové a náramkové moduly reprezentací podle [5, I.2.3].

2.2 Řetězcové moduly

Pro konečný řetězec $C = \alpha_1 \cdots \alpha_n$ definujeme A-modul $M(C)$ následující reprezentací:

Mějme funkci $e : \{0, 1, \ldots, n\} \to Q_0$,

$$e(i) = \begin{cases} t(\alpha_{i+1}) & \text{pokud } i < n, \\ s(\alpha_n) & \text{pokud } i = n. \end{cases}$$

Pro každé $v \in Q_0$ definujeme indexovou množinu $\mathcal{I}_v = \{i : e(i) = v\}$. Pak klademe pro každé $v \in Q_0$ k-vektorový prostor

$$M_v = \bigoplus_{i \in \mathcal{I}_v} ke_i.$$

Pro každé $\alpha \in Q_1$, kde $s(\alpha) = v$ a $t(\alpha) = w$, klademe matici

$$M_\alpha : \bigoplus_{i \in \mathcal{I}_v} ke_i \to \bigoplus_{j \in \mathcal{I}_w} ke_j,$$

kde

$$(M_\alpha)_{ij} = \begin{cases} \mathrm{id}_k & \text{pokud } j = i + 1 \quad \text{a} \quad \alpha = \alpha_j, \\ \mathrm{id}_k & \text{pokud } i = j + 1 \quad \text{a} \quad \alpha = \alpha_i^{-1}, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Tedy řetězcový modul definujeme podle tohoto schématu, kde pro inverzní písmena jsou šipky obrácené.

$$ke_0 \xleftarrow{\ \alpha_1\ } ke_1 \ \cdots \xleftarrow{\ \alpha_{n-1}\ } ke_{n-1} \xleftarrow{\ \alpha_n\ } ke_n$$

Příklad. Mějme Kroneckerovu k-algebru zadanou toulcem $\bullet \underset{\beta}{\overset{\alpha}{\rightrightarrows}} \circ$ a řetězec $C = \alpha\beta^{-1}\alpha\beta^{-1}$.

Pak z definice máme

$$\begin{tikzcd} & e_1 \arrow[dl, "\alpha"'] \arrow[dr, "\beta"] & & e_3 \arrow[dl, "\alpha"'] \arrow[dr, "\beta"] & \\ e_0 & & e_2 & & e_4 \end{tikzcd}.$$

Potom $M(C)$ vypadá následovně:

$$M_\bullet = ke_1 \oplus ke_3 \underset{M_\beta = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}{\overset{M_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}{\rightrightarrows}} ke_0 \oplus ke_2 \oplus ke_4 = M_\circ$$

.

2.3 Náramkové moduly

Nechť $C = \alpha_1 \cdots \alpha_n$ je cyklický řetězec, U je konečně dimenzionální k-vektorový prostor a φ je automorfismus na U. Pak definujeme náramkový A-modul $M(C,\varphi)$ následovně.

Označme pro každé $v \in Q_0$ indexovou množinu $\mathcal{I}'_v = \{i : t(\alpha_{i+1}) = v\} \subseteq \{0, 1, \ldots, n-1\}$ a U_i kopie U. Pak pro každé $v \in Q_0$ definujeme

$$B_v = \bigoplus_{i \in \mathcal{I}'_v} U_i.$$

Pro každou šipku $\alpha \in Q_1$, kde $s(\alpha) = v$ a $t(\alpha) = w$ definujeme matici

$$B_\alpha : \bigoplus_{i \in \mathcal{I}'_v} U_i \to \bigoplus_{j \in \mathcal{I}'_w} U_j,$$

kde

$$(B_\alpha)_{ij} = \begin{cases} \mathrm{id}_U & : j \equiv i+1 \bmod n, \quad j \neq 1 \ \text{ a } \ \alpha = \alpha_j, \\ \mathrm{id}_U & : i \equiv j+1 \bmod n, \quad i \neq 1 \ \text{ a } \ \alpha = \alpha_i^{-1}, \\ \varphi & : i = 0, \quad j = 1 \ \text{ a } \ \alpha = \alpha_1, \\ \varphi^{-1} & : i = 1, \quad j = 0 \ \text{ a } \ \alpha = \alpha_1^{-1}, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Tedy náramkový modul definujeme podle tohoto schématu, kde pro inverzní písmena jsou šipky obrácené.

$$\begin{tikzcd} U_0 \arrow[r, leftrightarrow, "\alpha_1 = \varphi \text{ nebo } \varphi^{-1}"] \arrow[rrrr, bend right, "\alpha_n = \mathrm{id}"'] & U_1 & \cdots & U_{n-2} \arrow[l, "\alpha_{n-2} = \mathrm{id}"'] & U_{n-1} \arrow[l, "\alpha_{n-1} = \mathrm{id}"'] \end{tikzcd}$$

Příklad. Mějme Kroneckerovu k-algebru zadanou toulcem $\bullet \overset{\alpha}{\underset{\beta}{\rightrightarrows}} \circ$. Dále mějme řetězec $C = \alpha\beta^{-1}$ a automorfismus $\varphi : k^2 \to k^2$.

Potom $M(C, \varphi)$ vypadá následovně:

$$M_\bullet = k^2 \overset{M_\alpha = \varphi}{\underset{M_\beta = \mathrm{id}}{\rightrightarrows}} k^2 = M_\circ$$

.

2.4 Ekvivalence na řetězcích

Pro pozdější potřebu klasifikace zavedeme ekvivalence na řetězcích.
Nechť $C,D \in \mathcal{W}$, pak

$$C \sim_\pm D \iff C = D \text{ nebo } C = D^{-1}.$$

Pro $C = \ell_1 \cdots \ell_n \in \mathcal{W}'$ a $i \in \{1, \ldots, n\}$ definujme

$$C_{(i)} = \ell_{i+1} \cdots \ell_n \ell_1 \cdots \ell_i.$$

Nechť $B,E \in \mathcal{W}'$, pak

$$B \sim_\pi E \iff \exists i : B \sim_\pm E_{(i)}.$$

Z konstrukcí řetězcových a náramkových modulů je zřejmé, že $M(C)$ a $M(D)$, respektive $M(C,\varphi)$ a $M(D,\varphi)$, jsou isomorfní pro C a D ze stejné ekvivalenční třídy. I pro $\varphi : V \to V$ a $\psi : V' \to V'$ isomorfní automorfismy (tedy existuje $\iota : V \to V'$ isomorfismus vektorových prostorů V a V', že $\iota\varphi = \psi\iota$) jsou moduly $M(C,\varphi)$ a $M(C,\psi)$ isomorfní.

Nyní ukážeme, že stačí uvažovat pouze náramkové moduly příslušné primitvním řetězcům.

Lemma 2. *Nechť $C = D^n$ pro nějaké $n \in \mathbb{N}$ a $D \in \mathcal{W}'$, φ je automorfismus na vektorovém prostoru V. Pak $M(C,\varphi) \simeq M(D,\psi)$ pro nějaký automorfismus ψ.*

Důkaz. Označme $D = \ell_1 \cdots \ell_k$ a $C = \ell_{1,1} \cdots \ell_{k,1} \cdots \ell_{1,n} \cdots \ell_{k,n}$, kde $\ell_i = \ell_{i,1} = \cdots \ell_{i,n}$. Z definice náramkového modulu máme $M(C,\varphi) = \bigoplus_{j\in\{1,\ldots,n\}}^{i\in\{0,\ldots,k-1\}} V_{i,j}$, kde $V_{i,j}$ jsou kopie V. Působení písmen (přesněji šipek, a to odpovídajícím způsobem) je pak definováno následovně.

$$\begin{aligned}
&\ell_{i,j} = \mathrm{id} : V_{i,j} \to V_{i-1,j}, \text{ kde } (i,j) \neq (1,1) \text{ a } i \neq k,\\
&\ell_{k,j} = \mathrm{id} : V_{0,j} \to V_{k-1,(j-1 \bmod n)},\\
&\ell_{1,1} : V_{1,1} \to V_{0,1},
\end{aligned}$$

kde $j \in \{1,\ldots,n\}$ a $\ell_{1,1} = \varphi$ nebo $\ell_{1,1} = \varphi^{-1}$, podle toho, jestli je $\ell_{1,1}$ přímé nebo nepřímé písmeno. Dále budeme značit $\ell_{1,1} = \varphi$.

Položme

$$\begin{aligned}
V'_i &= V_{i,1} \times \cdots \times V_{i,n}, \text{ kde } i \in \{1,\ldots k-1\},\\
V'_0 &= V_{0,2} \times \cdots \times V_{0,n} \times V_{0,1}.
\end{aligned}$$

Dále položme

$$\begin{gathered}
\psi : V'_1 = V_{1,1} \times \cdots \times V_{1,n} \to V'_0 = V_{0,2} \times \cdots \times V_{0,n} \times V_{0,1},\\
(v_1,\ldots,v_n) \mapsto (v_2,\ldots,v_n,\varphi(v_1))
\end{gathered}$$

automorfismus na V^n. Pak z konstrukce je zřejmé, že pro $M(D,\psi) = \bigoplus_{i=0}^{k-1} V'_i$, pošleme-li identicky $V_{i,j}$ z $M(C,\varphi)$ na $V_{i,j}$ z $M(D,\psi)$, všechny čtverce komutují a je to zřejmě skutečně isomorfismus.

□

3. Klasifikační věta

V této kapitole si vyslovíme a dokážeme klasifikační větu z [2]. Dále zavedeme potřebné definice a podrobně ukážeme trzení z [2] z kapitoly 3, které navíc zasadíme do kontextu [1] obecných řetězcových algeber.

3.1 Důkaz věty

Kategorie $\mathcal{K}$ je *abelovská*, pokud

1. má nulový objekt,
2. existují direktní sumy $a \oplus b$,
3. každý morfisus má jádro a kojádro,
4. pro každý morfismus f je $\operatorname{coker}\ker f \to \ker\operatorname{coker} f$ isomorfismus.

Tyto kategorie mají na množinách homomorfismů strukturu abelovské grupy a skládání morfismů je vůči tomuto sčítání bilineární. Více v [4, A.1.] a [6, VIII].

Řekneme, že funktor F je *aditivní*, pokud zachovává direktní sumy.

Připomeňme, že nenulový objekt M abelovské kategorie je nerozložitelný, pokud pro každé objekty P a Q takové, že $M = P \oplus Q$ platí $P = 0$ nebo $Q = 0$.

Věta 3. *Nechť I je indexová množina a máme aditivní funktory $F_i : A\text{-mod} \to \mathcal{U}_i$ a $S_i : \mathcal{U}_i \to A\text{-mod}$ pro každé $i \in I$, kde $\mathcal{U}_i$ jsou abelovské kategorie a A je libovolná k-algebra nad nějakým tělesem k. Nechť dále tyto funktory splňují následující vlastnosti:*

1. $F_iS_j \simeq \begin{cases} \mathrm{id}_{\mathcal{U}_i} & \textit{pokud } i = j, \\ 0 & \textit{jinak}, \end{cases}$
2. *množina $\{F_i : i \in I\}$ je lokálně konečná, tedy $\forall M \in A\text{-mod} : F_i(M) = 0$ skoro všude,*
3. *jestliže $\forall i \in I$ je $F_i(\gamma)$ isomorfismus, pak je i γ isomorfismus,*
4. *$\forall M \in A\text{-mod}\, \forall i \in I$ existuje zobrazení $\gamma_{i,M} : S_iF_i(M) \to M$ takové, že $F_i(\gamma_{i,M})$ je isomorfismus.*

Potom všechny nerozložitelné A-moduly jsou tvaru $S_i(P)$, kde P je nerozložitelný objekt v $\mathcal{U}_i$ a platí, že $S_i(P) \simeq S_j(Q)$ právě tehdy, když $P \simeq Q$ a $j = i$.

Důkaz. Z lokální konečnosti plyne, že existuje direktní suma $\bigoplus S_iF_i(M)$. Můžeme tedy definovat zobrazení $\gamma = (\gamma_{i,M})_{i\in I} : \bigoplus_{i\in I} S_iF_i(M) \to M$. Protože F_i zachovává direktní sumy, aplikací prvního bodu plyne, že $\forall i \in I$ máme $F_i(\gamma) = F_i(\gamma_{i,M})$, což je podle posledního bodu isomorfismus, tedy podle třetího bodu je také γ isomorfismus, a tedy $\bigoplus_{i\in I} S_iF_i(M) \simeq M$.

Pokud M je nerozložitelný A-modul, pak $S_iF_i(M) \simeq M$, a tedy $S_i(P) \simeq M$ pro nějaké $P \in \mathcal{U}_i$. Nechť pro spor $P = P_1 \oplus P_2$, kde $P_1 \neq 0 \neq P_2$. Protože S_i je aditvní funktor, máme $M \simeq S_i(P) \simeq S_i(P_1) \oplus S_i(P_2)$. Avšak $S_i(P_1) \neq 0 \neq S_i(P_2)$, neboť $F_i S_i(P_j) \simeq P_j \neq 0$, kde $j \in \{1,2\}$.

Nechť $S_i(P) \simeq S_j(Q)$. Pokud $(0 \not\simeq)P \not\simeq Q$, pak pro $i \neq j$ máme $P \simeq F_i S_i(P) \simeq F_i S_j(Q) \simeq 0$, pro $i = j$ dostáváme $P \simeq Q$. V obou případech dostáváme spor, a tedy nutně $i = j$ a $P \simeq Q$.

□

Nyní postupně definujeme fuktory F_i a S_i a ukážeme, že mají potřebné vlastnosti.

Definice 4. *Pro $C,D \in \mathcal{W}$ takové, že $C^{-1}D \in \mathcal{W}$, definujeme funktor*

$$S_{C,D} : k\text{-mod} \to A\text{-mod},$$
$$S_{C,D}(U) = \bigoplus_{i=1}^{\dim U} M(C^{-1}D).$$

Pro $C \in \mathcal{W}'$ a k-vektorový prostor U, kde φ je automorfismus na U, definujeme funktor

$$S_C : k[t,t^{-1}]\text{-mod} \to A\text{-mod},$$
$$S_C(U,\varphi) = M(C,\varphi).$$

Je jednoduché nahlédnout, že tyto funktory jsou skutečně aditivní.

3.2 Zavedení pomocných funktorů

Na funktorech $A\text{-mod} \to \mathcal{U}$, kde $\mathcal{U}$ je abelovská kategorie, budeme definovat následující částečné uspořádání.

$$F \leq G \iff \forall M \in A\text{-mod} : F(M) \subseteq G(M)$$

Máme-li přímé písmeno $(\alpha : v \to w) \in Q_1$, pak působení nepřímého písmene α^{-1} na reprezentaci modulu $M \in A\text{-mod}$ definujeme jakožto vzor přímého písmene, neboli $\alpha^{-1}M_w = \{m \in M_v : \alpha(m) \in M_w\}$. Působení řetězce $\alpha_1 \cdots \alpha_n$ definujeme induktivně jako působení jeho jednotlivých písmen, začínaje α_n. Působení řetězce nulové délky definujeme jako identitu na vrcholu, neboli $1_{(v,i)}M_w = \delta_{v,w}M_w$.

I na působení písmen pohlížíme jako na funktor $A\text{-mod} \to k\text{-mod}$. Působení přímého písmene zřejmě zachovává direktní sumy. Je jednoduché nahlédnout, že i působení nepřímého písmene zachovává direktní sumy.

Nyní definujeme pomocné funktory $C^+, C^- : A\text{-mod} \to k\text{-mod}$. Nechť C je řetězec a $s(C) = w$.

$$C^-(M) = \begin{cases} C = C\alpha M_v & \text{pokud } \exists(\alpha : v \to w) \in Q_1 : C\alpha \text{ je řetězec,} \\ C = C0_w & \text{jinak.} \end{cases}$$

$$C^+(M) = \begin{cases} C = C\alpha^{-1}0_v & \text{pokud } \exists(\alpha : w \to v) \in Q_1 : C\alpha^{-1} \text{ je řetězec,} \\ C = CM_w & \text{jinak.} \end{cases}$$

Platí, že pro $C \in \mathcal{W}_{v,i}$ máme $C^-(M), C^+(M) \subseteq M_v$.

Občas budeme vynechávat dolní index označující vrchol, pokud není nutné pracovat s vrcholy, tedy například místo $C\alpha^{-1}0_v$ budeme psát $C\alpha^{-1}0$.

Lemma 4. *Nechť $C, D_1, D_2 \in \mathcal{W}$ a $\alpha, \beta \in Q_1$ jsou přímá písmena taková, že $C\alpha D_1 \in \mathcal{W}$ a $C\beta^{-1}D_2 \in \mathcal{W}$. Pak*

$$(C\alpha D_1)^- \leq (C\alpha D_1)^+ \leq C^- \leq C^+ \leq (C\beta^{-1}D_2)^- \leq (C\beta^{-1}D_2)^+.$$

Důkaz. Nejprve ukážeme prostřední nerovnost, tím i dokážeme první a poslední nerovnost. Nechť $M \in A$-mod. Pak z definice máme čtyři možnosti v závislosti na tom, jestliže existuje $(\alpha : w \to v) \in Q_1$, že $C\alpha \in \mathcal{W}$, a jestliže existuje $(\beta : v \to u) \in Q_1$, že $C\beta^{-1} \in \mathcal{W}$. Můžou nastat tyto možnosti:

$$C0_v \subseteq C\beta^{-1}0_u, \quad C0_v \subseteq CM_v, \quad C\alpha M_w \subseteq CM_v, \quad C\alpha M_w \subseteq C\beta^{-1}0_u.$$

První tři množinové nerovnosti jsou zřejmé. Ukážeme poslední. Pokud $\sigma(C) = i$, kde $i \in \{-1,1\}$, pak protože $C\alpha$ je definováno, máme $\varepsilon(\alpha) = -i$. Analogicky protože $C\beta^{-1}$ je definováno, máme $\varepsilon(\beta^{-1}) = \sigma(\beta) = -i$. Platí tedy $\beta\alpha \in I$. Protože I anihiluje M, máme $\alpha M_w = \operatorname{im}\alpha \subseteq \ker\beta = \beta^{-1}0_w$.

Nyní ukážeme druhou funktorovou nerovnost. Nechť $(\alpha : w \to v) \in Q_1$. Z existence řetězce $C\alpha$ stačí ověřit pouze dvě množinové nerovnosti $C\alpha D_1 M_x \subseteq C\alpha M_w$ a $C\alpha D_1 \delta^{-1} 0_y \subseteq C\alpha M_w$, kde $(\delta : x \to y) \in Q_1$. Tyto nerovnosti jsou však zřejmé.

Nyní ukážeme analogicky předchozímu čtvrtou funktorovou nerovnost. Nechť $(\beta : v \to u) \in Q_1$. Opět z existence řetězce $C\beta^{-1}$ stačí ukázat dvě množinové nerovnosti $C\beta^{-1}0_u \subseteq C\beta^{-1}D_2M_y$ a $C\beta^{-1}0_u \subseteq C\beta^{-1}D_2\delta M_x$, kde $(\delta : x \to y) \in Q_1$. Tyto nerovnosti jsou opět zřejmé.

□

Pro cyklické řetězce definujeme funktory $C', C'' : A$-mod $\to k[t, t^{-1}]$-mod. Nechť C je cyklický řetězec a $s(C) = v$. Pak

$$C' = \bigcup_{n=1}^{\infty} C^n 0_v \quad \text{a} \quad C'' = \bigcap_{n=1}^{\infty} C^n M_v.$$

Lemma 5. *Nechť C je cyklický řetězec, $s(C) = v$. Pak*

$$0_v \subseteq C0_v \subseteq C^2 0_v \subseteq \cdots \subseteq C^n 0_v \subseteq \cdots \subseteq C^n M_v \subseteq \cdots \subseteq C^2 M_v \subseteq CM_v \subseteq M_v.$$

Poté důsledkem je, že $C' \leq C''$.

Důkaz. Indukcí dokážeme první polovinu. Zřejmě $0_v \subseteq C0_v$. Mějme indukční předpoklad $\cdots \subseteq C^{n-2}0_v \subseteq C^{n-1}0_v$. Pak $C^{n-1}0_v = C(C^{n-2}0_v) \subseteq C(C^{n-1}0_v) = C^n 0_v$. Analogicky indukcí ukážeme drouhou polovinu. Prostřední nerovnost je zřejmá: $C^n 0_v \subseteq C^n 0_v \cup C^n(M_v \setminus \{0\}) = C^n M_v$.

□

Nyní definujeme funktory speciálního tvaru, jimiž později budeme definovat funktory F_i z věty 3.

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_{v,i} =& \{(D^+ + C^-) \cap C^+ : C \in \mathcal{W}_{v,i}, D \in \mathcal{W}_{v,-i}, C^{-1}D \in \mathcal{W}\} \cup \\ & \{(D^- + C^-) \cap C^+ : C \in \mathcal{W}_{v,i}, D \in \mathcal{W}_{v,-i}, C^{-1}D \in \mathcal{W}\} \cup \\ & \{C' \text{ a } C'' : C \in \mathcal{W}'_{v,i}\}\end{aligned}$$

Ukážeme, že částečné uspořádání $\leq$ je na $\mathcal{F}_{v,i}$ dokonce lineární. Pro důkaz tohoto tvrzení definujeme následující pojem. Řekneme, že *intervaly* $[F_1, F_2]$ *a* $[F_3, F_4]$ *jsou uspořádané*, pokud $F_2 \leq F_3$ nebo $F_4 \leq F_1$.

Na $\mathcal{W}_{v,i}$ definujeme ostré uspořádání $<$ následovně:

$$C < D \iff \begin{cases} C = D\alpha E, & (3.1) \\ \quad \text{nebo} & \\ D = C\alpha^{-1}E, & (3.2) \\ \quad \text{nebo} & \\ C = H\alpha E_1 \quad \text{a} \quad D = H\beta^{-1}E_2. & (3.3) \end{cases}$$

kde $\alpha, \beta \in Q_1$ a E,E_1,E_2 a H jsou vhodné řetězce takové, že platí přechozí rovnosti.

Lemma 6. *Uspořádání $<$ je lineární a ostré.*

Důkaz. Nechť pro spor $C < C$. Pak první dvě podmínky pro $<$ neplatí kvůli délce řetězců na obou stranách rovností. Poslední podmínka zřejmě také neplatí, protože jinak $C \neq C$.

Máme-li $v \in Q_0$ a $i \in \{-1, 1\}$, pak z definice řetězcové algebry existuje nejvýše jedno přímé písmeno α takové, že $1_{(v,i)}\alpha$ je řetězec, stejně tak pro nepřímá písmena. Tedy řetězce $1_{(v,i)}\ell_1\ell_2\cdots$ jsou jednoznačně určené na základě přímosti nebo nepřímosti písmen ℓ_i.

Mějme $C = p_1 \cdots p_n$, $D = q_1 \cdots q_m$ řetězce z $\mathcal{W}_{v,i}$. Pak existuje $i \geq 0$ takové, že $p_1 \cdots p_i = q_1 \cdots q_i$, a nechť i je maximální takové. Pokud neexistují p_{i+1} a q_{i+1}, pak $C = D$. Pokud existuje jen jedno písmeno, řekněme p_{i+1}, pak $C < D$ podle 3.1, pokud je p_{i+1} přímé, nebo $D < C$ podle 3.2, pokud je p_{i+1} nepřímé. Pokud existují obě písmena, pak podle výše uvedeného je nutně jedno písmeno přímé a druhé nepřímé, tedy máme podmínku 3.3, a tedy $C < D$ nebo $D < C$.

$\square$

Tvrzení 7. *Uspořádaná množina funktorů $\mathcal{F}_{v,i}$ je lineární a všechny dvojice intervalů tvaru $[(D^- + C^-) \cap C^+, (D^+ + C^-) \cap C^+]$ a $[E', E'']$ jsou po dvou uspořádané, kde $C \in \mathcal{W}_{v,i}$, $D \in \mathcal{W}_{v,-i}$ a $E \in \mathcal{W}'_{v,i}$.*

Důkaz. Z lemmatu 4 platí $C < D \Rightarrow C^+ \leq D^-$, kde C,$D \in \mathcal{W}_{v,i}$. Intervaly $[C^-, C^+]$ a $[D^-, D^+]$ jsou tedy uspořádané.

Mějme $C \in \mathcal{W}'_{v,i}$ a $D \in \mathcal{W}_{v,i}$. Chceme ukázat, že $D^+ \leq C'$ pro $D < C^n$ a naopak $C'' \leq D^-$ pro $C^n < D$, kde n dostatečně velké.

Nejprve si uvědomíme, že pro $D \in \mathcal{W}$ a $C \in \mathcal{W}$ a dostatečně velké n stačí uvažovat pouze případy 3.2 a 3.3 pokud $D < C^n$ (a pro $C^n < D$ stačí uvažovat 3.1 a 3.3). Totiž pro n dostatečně velké je pak C^n delší řetězec než D, a tedy potřebná rovnost nemůže platit.

$D < C^n$: Ukážeme, že pak $D^+ \leq C'$.

- $C^n = D\alpha^{-1}E$ (případ 3.2):

$$D^+(M) = D\alpha^{-1}0 \subseteq D\alpha^{-1}E0 = C^n0 \subseteq C'(M)$$

V druhé relaci jsme použili lemma 4.

- $C^n = H\alpha^{-1}E_1$ a $D = H\beta E_2$ (případ 3.3):

$$D^+(M) = (H\beta E_2)^+(M) \subseteq H^+(M) = H\alpha^{-1}0 \subseteq H\alpha^{-1}E_1 0 = C^n 0 \subseteq C'$$

  V druhé a čtvrté relaci jsme použili lemma 4.

$C^n < D$: Ukážeme, že pak $C'' \leq D^-$ (případ 3.1).

- $C^n = D\alpha E$:

$$C''(M) \subseteq C^n M = D\alpha E M \subseteq D\alpha M = D^-(M)$$

  Ve třetí relaci jsme použili lemma 4.

- $C^n = H\alpha E_1$ a $D = H\beta^{-1}E_2$ (případ 3.3):

$$\begin{aligned} C''(M) \subseteq C^n M = H\alpha E_1 M \subseteq H\alpha M = H^-(M) \\ \subseteq H^+(M) = H\beta^{-1}0 \subseteq H\beta^{-1}E_2 0 = D^-(M) \end{aligned}$$

  Ve třetí, páté a sedmé relaci jsme použili lemma 4.

Tedy intervaly $[C^-, C^+]$ a $[E', E'']$ jsou uspořádané , kde $C \in \mathcal{W}_{v,i}$ a $E \in \mathcal{W}'_{v,i}$.

Máme-li $C,D \in \mathcal{W}'_{v,i}$ pak existují m,n takové, že C^n a D^m jsou stejné délky, tedy pokud $C^n < D^m$, nutně platí podmínka 3.3, tedy $C^n = H\alpha E_1$ a $D^m = H\beta^{-1}E_2$. Ukážeme že pak $C'' \leq D'$.

$$\begin{aligned} C''(M) \subseteq C^n M = H\alpha E_1 M \subseteq H\alpha M = H^-(M) \\ \subseteq H^+(M) = H\beta^{-1}0 \subseteq H\beta^{-1}E_2 0 = D^m 0 \subseteq D'(M) \end{aligned}$$

Tedy intervaly $[C', C'']$ a $[D', D'']$ jsou uspořádané.

Označme si krátce funktory $F^{\pm}(C,D) = (D^{\pm} + C^-) \cap C^+$, kde $C \in \mathcal{W}_{v,i}$ a $D \in \mathcal{W}_{v,-i}$. Pak zřejmě $[F^-(C,D), F^+(C,D)] \subseteq [C^-, C^+]$, tedy podle předchozích úvah interval $[F^-(C,D), F^+(C,D)]$ je uspořádaný s intervaly tvaru $[E', E'']$ a $[F^-(B,D), F^+(B,D)]$ pro $B \neq C$. Mějme intervaly $[F^-(C,D), F^+(C,D)]$ a $[F^-(C,B), F^+(C,B)]$ a $B \neq D$. Neboť $[D^-, D^+]$ a $[B^-, B^+]$ jsou uspořádané, řekněme $D^+ \leq B^-$, pak $D^+(M) + C^-(M) \subseteq B^-(M) + C^-(M)$, tedy $F^+(C,D) \leq F^-(B,D)$, a tedy i přechozí dvojice intervalů je uspořádaná.

Z tohoto rozboru již plyne, že $\mathcal{F}_{v,i}$ je lineárně uspořádaná množina.

□

3.3 Zavedení funktorů F_i

Konečně definujeme funktory F_i na které později budeme aplikovat větu 3.

Definice 5. *Pro $C,D \in \mathcal{W}$ takové, že $C^{-1}D \in \mathcal{W}$ definujeme*

$$F_{C,D} : A\text{-mod} \to k\text{-mod},$$

$$F_{C,D} = \frac{C^+ \cap D^+}{(C^- \cap D^+) + (C^+ \cap D^-)}.$$

Pro $C \in \mathcal{W}'$ definujeme

$$F_C : A\text{-mod} \to k[t, t^{-1}]\text{-mod},$$

$$F_C = {C''}/{C'}.$$

Z motýlkového lemmatu (například v [7, Lemma 4.9]) plyne, že

$$F_{C,D} \simeq \frac{(D^+ + C^-) \cap C^+}{(D^- + C^-) \cap C^+}.$$

Z aditivity působení řetězců je aditivita F_i jednoduchá nahlédnout.

Ukážeme, že definice F_C je korektní, tedy je to skutečně $k[t,t^{-1}]$-modul.

Lemma 8. *Nechť $C \in \mathcal{W}'$. Pak C indukuje na C''/C' (na libovolném $M \in A$-mod) automorfismus $\varphi_{C,M}(x + C') = Cx + C'$.*

Důkaz. Protože M je konečně dimenzionální, existuje n takové , že $C^n M = C^{n+1}M = C''$ a $C^n 0 = C^{n+1}0 = C'$.

Nejdříve ukážeme, že toto zobrazení je dobře definované. Mějme $x_1 + C' = x_2 + C'$ a $y_1 \in Cx_1$ a $y_2 \in Cx_2$. Chceme ukázat, že $y_1 + C' = y_2 + C'$. Platí $x_1 - x_2 \in C' = C^n 0$, pak $y_1 - y_2 \in C(x_1 - x_2)$, a tedy celkem $y_1 - y_2 \in C^{n+1}0 = C'$.

Nyní ukážeme, že $\varphi_{C,M}$ je na. Mějme $y + C'$, $y \in C^{n+1}M = C''$. Potom existují z a w taková, že $y + C' = Cw + C' = \varphi_{C,M}(w + C')$ a $w \in C^n z$, tedy $w \in C''$. Protože je toto zobrazení dobře definované, pokud $y' \in Cw$, pak $y + C' = y' + C'$.

Nyní ukážeme, že $\varphi_{C,M}$ je prosté. To plyne z dobře známé věty o dimenzi jádra a obrazu. Máme

$$\dim\ker\varphi_{C,M} + \dim\operatorname{im}\varphi_{C,M} = \dim {}^{C''}\!\!/_{C'},$$

a protože $\dim\operatorname{im}\varphi_{C,M} = \dim C''/C'$, je jádro triviální, a tedy zobrazení je prosté. $\square$

Lemma 9. *Pro $C \in \mathcal{W}'$ jsou funktory F_C a $F_{C_{(i)}}$ isomorfní.*

Důkaz. Nechť $C = \ell_1 \cdots \ell_n$. Pak

$$C_{(i)} = \ell_{i+1} \cdots \ell_n \ell_1 \cdots \ell_{i-1}\ell_i,$$
$$C_{(i-1)} = \ell_i \cdots \ell_n \ell_1 \cdots \ell_{i-2}\ell_{i-1}.$$

- Nechť ℓ_i je přímé písmeno. Ukážme, že pak násobení ℓ_i indukuje epimorfismus $F_{C_{(i)}}(M)$ na $F_{C_{(i-1)}}(M)$.

  Nechť $x \in C''_{(i-1)}(M) = \bigcap_{m=1}^{\infty} C^m_{(i-1)}M$. Tedy

  $$\forall m > 1 : x \in C^m_{(i-1)}(M) = (\ell_i C^{m-1}_{(i)} \ell_{i+1} \cdots \ell_n \ell_1 \cdots \ell_{i-1})(M) \subseteq \ell_i C^{m-1}_{(i)} M$$

  Pro m dostatečně velké platí $C^{m-1}_{(i)} = C''_{(i)}$, tedy $x \in \ell_i(C''_{(i)}(M))$.

  Nechť $y \in C'_{(i)}(M) = \bigcup_{m=1}^{\infty} C^m_{(i)}0$. Nechť m je dostatečně velké, že $C'_{(i)}(M) = C^m_{(i)}0$ a $C'_{(i-1)}(M) = C^m_{(i-1)}0$, tedy zobrazení je prosté. Pak

  $$\ell_i y \in \ell_i C^m_{(i)} 0 = C^m_{(i-1)} \ell_i 0.$$

  Protože ℓ_i je přímé písmeno, platí $\ell_i 0 = 0$, tedy $\ell_i y \in C'_{(i-1)}(M)$.

  Nechť $x \in C''_{(i)}(M) = C''^{m-1}(M) = \ell_{i+1} \cdots C^{m-2} \cdots \ell_i$. Zřejmě platí $\ell_i M \subseteq M$. Pak

  $$\begin{aligned} \ell_i x \in \ell_i \ell_{i+1} \cdots C^{m-2} \cdots \ell_i M &\subseteq \ell_i \cdots C^{m-2} \cdots \ell_{i-1} M \\ &= C^{m-1}_{(i-1)}(M) = C''_{(i-1)}(M). \end{aligned}$$

  Tedy je to dobře definované zobrazení.

- Nechť je ℓ_i inverzní písmeno. Ukážeme, že pak násobení ℓ_i^{-1} indukuje monomorfismus $F_{C_{(i-1)}}(M)$ do $F_{C_{(i)}}(M)$.

  Nechť $\ell_i^{-1}(x) = \ell_i^{-1}(y) \in F_{C_{(i)}}(M)$, tedy $\ell_i^{-1}(x-y) \in C'_{(i)} = \bigcup_{m=1}^{\infty} C_{(i)}^m 0$. Pak pro nějaké $m > 1$ máme $\ell_i^{-1}(x-y) \in C_{(i)}^m 0$, tedy

$$\begin{aligned} x - y \in \ell_i \ell_i^{-1}(x-y) \subseteq \ell_i(C_{(i)}^m 0) &= (\ell_i \ell_{i+1} \cdots \ell_n \ell_1 \cdots \ell_{i-1} C_{(i-1)}^{m-1} \ell_i)(0) \\ &= C_{(i-1)}^m \ell_i 0 \subseteq C_{(i-1)}^{m+1} 0 \subseteq C'_{(i-1)}(M). \end{aligned}$$

  Dobrá definovanost se ukáže obdobnými argumenty.

V obou případech dostáváme $\dim F_{C_{(i-1)}}(M) \leq \dim F_{C_{(i)}}(M)$, tedy z definice náramků dostáváme

$$\dim F_{C_{(0)}}(M) \leq \dim F_{C_{(1)}}(M) \leq \cdots \leq \dim F_{C_{(n-1)}}(M) \leq \dim F_{C_{(0)}}(M).$$

Máme tedy všude rovnosti, a tedy předchozí morfismy jsou isomorfismy. Tedy

$$F_C(M) \simeq F_{C_{(1)}}(M) \simeq \cdots \simeq F_{C_{(n-1)}}(M),$$

kde každý z isomorfismů je dán působením nějakého ℓ_i.

□

Lemma 10. *Pro A,B,C,$D \in \mathcal{W}$ takové, že $A^{-1}B = C^{-1}D$, jsou funktory $F_{A,B}$ a $F_{C,D}$ isomorfní.*

Důkaz. Podrobný důkaz v [2, str. 25].

4. Ověření vlastností funktorů příslušných řetězcům

Cílem této kapitoly je dokázat body 1 a 4 z věty 3 pro funktory tvaru $F_{C,D}$. Použijeme podobný postup z [2], který důkladně rozvedeme a zobecníme pro obecné řetězcové algebry.

Nechť $V = \bigoplus_{i=1}^{n} V_i$. Řekneme, že $W \leq V$ je *homogenní podprostor* V, pokud je generován prvky z V_i, tedy $W = \bigoplus_{i=1}^{n} W_i$, kde $W_i \leq V_i$ pro každé $i \in \{1, \ldots, n\}$. Prvkům z V_i říkáme *homogenní prvky.* Pro řetězcové moduly $M(C)$ budeme uvažovat homogenní rozklad s $V_i = ke_i$, tedy rozklad $M(C) = \bigoplus_{i=0}^{n} ke_i$ (používáme stejné značení jako z definice řetězcových modulů). Pro náramkové moduly $M(C, \varphi)$ budeme uvažovat homogenní rozklad s $V_i = U_i$, tedy rozklad $M(C,\varphi) = \bigoplus_{i=0}^{n-1} U_i$ (používáme stejné značení jako z definice náramkových modulů).

Lemma 11. *Nechť $M \in A$-mod je tvaru $M(C)$ nebo $M(C, \varphi)$ a D je řetězec. Nechť U je homogenní podprostor M. Pak DU je také homogenní podprostor M.*

Důkaz. Podrobný důkaz v [2, str. 26].

Připomeňme, že pro $C = \ell_1 \cdots \ell_m$ značí ke_i podprostor, do kterého míří písmeno ℓ_{i+1} v reprezentaci modulu $M(C)$. Povšimněme si, že pro $M(C)$ platí $e_0 \in Ce_n$. Pro C řetězec nulové délky nemáme co ukazovat. Pro ℓ_n přímé ihned z definice $M(C)$ plyne $e_{n-1} \in \ell_n e_n$. Pro ℓ_n nepřímé máme definice $\ell_n^{-1} e_{n-1} = e_n$, tedy $e_{n-1} \in \ell_n e_n$.

Lemma 12. *Nechť $C, D, C^{-1}D \in \mathcal{W}$, kde C je řetězec délky i. Pak ke_i se vnořuje do $F_{C,D}(M(C^{-1}D))$, tedy je to nenulový funktor.*

Důkaz. Označme $M = M(C^{-1}D))$.

- Ukážeme, že $ke_i \cap D^-(M) = 0$. Indukcí podle délky j řetězce D.

  Nechť $j = 0$. Tedy $D = 1_{(w,s)}$. Pak buď $D^-(M) = 0_w$, pak není co ověřovat, nebo $D^-(M) = \alpha M_v$ pro $(\alpha : v \to w) \in Q_1$. Pokud poslední písmeno (zprava) C^{-1} je přímé, řekněme $\beta \in Q_1$, pak z definice $M(C^{-1}D) = M(C^{-1})$ se žádná šipka nezobrazuje do ke_i. Pokud poslední písmeno (zprava) C^{-1} je nepřímé, řekněme β^{-1}, kde $\beta \in Q_1$, pak $\beta^{-1}1_{(w,s)}$ je řetězec, tedy $1_{(w,-s)}\beta$ je řetězec, tedy $1_{(w,s)}\beta = D\beta$ není řetězec, tedy $D^- \neq D\beta$, a žádná ostatní šipka se z definice $M(C^{-1})$ nezobrazuje do ke_i. Tedy skutečně $ke_i \cap D^-(M) = 0$.

  Nechť $j > 1$. Nechť $D = \ell E$. Z indukčního předpokladu máme $ke_{i+1} \cap E^-(M) = 0$. Nechť ℓ je nepřímé písmeno, tedy $\ell = \alpha^{-1}$ pro nějaké $\alpha \in Q_1$, tudíž $D^-(M) = \alpha^{-1}E^-(M)$. Nechť pro spor $ke_i \subseteq \alpha^{-1}E^-(M) = D^-(M)$. Pak $\alpha ke_i \subseteq E^-(M)$, avšak $\alpha ke_i = ke_{i+1}$, a z indukčního předpokladu $ke_{i+1} \cap E^-(M) = 0$, což je spor, neboť pak by $ke_{i+1} = 0$. Tedy celkem $ke_i \cap D^-(M) = 0$. Z lemmatu 4 ihned dostáváme výsledek i pro ℓ přímé písmeno.

- Analogicky předchozímu bodu se ukáže $ke_i \cap C^-(M) = 0$.

- Dále ukážeme, že $ke_i \subseteq C^+(M)$. Pokud $C^+(M) = CM$, je tvrzení zřejmé. Nechť $C^+(M) = C\alpha^{-1}0$ pro nějaké $\alpha \in Q_1$. Označme $C^{-1} = \ell_1 \cdots \ell_i$. Nechť $\ell_1 \in Q_1$. Pak žádná šipka z definice $M(C^{-1}D)$ nevede z ke_0. Protože $C\alpha^{-1}$ je řetězec, je i $\alpha\ell_1$ řetězec, tedy $s(\alpha) = t(\ell_1)$. Dohromady s předchozím pak $ke_0 \subseteq \alpha^{-1}0$, tedy $ke_i \subseteq C\alpha^{-1}0 = C^+(M)$. Nechť $\ell_1 = \beta^{-1}, \beta \in Q_1$. Pak $C\beta^{-1}$ není řetězec, tedy $\alpha^{-1} \neq \beta^{-1}$, a tedy $ke_0 \subseteq \alpha^{-1}0$, tedy $ke_i \subseteq C\alpha^{-1}0$.
- Analogicky přechozímu bodu se ukáže $ke_i \subseteq D^+(M)$.

Protože $M(C^{-1}D) = \bigoplus_{j=0}^n ke_j$, z homogenity působení písmen z předchozího lemmatu platí

$$ke_i \cap \Big[(C^+(M) \cap D^-(M)) + (C^-(M) \cap D^+(M))\Big] = 0.$$

Dále máme $ke_i \subseteq C^+(M) + D^+(M)$. Dohromady tedy máme vnoření ke_i do $F_{C,D}(M)$.

□

Jako důsledek dostáváme toto tvzení.

Tvrzení 13. *Nechť $C \in \mathcal{W}$ je řetězec délky n. Označme $M = M(C)$. Pak pro $B, D \in \mathcal{W}$ platí*

$$F_{B,D}(M) \simeq \begin{cases} k & \text{pokud } C \sim_\pm B^{-1}D, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Pro $E \in \mathcal{W}'$ platí

$$F_E(M) = 0.$$

Důkaz. V důsledku lemmatu 7 můžeme nahlížet na $F_{B,D}$ a F_E jako na faktory filtrace $\mathcal{F}_{v,i}$ vrcholu M_v, kde $B \in \mathcal{W}_{v,i}$, $D \in \mathcal{W}_{v,-i}$ a $E \in \mathcal{W}'_{v,i}$. Tedy máme vnoření $\bigoplus_{F \in \mathcal{F}_{v,i}} F(M) \hookrightarrow M_v$. Dále platí $M = \bigoplus_{v \in Q_0} M_v$. Dohromady tedy máme vnoření

$$\bigoplus_{\substack{v \in Q_0 \\ F \in \mathcal{F}_{v,i}}} F(M) \longrightarrow M.$$

Z konstukce $M = M(C)$ zřejmě $\dim M = n + 1$. Máme také $n + 1$ způsobů jak rozsekat C na $C = B^{-1}D$, a podle lemmatu 12 pro tyto B,D jsou $F_{B,D}(M)$ nenulové. Tedy společně použitím vnoření výše dostáváme

$$n + 1 \leq \dim \bigoplus_{\substack{v \in Q_0 \\ F \in F_{v,i}}} F(M) \leq \dim M = n + 1.$$

Tedy ostatní funktory $F_{B',D'}$ a F_E jsou nulové a funktory $F_{B,D}$ jsou jednodimenzionální.

□

Tvrzení 14. *Pro každý modul $N \in A$-mod existuje zobrazení $\gamma_{C,D,N} : S_{C,D}F_{C,D}(N) \to N$ takové, že $F_{C,D}(\gamma_{C,D,N})$ je isomorfismus.*

Důkaz. Označme si $C^{-1}D = \ell_1 \cdots \ell_n$. Dále si označme $(M_v, M_\alpha)_{\alpha\in Q_1}^{v\in Q_0}$ reprezentaci $M(C^{-1}D) = \bigoplus_{i=0}^{n} ke_i$ a $(N_v, N_\alpha)_{\alpha\in Q_1}^{v\in Q_0}$ reprezentaci N. Z důkazu předchozího tvrzení a předchozího lemmatu plyne, že $F_{C,D}(M(C^{-1}D)) \simeq ke_r$, kde r je délka řetězce C. Nechť $\{x_1, \dots, x_m\}$ je báze U, kde

$$C^+(N) \cap D^+(N) = U \oplus [((C^+(N) \cap D^-(N)) + (C^-(N) \cap D^+(N))].$$

Existují prvky $x_i^{(j)} \in N$, kde $i \in \{1, \dots, m\}, j \in \{0, \dots, n\}$, takové, že

$$\begin{aligned} x_i^{(r)} &= x_i \in U, \\ x_i^{(j)} &\in N_{\ell_{j+1}}(x_i^{(j+1)}), \end{aligned}$$

kde pro ℓ_{j+1} nepřímé pod $x_i^{(j)} \in N_{\ell_{j+1}}(x_i^{(j+1)})$ rozumíme $N_{\ell_{j+1}^{-1}}(x_i^{(j)}) = x_i^{(j+1)}$. Položme pak $\gamma_i^j(e_j) = x_i^{(j)}$. Pak pro ℓ_k přímé i nepřímé je přímočaré ověřit, že příslušné čtverce komutují, tedy máme (nejednoznačně definovaný) homomorfismus $\gamma_i = (\gamma_i^j)_{j=0}^n : M(C^{-1}D) \to N$, a tedy i $\gamma_{C,D,N} = \bigoplus_{i=1}^m \gamma_i : \bigoplus_{i=1}^m M(C^{-1}D) \to N$ je homomorfismus. Platí $F_{C,D}S_{C,D}F_{C,D}(N) \simeq F_{C,D}(\bigoplus_{i=1}^m M(C^{-1}D)) = \bigoplus_{i=1}^m ke_i \simeq U = F_{C,D}(N)$, a $F_{C,D}(\gamma_{C,D,N})$ je z konstrukce zřejmě isomorfismus.

□

5. Ověření vlastností funktorů příslušných náramkům

Cílem této kapitoly je ukázat body 1 a 4 z věty 3 pro funktory tvaru F_C, kde $C \in \mathcal{W}'$. Důkladně rozvedeme některá lemmata z [2].

Lemma 15. *Nechť $C \in \mathcal{W}'$. Pak řetězce $C, C_{(i)}$ i $C_{(i)}^{-1}$ jsou navzájem různé, kde $0 < i < n$ a n je délka C.*

Důkaz. Mějme

$$\begin{aligned} C &= \ell_1 \cdots \ell_n, \\ C_{(i)} &= \ell_{i+1} \cdots \ell_n \ell_1 \cdots \ell_i, \\ C_{(i)}^{-1} &= \ell_i^{-1} \cdots \ell_1^{-1} \ell_n^{-1} \ell_{i+1}^{-1}. \end{aligned}$$

Nejdříve si povšimněme, že stačí, když budeme uvažovat pouze rovnosti s C na jedné straně.

Nechť $C = C_{(i)}$ pro nějaké i. Pak $C = D^n$ pro nějaký vhodný řetězec $D \in \mathcal{W}'$, což je spor s tím, že $C \in \mathcal{W}'$.

Nechť $C = C_{(i)}^{-1}$ pro nějaké i. Rozebereme několik možností.

- Délka C je lichá: Pokud i je liché, řekněme $i = 2j + 1$, pak máme následovných prvních i rovností $\ell_1 = \ell_i^{-1}, \dots, \ell_i = \ell_1^{-1}$. Pak pro prostřední rovnost máme $\ell_{j+1} = \ell_{j+1}^{-1}$, což je spor. Pokud i je sudé, postupujeme analogicky, avšak z pravé strany, tedy dostaneme spornou rovnost $\ell_{(n-i+1)/2+i} = \ell_{(n-i+1)/2+i}^{-1}$.
- Délka C je sudá: Pro i liché postupujeme analogicky jako v přechozím bodě. Nechť i je sudé. Označme $p = i/2$ a $q = i/2 + 1$. Pak máme $\ell_p = \ell_q^{-1}$ a $\ell_q = \ell_p^{-1}$. Protože $\ell_p \ell_q$ je řetězec, máme $-\sigma(\ell_p) = \varepsilon(\ell_q)$. Protože $\ell_p = \ell_q^{-1}$, máme $\sigma(\ell_p) = \sigma(\ell_q^{-1}) = \varepsilon(\ell_q)$. Tedy $-\varepsilon(\ell_q) = -\sigma(\ell_p) = \varepsilon(\ell_q)$, spor.

Tedy takové i nemůže existovat.

□

V důsledku tohoto lemmatu jsou podle lemmatu 7 intervaly $[C', C'']$, $[C'_{(i)}, C''_{(i)}]$ a $[(C^{-1})', (C^{-1})'']$ uspořádané (pokud jsou tyto řetězce porovnatelné).

Mějme $B \in \mathcal{W}'$. Řekneme, že $C \in \mathcal{W}'_{v,i}$ je *minimální i-reprezentant (ekvivalenční třídy $[B]_{\sim_\pi}$)*, pokud je C nejmenší (vůči uspořádání $<$) prvek z množiny $\{E : \varepsilon(E) = i \text{ a } E \sim_\pi B\}$.

Lemma 16. *Nechť $C \in \mathcal{W}'$ je minimální i-reprezentant své ekvivalenční třídy. Nechť φ je automorfismus na V a $M = M(C, \varphi)$. Pak $C0 = 0$.*

Důkaz. Podle lemmatu 11 je $C0$ homogenní podprostor $M = \bigoplus_{i=0}^{n-1} V_i$. Stačí tedy ukázat, že $C0 \cap V_i = 0$ pro každé i. Nejdříve dokážeme pomocné lemma.

Mějme řetězec $D = e_1 \cdots e_m$ a $x \in D0 \cap V_i$. Ukážeme, že existují homogenní prvky $x_0, \dots x_m$ takové, že $x_0 = x, x_m = 0$, a $x_{i-1} \in e_i x_i$ pro každé vhodné i.

Indukcí podle m. Nechť $m = 1$. Pak $x \in e_1 0$, čímž máme ihned hotovo. Nechť $m > 1$. Označme $E = e_2 \cdots e_m$. Pak $x \in D0 = e_1 E0$, tedy existuje nějaký prvek takový, že $x \in e_1 y$ a $y \in E0$. Rozlišíme dva případy.

- Pokud je e_1 přímé písmeno, rozložme si y na homogenní prvky, tedy $y = \sum_{i=0}^{n-1} y_i$, kde $y_i \in V_i$. Pak $x = e_1 y = \sum_{i=0}^{n-1} e_1 y_i$. Platí, že $e_1 y_i \in \{0, V_{i+1 \bmod n}, V_{i-1 \bmod n}\}$ v závislosti na tom, jestliže $e_1 V_i = 0$ nebo $e_1 V_i = V_{i+1 \bmod n}$ nebo $e_1 V_i = V_{i-1 \bmod n}$. Tedy pouze pro $y' \in \{y_{i+1 \bmod n}, y_{i-1 \bmod n}\}$ může platit $e_1 y' \in V_i$. Ale protože $e_1 e_1^{-1}$ ani $e_1^{-1} e_1$ nejsou řetězce, platí toto pro právě jedno y'. Pak $x = e_1 y'$, a protože $E0$ je homogenní a $y = \sum_{i=0}^{n-1} y_i \in E0$, i $y' \in E0$. Můžeme nyní použít indukční předpoklad pro $x_1 = y' \in E0$.

- Pokud e_1 je nepřímé písmeno, pak $y = e_1^{-1} x$, a podle lemmatu 11 je tedy y homogenní prvek. Můžeme tedy použít indukční předpoklad pro $x_1 = y \in E0$.

  Protože $e_1^{-1} e_1$ ani $e_1 e_1^{-1}$ není řetězec, $y \in V_j$ pro právě jedno $j \in \{i - 1 \bmod n, i + 1 \bmod n\}$, tedy j takové, že $e_1 : V_j \to V_i$ je isomorfismus.

Tímto je důkaz pomocného lemmatu hotov.

Označme $C = \ell_1 \cdots \ell_n$. Mějme $x \in C0 \cap V_i$.

- Nechť $i = 0$. Podle pomocného lemmatu máme homogenní prvky $x_0, \dots, x_n$ takové, že $x_0 = x$, $x_n = 0$ a $x_{i-1} \in \ell_i x_i$ pro vhodné i. Avšak protože ℓ_i jsou isomorfismy na $V_{i \bmod n}$ a $x_{n-1} \in \ell_n 0$, máme podle úvah výše pro ℓ_n přímé i nepřímé nutně $x_{n-1} = 0$. Takto induktivně dostaneme $x = 0$.

- Nechť $i \neq 0$. Mějme $E \sim_\pm C_{(i)}$ takové, že $\varepsilon(E) = \varepsilon(C) = j$. Protože C je minimální j-reprezentant, platí $C < E$, tedy $C = H\alpha E_1$ a $E = H\beta^{-1}E_2$, kde $\alpha, \beta \in Q_1$ a $H = \ell_1 \cdots \ell_k$. Opět podle pomocného lemmatu máme posloupnost homogenních prvků $x_0 = x \in \ell_1 x_1, \dots, x_k \in \alpha x_{k+1}, \dots, x_n = 0$. Protože $\alpha E_1 < \beta^{-1} E_2$, tedy $x_k \in \alpha E_1 0 \subseteq \beta^{-1} E_2 0$, máme i posloupnost $x_k \in \beta^{-1} x'_{k+1}, \dots, x'_n = 0$. Tedy $x'_{k+1} = \beta x_k$. Pak $x'_{k+1} \in \beta\alpha x_{k+1}$. Avšak pro ℓ_k přímé i nepřímé, $\ell_k\alpha, \ell_k\beta^{-1} \in \mathcal{W}$, a tedy z definice řetězcové algebry (body 3 a 4) dostáváme $\beta\alpha \in I$, tedy $x'_{k+1} = 0$, a podobně jako pro $i = 0$ pak induktivně dostáváme $x = 0$.

$\square$

Tvrzení 17. *Nechť $C \in \mathcal{W}$ a $M = M(C, \varphi)$, kde φ je automorfismus na U. Dále nechť $B \in \mathcal{W}'$ a $D,E \in \mathcal{W}$. Pak*

$$F_B(M) \simeq \begin{cases} (U, \varphi) & \text{pokud } B \sim_\pi C, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

$$F_{D,E}(M) = 0.$$

Důkaz. Nechť $C = \ell_1 \cdots \ell_n$ je minimální reprezentant. Pak podle lemmatu 16 máme $C'(M) = 0$. Připomeňme značení z definice $M(C, \varphi) = \bigoplus_{i=0}^{n-1} U_i$.

Je jednoduché nahlédnout, že, podobně jako v krátkém pozorování před lemmatem 12, platí $U_0 \subseteq CU_0$. Induktivní důkaz je analogický tomuto pozorování. Zřejmě pak $\forall n \in \mathbb{N} : U_0 \subseteq C^n U_0 \subseteq C^n M$, tedy $U_0 \subseteq C''(M)$.

Dohromady se tedy U_0 vnořuje do $(C''/C')(M)$. Podle lemmatu 9 jsou i ostatní $F_{C_{(i)}}$ nenulové. Tedy podle lemmatu 15 a tvrzení 7, stejným argumentem jako v tvrzení 13 jsou nutně $F_{C_{(i)}}$ nenulové, a tedy isomorfní (U, φ) a ostatní faktory filtrací jsou nulové.

□

Tvrzení 18. *Pro každé $C \in \mathcal{W}'$ a pro každý modul $N \in A$-mod existuje zobrazení $\gamma_{C,N} : S_C F_C(N) \to N$ takové, že $F_C(\gamma_{C,N})$ je isomorfismus.*

Důkaz. Z lemmatu 8 víme, že $C = \ell_1 \cdots \ell_n$ indukuje automorfismus na $F_C(N)$. Modul N je konečně dimenzionální, tedy na $F_C(N) = (C''/C')(N)$ můžeme pohlížet jako na (U, φ), kde $C'(N) \oplus U = C''(N)$ a $\varphi(x) = Cx \cap U$ je automorfismus na U. Pak $S_C F_C(N) \simeq M(C, \varphi) = \bigoplus_{i=0}^{n} U_i$, kde U_i kopie U. Mějme reprezentaci $(N_v, N_\alpha)_{\alpha \in Q_1}^{v \in Q_0}$ modulu N a reprezentaci $(M_v, M_\alpha)_{\alpha \in Q_1}^{v \in Q_0}$ modulu $M(C,\varphi)$. Nechť $\{x_1, \ldots, x_m\}$ je báze vektorového prostoru U. Můžeme vzít prvky $x_i^{(j)} \in N$, kde $j \in \{0, \ldots n\}$ a $i \in \{1, \ldots m\}$ takové, že

$$
\begin{aligned}
x_i^{(n)} &= x_i, \\
x_i^{(j)} &\in N_{\ell_{j+1}}(x_i^{(j+1)}), \\
x_i^{(0)} &= \varphi(x_i),
\end{aligned}
$$

kde pro ℓ_{j+1} nepřímé pod $x \in N_{\ell_{j+1}}(y)$ rozumíme $y = N_{\ell_{j+1}^{-1}}(x)$. Definujme zobrazení

$$
\begin{aligned}
\gamma_0 : U_0 &\to U, & \gamma_j : U_j &\to N, \quad \text{kde } j \in \{2, \ldots, n-1\}, \\
x_i &\mapsto x_i & x_i &\mapsto x_i^{(j)}.
\end{aligned}
$$

Ukážeme, že toto skutečně (nejednoznačně) definuje homomorfismus ($S_C F_C(N)$ $\simeq$)$M \to N$. Ukážeme tedy, že všechny čtverce komutují.

- Nechť $\ell_{j+1} = \alpha \in Q_1$, kde $j + 1 \in \{2, \ldots n-1\}$. Pak
$$\gamma_j \circ M_\alpha(x_i) = \gamma_j(x_i) = x_i^{(j)} = N_{\ell_{j+1}}(x_i^{(j+1)}) = N_\alpha \circ \gamma_{j+1}(x_i),$$
kde $x_i \in U_{j+1}$.
- Nechť $\ell_{j+1} = \alpha^{-1}$, kde $\alpha \in Q_1$ a $j + 1 \in \{2, \ldots n-1\}$. Pak
$$\gamma_{j+1} \circ M_\alpha(x_i) = \gamma_{j+1}(x_i) = x_i^{(j+1)} = N_{\ell_j^{-1}}(x_i^{(j)}) = N_\alpha \circ \gamma_j(x_i),$$
kde $x_i \in U_j$.
- Nechť $\ell_1 = \alpha \in Q_1$. Z definice $M(C,\varphi)$ máme $M_\alpha \restriction U_1 = \varphi : U_1 \to U_0$. Pak
$$\gamma_0 \circ M_\alpha(x_i) = \varphi(x_i) = N_{\ell_1}(x_i^{(1)}) = N_\alpha \circ \gamma_1(x_i),$$
kde $x_i \in U_1$.
- Nechť $\ell_1 = \alpha^{-1}$, kde $\alpha \in Q_1$. Máme $M_\alpha \restriction U_0 = \varphi^{-1} : U_0 \to U_1$. Pak
$$\gamma_1 \circ M_\alpha^{-1}(\varphi(x_i)) = \gamma_1 \circ \varphi^{-1}(\varphi(x_i)) = \gamma_1 = x_i^{(1)} = N_{\ell_1}(\varphi(x_i)) = N_\alpha \circ \gamma_0(\varphi(x_i)),$$
kde $\varphi(x_i) \in U_1 = U$.
- Pro ℓ_n přímé i nepřímé se komutativita čtverce ukáže analogicky.

Tedy $\gamma_{C,N}$ je skutečně homomorfismus. Z důkazu lemmatu výše plyne, že $F_C(N)$ $= (U_0, \varphi)$. Tedy máme $F_C S_C F_C(N) \simeq F_C(M(C, \varphi)) \simeq (U, \varphi) \simeq (U_0, \varphi) = F_C(N)$. Z konstrukce je pak patrné, že skutečně $F(\gamma_{C,N})$ je isomorfismus.

□

6. Dokončení ověřování

V této kapitole modifikujeme metody z [2] pro důkaz pokrývání modulů funktory F_i. Dokončíme dokazování předpokladů věty 3.

6.1 Pokrývání A-modulů

Pro nekonečné řetězce A platí obdobně jako pro cyklické řetězce nerovnost

$$A_{[1]}0 \subseteq A_{[2]}0 \subseteq \cdots \subseteq A_{[n]}0 \subseteq \cdots \subseteq A_{[n]}M \subseteq \cdots \subseteq A_{[2]}M \subseteq A_{[1]}M. \tag{6.1}$$

Důkaz je přímočarý a podobný důkazu lemma 5.
Analogicky tedy definujeme pro $A \in \mathcal{W}^\infty$

$$A'(M) = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_{[n]}0 \qquad \text{a} \qquad A''(M) = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_{[n]}M.$$

Definici uspořádání $<$ dodefinujeme na nekonečných slovech přímočaře. Nechť $A,B \in \mathcal{W}^\infty_{v,i}$. Pak

$$A < B \iff \exists n : (A_{[n]} = B_{[n]} \quad \text{a} \quad A_{[n+1]} = A_{[n]}\alpha \quad \text{a} \quad B_{[n+1]} = A_{[n]}\beta^{-1}),$$

kde $\alpha, \beta \in Q_1$.

Lemma 19. *Nechť $M \in A$-mod a $0 \neq x \in M_v$ pro nějaké $v \in Q_0$. Pak pro libovolné $i \in \{-1, 1\}$ buď existuje řetězec $C \in \mathcal{W}_{v,i}$ takový, že $x \notin C^-(M)$ a $x \in C^+(M)$, nebo existuje řetězec $A \in \mathcal{W}^\infty_{v,i}$ takový, že $x \notin A'(M)$ a $x \in A''(M)$.*

Důkaz. Induktivně budeme tvořit řetězec A, kde $A_{[n]} \in \mathcal{W}_{v,i}$ je nejmenší řetezec (vůči $<$) délky n takový, že $x \in A_{[n]}M$. Položme $A_{[0]} = 1_{(v,i)}$. Platí $x \in 1_{(v,i)}M$ a zřejmě je tento řetězec jediný délky nula a dalších vlastností. Dále postupujeme následovně:

1. $A_{[n+1]} = A_{[n]}\alpha$, pokud $x \in A_{[n]}\alpha M$, kde $\alpha \in Q_1$ je přímé písmemo,
2. $A_{[n+1]} = A_{[n]}\beta^{-1}$, $\beta \in Q_1$, pokud $x \notin A_{[n]}\alpha M$, nebo neexistuje přímé písmeno α takové, že $A_{[n]}\alpha$ je řetězec,
3. Neexistuje ani přímé ani nepřímé písmeno ℓ takové, že $A_{[n]}\ell$ je řetězec. Končíme konstrukci.

Protože pro libovolné $\beta \in Q_1$ platí $\beta^{-1}M_{t(\beta)} = M_{s(\beta)}$, je z konstukce zřejmé, že $A_{[n+1]}$ je opět nejmenší řetězec délky $n+1$ takový, že $x \in A_{[n+1]}M$.

Předpokládejme nejdříve, že A je nekonečné. Z výše uvedeného plyne, že $x \in A''$. Pokud $x \notin A'$ jsme hotovi. Nechť tedy $x \in A'$. Nechť n je nejmenší n takové, že $x \in A_{[n+1]}0$. Pak nutně $A_{[n+1]} = A_{[n]}\alpha^{-1}$ pro $\alpha \in Q_1$, protože jinak $x \in A_{[n+1]}0 = A_{[n]}\alpha 0 = A_{[n]}0$, což je spor s minimalitou n. Z minimality n máme $x \notin A_{[n]}0$. Pokud existuje $\beta \in Q_1$ takové, že $A_{[n]}\beta$ je řetězec, pak z konstrukce A máme $x \notin A_{[n]}\beta M$. V obou případech existence β máme, že $x \notin A^-_{[n]}(M)$. Dále máme $x \in A_{[n+1]}0 = A_{[n]}\alpha^{-1}0 = A^+_{[n]}(M)$.

Nechť A je konečné, tedy jsme se někde zastavili na třetím bodě. Pak $x \in A_{[n]}M = A^+_{[n]}(M)$. Pokud $x \notin A^-_{[n]}(M)$ máme hotovo. Pokud $x \in A^-_{[n]}(M) = A_{[n]}0$, použijeme důkaz výše, kde argumentujeme minimalitou n.

$\square$

Pro následující lemma budeme potřebovat toto lemma.

Lemma 20. *Nechť a, b jsou endomorfismy na $V \in k$-mod takové, že $ba = 0$ a nechť $U_1 \subseteq U_2 \subseteq V$. Pak*

$$\dim {}^{U_2}\!\big/_{U_1} \geq \dim {}^{bU_2}\!\big/_{bU_1} + \dim {}^{a^{-1}U_2}\!\big/_{a^{-1}U_1}.$$

Důkaz. Důkaz stejný jako v [2, str. 22], kde $a = b$.

Lemma 21. *Pokud $A' \neq A''$ pro nějaké $A \in \mathcal{W}^\infty$, pak $A = C^\infty$ pro nějaké $C \in \mathcal{W}'$, kde C je délky k a $C^\infty_{[kn]} = C^k$.*

Důkaz. Nechť $A < B$, $A,B \in \mathcal{W}^\infty_{v,i}$. Ukážeme nejprve, že intervaly $[A', A'']$ a $[B', B'']$ jsou uspořádané. Z definice uspořádání na nekonečných řetězcích máme n takové, že $A_{[n]} = B_{[n]}$ a $A_{[n+1]} = A_{[n]}\alpha$ a $B_{[n+1]} = A_{[n]}\beta^{-1}$ pro $\alpha, \beta \in Q_1$. Pak

$$A_{[n+1]}M = A_{[n]}\alpha M = A^-_{[n]}(M) \subseteq A^+_{[n]}(M) = A_{[n]}\beta^{-1}0 = B_{[n+1]}0$$

podle lemmatu 4. Tedy podle inkluze (6.1) jsou intervaly skutečně uspořádané.

Mějme množinu $\mathcal{A}_M = \{A \in \mathcal{W}^\infty : A'(M) \neq A''(M)\}$. Protože intervaly funktorů jsou pro každé $A,B \in \mathcal{W}^\infty_{v,i}$ uspořádané, a tedy máme filtraci na konečně dimenzionálním M_v, je $\mathcal{A}_M$ konečná množina.

Nechť $A \in \mathcal{A}_M$. Ukážeme, že pak $A^{[k]} \in \mathcal{A}$ pro libovolné k. Pro spor předpokládejme, že $A^{[k]} \notin \mathcal{A}_M$. Mějme n takové, že platí

$$\begin{aligned}
A_{[n]}0 = A_{[n+1]}0 = A'(M) \subsetneq A''(M) = A_{[n]}M = A_{[n+1]}M \\
(A^{[k]})'(M) = (A^{[k]})_{[n-k]}0 = (A^{[k]})_{[n-k+1]}0 = * \\
* = (A^{[k]})''(M) = (A^{[k]})_{[n-k]}M = (A^{[k]})_{[n-k+1]}M.
\end{aligned}$$

Pak

$$\begin{aligned}
A'(M) &= A_{[n]}0 = \ell_1 \cdots \ell_k \ell_{k+1} \cdots \ell_n 0 = \ell_1 \cdots \ell_k (A^{[k]})_{[n-k]}0 \\
&= \ell_1 \cdots \ell_k (A^{[k]})_{[n-k]}M = \ell_1 \cdots \ell_k \ell_{k+1} \cdots \ell_n M = A''(M).
\end{aligned}$$

Tedy $A \notin \mathcal{A}_M$. Spor.

Protože toto platí pro každé k a $\mathcal{A}_M$ je konečná množina, nutně $A = A_{[k]}C^\infty$, pro nějaké $C \in \mathcal{W}'$. Máme totiž $A^{[n]} = A^{[m]}$ pro nějaké $n \neq m$. Tedy $\ell_{n+1} \cdots \ell_m = \ell_{m+1} \cdots \ell_{2m-n}$, a tedy máme $A^{[n]} = (\ell_{n+1} \cdots \ell_m)^2 (A^{[m]})^{[m-n]}$, a induktivně postupujeme dále. Tedy také $A^{[k]} = C^\infty \in \mathcal{A}_M$ a $A^{[k+1]} = C^\infty_{(1)} \in \mathcal{A}_M$.

Nechť $k \geq 0$ je nejmenší takové k, že $A = A_{[k]}C^\infty$ pro nějaké $C \in \mathcal{W}'$. Označme si

$$\begin{aligned}
A_{[k]} = a_1 \cdots a_k \text{ , kde } a_i \in Q_1 \cup Q_1^{-1}, \\
C = c_1 \cdots c_n \text{ , kde } c_i \in Q_1 \cup Q_1^{-1}.
\end{aligned}$$

Protože k je nejmenší takové, $a_k \neq c_n$, protože jinak $A = a_1 \cdots a_{k-1} C^\infty_{(n-1)}$. Protože $a_k c_1 \in \mathcal{W}$ i $c_n c_1 \in \mathcal{W}$, obsahuje množina $\{a_k, c_n\}$ právě jedno přímé a právě jedno nepřímé písmeno, c_1 může být přímé i nepřímé. Ukážeme, že $a_k c_n^{-1} \in I$ (nebo $c_n a_k^{-1} \in I$, podle toho co má smysl). Mějme $\alpha, \beta \in Q_1$, $\ell \in Q_1 \cup Q_1^{-1}$ a nechť $\alpha\ell \in \mathcal{W}$ a $\beta^{-1}\ell \in \mathcal{W}$. Pokud ℓ je přímé, pak z definice řetězce $\alpha\ell \notin I$ a tedy podle definice řetězcové algebry, třetí bod, $\alpha\beta \in I$. Pokud ℓ je nepřímé, pak $\ell^{-1}\beta \notin I$, tedy opět z definice řetězcové algebry, čtvrtý bod, $\alpha\beta \in I$. V obou případech tedy $\alpha\beta = 0$.

Platí $c_n C^\infty = C^\infty_{(n-1)}$. Protože M je konečně dimenzionální a použitím inkluze (6.1) existuje m takové, že $C^m N = C^{m+1} N$ a $c_n C^m N = c_n C^{m+1} N$, kde $N \in \{0, M\}$. Pak z lemmatu 9

$$\dim {}^{C^m M}\!\big/_{C^m 0} = \dim {}^{c_n C^m M}\!\big/_{c_n C^m 0}.$$

Za použití nerovnosti z lemmatu 20 pak dostáváme

$$\dim F_C(M) \geq \dim {}^{c_n C^m M}\!\big/_{c_n C^m 0} + \dim {}^{a_n C^m M}\!\big/_{a_n C^m 0}.$$

Tedy druhý člen je nutně nulový, a tedy $a_k C^n M = a_k C^n 0$. Protože $A \in \mathcal{A}_M$, nutně $k = 0$, a tedy $A = C^\infty$.

□

Pro přehlednost budeme v následujícím lemmatu psát $x \in F$ místo $x \in F(M)$.

Tvrzení 22. *Nechť $M \in A$-mod a $x \in M_v$ nenulové. Pak existují $C \in \mathcal{W}_{v,i}$ a $D \in \mathcal{W}_{v-i}$ takové, že $x \notin (D^- + C^-) \cap C^+$ a $x \in (D^+ + C^-) \cap C^+$, nebo $E \in \mathcal{W}'_{v,i}$, že $x \notin E'$ a $x \in E''$.*

Důkaz. Podle lemmatu 19 (a podle lemmatu 21 víme, že místo $\mathcal{W}^\infty$ stačí uvažovat $\mathcal{W}'$) víme, že buď takové $E \in \mathcal{W}'_{v,i}$ máme, a pak máme hotovo, nebo máme $C \in \mathcal{W}_{v,i}$, že $x \in C^+ \setminus C^-$.

Z lemmatu 21 a lemmatu 19 (ve směru $-i$) a z tvrzení 7 o uspořádání intervalů (první část důkazu) máme filtraci

$$0 = V_0 \subseteq V_1 \subseteq \cdots \subseteq V_m = M_v,$$

kde pro každé $j \in \{0, \ldots, m-1\}$ máme

$$V_{j+1}\big/V_j = D^+\big/D^- \quad \text{nebo} \quad V_{j+1}\big/V_j = B''\big/B'$$

pro nějaké $D \in \mathcal{W}_{v,-i}$ nebo $B \in \mathcal{W}'_{v,-i}$. Máme tedy i filtraci intervalu vektorových podprostorů $[C^-, C^+]$

$$C^- = (V_0 + C^-) \cap C^+ \subseteq (V_1 + C^-) \cap C^+ \subseteq \cdots \subseteq (V_m + C^-) \cap C^+.$$

Existuje tedy j takové, že $x \in (V_{j+1} + C^-) \cap C^+$ a $x \notin (V_j + C^-) \cap C^+$. Ukážeme, že to nemůže být j takové, že $V_{j+1}/V_j = B''/B'$ pro nějaké $B \in \mathcal{W}_{v,-i}$. Konkrétně ukážeme, že platí

$$(B' + C^-) \cap C^+ = (B'' + C^-) \cap C^+.$$

Nejprve ukážeme, že existuje U takové, že

$$B' \oplus U = B'', \tag{6.2}$$
$$(B^{-1})' \oplus U = (B^{-1})''. \tag{6.3}$$

Pro $B \in \mathcal{W}'_{v,-i}$ platí, že $B^{-1} \in \mathcal{W}'_{v,i}$. Z argumentu konečné dimenze existuje U takové, že $B' \oplus U = B''$. Víme, že B indukuje na $B''/B' \simeq U$ automorfismus. Poté B^{-1} je na U invezní automorfismus k tomuto automorfsmu. Dostáváme $(B^{-1})' \oplus U = (B^{-1})''$.

Z tvrzení o uspořádání intevalů máme dvě možnosti.

- $(B^{-1})'' \subseteq C^-$. Tedy máme

  $$(B^{-1})' \oplus U = (B^{-1})'' \subseteq C^-.$$

  Sečtením (6.2) a (6.3) pak plyne

  $$\begin{aligned}(B' + (B^{-1})') \oplus U &= B'' + (B^{-1})''\\ B' + (B^{-1})' + U + C^- &= B'' + (B^{-1})'' + C^-\\ B' + C^- &= B'' + C^-\\ (B' + C^-) \cap C^+ &= (B'' + C^-) \cap C^+.\end{aligned}$$

- $C^+ \subseteq (B^{-1})'$. Pak máme z (6.3) $C^+ \cap U = 0$. Potom přičtením C^- do (6.2) máme

  $$\begin{aligned}(B' + C^-) \oplus U &= B'' + C^-\\ (B' + C^-) \cap C^+ &= (B'' + C^-) \cap C^+.\end{aligned}$$

Tedy $x \in (D^+ + C^-) \cap C^+$ a $x \notin (D^- + C^-) \cap C^+$ pro nějaké $D \in \mathcal{W}_{v,-i}$.

□

6.2 Klasifikační věta v kontextu řetězcových algeber

Označme Φ reprezentativní množinu nerozložitelných automorfismů na vektorových prostorech. Automorfismus φ je nerozložitelný, pokud z $\varphi = f \circ h$, kde f,h automorfismy, plyne $f = \mathrm{id}$ nebo $h = \mathrm{id}$.

Konečně vyslovíme klasifikační větu pro řetězcové moduly.

Věta 23. *Moduly $M(C)$ a $M(E,\varphi)$ kompletně klasifikují všechny nerozložitelné A-moduly, kde $C \in \mathcal{W}/{\sim_\pm}$, $E \in \mathcal{W}'/{\sim_\pi}$ a $\varphi \in \Phi$. Žádná dvojice těchto modulů není isomorfní.*

Důkaz. Použijeme větu 3. Za indexovou množinu I z věty položíme

$$\begin{aligned}I =&\{(1_{(t(C),i)}, C) : C \text{ je reprezentant ekvivalenční třídy } x \in \mathcal{W}/{\sim_\pm} \text{ a } \varepsilon(C) = i\}\\ &\cup \{C \text{ je minimální 1-reprezentant ekvivalenční třídy } x \in \mathcal{W}'/{\sim_\pi}\}.\end{aligned}$$

Pro tuto indexovou množinu I již platí, že $F_j S_i = 0$, pokud $i \neq j$. Pak máme

1. Aditivita funktorů + tvrzení 13; tvrzení 17.

2. Mějme reprezentaci $(M_v, M_\alpha)_{\alpha\in Q_1}^{v\in Q_0}$ modulu $M \in A$-mod. Podle tvrzení 22 víme, že filtrace $\mathcal{F}_{v,i}$ vrcholu M_v zfiltruje celé M_v. Zároveň z tvrzení 7 víme, že faktory F_i této filtrace jsou uspořádané, tedy z argumentu konečné dimenze M jsou F_i nulové skoro všude.

3. Nechť $M,N \in A$-mod a $\gamma : M \to N$ je homomorfismus. Mějme jejich reprezentace $(M_v, M_\alpha)_{\alpha\in Q_1}^{v\in Q_0}$, $(N_v, N_\alpha)_{\alpha\in Q_1}^{v\in Q_0}$ a $(\gamma_v : M_v \to N_v)_{v\in Q_0}$, kde pro každé $(\alpha : v \to w) \in Q_1$ platí $\gamma_w M_\alpha = N_\alpha \gamma_v$. Nechť pro každé $i \in I$ je $\beta_i = F_i(\alpha)$ isomorfismus. Pak z definice F_i a z konečnosti modulů existují $U \subseteq M_v$ a $V \subseteq N_v$ takové, že $F_i(M) \simeq U$ a $F_i(N) \simeq V$. Uvažujme tedy β_i jako zobrazení $\beta_i : U \to V$. Z definice isomorfismu existuje β_i^{-1} takové, že $\beta_i^{-1}\beta_i = \mathrm{id}_U$ a $\beta_i\beta_i^{-1} = \mathrm{id}_V$. Protože faktory F_i jakožto intervaly pokrývají M dostáváme, že $(\bigoplus_{i\in I} \beta_i^{-1})\alpha = \mathrm{id}_M$ a $\alpha(\bigoplus_{i\in I} \beta_i^{-1}) = \mathrm{id}_N$. Tedy α je skutečně isomorfismus.

4. Tvrzení 14 + tvrzení 18.

$\square$

7. Příklady klasifikace

Kompletní klasifikaci nerozložitelných A-modulů ukážeme pouze pro jednoduchý příklad řetězcové algebry. Máme-li totiž situaci, kde se vyskytují alespoň dva cykly, které lze nějak napojit, počet kombinací nám vystřelí do krajně nepřehledných výšin, dle mého neilustrativních.

Při klasifikaci vypíšeme pouze řetězce nebo reprezentanty tříd ekvivalence. Z nich je již snadné pomocí definic z druhé kapitoly poskládat konkrétní reprezentace modulů $M(C)$ a $M(C, \varphi)$.

7.1 Příklad 1

Mějme Kroneckerovu k-algebru zadanou toulcem $\bullet \underset{\beta}{\overset{\alpha}{\rightrightarrows}} \circ$.

Máme vždy pouze jedno písmeno k dispozici jako způsob prodloužení řetězce. Pak máme následující řetězce.

Délka ř.	$\mathcal{W}/\sim_{\pm}$	$\mathcal{W}'/\sim_{\pi}$
0	$1_{(\bullet,1)} \sim_{\pm} 1_{(\bullet,-1)}$; $1_{(\circ,1)} \sim_{\pm} 1_{(\circ,-1)}$	–
1	$\alpha \sim_{\pm} \alpha^{-1}$; $\beta \sim_{\pm} \beta^{-1}$	–
2	$\beta^{-1}\alpha \sim_{\pm} \alpha^{-1}\beta$; $\alpha\beta^{-1} \sim_{\pm} \beta\alpha^{-1}$	$\beta^{-1}\alpha \sim_{\pi} \alpha\beta^{-1} \sim_{\pi} \alpha^{-1}\beta \sim_{\pi} \beta\alpha^{-1}$
$2n$	$(\beta^{-1}\alpha)^n \sim_{\pm} (\alpha^{-1}\beta)^n$; $(\beta\alpha^{-1})^n \sim_{\pm} (\alpha\beta^{-1})^n$	–
$2n+1$	$\alpha(\beta^{-1}\alpha)^n \sim_{\pm} \alpha^{-1}(\beta\alpha^{-1})^n$; $\beta(\alpha^{-1}\beta) \sim_{\pm} \beta^{-1}(\alpha\beta^{-1})^n$	–

Povšimněme si, že moduly $M = M(1_{(\bullet,1)}) = k_\bullet \underset{\beta_\bullet = 0}{\overset{\alpha_\bullet = 0}{\rightrightarrows}} 0$ a $N = M(1_{(\circ,1)}) = 0 \underset{\beta_\circ = 0}{\overset{\alpha_\circ = 0}{\rightrightarrows}} k_\circ$ jsou skutečně neisomorfní. Máme-li homomorfismus $\gamma : M \to N$, kde $\gamma = (\gamma_\bullet, \gamma_\circ)$, pak dostáváme následující komutativní diagram.

$$\begin{tikzcd}
k_\bullet \arrow[r, shift left, "\alpha_\bullet = 0"] \arrow[r, shift right, "\beta_\bullet = 0"'] \arrow[d, "\gamma_\bullet"'] & 0 \arrow[d, "\gamma_\circ"] \\
0 \arrow[r, shift left, "\alpha_\circ = 0"] \arrow[r, shift right, "\beta_\circ = 0"'] & k_\circ
\end{tikzcd}$$

Tedy je zřejmé, že γ je nutně nulový homomorfismus a není to isomorfismus.

7.2 Příklad 2

Nastíníme klasifikaci modulů nad řetězcovou algebrou $k\langle \alpha, \beta \rangle / \langle \alpha^2, \beta^2 \rangle$ z [2].

Tedy máme k-algebru podle toulce $\begin{tikzcd} \circ \arrow[loop left, "\alpha"] \arrow[loop right, "\beta"] \end{tikzcd}$.

Na této algebře jsou všechny řetězce následujícího tvaru

$$\begin{array}{ll} \alpha^{\pm} \cdots \alpha^{\pm}, & \alpha^{\pm} \cdots \beta^{\pm}, \\ \beta^{\pm} \cdots \alpha^{\pm}, & \beta^{\pm} \cdots \beta^{\pm}. \end{array}$$

Všechny cyklické řetězce jsou sudé délky. Označme si cyklické řetězce

$$\begin{array}{ll} A = \beta\alpha, & B = \beta^{-1}\alpha, \\ C = \beta\alpha^{-1}, & D = \beta^{-1}\alpha^{-1}. \end{array}$$

Tyto řetězce jsou primitivní, platí $A \sim_\pi D$ a $B \sim_\pi C$. Tyto cyklické řetězce se pak použijí jako základní bloky, z kterých se téměř libovolně tvoří řetězce a primitivní řetězce, musíme pouze brát v úvahu, že primitivní řetězce nejsou mocniny nějakého podřetězce.

Potom prvních pár řetězců vypadá následovně (uvádíme vždy jednoho reprezentanta ekvivalenční třídy).

Délka ř.	$\mathcal{W}/\sim_{\pm}$	$\mathcal{W}'/\sim_{\pi}$
0	$1_{(\circ,1)}$	–
1	α; β	–
2	$\beta\alpha$; $\beta^{-1}\alpha$; $\alpha\beta$	$\beta\alpha$; $\beta^{-1}\alpha$
3	$\alpha^{-1}\beta\alpha$; $\alpha\beta\alpha$; $\alpha\beta^{-1}\alpha$; $\beta\alpha\beta$; $\beta\alpha^{-1}\beta$; $\beta^{-1}\alpha\beta$	–
4	AA; AB; AC; AD; BA; BB; BC; BD; CA; CB; CC; CD; DA; DB; DC; DD	BA; CB; CA; DB; DA; DC
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Seznam použité literatury

[1] M. C. R. Butler and C. M. Ringel. Auslander-reiten sequences with few middle terms and applications to string algebrass. *Communications in Algebra*, 15:145–179, 1987.

[2] C. M. Ringel. The indecomposable representations of the dihedral 2-groups. *Mathematische Annalen*, 214:19–34, 1975.

[3] Izrail Moiseevich Gel'fand and Vladimir Ponomarev. Indecomposable representations of the Lorentz group. *Russian Mathematical Surveys*, 23:1–58, 1968.

[4] Andrzej Skowronski Ibrahim Assem and Daniel Simson. *Elements of the representation theory of associative algebras Volume 1*. London Mathematical Society student texts 65, 71-72. Cambridge University Press, 2006.

[5] Rosanna Laking. *String Algebras in Representation Theory*. disertační práce, University of Manchester, 2016.

[6] Saunders Mac Lane. *Categories for the Working Mathematician*. Springer New York, 1978.

[7] K. R. Goodearl and R. B. Warfield Jr. *An Introduction to Noncommutative Noetherian Rings*. London Mathematical Society Student Texts. Cambridge University Press, 2 edition, 2004.