Posudek oponenta bakalářské práce

Název: Hypertělesa a jejich aplikace v tropické geometrii či teorii matroidů
Autor: Břetislav Andr

Shrnutí obsahu práce

Práce definuje pojem hypertělesa, uvádí a vysvětluje několik důležitých příkladů a dále ukazuje jejich použití v tropické geometrii a v teorii matroidů. Výsledkem je pěkný úvod k této struktuře, motivaci a souvislostem se dalšími zajímavými a důležitými pojmy. Místy ale výsledný text trochu působí dojmem, že původní plán byl ambicióznější a některé jeho části se nepovedlo do zamýšlené dokonalosti dovést. To se projevuje zvláště v částech o amébách v tropické geometrii a o valuovaných matroidech, kde je vysvětlení dosti strohé.

Celkové hodnocení práce

Téma práce. Téma práce považuji za přiměřené a vhodné pro bakalářskou práci. Použité metody jsou relativně elementární, ale jako celek jdou dosti nad rámec běžných bakalářských kurzů.

Vlastní příspěvek. Jedná se o kompilační práci z většího množství zdrojů, na jejichž základě autor sepsal pěkný ucelený text.

Matematická úroveň. Text je z matematického hlediska korektní, přehledný a dobře čitelný. Mírná výtka směřuje jen ke strohosti některých částí (zmíněno výše) a některým chybějícím detailům v definicích a důkazech. Konkrétní připomínky uvádím níže.

Práce se zdroji. Použité zdroje jsou řádně citovány.

Formální úprava. Formální úprava práce je dobrá, počet překlepů je minimální.

Konkrétní připomínky

Nakonec uvádím několik dotazů a připomínek ke konkrétním místům v textu práce:

- str. 5, def. 1.1.4: V definici hypertělesa není uvedeno, co je výsledek násobení nulou. Plyne z uvedených axiomů, že automaticky $x \cdot 0 = 0$ pro každé x jako v definici klasického tělesa, nebo je potřeba takový axiom dodat?
- str. 7, ř. -4: Striktně vzato, rovnost $c \cdot (a \top b) = c \cdot \{|a| \cdot e^{\varphi i} : \alpha \leq \varphi \leq \beta\}$ platí jen pro $\alpha \leq \beta < \alpha + \pi$. Pro ostatní případy to dopadne obdobně, ale trochu jinak.
- str. 8, def. 2.1.1: Podobně jako výše v definici polotělesa není definované, jak dopadne násobení nulou. Opět stejný dotaz: platí automaticky, že $x \cdot 0 = 0$, nebo je to třeba dodefinovat?
- str. 11: améby a speciálně pak obrázek 2.3 nejsou moc vysvětleny. Který polynom p a jaké hodnoty parametru h jsou na obrázku 2.3 zobrazeny?
- str. 13, první řádek: Případy $a = 0$ nebo $b = 0$ by bylo lepší rozebrat zvlášť.

- str. 13, odst. pod obr. 2.5: Bylo by informativnější dát do souvislosti Litvinovu-Maslovu dekvantizaci reálných čísel se subtropickou defomací komplexních čísel. A sice že pro každé $h > 0$ máme vnoření
$$f_h\colon T_h \to \mathbb{C}_h, \quad x \mapsto e^x,$$
která zachovává operace, tj. $f_h(a \oplus_h b) = f_h(a) \boxplus_h f_h(b)$ a $f_h(a \odot_h b) = f_h(a) \cdot f_h(b)$. To, že $\mathbb{C}_0$ obsahuje $\mathbb{T}$, je pak limitní případ pro h jdoucí k nule.

- str. 17, lemma 3.1.2: Podle mě by se mělo ukázat i to, že pro každý matroid $(E, \mathcal{I})$ hodnosti n je libovolné $I \in \mathcal{I}$ podmnožinou nějaké báze, tj. $I \subseteq B$ pro nějaké $B \in \mathcal{I}$ mohutnosti n. To je potřeba vědět, abychom měli opravdu ekvivalenci mezi matroidy a systémy bází. Když totiž začneme s matroidem $(F, \mathcal{J})$, vezmeme odpovídající systém bází $\mathcal{D} = \{J \in \mathcal{J} : |J| = n\}$ a z něj zkonstruujeme opět matroid $(E, \mathcal{I})$ podle lemmatu 3.1.2, chtěli bychom vědět, že dostaneme přesně ten matroid, se kterým jsme začali, tj. že $(F, \mathcal{J}) = (E, \mathcal{I})$.

- str. 18, ř. 10: Píšete „Tedy $(A \setminus \{a\}) \cup \{b\}$ není nezávislá množina ...“. Aktuální předpoklad ale je jen ten, že to není maximální množina $\mathcal{I}$, tj. že buď není nezávislá, nebo je nezávislá ale ne maximální. Proč přesně nenastane druhá možnost?

- str. 18, ř. -7: Počítám, že C_1 a C_2 mají být jen různé místo disjunktní.

- str. 22, první věta §3.4: To, jak orientované matroidy zobecňují pojem matroidu reprezentovaného nad archimédovským tělesem, nebylo vysvětleno.

- str. 22, poslední odst. def. 3.4.1: Formulace je dosti matoucí. Spíš by mělo být řečeno, kdy jsou valuace ekvivalentní, a dále pak že valuované matroidy na stejné množině a stejné hodnosti považujeme za stejné, pokud mají ekvivalentní valuace.

- str. 24, formulace lemmatu 3.5.2: Škoda, že není alespoň naznačeno, jak ta přirozená bijekce funguje.

Závěr

Práci doporučuji uznat jako bakalářskou práci.

Návrh klasifikace vedoucí sdělí předsedovi zkušební (sub)komise.

doc. RNDr. Jan Šťovíček, Ph.D.
Katedra algebry MFF UK
28. 8. 2023