MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ FAKULTA
Univerzita Karlova

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Břetislav Andr

Hypertělesa a jejich aplikace v tropické geometrii či teorii matroidů

Katedra algebry

Vedoucí bakalářské práce: Zuzana Patáková
Studijní program: Obecná matematika
Studijní obor: MOMP

Praha 2023

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval(a) samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů. Tato práce nebyla využita k získání jiného nebo stejného titulu.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V .... dne ....

Podpis autora

Děkuji vedoucí práce RNDr. Zuzaně Patákové, Ph.D. za vstřícný a trpělivý přístup.

Název práce: Hypertělesa a jejich aplikace v tropické geometrii či teorii matroidů

Autor: Břetislav Andr

Katedra: Katedra algebry

Vedoucí bakalářské práce: Zuzana Patáková, Katedra algebry

Abstrakt: Hypertělesa jsou algebraickou strukturou zobecňující pojem algebraického tělesa. Na rozdíl od klasických těles, operace sčítání v hypertělese je mnohoznačná, tzn. výsledkem součtu dvou prvků není pouze jeden prvek, ale celá množina prvků. Hypertělesa nacházejí praktické využití v teorii matroidů a v tropické geometrii, odnoži algebraické geometrie. Matroid je algebraická struktura zobecňující pojem lineární nezávislosti. Existuje více typů matroidů rozšiřující základní definici matroidu, např. matroid orientovaný či valuovaný. Všechny tyto definice lze zastřešit pod jeden pojem tzv. *F-matroidu*, kde *F* zastává hypertěleso. Tropická geometrie se zabývá podobnými otázkami jako algebraická geometrie, pouze nad tzv. *tropickým polotělesem*. Díky své kombinatorické povaze nachází mnoho aplikací. Tropická geometrie a algebraická geometrie jsou úzce propojené pomocí tzv. *Litvinovy-Maslovy dekvantizace* a hypertělesa lze použít k popisu její zobecněné verze.

Klíčová slova: hypertěleso, tropická geometrie, matroid

Title: Hyperfields and their applications in tropical geometry or matroid theory

Author: Břetislav Andr

Department: Department of Algebra

Supervisor: Zuzana Patáková, Department of Algebra

Abstract: Hyperfields are algebraic structures generalizing the concept of an algebraic field. In contrast to classical fields, summation in a hyperfield is multivalued, that is, the sum of two elements is not a single element, but a whole set of elements. Hyperfields find practical use in the theory of matroids and in tropical geometry, a variant of algebraic geometry. Matroid is an algebraic structure generalizing the concept of linear independence. There exist more types of matroids expanding the basic definition, e.g. oriented or valuated matroids. All of these definitions can be generalized to a single concept of an *F-matroid*, where *F* is a hyperfield. Tropical geometry is concerned with similar problems as algebraic geometry, only over the so-called *tropical semifield*. It finds many applications due to its combinatorial nature. Tropical geometry and algebraic geometry are closely tied by the so-called *Litvinov-Maslov dequantization* and hyperfields may be used to describe its generalized version.

Keywords: hyperfield, tropical geometry, matroid

Obsah

Seznam použitých zkratek a symbolů

$\mathbb{N}$	přirozená čísla neobsahující nulu
$\mathbb{N}_0$	přirozená čísla obsahující nulu
$\mathbb{T}$	tropické pololěleso
$\mathbb{R}$	reálná čísla
$\mathbb{C}$	komplexní čísla
$\mathbb{RT}$	reálné tropické hypertěleso
$\mathbb{CT}$	(komplexní) tropické hypertěleso
$\top$	komplexní tropické sčítání
$\boxplus$	mnohoznačná binární operace sčítání
$\odot$	binární operace násobení v hypertělese

Úvod

Cílem tohoto textu je čtenáře seznámit s pojmem hypertělesa a zamotivovat jeho užití. Hypertěleso je algebraickou strukturou zobecňující klasické algebraické těleso, ovšem s tím rozdílem, že operace sčítání v hypertělese je mnohoznačná, tzn. součet dvou prvků není jednoznačný, nýbrž jeho výsledkem je celá množina prvků. Na první pohled nestandardní pojem má však své praktické užití. V první kapitole definujeme hypertěleso jakožto přímé zobecnění algebraického tělesa, kde součet je mnohoznačná binární operace. Ukážeme příklady hypertěles, které později využijeme k aplikaci ve dvou různých matematických disciplínách, t.j. tropické geometrii a teorii matroidů.

V druhé kapitole přiblížíme tropickou geometrii, odnož algebraické geometrie. Ta se zabývá podobnými otázkami jako klasická algebraická geometrie, ovšem nad jinou algebraickou strukturou, tzv. *tropickým polotělesem*. Tropické polotěleso tvoří reálná čísla společně s $-\infty$, kde operaci sčítání nahradí operace braní maxima reálných čísel a operaci násobení převezme klasické sčítání reálných čísel. Nezáporná reálná čísla s klasickým sčítáním a násobením můžeme pomocí tzv. *Litvinoy-Maslovy dekvantizace* deformovat právě na tropické polotěleso. Zkusíme-li rozšířit tuto dekvantizaci na čísla komplexní, narazíme na problém s výslednou dekvantizovanou operací sčítání. Právě zde nám pomohou hypertělesa, kdy dekvantizovaná komplexní čísla můžeme popsat pomocí tzv. *komplexního tropického hypertělesa*.

Ve třetí kapitole rozebereme základní pojmy v teorii matroidů. *Matroid* je algebraická struktura zobecňující pojem lineární nezávislosti z lineární algebry. Matroid můžeme definovat mnoha různými způsoby, uvedeme tři z nich a ukážeme důkazy jejich ekvivalence, včetně elementárních příkladů. Máme-li matroid, který lze reprezentovat jako systém lineárně nezávislých množin vektorů ve vektorovém prostoru nad archimédovským tělesem, lze ho zobecnit do pojmu *orientovaného matroidu*. Můžeme-li matroid reprezentovat nad nearchimédovským tělesem, lze jej zobecnit do pojmu *valuovaného matroidu*. Všechny tyto definice můžeme sloučit do jednotného pojmu, tzv. *F-matroidu*, kde F zastává hypertěleso. Pro konkrétní volby hypertěles pak dostáváme příslušné typy matroidů.

1. Hypertělesa

Hypertělesa jsou přímým zobecněním standardních algebraických těles, rozšířená je zde definice tělesového sčítání. Nebudeme nadále požadovat, aby výsledkem sčítání byl jeden konkrétní prvek, výsledkem součtu bude rovnou celá množina prvků.

1.1 Definice hypertělesa

K definici hypertělesa potřebujeme binární operaci, jejíž výsledkem není pouze jeden prvek, ale množina prvků, tzn. podmnožina nosiče, na kterém operaci definujeme. Poslouží nám k tomu definice mnohoznačného zobrazení a mnohoznačné binární operace, viz (Viro, 2011, Sekce 2.1 a 2.2).

Definice 1.1.1 (Mnohoznačné zobrazení)**.** *Nechť X, Y jsou množiny. Zobrazení $f : X \longrightarrow 2^Y$ nazveme* ***mnohoznačným zobrazením*** *z X do Y, značíme $f : X \multimap Y$.*

Pokud identifikujeme $f(a)$ s $\{f(a)\}$, lze i klasické zobrazení považovat za zobrazení mnohoznačné.

Definice 1.1.2 (Mnohoznačná binární operace)**.** *Nechť X je množina.* ***Mnohoznačnou binární operací*** *na množině X rozumíme mnohoznačné zobrazení $f : X \times X \longrightarrow 2^X \setminus \{\emptyset\}$. Značíme $f : X \times X \multimap X$.*

Značení. Pro libovolnou mnohoznačnou binární operaci g na množině X a libovolné množiny $A, B \subseteq X$ výrazem $g(A, B)$ rozumíme

$$g(A, B) := \bigcup_{a \in A, b \in B} g(a, b)$$

Pomocí tohoto zjednodušeného značení nazveme $f : X \times X \multimap X$ *asociativní*, jestliže pro všechna $a, b, c \in X$ platí $f(a, f(b, c)) = f(f(a, b), c)$. Všimněme si, že rovnosti pro tyto zákony nejsou již rovnosti prvků, ale celých množin.

Přirozeně definujeme i komutativitu, tzn. mnohoznačná binární operace $f : X \times X \multimap X$ je *komutativní*, pokud $f(a, b) = f(b, a)$ pro všechna $a, b \in X$.

Máme-li mnohoznačnou binární operaci, můžeme paralelně ke standardním algebraickým strukturám definovat (hyper)struktury s mnohoznačnou binární operací, viz (Viro, 2011, Sekce 2.3).

Definice 1.1.3 (Hypergrupa)**.** *Množinu X společně s mnohoznačnou (binární) operací $\boxplus : X \times X \multimap X$, $(a, b) \mapsto a \boxplus b \subseteq X$ nazveme* ***komutativní hypergrupa****, pokud*

1. *operace $\boxplus$ je asociativní a komutativní,*
2. *existuje* neutrální prvek *$0 \in X$ tak, že $0 \boxplus a = a$ pro všechna $a \in X$,*
3. *pro každé $a \in X$ existuje právě jedno $-a \in X$, že $0 \in a \boxplus (-a)$.*

Druhý bod definice by striktně vzato měl být tvaru $0 \boxplus a = \{a\}$. Pro jednoduchost zápisu zde identifikujeme jednoprvkové množiny s jejich jediným prvkem. I když existují i nekomutativní hypergrupy, pro naše potřeby si vystačíme s hypergrupami komutativními.

Pomocí hypergrupy můžeme konečně definovat hypertěleso dle Viro (2011, Sekce 2.9).

Definice 1.1.4 (Hypertěleso). *Množinu X společně s mnohoznačnou binární operací sčítání $\boxplus$ a (standardním) násobením $\cdot$ nazveme **hypertěleso**, pokud*

1. *X je komutativní hypergrupou vzhledem k $\boxplus$,*
2. *$X \setminus \{0\}$ je komutativní grupou vzhledem k $\cdot$, kde 0 je neutrální prvek vzhledem ke sčítání $\boxplus$,*
3. *pro všechna $x, y, z \in X$ platí distributivní zákon*

$$x \cdot (y \boxplus z) = x \cdot y \boxplus x \cdot z.$$

Distributivní zákon opět interpretujeme dle značení zavedeného v Sekci 1.1.

1.2 Příklady hypertěles

Pro přiblížení poslední definice uveďme pár příkladů hypertěles, které budeme v textu nadále používat. Uvádíme je z Baker a Bowler (2017, Sekce 1.1).

Příklad 1.2.1 (Každé těleso je hypertěleso). Ze standardního tělesového sčítání konstruujeme mnohoznačné sčítání triviálně: pokud $a + b = c$ v klasickém tělese, definujeme $a \boxplus b := \{c\}$. Hypertěleso je tedy zobecněním klasického tělesa.

Poznámka. Symbol $\boxplus$ v tomto textu používáme obecně pro mnohoznačnou operaci. Jeho význam by vždy měl plynout z kontextu. Symboly konkrétních mnohoznačných operací, které platí mimo kontext, budou vždy explicitně zdůrazněny.

Příklad 1.2.2 (Krasnerovo hypertěleso). Nejjednodušším příkladem hypertělesa, které není těleso, je *Krasnerovo hypertěleso* $\mathbb{K}$. Na dvouprvkové množině $\{0, 1\}$ definujeme komutativní mnohoznačnou operaci $\boxplus$ následovně: $0 \boxplus 0 = 0$, $0 \boxplus 1 = 1$ a $1 \boxplus 1 = \{0, 1\}$. Všimněme si, že první dvě rovnosti již plynou z definice hypertělesa. Zároveň $\mathbb{K}$ není tělesem, jelikož součet $1 \boxplus 1$ není jednoznačný.

Příklad 1.2.3 (Hypertěleso znamének). Na množině $S = \{-1, 0, 1\}$ definujeme mnohoznačnou binární operaci $\boxplus$ po prvcích: $-1 \boxplus -1 = -1$, $1 \boxplus 1 = 1$ a $-1 \boxplus 1 = \{-1, 0, 1\}$, ostatní možnosti plynou z axiomů. *Hypertělesem znamének* pak nazveme trojici $\mathbb{S} = (S, \boxplus, \cdot)$, tedy množinu S společně s mnohoznačným sčítáním $\boxplus$ a klasickým násobením reálných čísel. $\mathbb{S}$ lze chápat jako možné výsledky sčítání kladných a záporných reálných čísel. Součet dvou záporných reálných čísel je vždy záporný, součet dvou kladných je kladný, ovšem součet kladného a záporného reálného čísla může být jak kladný, tak nulový či záporný v závislosti na konkrétních hodnotách.

Příklad 1.2.4 (Reálné tropické hypertěleso). Označme $\mathbb{RT} := \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ a na $\mathbb{RT}$ přirozeně rozšíříme relaci $<$. Pro $a, b \in \mathbb{RT}$ definujeme násobení $a \odot b := a + b$. Sčítání definujeme $a \boxplus b := max(a, b)$, jestliže $a \neq b$, jinak $a \boxplus a := \{c \in \mathbb{RT} : c \leq a\}$. Množina $\mathbb{RT}$ společně se sčítáním $\boxplus$ a násobením $\odot$ tvoří hypertěleso zvané *reálné tropické hypertěleso*, nadále jej budeme značit $\mathbb{RT}$. V následujícím lemmatu ukážeme, že reálné tropické hypertěleso je skutečně hypertěleso.

Lemma 1.2.1. *Reálné tropické hypertěleso $\mathbb{RT}$ je hypertěleso.*

Důkaz. Ověřme definici hypertělesa (Definice 1.1.4). Tropické sčítání $\boxplus$ je zjevně komutativní. Ověříme asociativitu, tedy pro $a, b, c \in \mathbb{RT}$ ukážeme, že
$a \boxplus (b \boxplus c) = (a \boxplus b) \boxplus c$. Rozebereme případy. Předpokládejme nejdříve, že $b > c$. Pak

$$a \boxplus (b \boxplus c) = a \boxplus b = \begin{cases} a = (a \boxplus b) \boxplus c & a > b, \\ [-\infty, a] = \{c\} \cup [-\infty, c] \cup (c, a] = (a \boxplus b) \boxplus c & a = b, \\ b = a \boxplus b = (a \boxplus b) \boxplus c & a < b. \end{cases}$$

Případ $b < c$ se řeší analogicky. Pokud $b = c$, pak

$$a \boxplus (b \boxplus c) = a \boxplus [-\infty, b] = \begin{cases} a = (a \boxplus b) \boxplus c & a > b, \\ [-\infty, b] = (a \boxplus b) \boxplus c & a = b, \\ \{b\} \cup [-\infty, a] \cup (a, b] = [-\infty, b] = (a \boxplus b) \boxplus c & a < b. \end{cases}$$

Tím jsme ukázali asociativitu $\boxplus$. Neutrální prvek vzhledem k $\boxplus$ je $-\infty$, jelikož pro každé $a \in \mathbb{RT}$ platí $\max\{a, -\infty\} = a$. Opačný prvek k a je samotné a, neboť $-\infty \in a \boxplus a = [-\infty, a]$. $\mathbb{RT}$ je tedy komutativní hypergrupou vzhledem k $\boxplus$.
$\mathbb{RT} \setminus \{-\infty\} = \mathbb{R}$ je evidentně komutativní grupou vzhledem k násobení $\odot$ v $\mathbb{RT}$, tzn. že $\mathbb{R}$ je komutativní grupou vzhledem ke klasickému sčítání reálných čísel. Nakonec dokážeme distributivní zákon, tzn. že platí $a \odot (b \boxplus c) = a \odot b \boxplus a \odot c$ pro všechna $a, b, c \in \mathbb{RT}$. Nejdříve pokud $a = -\infty$, pak rovnost zjevně platí, neboť v $\mathbb{RT}$ platí $\forall x \in \mathbb{RT} : -\infty \odot x = -\infty + x = -\infty$. Předpokládejme, že $a \in \mathbb{R}$. Z komutativity $\boxplus$ stačí uvážit $b > c$ nebo $b = c$. Pokud $b > c$, pak

$$a \odot (b \boxplus c) = a \odot b = a + b = \max\{a + b, a + c\} = a \odot b \boxplus a \odot c.$$

Pokud $b = c$, pak

$$a \odot (b \boxplus c) = a + [-\infty, b] = [-\infty, a + b] = (a + b) \boxplus (a + b) = a \odot b \boxplus a \odot c.$$

Reálné tropické hypertěleso $\mathbb{RT}$ je tedy skutečně hypertěleso. □

Důležitým hypertělesem pro aplikaci v tropické geometrii bude tzv. *(komplexní) tropické hypertěleso*, definujme jej explicitně dle Viro (2010, Definice 6.1.).

Definice 1.2.1 (Komplexní tropické hypertěleso)**.** *Pro dvě komplexní čísla $a, b \in \mathbb{C}$ definujeme mnohoznačnou binární operaci* ***(komplexní) tropické sčítání*** $\top$ *následovně:*

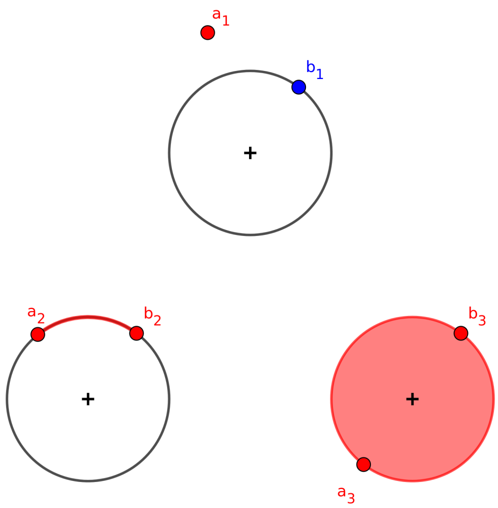
$$a \top b := \begin{cases} \{a\} & |a| > |b|, \\ \{|a|e^{\varphi i} : |\alpha - \varphi| + |\varphi - \beta| = |\alpha - \beta|\} & a = |a|e^{\alpha i}, b = |a|e^{\beta i}, |\beta - \alpha| < \pi, \\ \{c \in \mathbb{C} : |c| \leq |a|\} & a + b = 0. \end{cases}$$

Trojici $\mathbb{CT} := (\mathbb{C}, \top, \cdot)$, tedy komplexní čísla společně s tropickým sčítáním a klasickým násobením komplexních čísel, nazveme ***(komplexní) tropické hypertěleso****.*

Nadále budeme nazývat komplexní tropické hypertěleso pouze *tropickým hypertělesem*, komplexní tropické sčítání budeme též nazývat pouze *tropické sčítání*.

V druhém bodě definice komplexního tropického sčítání, tzn. když $|a| = |b|, a \neq b$, je výsledkem tropického součtu nejkratší oblouk spojující a a b na kružnici všech komplexních čísel s absolutní hodnotou $|a|$.

Pro ilustraci viz Obrázek 1.1. V prvním případě je $|a_1| > |b_1|$, proto $a_1 \top b_1 = a_1$. V druhém případě mají stejnou absolutní hodnotu a $a_2 \neq -b_2$ tedy $a_2 \top b_2$ je množina všech komplexních čísel na kratším oblouku mezi nimi. V posledním případě $a_3 = -b_3$ a proto $a_3 \top b_3$ tvoří všechna komplexní čísla s menší nebo rovnou absolutní hodnotou než a_3.



Obrázek 1.1: Komplexní tropické sčítání

Věta 1.2.2. *Tropické hypertěleso $\mathbb{CT}$ je hypertěleso.*

Důkaz. Komutativita tropického sčítání $\top$ je zjevná, asociativita plyne např. z Viro (2010, Dodatek 1, Věta 6.A.). Neutrální prvek vzhledem ke sčítání je 0, jelikož pro každé $0 \neq a \in \mathbb{CT}$ platí $|a| > 0$, tedy $a \top 0 = a$ a navíc $0 \top 0 = 0$. Opačným prvkem k $a \in \mathbb{CT}$ je $-a$, neboť $0 \in a \top -a$.

Násobení v $\mathbb{CT}$ je klasické násobení komplexních čísel, tudíž $\mathbb{CT} \setminus \{0\}$ jistě tvoří komutativní grupu vzhledem k násobení. Zbývá distributivita. Tedy chceme ukázat, že $c \cdot (a \top b) = c \cdot a \top c \cdot b$ pro všechna $a, b, c \in \mathbb{CT}$. Je-li $c = 0$, pak distributivita zjevně platí, neboť $0 \top 0 = 0$. Dále rozebereme případy dle Definice 1.2.1. Nechť $a, b \in \mathbb{CT}$ a $c \in \mathbb{CT} \setminus \{0\}$ libovolné. V prvním případě platí $|a| > |b|$, pak jistě $|c \cdot a| > |c \cdot b|$ a distributivita platí. Pokud $|a| = |b|, a \neq -b$, nechť $\alpha := \arg(a), \beta := \arg(b)$, $\gamma := \arg(c)$, $-\pi < \alpha, \beta, \gamma \leq \pi$, pak

$$c \cdot (a \top b) = c \cdot \{|a| \cdot e^{\varphi i} \ \alpha \leq \varphi \leq \beta\} = \{|c| \cdot |a| \cdot e^{\varphi i} : \alpha + \gamma \leq \varphi \leq \beta + \gamma\} = c \cdot a \top c \cdot b.$$

Nakonec pokud $a = -b$, pak

$$c \cdot (a \top -a) = c \cdot \{x \in \mathbb{C} : |x| \leq |a|\} = \{x \in \mathbb{C} : |x| \leq |c \cdot a|\} = -c \cdot a \top c \cdot a.$$

Tedy tropické hypertěleso $\mathbb{CT}$ skutečně tvoří hypertěleso. □

2. Tropická geometrie

Tropická geometrie je odnož algebraické geometrie, jež se zabývá obdobnými problémy jako klasická algebraická geometrie, ovšem nad jinou algebraickou strukturou nežli nad tělesem, hovoříme o tzv. *tropickém polotělese*. Stále pracujeme nad reálnými čísly, pozměněné budou operace. Sčítání nahradíme braním maxima reálných čísel a násobení nahradíme klasickým sčítáním. Tropická geometrie díky své kombinatorické povaze nachází mnoho praktických aplikací, viz. (Mikhalkin, 2006, Kapitola 7). Na první pohled vzdálené světy algebraické geometrie a tropické geometrie je možné spojit pomocí tzv. *Litvinovy-Maslovy dekvantizace*, kdy reálná čísla „dekvantizujeme"na tropické polotěleso. Chceme-li podobně dekvantizovat komplexní čísla, narazíme na problémy, které elegantně vyřeší právě hypertělesa.

2.1 Tropické polotěleso

Začněme s algebraickou strukturou, nad kterou se tropická geometrie odehrává. Pro úplnost uveďme definici polotělesa ve smyslu Viro (2010, Sekce 7.5).

Definice 2.1.1 (Polotěleso)**.** *Množina X společně s binárními operacemi sčítání $+$ a násobení $\cdot$ tvoří* ***polotěleso****, jestliže existují různé prvky $0, 1 \in X$ a platí*

- $(X, +, 0)$ *tvoří komutativní monoid (komutativní grupa bez nutnosti existence inverzních prvků),*
- $(X \setminus \{0\}, \cdot, 1)$ *tvoří komutativní grupu,*
- *platí distributivní zákon*

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad \forall a, b, c \in X.$$

Tedy polotěleso a klasické těleso se liší pouze existencí opačných prvků vzhledem ke sčítání. Nyní můžeme definovat avizované *tropické polotěleso* ve smyslu Viro (2011, Sekce 1.1).

Definice 2.1.2 (Tropické polotěleso)**.** *Množinu $\mathbb{T} := \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ společně s operacemi $\max : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, (a, b) \mapsto \max\{a, b\}$ v roli polotělesového sčítání a standardním sčítáním reálných čísel v roli polotělesového násobení nazveme* ***tropické polotěleso****.*

Že tropické polotěleso je ve skutečnosti polotěleso ukazuje následující lemma. V jeho důkazu si čtenář může přiblížit práci v tropickém polotělese.

Lemma 2.1.1. *Tropické polotěleso s operací* $\max$ *(v roli polotělesového sčítání) a s klasickým sčítáním reálných čísel (v roli polotělesového násobení) tvoří polotěleso.*

Důkaz. Nejdříve ukažme, že $(\mathbb{R}, \max, -\infty)$ tvoří komutativní monoid. Zjevně je max komutativní. Asociativita je rovněž triviální: pro $a, b, c \in \mathbb{R}$ platí

$$\max\{a, \max\{b, c\}\} = \max\{a, b, c\} = \max\{\max\{a, b\}, c\}.$$

Roli identity vzhledem k max hraje $-\infty$ (proto ho pro definici tropického polotělesa $\mathbb{T}$ musíme k $\mathbb{R}$ přidat). Pro všechna $a \in \mathbb{R}$ totiž platí $\max\{-\infty, a\} = a$.

Že $(\mathbb{R}, +, 0)$ tvoří komutativní grupu ponechme jako známý fakt. Navíc jistě $-\infty$ a 0 jsou různé prvky.

Nakonec nám zbývá distributivní zákon. Ten je pouze jednoduchou rovností

$$a + \max\{b, c\} = \max\{a + b, a + c\}$$

která zjevně platí pro všechna $a, b, c \in \mathbb{T}$. □

Všimněme si, že vzhledem k max nemohou k nenulovým prvkům existovat prvky opačné: pro libovolné $a \in \mathbb{R}$ nenajdeme $b \in \mathbb{T}$ takové, že $\max\{a, b\} = -\infty$. K tělesu nám tedy chybí pouze existence opačných prvků, proto pracujeme nad polotělesem. Naopak zde máme idempotenci všech prvků: pro každé $a \in \mathbb{T}$ platí $\max\{a, a\} = a$.

2.2 Tropické polynomy, tropické variety

Tropická geometrie se zabývá zcela obdobnými problémy jako klasická algebraická geometrie. Paralelně definujeme tropické polynomy, s nimiž řešíme soustavy rovnic. Množiny výsledků studujeme geometricky a definujeme tropickou amébu, která je úzce spojena (ne však přímo) s algebraickou varietou. Uveďme nejdříve definici tropické variety ve smyslu Viro (2011, Sekce 1.2) a její konkrétní příklad. $\mathbb{R}_{max,+}$ zde značí tropické polotěleso, pouze bez nulového prvku $-\infty$.

Definice 2.2.1 (Tropický polynom, tropická varieta)**.** *Definujeme **tropický polynom** **p** nad $\mathbb{R}_{max,+}$ v n proměnných*

$$p(x_1, \ldots, x_n) = \max_{k=(k_1,\ldots,k_n)} \{a_k + k_1 x_1 + \cdots + k_n x_n\}$$

*kde $a_k \in \mathbb{R}, k_i \in \mathbb{N}_0$. **Tropickou varietu** tropického polynomu* **p** *definujeme jako množinu bodů z $\mathbb{R}^n$, ve kterých se hodnota* **p** *rovná alespoň dvěma jeho lineárním členům.*

Pojem tropického polynomu tak odpovídá standardní definici polynomu, nahradíme-li sčítání braním maxima a násobení klasickým sčítáním.

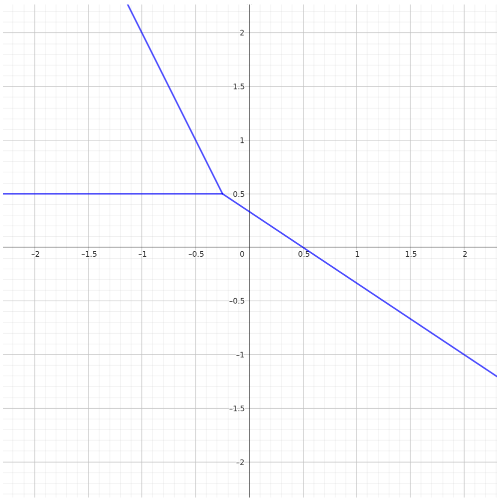
Příkladem jednoduchého tropického polynomu v $\mathbb{R}^3_{max,+}$ je např.
$p(x, y, z) = \max\{2x + 3y, 2y + z, 1 + z\}$. Tropická varieta V_p polynomu p se bude skládat z těch bodů $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, pro které alespoň dva ze tří lineárních členů p nabývají maxima. Pro příklady grafů tropických variet v $\mathbb{R}^2$ viz Obrázek 2.2.

Ačkoliv se definice tropické variety nemusí zdát na první pohled přirozená, interpretujme ji v reálném tropickém hypertělese $\mathbb{RT}$ z Příkladu 1.2.4. Definice tak pouze říká, že máme-li bod (x, y, z) v tropické varietě V_p, pak nulový prvek $-\infty$ leží v množině $x^2 \odot y^3 \boxplus y^2 \odot z \boxplus 1 \odot z$ [1] dle pravidel sčítání v $\mathbb{RT}$, což je téměř klasická definice nulové množiny klasického polynomu, neboli algebraické variety.

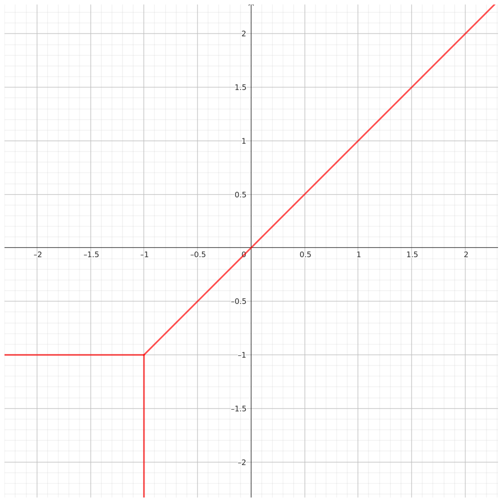
2.3 Dekvantizace reálných čísel

Ačkoliv to není zjevné, tropické polotěleso a polotěleso nezáporných reálných čísel $\mathbb{R}_{\geq 0}$ se standardním sčítáním a násobením jsou úzce propojeny pomocí tzv. *Litvinovy–Maslovy dekvantizace*. Najdeme vhodnou izomorfní kopii polotělesa $\mathbb{R}_{\geq 0}$, tu poté spojitě deformujeme na tropické polotěleso $\mathbb{T}$. Spojitou deformaci ilustrujeme pomocí tzv.

[1] Mocninný výraz typu x^2 je pouze zkráceným zápisem výrazu $x \odot x$, tzn. $x^2 = x \odot x = x + x = 2x$.



Obrázek 2.1: Tropická varieta polynomu $max\{2x + 3y, 2y, 1\}$



Obrázek 2.2: Tropická varieta polynomu $max\{x, y, -1\}$

améby (Obrázek 2.3), která se deformuje právě na tropickou varietu. Dekvantizaci uvádíme ve smyslu Viro (2011, Sekce 1.3). Grafy améb byly vytvořeny za pomoci algoritmu Wang.

Litvinovu–Maslovu dekvantizaci reálných čísel formálně definujeme jako systém polotěles $\{T_h\}_{h\in[0,\infty)}$. Pro každé $h \in [0, \infty)$, nosičem polotělesa T_h je $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$. Operace $\oplus_h$ a $\odot_h$ definujeme v závislosti na parametru h následovně:

$$a \oplus_h b := \begin{cases} h \cdot log(e^{\frac{a}{h}} + e^{\frac{b}{h}}) & h > 0, \\ max\{a, b\} & h = 0. \end{cases}$$

$$a \odot_h b := a + b$$

Kde dodefinujeme $e^{-\infty} := 0$. Všimněme si, že nyní $-\infty$ hraje v T_h roli neutrálního prvku vzhledem ke sčítání. Dále definujme zobrazení $D_h : \mathbb{R}_{\geq 0} \longrightarrow T_h$

$$D_h = \begin{cases} h \cdot log x & x > 0, \\ -\infty & x = 0. \end{cases}$$

Zjevně pro $h > 0$ je D_h izomorfismus polotěles $(\mathbb{R}_{\geq 0}, +, \cdot)$ a $(T_h, \oplus_h, \odot_h)$, tedy pro každé kladné h je T_h pouze izomorfní kopií polotělesa $\mathbb{R}_{\geq 0}$. T_0 pak odpovídá definici tropického polotělesa $\mathbb{T}$. V následujícím lemmatu ukážeme, že operace $\oplus_h$ je spojitá vzhledem k parametru h. Tedy T_h se spojitě deformuje na tropické polotěleso $\mathbb{T}$.

Lemma 2.3.1. *Operace $\oplus_h$ je spojitá vhledem k parametru h. Speciálně je spojitá v $h = 0$ zprava.*

Důkaz. Pro $h > 0$ je $\oplus_h$ zjevně spojitá díky spojitosti exponenciální funkce a spojitosti logaritmu. Dokážeme spojitost v $h = 0$ zprava. Nejdříve pro případ $a \oplus_h a$, $a \in \mathbb{R}$. Platí

$$\lim_{h\to 0^+} a \oplus_h a = \lim_{h\to 0^+} h \cdot \log(2 \cdot e^{\frac{a}{h}}) = \lim_{h\to 0^+} h \cdot \log 2 + \lim_{h\to 0^+} h \cdot \log(e^{\frac{a}{h}}) = a = \max\{a, a\} = a \oplus_0 a.$$

Nyní mějme $a, b \in \mathbb{R}$ a bez úhonu na obecnosti předpokládejme, že $a > b$. Pak

$$\lim_{h\to 0^+} a \oplus_h b = \lim_{h\to 0^+} h\cdot \log(e^{\frac{a}{h}} + e^{\frac{b}{h}}) = \lim_{h\to 0^+} h\cdot \log(e^{\frac{a}{h}}(1 + e^{\frac{b-a}{h}}) = a + \lim_{h\to 0^+} h\cdot \log(1 + e^{\frac{b-a}{h}})$$

a jelikož předpokládáme, že $b - a < 0$, platí

$$a + \lim_{h\to 0^+} h\cdot \log(1 + e^{\frac{b-a}{h}}) = a = \max\{a, b\} = a \oplus_0 b.$$

□

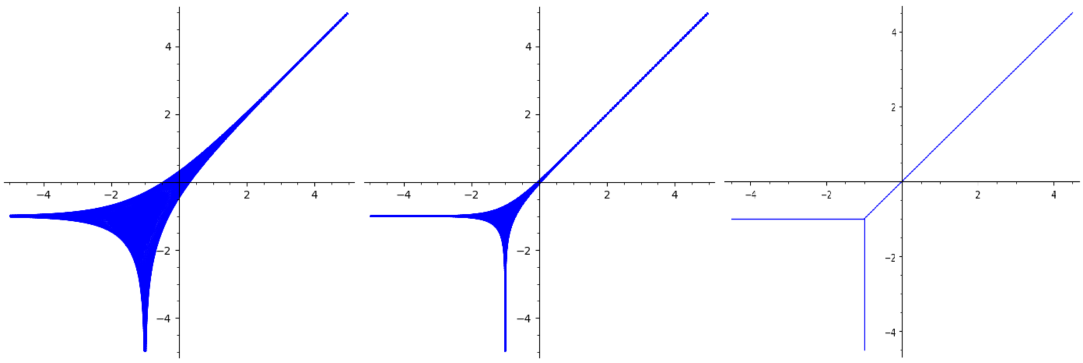
Podívejme se nyní na pojem tzv. *améby* definované ve smyslu Litvinov (2005, Kapitola 11). Ta je úzce spojena s klasickým pojmem algebraické variety z algebraické geometrie.

Definice 2.3.1. *Nechť $p \in \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$ je reálný polynom a $V := \{x \in \mathbb{C}^n : p(x) = 0\}$ jeho komplexní algebraická varieta. Pro kladný parametr $h > 0$ definujme zobrazení*

$$h \cdot Log : (\mathbb{C} \setminus 0)^n \longrightarrow \mathbb{R}^n : (z_1, \ldots, z_n) \mapsto (h \cdot log|z_1|, \ldots, h \cdot log|z_n|)$$

Pro hodnotu parametru $h = 1$ nazveme ***Amébou*** *(ang.* amoeba*) obraz V při zobrazení Log.*

Obrázek 2.3 vhodně ilustruje, jak se pro zmenšující se hodnotu parametru h graf améby postupně deformuje na graf tropické variety.

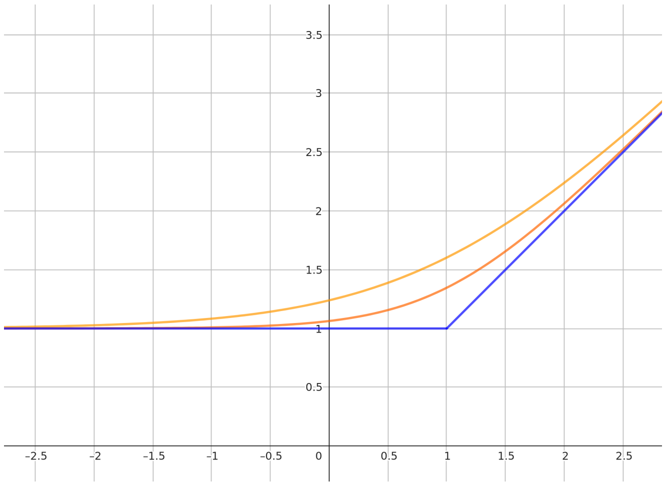


Obrázek 2.3: Améba deformující se na tropickou varietu

Obrázek 2.4 ukazuje grafy lineárních funkcí $y = 1 \oplus_h x$ v polotělesech T_h pro různé kladné hodnoty h a jak se při limitním přechodu $h \to 0$ postupně deformují na po částech lineární graf $y = 1 \oplus_0 x$ v tropickém polotělese $\mathbb{T}$. Pro h kladné po rozepsání platí $y = 1 \oplus_h x = h \cdot \log(e^{\frac{1}{h}} + e^{\frac{x}{h}})$. Na Obrázku 2.4 jsou grafy pro hodnoty $h = 0.8$ a $h = 0.5$. Limitně pro $h = 0$ pak platí $y = 1 \oplus_0 x = \max\{1, x\}$.

2.4 Subtropická deformace komplexních čísel

Litvinova–Maslova dekvantizace nám dává důležitý vztah mezi tropickou geometrií a klasickou algebraickou geometrií. Deformovali jsme však pouze nezáporná reálná čísla $\mathbb{R}_{\geq 0}$. Budeme-li chtít dekvantizaci rozšířit na komplexní čísla, narazíme na problémy, jež vyřeší právě hypertělesa. Subtropickou deformaci komplexních čísel uvádíme ve smyslu Viro (2011, Sekce 3.1)



Obrázek 2.4: Grafy $y = 1 \oplus_\mathrm{h} x$ deformující se na graf $y = 1 \oplus_0 x$.

Definujme tedy podobně jako v reálném případě izomorfismus S_h závislý na kladném parametru $h > 0$. Formálně definujeme $S_h : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ předpisem

$$S_h(z) := \begin{cases} |z|^{\frac{1}{h}} \frac{z}{|z|} & z \neq 0, \\ 0, & z = 0. \end{cases}$$

S_h je zjevně prosté i na a vzhledem k násobení je to homomorfismus: $S_h(ab) = S_h(a) \cdot S_h(b)$. Vzhledem ke sčítání ovšem homomorfismus není, na definičním oboru S_h tak musíme sčítání předefinovat

$$a \boxplus_h b := S_h^{-1}(S_h(a) + S_h(b))$$

a S_h tak bude izomorfismem $S_h : \mathbb{C}_h \longrightarrow \mathbb{C}$, kde $\mathbb{C}_h$ značí těleso $\mathbb{C}_h = (\mathbb{C}, \boxplus_h, \cdot)$ s komplexními čísly jako nosičem, nově definovaným sčítáním $\boxplus_h$ a klasickým násobením komplexních čísel. Podobně jako v reálném případě se nyní podívejme na limitní chování operace $\boxplus_h$ pro $h \to 0$. Na první pohled se definice S_h nemusí zdát podobná definici polotělesového izomorfismu D_h z Litvinovy–Maslovy dekvantizace. Uvidíme však, že po limitním přechodu výsledná struktura obsahuje tropické polotěleso $\mathbb{T}$.

Lemma 2.4.1. *Pro $a, b \in \mathbb{C}$ označme $a \boxplus_0 b := \lim_{h\to 0} a \boxplus_h b$ limitu operace $\boxplus_h$ pro $h \to 0$ a nezvěme ji **limitou součtu subtropické deformace**. Operace $\boxplus_0$ má pak následující bodové limity:*

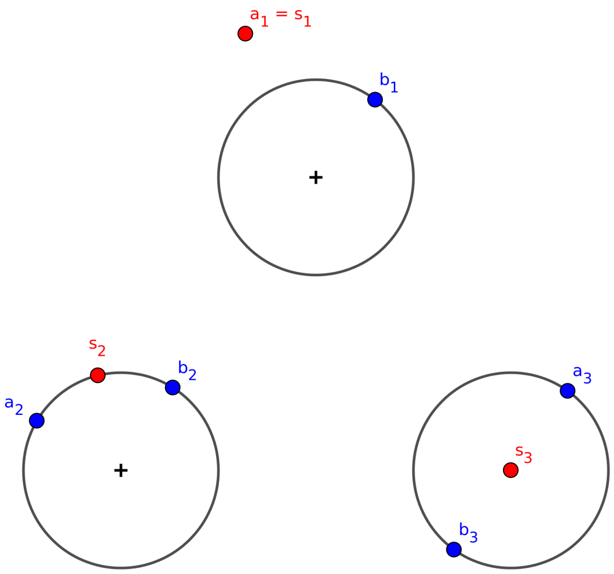
$$a \boxplus_0 b = \begin{cases} a & |a| > |b|, \\ |a| \cdot \frac{a+b}{|a+b|} & |a| = |b|, a \neq -b, \\ 0 & a = -b. \end{cases}$$

Důkaz. Snadno se ověří, že $S_h^{-1}(a) = |a|^h \frac{a}{|a|}$. Součet $\boxplus_h$ definujeme jako

$$a \boxplus_h b := S_h^{-1}(S_h(a) + S_h(b)) = \left| |a|^{\frac{1}{h}} \frac{a}{|a|} + |b|^{\frac{1}{h}} \frac{b}{|b|} \right|^h \cdot \frac{|a|^{\frac{1}{h}} \frac{a}{|a|} + |b|^{\frac{1}{h}} \frac{b}{|b|}}{\left| |a|^{\frac{1}{h}} \frac{a}{|a|} + |b|^{\frac{1}{h}} \frac{b}{|b|} \right|}$$

pro $a, b \in \mathbb{C}$. Nyní je-li $|a| > |b|$, pak $a^{\frac{1}{h}}$ roste asymptoticky rychleji než $b^{\frac{1}{h}}$ pro $h \to 0$, tedy $a \boxplus_0 b = a$. Je-li $|a| = |b|$ a $a \neq -b$, pak po dosazení a vytknutí dostáváme $a \boxplus_0 b = |a| \cdot \frac{a+b}{|a+b|}$. Je-li $a = -b$, zjevně $-b \boxplus_0 b = 0$. □

Dostáváme tak strukturu $\mathbb{C}_0 := (\mathbb{C}, \boxplus_0, \cdot)$. Pro ilustraci Lemmatu 2.4.1 viz Obrázek 2.5.



Obrázek 2.5: Limita součtu subtropické deformace

Než rozebereme podrobnější vlastnosti $\boxplus_0$, podívejme se na samotné $\mathbb{C}_0$. Ukážeme, že $\mathbb{C}_0$ obsahuje tropické polotěleso $\mathbb{T}$. Definujme zobrazení $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \subset \mathbb{C}_0 \longrightarrow \mathbb{T}$

$$f(x) := \begin{cases} \log(x) & x > 0, \\ -\infty & x = 0. \end{cases}$$

Funkce log je bijekcí $\mathbb{R}_{>0}$ na $\mathbb{R}$, tedy f je bijektivní. Při limitní deformaci se změnil pouze součet, nikoliv násobení. Díky vlastnostem logaritmu tak je f homomorfismem vzhledem k násobení. V limitě součtu subtropické deformace z Lemmatu 2.4.1 mohou díky omezení na nezáporná reálná čísla $\mathbb{R}_{\geq 0}$ nastat pouze první dva případy. Pokud $a, b \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ a $a > b$, potom z prvního případu $a \boxplus_0 b = a$, tedy

$$f(a \boxplus_0 b) = f(a) = \max\{f(a), f(b)\} = f(a) \oplus_0 f(b),$$

kde $\oplus_0$ odpovídá sčítání v tropickém polotělese $\mathbb{T}$. Přirozeně jsme zde rozšířili relaci $>$ na $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$. Pokud $a = b$, z druhého případu Lemmatu 2.4.1 platí $a \boxplus_0 a = a$, tzn. $f(a \boxplus_0 a) = f(a) \oplus_0 f(a)$. Navíc $f(1) = 0$ a $f(0) = -\infty$. Funkce f je tedy polotělesovým izomorfismem mezi $(\mathbb{R}_{\geq 0}, \boxplus_0, \cdot) \subset \mathbb{C}_0$ a tropickým polotělesem $\mathbb{T}$, neboli f^{-1} vnořuje $\mathbb{T}$ do $\mathbb{C}_0$. Subtropická deformace komplexních čísel je tak přirozeným rozšířením Litvinovy–Maslovy dekvantizace reálných čísel.

Rozeberme nyní podrobněji vlastnosti limity součtu subtropické deformace $\boxplus_0$. Je komutativní, dokonce vzhledem k násobení je distributivní. Obě vlastnosti ihned plynou z Lemmatu 2.4.1. 0 funguje jako neutrální prvek, pro $a \in \mathbb{C}$ je $-a$ opačným prvkem. Operace $\boxplus_0$ má však silné nedostatky, jako funkce proměnných a, b není spojitá a dokonce není ani asociativní. Protipříklad asociativity je triviální, vezměme čísla $1, -1, i \in \mathbb{C}$. Potom $(-1 \boxplus_0 1) \boxplus_0 i = 0 \boxplus_0 i = i$, ale $-1 \boxplus_0 (1 \boxplus_0 i) = -1 \boxplus_0 e^{\frac{\pi i}{4}} = e^{\frac{5\pi i}{8}}$. Protipříklad spojitosti je také zjevný. Vezměme čísla $1, i$ a označme jejich součet $s := e^{\frac{\pi i}{4}} = 1 \boxplus_0 i$. Z definice spojitosti nyní má pro každé $\epsilon > 0$ existovat $\delta > 0$, že $\|(1, i) - (x, y)\| < \delta \implies |(x \boxplus_0 y) - s| < \epsilon$ pro každé $x, y \in \mathbb{C}$. Ovšem pro libovolně malá $\zeta > 0$ platí $(1 + \zeta) \boxplus_0 i = 1 + \zeta$ a pro např. $\epsilon = \frac{1}{10}$ tak spojitost nemůže platit.

Tyto nedostatky mohou vyřešit hypertělesa. Všimněme si podobnosti obrázku limity součtu subtropické deformace (Obrázek 2.5) a obrázku komplexního tropického sčítání $\top$ v tropickém hypertělese $\mathbb{CT}$ (Obrázek 1.1). Ihned vidíme, že $\boxplus_0$ je obsažené uvnitř komplexního tropického sčítání $\top$. Z Věty 1.2.2 již víme, že komplexní tropické sčítání $\top$ tvoří na komplexních číslech hypertěleso, speciálně je tedy asociativní. Komplexní tropické sčítání je dokonce spojité, ovšem kvůli mnohoznačnosti operace $\top$ budeme potřebovat nestandardní topologii, vzhledem k níž je $\top$ spojité jako funkce. Nakonec ukážeme, že tropické hypertěleso můžeme dostat jako limitu subtropické deformace.

2.5 Topologie mnohoznačných zobrazení

Abychom mohli říci, že tropické sčítání je spojité, musíme vědět, k jaké topologii se vztahujeme. Komplexní tropické sčítání je mnohoznačná binární operace $\top : \mathbb{C}^2 \longrightarrow 2^{\mathbb{C}}$. Pro spojitost $\top$ tak potřebujeme zavést topologii na potenční množině komplexních čísel $2^{\mathbb{C}}$. Pro libovolný topologický prostor X existuje na potenční množině 2^X více přirozených topologií, nám k tomu poslouží tzv. *horní Vietoriho topologie*, viz (Viro, 2011, Sekce 4.1). **Horní Vietoriho topologie** pro topologický prostor X je topologie na prostoru 2^X konstruována následovně: je-li $U \subset X$ otevřená množina v X, potom definujeme $2^U \subset 2^X$ jako otevřenou množinu v 2^X. Systém těchto otevřených množin pak generuje horní Vietoriho topologii. Tato topologie má ovšem i své nedostatky, např. není ani Hausdorffova: jsou-li $U, V \subset X$ otevřené množiny v X s neprázdným průnikem, pak U, V jako body v 2^X nemohou mít disjunktní okolí. Pro bližší diskuzi viz (Viro, 2011, Sekce 4.1). Pouze zde uveďme pro nás důležitý výsledek.

Věta 2.5.1. *Komplexní tropické sčítání jako funkce $\top : \mathbb{C}^2 \longrightarrow 2^{\mathbb{C}}$ je spojité vzhledem k horní Vietoriho topologii na $2^{\mathbb{C}}$ a standardní topologii na $\mathbb{C}^2$.*

Důkaz. Dokáže se přímo z definice horní Vietoriho topologie a rozebráním případů v definici tropického sčítání $\top$, viz (Viro, 2011, Věta 4.B.). □

2.6 Vztah komplexní subtropické deformace a tropického hypertělesa

Ačkoliv jsme v Sekci 2.4 ukázali, že výsledná limita subtropické deformace není asociativní ani spojitá, tropické hypertěleso tyto nedostatky nemá, viz Věta 1.2.2 a Věta 2.5.1. Následující věta ukazuje, že tropické hypertěleso můžeme dostat jako výslednou limitu subtropické deformace komplexních čísel. Podívejme se na operace $\boxplus_h$ v tělesech T_h, jež jsme diskutovali v Sekci 2.4, jako na grafy funkcí $\boxplus_h : \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}$. Máme tedy množinu grafů v prostoru $\mathbb{C}^3$ závislou na parametru $h > 0$. Nyní nás zajímá, co se limitně děje pro $h \to 0$. Zajímá nás tedy chování množiny

$$\Gamma = \{(a, b, a \boxplus_h b, h) \in \mathbb{C}^3 \times \mathbb{R}_{>0} : a, b \in \mathbb{C}, h > 0\}$$

u nadroviny $\mathbb{C}^3 \times \{0\}$. Následující věta nám přesně dává do souvislosti průnik této nadroviny a množiny grafů Γ s tropickým hypertělesem $\mathbb{CT}$.

Věta 2.6.1 (Viro (2010) Věta 9.A.)**.** *Nechť* $\Gamma = \{(a, b, a \boxplus_h b, h) \in \mathbb{C}^3 \times \mathbb{R}_{>0} : a, b \in \mathbb{C}, h > 0\}$ *je množina grafů operací sčítání* $\boxplus_h$ *pro všechna kladná h. Poté průnik* $\mathbb{C}^3 \times \{0\}$ *s uzávěrem* Γ *je množina* $\Gamma_{\top} \times \{0\}$*, kde* $\Gamma_{\top} \coloneqq \{(a, b, a \top b) \in \mathbb{C}^3 : a, b \in \mathbb{C}\}$ *je graf tropického sčítání* $\top$ *v tropickém hypertělese* $\mathbb{CT}$.

Za cenu mnohoznačnosti tak jako výsledek komplexní subtropické deformace dostáváme spojitou operaci $\top$ splňující společně s násobením komplexních čísel definici hypertělesa.

3. Matroidy

Další praktické využití naleznou hypertělesa v teorii matroidů. V kombinatorice a přilehlých oblastech jsou matroidy užitečnou algebraickou strukturou zobecňující pojem lineární nezávislosti z lineární algebry. Matroidy mají mnoho ekvivalentních (tzv. kryptomorfických) definic. V tomto textu využijeme tři z nich, definici pomocí *nezávislých množin*, pomocí *systému obvodů* (ang. *circuits*) a pomocí *systému bází*. Ekvivalence dokážeme a představíme užitečné příklady.

Cílem této části textu je zmínit různé druhy matroidů a zobecnit je do pojmu *F-matroidu*, kde F zastupuje hypertěleso. Pro konkrétní volbu hypertělesa dostaneme příslušný matroid. Ukážeme následující vztahy:

- $\mathbb{K}$-matroid s Krasnerovým hypertělesem odpovídá klasickému matroidu,
- $\mathbb{S}$-matroid s hypertělesem znamének odpovídá orientovanému matroidu,
- $\mathbb{RT}$-matroid s reálným tropickým hypertělesem odpovídá valuovanému matroidu.

3.1 Definice matroidu

Pro základní definice a ekvivalentní důkazy Lemmatu 3.1.2 a Lemmatu 3.1.3 odkazujeme čtenáře na Welsh (1976, Kapitola 1).

Definice 3.1.1 (Matroid)**.** ***Matroid*** *$\mathcal{M}$ je dvojice $(E, \mathcal{I})$, kde E je konečná množina (tzv.* ***nosič****) a $\mathcal{I}$ je systém podmnožin E (prvky nazýváme* ***nezávislé množiny****) splňující:*

- *(I1) $\emptyset \in \mathcal{I}$,*
- *(I2) Je-li $I_1 \in \mathcal{I}$ a $I_2 \subseteq I_1$, potom $I_2 \in \mathcal{I}$,*
- *(I3) Jsou-li $I_1, I_2 \in \mathcal{I}$, že $|I_1| < |I_2|$, potom existuje $i \in I_2 \setminus I_1$, že $I_1 \cup \{i\} \in \mathcal{I}$.*

Velikost největší nezávislé množiny nazveme ***hodnost*** *matroidu $\mathcal{M}$.*

Definice matroidu pomocí nezávislých množin skutečně odpovídá zobecnění pojmu lineárně nezávislé množiny ve vektorovém prostoru konečné dimenze, viz Příklad 3.2.2.

Definice 3.1.2 (Systém bází)**.** *Nechť E je konečná množina a $\mathcal{B}$ je systém podmnožin E. $\mathcal{B}$ nazveme* ***systémem bází****, jestliže splňuje:*

- *$(B1)$ $\mathcal{B}$ je neprázdný,*
- *$(B2)$ [****Pravidlo pro záměnu bází****] Pro každé $A, B \in \mathcal{B}$ a každé $a \in A \setminus B$ existuje $b \in B \setminus A$, že $(A \setminus \{a\}) \cup \{b\} \in \mathcal{B}$.*

Prvek z $\mathcal{B}$ nazveme ***bází****.*

Vlastnost (B2) přirozeně platí pro báze vektorových prostorů konečné dimenze, opět viz Příklad 3.2.2.

Lemma 3.1.1. *Nechť $\mathcal{B}$ je systém bází. Potom existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že pro každou bázi $B \in \mathcal{B}$ platí $|B| = n$.*

Důkaz. Ihned plyne z pravidla pro výměnu bází. □

Lemma 3.1.2. *Je-li E konečná množina a $\mathcal{B}$ systém bází nad E, pak systém podmnožin $\mathcal{I} := \{I \subseteq B : B \in \mathcal{B}\}$ tvoří společně s E matroid $\mathcal{M} = (E, \mathcal{I})$. Naopak, mějme matroid $\mathcal{N} = (F, \mathcal{J})$ a označme $n := max_{J \in \mathcal{J}} |J|$. Poté množinový systém $\mathcal{D} := \{J \in \mathcal{J} : |J| = n\}$ tvoří systém bází.*

Důkaz. Nechť $\mathcal{B}$ je systém bází a vezměme $\mathcal{I} := \{I \subseteq B : B \in \mathcal{B}\}$. Ukážeme, že $\mathcal{I}$ splňuje zákony (I1) - (I3) systému nezávislých množin. (I1) je evidentně splněno, (I2) také. Pro (I3) mějme dvě množiny $I_1, I_2 \in \mathcal{I}$, že $|I_1| < |I_2|$. Pak existují dvě báze $A, B \in \mathcal{B}$, že $I_1 \subset A$, $I_2 \subset B$. Vybereme $a_1 \in A \setminus I_1$, z pravidla pro výměnu bází pak musí existovat $b_1 \in B$, že $A_1 := (A \setminus \{a_1\}) \cup \{b_1\}$ je báze. Pokud $b_1 \in I_2 \subset B$, potom $I_1 \cup \{b_1\} \subset A$ a tedy $I_1 \cup \{b_1\}$ je dle naší konstrukce nezávislá množina. Pokud $b_1 \notin I_2$, postupujeme induktivně. Máme-li vybrané prvky $b_1, \ldots, b_m \in B \setminus I_2$ a množinu A_m, že $I_1 \subset A_m$ a $b_1, \ldots, b_m \in A_m \cap B$, vybereme $a_{m+1} \in A_m \setminus (I_1 \cup \{b_1, \ldots, b_m\})$. Opět dle pravidla pro výměnu bází musí existovat $b_{m+1} \in B$, že $A_{m+1} := (A_m \setminus \{a_{m+1}) \cup \{b_{m+1}\}\}$ je báze. Prvek b_{m+1} musí být různý od prvků $b_1, \ldots, b_m \in B$, neboť všechny báze mají díky Lemmatu 3.1.1 stejnou velikost. Odebráním prvku a_{m+1} z A_m a přidáním nějakého b_j, které již do A_m náleží, bychom velikost A_m zmenšili. Dále pokud $b_{m+1} \in I_2 \subset B$, podobně jako výše je pak $I_1 \cup \{b_{m+1}\}$ nezávislá množina. Platí $|I_1| < |I_2| \implies |A \setminus I_1| > |B \setminus I_2|$, poněvadž báze mají stejnou velikost z Lemmatu 3.1.1. Tedy prvky b_i, které nejsou z množiny I_2, dříve nebo později musíme vyčerpat a najdeme b_k, které nutně do I_2 patří. Tedy $\mathcal{I}$ splňuje zákony systému nezávislých množin.

Naopak máme-li matroid $\mathcal{N} = (F, \mathcal{J})$ a množinový systém $\mathcal{D} := \{J \in \mathcal{J} : |J| = n\}$, kde n je hodnost matroidu $\mathcal{N}$, pak $\mathcal{D}$ splňuje zákony systému bází (B1) a (B2). (B1) je zjevné, neboť $\mathcal{D}$ je neprázdné. Pro (B2) mějme nezávislé množiny $A, B \in \mathcal{D}$ a zvolme libovolné $a \in A$. Pak $A \setminus \{a\}$ je nezávislá množina a platí $|A \setminus \{a\}| < |B|$. Tedy existuje prvek $b \in B \setminus (A \setminus \{a\})$ takový, že $X := (A \setminus \{a\}) \cup \{b\}$ je nezávislá množina. Jelikož $b \notin A \setminus \{a\}$, nutně platí $|X| = n$, tudíž $X \in \mathcal{D}$. □

Právě uvedené lemma ukazuje, že systém bází je ekvivalentní definicí matroidu. Velikost libovolné báze pak odpovídá hodnosti matroidu.

Nyní se podívejme na poslední ekvivalentní definici matroidu.

Definice 3.1.3 (Systém obvodů)**.** *Nechť E je konečná množina a C je systém podmnožin E. C nazveme **systémem obvodů**, jestliže splňuje:*

- $(C1)$ *Je-li $C \in C$, pak $C \neq \emptyset$ a pro každé $C_1, C_2 \in C$, že $C_1 \subseteq C_2$, platí $C_1 = C_2$,*
- $(C2)$ *[**Pravidlo pro eliminaci obvodů**] Pro každé $C_1, C_2 \in C, x \in C_1 \cap C_2$, $y \in C_1 \setminus C_2$ existuje $C_3 \in C$, že $y \in C_3 \subseteq (C_1 \cup C_2) \setminus \{x\}$.*

*Prvky C nazveme **obvody** (ang.* circuits*).*

V konečně dimenzionálním vektorovém prostoru obvod odpovídá minimální lineárně závislé množině, tedy takové množině, která se stane lineárně nezávislou odebráním libovolného prvku. Pro interpretaci v rovinných grafech viz Příklad 3.2.3.

Obdobně jako systém bází, systém obvodů je ekvivalentní definicí matroidu.

Lemma 3.1.3. *Je-li E konečná množina a $\mathcal{C}$ systém obvodů, množinový systém $\mathcal{I} := \{I \subseteq E : C \in \mathcal{C} \implies C \nsubseteq I\}$ tvoří matroid $\mathcal{M} = (E, \mathcal{I})$. Naopak, máme-li matroid $\mathcal{N} = (F, \mathcal{J})$, systém $\mathcal{D} := \{D \subseteq F : D \notin \mathcal{J}, d \in D \implies D \setminus \{d\} \in \mathcal{J}\}$ tvoří systém obvodů.*

Důkaz. Mějme konečnou množinu E, $\mathcal{C}$ systém obvodů a množinový systém $\mathcal{I} := \{I \subseteq E : C \in \mathcal{C} \implies C \nsubseteq I\}$. Ukážeme, že množina $\mathcal{B}$ největších prvků z $\mathcal{I}$ tvoří systém bází, tedy dle Lemmatu 3.1.2 $(E, \mathcal{I})$ tvoří matroid. $\mathcal{B}$ je neprázdná, jelikož $\mathcal{I}$ je neprázdná. Pravidlo pro záměnu bází dokážeme sporem. Nechť existují množiny $A, B \in \mathcal{B}$, pro které toto pravidlo neplatí, tzn. existuje $a \in A$, že pro všechna $b \in B$ platí $(A \setminus \{a\}) \cup \{b\} \notin \mathcal{B}$. Tedy $(A \setminus \{a\}) \cup \{b\}$ není nezávislá množina, tudíž obsahuje nějaký obvod $C_b \in \mathcal{C}$. Přidejme nyní prvek a k množině B. Jelikož B je maximální, pak $B \cup \{a\}$ nemůže být nezávislá množina a nutně obsahuje obvod $a \in D \subseteq B \cup \{a\}$, $D \in \mathcal{C}$. Přidejme tento obvod k množině A. Tedy množina $A \cup D$ obsahuje obvod D. Pro libovolné $d_1 \in D \setminus A$ existuje obvod C_{d_1}, který neobsahuje prvek a. Z pravidla pro eliminaci obvodů existuje obvod $D_1 \subseteq D \cup C_{d_1} \setminus \{d_1\}$, který obsahuje a. Zkonstruovali jsme obvod, pro který $|D_1 \setminus A| < |D \setminus A|$, pokračujme takto induktivně. V každém kroku vždy odebereme alespoň jeden prvek d_i. Nakonec musíme dostat obvod D_k, pro který $|D_k \setminus A| = 0$, tzn. $D_k \subseteq A$, což je spor s tím, že $A \in \mathcal{I}$.

Naopak mějme matroid $\mathcal{N} = (F, \mathcal{J})$ a označme

$$\mathcal{D} := \{D \subseteq F : D \notin \mathcal{J}, d \in D \implies D \setminus \{d\} \in \mathcal{J}\}$$

systém všech $\subseteq$-minimálně závislých podmnožin nosiče F. Bod (C1) je zjevný. Dokážeme pouze slabší znění bodu (C2), tzv. *slabé pravidlo pro eliminaci obvodů*, t.j. pro libovolné $C_1, C_2 \in \mathcal{D}$ a $x \in C_1 \cap C_2$ existuje $C_3 \in \mathcal{D}, C_3 \subseteq C_1 \cup C_2 \setminus \{x\}$. Důkaz, že slabé pravidlo pro eliminaci obvodů implikuje silnější znění (C2) lze najít např. v Welsh (1976, Kapitola 9, Věta 2). Nejprve ukažme, že kdykoliv množina X neobsahuje prvek z $\mathcal{D}$, tzn. neexistuje $D \in \mathcal{D}$ takové, že $D \subseteq X$, pak už nutně platí $X \in \mathcal{J}$. Sporem vezměme nejmenší množinu X, pro kterou toto neplatí. Jelikož $X \notin \mathcal{J}$, $|X| \geq 1$. Pak buď platí, že pro každé $d \in X \implies X \setminus \{d\} \in \mathcal{J}$ nebo že existuje $d \in X$, pro které $X \setminus \{d\} \notin \mathcal{J}$. V prvním by platilo, že $X \in \mathcal{D}$, což je spor. V druhém případě máme množinu $X \setminus \{d\} \notin \mathcal{J}$, $|X \setminus \{d\}| < |X|$, která stejně jako množina X neobsahuje žádné prvky $\mathcal{D}$, neboť $X \setminus \{d\} \subseteq X$, spor s minimalitou X. Nyní můžeme ukázat elementární důkaz slabého pravidla pro eliminaci obvodů, viz např. (Pangrác, Lemma 1.1). Sporem nechť množina $Y := C_1 \cup C_2 \setminus \{x\}$ neobsahuje žádné prvky z $\mathcal{D}$. Pak nutně $Y \in \mathcal{J}$ dle výše uvedeného. Jelikož C_1 a C_2 jsou disjunktní množiny, existuje prvek $a \in C_1 \setminus C_2$ a platí $C_1 \setminus \{a\} \in \mathcal{J}$. Vezměme největší nezávislou množinu $I \subseteq C_1 \cup C_2$ obsahující $C_1 \setminus \{a\}$. Zřejmě I neobsahuje žádný prvek z $\mathcal{D}$, neboť každá podmnožina nezávislé množiny je nezávislá. Tudíž $C_2 \nsubseteq I$ a existuje $b \in C_2 \setminus I$. Prvky a a b jsou různé, neboť $a \in C_1 \setminus C_2$. Tedy $|I| \leq |C_1 \cup C_2| - 2$ a navíc $|Y| = |C_1 \cup C_2| - 1$. Máme tedy dvě nezávislé množiny, z nichž je jedna větší. Tedy musí existovat prvek $c \in Y \setminus I$ takový, že $I \cup \{c\}$ je nezávislá množina, pro kterou navíc platí $C_1 \setminus \{a\} \subseteq I \cup \{c\}$. Spor s maximalitou I. □

3.2 Příklady matroidů

Podívejme se nyní na konkrétní příklady matroidů a příslušné interpretace právě zavedených pojmů.

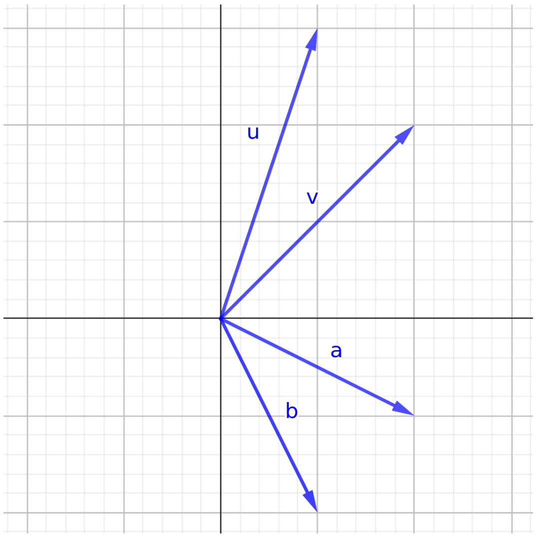
Příklad 3.2.1. Nechť E je konečná množina. Triviálním příkladem matroidu je množina E společně se svojí potenční množinou. Tento matroid nazýváme *volný matroid*.

Příklad 3.2.2 (*Vektorový matroid*). Mějme konečně dimenzionální vektorový prostor V a konečnou množinu vektorů $E \subseteq V$. Systém všech lineárně nezávislých podmnožin E tvoří *vektorový matroid*. Skutečně, máme-li lineárně nezávislou množinu vektorů, pak její libovolná podmnožina bude stále lineárně nezávislá. Máme-li dvě lineárně nezávislé množiny vektorů $I_1, I_2 \subseteq E$, kde $|I_1| < |I_2|$, potom $span(I_2) \nsubseteq span(I_1)$ a nutně musí existovat vektor $x \in I_2 \setminus I_1$, že $I_1 \cup \{x\}$ je lineárně nezávislá.

Systém podmnožin E složený z bází podprostoru $span(E)$ tvoří systém bází ve smyslu Definice 3.1.2. Pravidlo (B2) platí podobně: máme-li báze A, B podprostoru $span(E)$, potom pro $a \in A$ platí $span(B) \nsubseteq span(A \setminus \{a\})$ a nutně musí existovat $b \in B$, že $(A \setminus \{a\}) \cup \{b\}$ je opět báze $span(E)$.

Systém všech minimálních (vzhledem k inkluzi) lineárně závislých podmnožin E tvoří systém obvodů.

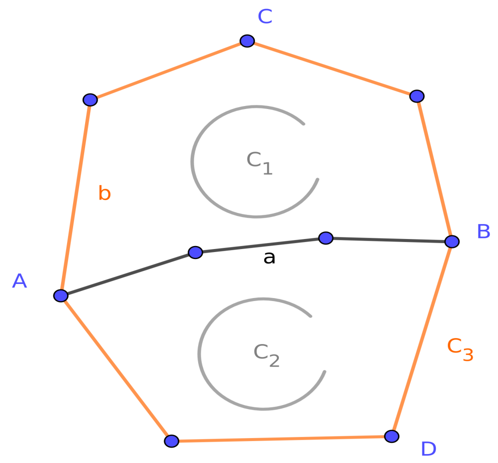
Vezmeme-li na Obrázku 3.1 všechny lineárně nezávislé množiny vektorů definující matroid $\mathcal{M}$, pak libovolná dvojice tvoří bázi $\mathcal{M}$ a libovolná trojice obvod v $\mathcal{M}$.



Obrázek 3.1: Konečná množina vektorů v $\mathbb{R}^2$

Příklad 3.2.3 (*Grafový matroid*). Nechť $G = (V, E)$ je konečný, rovinný, neorientovaný, souvislý graf. *Grafovou kružnicí* (dále jen *kružnicí*) myslíme podgraf G s vrcholy stupně pouze 2. Množinu hran z E nazveme nezávislou množinou, jestliže neobsahuje kružnici. Systém všech takových množin definuje *grafový matroid* $\mathcal{M}$. Libovolná kostra G bude bází matroidu $\mathcal{M}$ a libovolná kružnice (tzn. jeden cyklus) bude obvodem matroidu $\mathcal{M}$. V grafových matroidech má pravidlo pro eliminaci obvodů přímou interpretaci: vezmeme-li dvě kružnice C_1, C_2, jež mají společnou hranu $a \in C_1 \cap C_2$ a pevně zafixujeme hranu $b \in C_1 \setminus C_2$, pak musí existovat kružnice C_3 uvnitř $(C_1 \cup C_2) \setminus \{a\}$ taková, že $b \in C_3$, viz Obrázek 3.2, kde horní kružnice C_1 obsahuje vrcholy A, B, C, dolní kružnice C_2 obsahuje vrcholy A, B, D a výsledná kružnice C_3 obsahující vrcholy

A, C, B, D rovněž obsahuje fixovanou hranu $b \in C_1 \setminus C_2$ a neobsahuje vybranou hranu $a \in C_1 \cap C_2$.



Obrázek 3.2: Rovinný neorientovaný graf se zvýrazněnou kružnicí

3.3 Definice orientovaného matroidu

Orientovaný matroid definujeme ve smyslu Bland a Las Vergnas (1978, Věta 2.1). Pojem matroidu zobecňuje pojem lineární nezávislosti z lineární algebry. Množinu vektorů nazveme lineárně závislou, jestliže nulu můžeme vyjádřit pomocí netriviální lineární kombinace daných vektorů. V klasickém matroidu nás zajímá otázka pouze lineární nezávislosti, t.j. kdy se konkrétní vektor v této lineární kombinaci vyskytuje. V orientovaném matroidu nás navíc bude zajímat, s jakým znaménkem se v této kombinaci vyskytuje.

Pro příklad uvažme grafový matroid, jen namísto neorientovaného grafu použijme orientovaný graf. Nyní bychom chtěli v matroidu zachovat informaci o orientaci hran. Podívejme se na jeho kružnice a zafixujme si kladný směr rotace[1]. Daná kružnice stále odpovídá obvodu v matroidu, jen nyní každé její hraně přiřadíme informaci, zda jde ve směru rotace, či nikoli. Poslouží nám k tomu pojem orientované množiny.

Definice 3.3.1 (Orientovaná množina)**.** *Dvojici $X = (\underline{X}, sg_X)$, kde $\underline{X}$ je množina (tzv.* ***nosič****) a $sg_X : \underline{X} \longrightarrow \{-1, 1\}$ nazveme* ***orientovanou množinou*** *(ang.* signed set*).*
$X^+ := \{x \in \underline{X} : sg_X(x) = 1\}$ nazveme množinou ***kladných prvků*** *X, obdobně definujeme množinu* ***záporných prvků*** *X^-.* ***Opačnou*** *orientovanou množinou k X rozumíme $-X$ takovou, že $(-X)^+ = X^-$ a $(-X)^- = X^+$.*

Tedy $\underline{X}$ chápeme jako obyčejnou (neorientovanou) množinu. X je pak orientovaná množina, která každému prvku z $\underline{X}$ přiřadí znaménko + nebo −.

Nyní definujeme orientovaný matroid pomocí obvodů jakožto orientovaných množin.

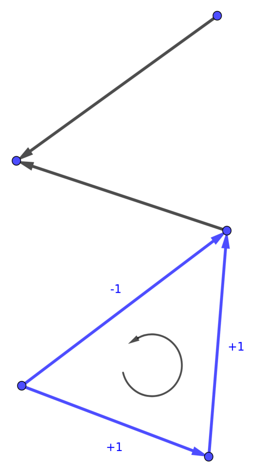
[1] Kladným směrem rotace vždy myslíme rotaci proti směru hodinových ručiček.

Definice 3.3.2 (Orientovaný matroid)**.** *Dvojice $\mathcal{M} = (E, \mathcal{C})$ tvoří* ***orientovaný matroid****, jestliže E je konečná množina (tzv.* ***nosič*** *$\mathcal{M}$) a $\mathcal{C}$ je systém orientovaných množin (prvky nazveme* ***orientované obvody****), že pro $C \in \mathcal{C}$ platí $\underline{C} \subseteq E$ a*

- *(C0) $\emptyset \notin \mathcal{C}$,*
- *(C1) Pro každé $C \in \mathcal{C}$ platí $-C \in \mathcal{C}$,*
- *(C2) Pro $C, D \in \mathcal{C}$ takové, že $\underline{C} \subseteq \underline{D}$, platí $C = \pm D$,*
- *(C3) Pro $C, D \in \mathcal{C}, C \neq -D$ a $e \in C^+ \cap D^-$ existuje $F \in \mathcal{C}$, že $F^+ \subseteq (C^+ \cup D^+) \setminus \{e\}$ a $F^- \subseteq (C^- \cup D^-) \setminus \{e\}$.*

Tedy platí podobné zákony jako v definici systému obvodů (Definice 3.1.3). Podívejme se na příklad grafového orientovaného matroidu, kde lze definici vhodně ilustrovat.

Příklad 3.3.1 (*Grafový orientovaný matroid*). Mějme orientovaný rovinný graf $G = (V, E)$. Chceme zkonstruovat orientovaný obvod C. Za nosič $\underline{C}$ vybereme libovolnou neorientovanou kružnici a pro ni zafixujme kladný či záporný směr rotace v rovině. Pokud hrana $e \in \underline{C}$ jde ve směru fixované rotace, přiřadíme $sg_C(e) = 1$. Jde-li hrana e proti směru fixované rotace, přiřadíme $sg_C(e) = -1$. Na Obrázku 3.3 jsme vybrali jedinou možnou kružnici a fixovali kladný směr rotace.



Obrázek 3.3: Rovinný orientovaný graf se zvýrazněnou neorientovanou kružnicí

Z bodu (C1) vyplývá, že nezáleží na výběru směru rotace, neboť do orientovaného matroidu musí patřit obě možnosti. (C2) nám dává podobnou $\subseteq$-minimalitu jako bod (C1) v definici systému obvodů (Definice 3.1.3) a (C3) je podobné pravidlo jako pravidlo pro eliminaci obvodů (C2) z definice systému obvodů (Definice 3.1.3), navíc ještě zachovávající orientaci obvodů.

K orientovaným matroidům ještě poznamenejme, že opět existuje více ekvivalentních definic, podobně jako pro klasické matroidy. V tomto textu si vystačíme s uvedenou definicí.

3.4 Definice valuovaného matroidu

Na okraj zmiňme ještě pojem *valuovaného matroidu*. Jako orientované matroidy zobecňují pojem matroidu reprezentovatelného nad archimédovským tělesem[2], valuované matroidy zobecňují pojem matroidu reprezentovatelného nad nearchimédovským tělesem. Valuovaný matroid definujeme ve smyslu Dress a Wenzel (1992, Definice 1.1).

Definice 3.4.1. *Nechť E je množina, $m \in \mathbb{N}$ a $\Gamma = (\Gamma, \cdot, \leq)$ je lineárně uspořádaná abelovská grupa, t.j. $(\Gamma, \leq)$ je neostré lineární uspořádání a navíc pro všechna $\alpha, \beta, \gamma \in \Gamma$ platí, že $\alpha < \beta \implies \gamma \cdot \alpha < \gamma \cdot \beta$. Definujme $\bar{\Gamma} := \Gamma \cup \{0\}$, kde prvek 0 splňuje $\alpha \cdot 0 = 0 \cdot \alpha = 0$ pro všechna $\alpha \in \bar{\Gamma}$ a $0 < \alpha$ pro všechna $\alpha \in \Gamma$. Zobrazení $f : E^m \longrightarrow \bar{\Gamma}$ definuje **valuovaný** (ang.* valuated*) **matroid** $\mathcal{M}_f = (E, f)$ na E hodnosti m s hodnotami v Γ, jestliže f splňuje následující vlastnosti:*

- *(V0) f není identicky nulové,*
- *(V1) hodnota f se nemění permutací prvků, t.j. pro libovolnou permutaci $\sigma \in S_m$ a libovolné prvky $e_1, \dots, e_m \in E$ platí*

  $$f(e_1, \dots, e_m) = f(\sigma(e_1), \dots, \sigma(e_m)).$$

  a navíc f je nenulové pouze na m-ticích různých prvků, t.j. pokud existuje $i \neq j$, že $e_i = e_j$, pak $f(e_1, \dots, e_m) = 0$,
- *(V2) pro libovolné $e_0, \dots, e_m, f_2, \dots, f_m \in E$ existuje i, $1 \leq i \leq m$ takové, že*

  $$f(e_1, \dots, e_m) \cdot f(e_0, f_2, \dots, f_m) \leq f(e_0, \dots, \hat{e}_i, e_m) \cdot f(e_i, f_2, \dots, f_m)$$

*Zobrazení f splňující (V0) - (V2) nazveme **valuací** valuovaného matroidu M_f.*

O dvou valuacích $f, g : E^m \longrightarrow \bar{\Gamma}$ řekneme, že *definují stejný valuovaný matroid* $\mathcal{M}$, pokud splňují $\mathcal{M}_f = \mathcal{M}_g$, t.j. jestliže existuje prvek $\alpha \in \Gamma$ takový, že $f = \alpha \cdot g$. Valuace f, g pak nazveme **ekvivalentní**. Že jde o relaci ekvivalence je zřejmé.

3.5 F-matroidy

Vraťme se nyní k hypertělesům. (Silný) F-matroid definujeme ve smyslu Baker a Bowler (2017, Definice 3.7). Podáme zde přirozenější, ačkoliv méně praktickou ekvivalentní formulaci, viz Baker a Bowler (2017, Věta 3.8).

Pro množinu E a hypertěleso F značíme F^E množinu všech funkcí z E do F. Je-li $X \in F^E$, **nosič** $\underline{X} \subseteq E$ značí množinu všech $e \in E$, pro které je $X(e)$ nenulové. **Nosičem** $C \subseteq F^E$ označíme množinu $supp(C) := \{\underline{X} : X \in C\}$. Dále označíme $F^\times$ množinu všech nenulových prvků hypertělesa F.

Pro definici F-matroidu si ještě zaveďme pojem *fundamentálního obvodu*.

Lemma 3.5.1. *Nechť $\mathcal{M} = (E, \mathcal{I})$ je matroid. Z $\mathcal{I}$ konstruujeme dle Lemmatu 3.1.2 systém bází $\mathcal{B}$ a dle Lemmatu 3.1.3 systém obvodů C. Pak pro libovolnou bázi $B \in \mathcal{B}$ a libovolný prvek $e \in E \setminus B$ existuje právě jeden obvod $C \in C$, pro který $C \subseteq B \cup \{e\}$. Tento obvod nazveme **fundamentálním obvodem**.*

[2]Archimédovským tělesem T rozumíme uspořádané těleso T s Archimédovou vlastností, t.j. pro každé $\alpha, \beta \in T, \alpha, \beta > 0$ existuje $k \in \mathbb{N}$ takové, že $k \cdot \alpha > \beta$.

Důkaz. Nechť B je libovolná báze matroidu $\mathcal{M}$. B jistě neobsahuje žádný obvod. Přidáním libovolného prvku $e \in E \setminus B$ k bázi B nemůžeme dostat další bázi, jelikož dle lemmatu 3.1.1 mají všechny báze stejnou velikost. Tedy musí existovat obvod $C \in B \cup \{e\}$ a nutně $e \in C$. Pokud by takové obvody existovaly dva, řekněme C_1 a C_2, pak mají neprázdný průnik $e \in C_1 \cap C_2$ a z pravidla pro eliminaci obvodů existuje obvod $C_3 \subseteq (C_1 \cup C_2) \setminus \{e\}$. To znamená, že obvod $C_3 \subseteq B$, což je spor. $\square$

Nyní již můžeme formulovat definici F-matroidu. Poznamenejme, že Baker a Bowler (2017, Definice 3.4 a Definice 3.7) definují slabý a silný F-matroid, kde slabý zobecňuje silný. V tomto textu si vystačíme pouze se silným F-matroidem, který budeme nadále nazývat pouze F-matroid.

Definice 3.5.1 (F-matroid)**.** *Nechť E je neprázdná, konečná množina a F je hypertěleso. Podmnožinu $\mathcal{C} \subseteq F^E$ nazveme **systém F-obvodů F-matroidu $\mathcal{M}$ na** E, jestliže $\mathcal{C}$ splňuje:*

- *(C0) $0 \notin \mathcal{C}$,*
- *(C1) Pokud $C \in \mathcal{C}$ a $\alpha \in F^\times$, pak $\alpha \cdot C \in \mathcal{C}$,*
- *(C2) Pokud $C, D \in \mathcal{C}$ a $\underline{C} \subseteq \underline{D}$, potom existuje nenulové $\alpha \in F^\times$, že $C = \alpha \cdot D$,*
- *(C3) Nosič $\mathcal{C}$ tvoří systém obvodů matroidu $\mathcal{M}'$ a pro každý prvek $C \in \mathcal{C}$ a každou bázi $B \in \mathcal{M}'$, C je v lineárním obalu prvků $C_{B,e}$ pro $e \in E \setminus B$, kde $C_{B,e}$ značí jednoznačně určený prvek z $\mathcal{C}$, pro který $C_{B,e}(e) = 1$ a jehož nosič je fundamentální obvod v $\mathcal{M}'$.*

*Dvojici $\mathcal{M} = (E, \mathcal{C})$ nazveme **F-matroid nad** E. **Hodnost** F-matroidu $\mathcal{M}$ definujeme jako hodnost matroidu $\mathcal{M}'$ z bodu (C3).*

Můžeme si všimnout, že body (C1) a (C2) jsou přímým zobecněním bodů (C1) a (C2) v definici orientovaného matroidu (Definice 3.3.2). Pro volbu znaménkového hypertělesa $\mathbb{S}$ by tyto dva body přímo splývaly. Rozveďme bod (C3). Ten nám říká, že pro každý F-obvod $C \in \mathcal{C}$ je jeho nosič $\underline{C} = \{e \in E : C(e) \neq 0\}$ obvodem nějakého matroidu $\mathcal{M}'$. Systém všech takto vzniklých obvodů $\{\underline{C} : C \in \mathcal{C}\}$ definuje tento matroid $\mathcal{M}'$. Vyberme libovolnou bázi B matroidu $\mathcal{M}'$. Pro libovolný prvek $e \in E \setminus B$ ($\mathcal{M}$ a $\mathcal{M}'$ mají stejný nosič E) najdeme dle Lemmatu 3.5.1 fundamentální obvod $X_{B,e}$. F-obvod $C_{B,e} \in \mathcal{C}$ je nenulový právě na těch prvcích, které tvoří fundamentální obvod $X_{B,e}$, t.j. pro všechna $f \in E$ platí $C_{B,e}(f) \neq 0 \iff f \in X_{B,e}$. Navíc požadujeme, aby $C_{B,e}$ byl normovaný vzhledem k e, tzn. musí platit $C_{B,e}(e) = 1$. Lineární kombinací těchto prvků jsme nyní schopni vyjádřit libovolný F-obvod z $\mathcal{C}$. Vezměme tedy F-obvod $C \in \mathcal{C}$. Pak existuje $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$ takové, že pro každé $0 \leq i \leq n$ existuje skalár $\alpha_i \in F$, báze B_i matroidu $\mathcal{M}'$ a prvek $e_i \in E$ nosiče matroidu $\mathcal{M}'$, že F-obvod C je v lineární obalu prvků $C_{B,e} \in \mathcal{M}$, tedy

$$C \in \boxplus_{i=0}^{n} \alpha_i \odot C_{B_i,e_i}$$

kde sčítání prvků z F^E a jejich násobení skaláry z F definujeme po prvcích, tzn. ekvivalentně

$$\forall f \in E : C(f) \in \boxplus_{i=0}^{n} \alpha_i \odot C_{B_i,e_i}(f).$$

Pro další práci s F-matroidy budeme potřebovat ekvivalentní definici F-matroidu pomocí tzv. **Grassmannových–Plückerových funkcí**. Ačkoliv na první pohled není definice přirozená, uvedeme konkrétní příklad a dokážeme pomocí ní ekvivalenci $\mathbb{K}$-matroidu s Krasnerovým hypertělesem $\mathbb{K}$ a klasického matroidu.

Definice 3.5.2 (Grassmannova–Plückerova funkce)**.** *Nechť E je neprázdná, konečná množina, F je hypertěleso a r je přirozené číslo. (Silná)* ***Grassmannova–Plückerova*** *(zkr. GP)* ***funkce hodnosti*** *r* ***nad*** *E* ***v*** *F je funkce $\varphi : E^r \longrightarrow F$, pro kterou platí:*

- *(GP1) φ není identicky nula,*
- *(GP2) φ je* alternující, *tzn.*

$$\varphi(x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_r) = -\varphi(x_1, \dots, x_j, \dots, x_i, \dots, x_r)$$

  a navíc $\varphi(x_1, \dots, x_r) = 0$ pokud $x_i = x_j$ pro nějaká $i \neq j$.

- *(GP3) [**Grassmannův–Plückerův vztah**] Pro libovolné podmnožiny $\{x_1, \dots, x_{r+1}\}, \{y_1, \dots, y_{r-1}\} \subseteq E$ platí*

$$0 \in \boxplus_{k=1}^{r+1} (-1)^k \varphi(x_1, \dots, \hat{x}_k, \dots, x_{r+1}) \cdot \varphi(x_k, y_1, \dots, y_{r-1})$$

  kde $\hat{x}_k$ značí vynechání prvku x_k.

Podívejme se na příklad funkce, která splňuje definici GP funkce.

Příklad 3.5.1. Vezměme konečnou množinu vektorů $E \subset \mathbb{R}^r$ velikosti n a přirozené číslo $r \leq n$ tak, že matice typu $r \times n$ se sloupci odpovídajícími vektorům z E je hodnosti r. Definujeme funkci $\varphi_A : E^r \longrightarrow \mathbb{R}$ přiřazující r-tici vektorů z E odpovídající determinant $r \times r$ minoru matice A. Potom φ_A splňuje definici GP funkce. Body (GP1) a (GP2) jsou zřejmé z pravidel pro determinanty, pro třetí bod se odkážeme na Baker a Bowler (2017, Definice 3.11).

Dvě GP funkce φ_1 a φ_2 nazveme **ekvivalentní**, jestliže existuje nenulové $\alpha \in F^\times$ takové, že $\varphi_1 = \alpha \cdot \varphi_2$. Přirozeně takto dostáváme relaci ekvivalence a můžeme uvažovat třídy ekvivalence na množině $\{\varphi : \varphi : E^r \longrightarrow \text{F je GP funkce hodnosti } r\}$.

Lemma 3.5.2 (Baker a Bowler (2017) Věta 3.13)**.** *Nechť E je neprázdná, konečná množina, F je hypertěleso a r je přirozené číslo. Pak existuje přirozená bijekce mezi třídami ekvivalence Grassmannových–Plückerových funkcí hodnosti r nad E v F a F-matroidy nad E hodnosti r.*

Tedy jedním ze způsobů, jak definovat F-matroid nad E hodnosti r, je ztotožnit tyto matroidy se třídami ekvivalence GP-funkcí hodností r nad E v F.

3.6 Vztah mezi F-matroidy a konkrétními matroidy

Pomocí právě uvedené definice F-matroidu ukážeme, že matroid (Definice 3.1.1) je ekvivalentní $\mathbb{K}$-matroidu, kde $\mathbb{K}$ je Krasnerovo hypertěleso z Příkladu 1.2.2, podobně $\mathbb{S}$-matroid, kde $\mathbb{S}$ je hypertěleso znamének z Příkladu 1.2.3 je ekvivalentní orientovanému matroidu a $\mathbb{RT}$-matroid, kde $\mathbb{RT}$ je reálné tropické hypertěleso z Příkladu 1.2.4, je ekvivalentní valuovanému matroidu (Definice 3.4.1).

K důkazu první věty budeme potřebovat jedno lemma o systému bází.

Lemma 3.6.1 (Woodall (1974))**.** *Nechť $\mathcal{B}$ je systém bází. Potom dvě libovolné báze $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ splňují silnější, tzv.* ***symetrické pravidlo pro záměnu bází****, t.j. pro každé $b_1 \in B_1$ existuje $b_2 \in B_2$ takové, že $(B_1 \setminus \{b_1\}) \cup \{b_2\} \in \mathcal{B}$ i $(B_2 \setminus \{b_2\}) \cup \{b_1\} \in \mathcal{B}$*

Věta 3.6.2. *Existuje jednoznačná korespondence mezi $\mathbb{K}$-matroidy hodnosti r a matroidy hodnosti r.*

Důkaz. Nejprve uvažme, že máme $\mathbb{K}$-matroid $\mathcal{N}$ nad konečnou množinou E. Dle Lemmatu 3.5.2 existuje třída GP funkcí odpovídající $\mathcal{N}$, vezměme z ní libovolnou funkci ϱ. Tedy ϱ je GP funkce hodnosti $r \in \mathbb{N}$ nad E v $\mathbb{K}$. Jelikož pracujeme nad hypertělesem $\mathbb{K}$, ve kterém jediný nenulový prvek je 1, ϱ je určené jednoznačně. Pomocí ϱ zkonstruujeme systém bází, což je dle Lemmatu 3.1.2 ekvivalentní definicí matroidu. Definujme

$$\mathcal{B} := \{\{x_1, \dots, x_r\} \subseteq E : \varrho(x_1, \dots, x_r) = 1\}$$

$\mathcal{B}$ je dobře definovaná, jelikož prvky $x_1, \dots, x_r$ můžeme díky (GP2) libovolně permutovat:

$$\begin{aligned}\varrho(x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_r) &= -\varrho(x_1, \dots, x_j, \dots, x_i, \dots, x_r) = \\ &= \varrho(x_1, \dots, x_j, \dots, x_i, \dots, x_r)\end{aligned}$$

Pro libovolná $1 \le i, j \le r, i \neq j$, jelikož v $\mathbb{K}$ platí $-1 = 1$. $\mathcal{B}$ je neprázdná, jelikož z (GP1) ϱ není identicky nula. Každý prvek $D \in \mathcal{B}$ je stejné velikosti r, jelikož všechny prvky D musí být různé. Nyní stačí dokázat, že v $\mathcal{B}$ platí pravidlo pro záměnu bází. Pro $A, B \in \mathcal{B}, a \in A \setminus B$ chceme najít $b \in B \setminus A$ takové, že $(A \setminus \{a\}) \cup \{b\} \in \mathcal{B}$. Označme $b_{r+1} := a$, $A = \{b_{r+1}, a_1, \dots, a_{r-1}\}$ a $B = \{b_1, \dots, b_r\}$. Z (GP3) platí

$$\begin{aligned}0 \in \boxplus_{k=1}^{r+1} (-1)^k \varrho(b_1, \dots, \hat{b_k}, \dots, b_r, b_{r+1}) \cdot \varrho(b_k, a_1, \dots, a_{r-1}) = \\ = \boxplus_{k=1}^{r+1} \varrho(b_1, \dots, \hat{b_k}, \dots, b_r, b_{r+1}) \cdot \varrho(b_k, a_1, \dots, a_{r-1}).\end{aligned}$$

Jelikož $\varrho(b_1, \dots, b_r) \cdot \varrho(b_{r+1}, a_1, \dots, a_{r-1}) = 1$, což plyne z předpokladu pro A a B, suma dle pravidel sčítání v $\mathbb{K}$ obsahuje alespoň dva různé prvky rovné 1, tzn. existuje alespoň jedno i různé od $r + 1$ takové, že

$$\varrho(b_1, \dots, \hat{b_i}, \dots, b_r, b_{r+1}) \cdot \varrho(b_i, a_1, \dots, a_{r-1}) = 1$$

Z toho plyne, že $\varrho(b_i, a_1, \dots, a_{r-1}) = 1$, tzn. $(A \setminus \{b_{r+1}\}) \cup \{b_i\} \in \mathcal{B}$.

Naopak mějme matroid $\mathcal{M} = (E, \mathcal{I})$ hodnosti r. Dle Lemmatu 3.1.2 existuje systém bází $\mathcal{B}$ ekvivalentně popisující $\mathcal{M}$. Každá báze $B \in \mathcal{B}$ je velikosti r. Zkonstruujeme funkci $\varphi : E^r \longrightarrow \mathbb{K}$ splňující definici GP funkce. Definujme

$$\varphi(x_1, \dots, x_r) \coloneqq \begin{cases} 1 & \{x_1, \dots, x_r\} \in \mathcal{B}, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

φ jistě splňuje (GP1), jelikož $\mathcal{B}$ je neprázdná. Vlastnost (GP2) se v $\mathbb{K}$ redukuje na

$$\varphi(x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_r) = \varphi(x_1, \dots, x_j, \dots, x_i, \dots, x_r)$$

a evidentně

$$\{x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_r\} \in \mathcal{B} \equiv \{x_1, \dots, x_j, \dots, x_i, \dots, x_r\} \in \mathcal{B}$$

Vlastnost (GP3) dokážeme sporem. Tedy nechť existují podmnožiny $\{x_1, \dots, x_{r+1}\}, \{y_1, \dots, y_{r-1}\} \subseteq E$ takové, že

$$0 \notin \boxplus_{k=1}^{r+1} \varphi(x_1, \dots, \hat{x}_k, \dots, x_{r+1}) \cdot \varphi(x_k, y_1, \dots, y_{r-1})$$

Opět $(-1)^k = 1$, jelikož pracujeme v $\mathbb{K}$. Z pravidel sčítání v $\mathbb{K}$ existuje právě jedno $1 \leq i \leq r+1$ takové, že

$$\varphi(x_1, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_{r+1}) \cdot \varphi(x_i, y_1, \dots, y_{r-1}) = 1 \tag{3.1}$$

a všechny ostatní členy musí být rovné nule. Z definice φ tedy platí, že

$$\begin{aligned} B &\coloneqq \{x_1, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_{r+1}\} \in \mathcal{B} \\ A &\coloneqq \{x_i, y_1, \dots, y_{r-1}\} \in \mathcal{B} \end{aligned}$$

Ovšem ze symetrického pravidla pro záměnu bází z Lemmatu 3.6.1 plyne, že pro $x_i \in A$ musí existovat $x_j \in B$, že $(A \setminus \{x_i\}) \cup \{x_j\} \in \mathcal{B}$ a zároveň $(B \setminus \{x_j\}) \cup \{x_i\} \in \mathcal{B}$. To znamená, že

$$\varphi(x_1, \dots, \hat{x}_j, \dots, x_{r+1}) \cdot \varphi(x_j, y_1, \dots, y_{r-1}) = 1$$

Jelikož $x_j \in B$ a $x_i \notin B$, vidíme, že $x_i \neq x_j$, čímž dostáváme spor s tím, že existuje právě jedno i, pro které platí (3.1). Tedy φ splňuje axiomy Grassmannovy–Plückerovy funkce hodnosti r nad E v $\mathbb{K}$.

Z druhé části důkazu vidíme, že máme-li matroid $\mathcal{M} = (E, \mathcal{I})$ hodnosti r, umíme z něj zkonstruovat jednoznačně určenou GP funkci $\varphi : E^r \longrightarrow \mathbb{K}$ hodnosti r. Jelikož pracujeme nad hypertělesem $\mathbb{K}$, které má jediný nenulový prvek, třídy ekvivalence GP funkcí hodnosti r nad E v $\mathbb{K}$ jsou jednoprvkové, každou třídu ekvivalence tak můžeme ztotožnit s jejím jediným prvkem. Každá taková GP funkce pak jednoznačně odpovídá nějakému $\mathbb{K}$-matroidu dle Lemmatu 3.5.2. Zároveň máme-li libovolný $\mathbb{K}$-matroid $\mathcal{M} = (E, \mathcal{C})$ hodnosti r, existuje k němu jednoznačně určená GP funkce φ hodnosti r nad E v $\mathbb{K}$ a dle první části důkazu vidíme, že φ jednoznačně určuje matroid $\mathcal{M}' = (E, \mathcal{I}')$ hodnosti r. Existuje tedy jednoznačná korespondence mezi matroidy hodnosti r a $\mathbb{K}$-matroidy hodnosti r.

□

Uveďme podobný výsledek pro orientované matroidy za pomocí hypertělesa znamének $\mathbb{S}$ z Příkladu 1.2.3, ovšem nyní bez důkazu.

Věta 3.6.3 (Björner a kol. (1993) Věta 3.5.5 a Věta 3.6.2)**.** *Existuje jednoznačná korespondence mezi $\mathbb{S}$-matroidy a orientovanými matroidy.*

Citujme ještě příklad Baker a Bowler (2017, Příklad 3.28) dávající do souvislosti valuované matroidy (Definice 3.4.1) a $\mathbb{RT}$-matroidy, kde $\mathbb{RT}$ je reálné tropické hypertěleso z Příkladu 1.2.4.

Věta 3.6.4. *Existuje jednoznačná korespondence mezi $\mathbb{RT}$-matroidy a valuovanými matroidy.*

Důkaz. Viz (Murota a Tamura, 2001, Věta 3.2) a diskuze na stránce 202 v uvedeném díle. □

Seznam použité literatury

BAKER, M. a BOWLER, N. (2017). Matroids over hyperfields. URL https://arxiv.org/abs/1601.01204.

BJÖRNER, A., VERGNAS, M., STURMFELS, B., WHITE, N. a ZIEGLER, G. (1993). *Oriented Matroids*. Encyclopedia of Mathematics and its Applications. Cambridge University Press. ISBN 9780521418362. URL https://books.google.cz/books?id=oSJ1QgAACAAJ.

BLAND, R. G. a LAS VERGNAS, M. (1978). Orientability of matroids. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, **24**(1), 94–123. ISSN 0095-8956. doi: https://doi.org/10.1016/0095-8956(78)90080-1. URL https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0095895678900801.

DRESS, A. W. a WENZEL, W. (1992). Valuated matroids. *Advances in Mathematics*, **93**(2), 214–250. ISSN 0001-8708. doi: https://doi.org/10.1016/0001-8708(92)90028-J. URL https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/000187089290028J.

LITVINOV, G. L. (2005). The Maslov dequantization, idempotent and tropical mathematics: A brief introduction. URL https://arxiv.org/abs/math/0507014.

MIKHALKIN, G. (2006). Tropical Geometry and its applications. URL https://arxiv.org/abs/math/0601041.

MUROTA, K. a TAMURA, A. (2001). On circuit valuation of Matroids. *Advances in Applied Mathematics*, **26**(3), 192–225. ISSN 0196-8858. doi: https://doi.org/10.1006/aama.2000.0716. URL https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0196885800907164.

PANGRÁC, O. Matroids Chapter 1. URL https://iuuk.mff.cuni.cz/~pangrac/vyuka/matroids/matroid-ch1.pdf.

VIRO, O. (2010). Hyperfields for Tropical Geometry i. Hyperfields and dequantization. URL https://arxiv.org/abs/1006.3034.

VIRO, O. Y. (2011). On basic concepts of Tropical geometry. *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*. URL https://www.math.stonybrook.edu/~oleg/math/papers/2011-OnBasicConcAngl.pdf.

WANG, W. Tropical Amoeba in SageMath. https://sites.google.com/view/wangweikun/writing/amoeba.

WELSH, D. (1976). *Matroid Theory*. L.M.S. monographs. Academic Press. ISBN 9780127440507. URL https://books.google.cz/books?id=cfXuAAAAMAAJ.

WOODALL, D. (1974). An exchange theorem for bases of matroids. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, **16**(3), 227–228. ISSN 0095-8956. doi: https://doi.org/10.1016/0095-8956(74)90067-7. URL https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0095895674900677.