

POSUDEK OPONENTA BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

Název: Štruktúra zovšeobecnených pytagorejských trojic
Autor: Simona Hlavinková

SHRNUTÍ OBSAHU PRÁCE

Práce se zabývá diofantickou rovnicí $|x^2 + Dy^2| = z^2$. Hlavní věta velmi uspokojivě popisuje strukturu všech jejích řešení (splňuje-li parametr D vhodné předpoklady). Hlavním zdrojem práce je preprint Jaklitsch a kol., *Connections of class numbers to the group structure of generalized pythagorean triples*, který problém řeší z pohledu třídivé grupy binárních kvadratických forem. Studentka veškeré důkazy přepracovala do přirozenějšího jazyka ideálů v kvadratickém tělese $\mathbb{Q}(\sqrt{-D})$. Navíc se na rozdíl od původního textu věnuje i případům, kdy D je záporné; ty jsou o něco problematičtější, mimo jiné protože reálná kvadratická tělesa obsahují nekonečně mnoho jednotek.

CELKOVÉ HODNOCENÍ PRÁCE

Práce se skládá se dvou kapitol. První z nich zavádí potřebné pojmy z algebraické teorie čísel a prezentuje známé výsledky, které buď jsou potřeba ve druhé kapitole, nebo by se daly využít při některém alternativním přístupu k problému. Druhá kapitola potom postupně směřuje k důkazu hlavní věty o struktuře množiny všech řešení zkoumané rovnice pro pevně zvolené D : Nejprve je zaveden pojem *normalizovaného řešení* a je zkoumána otázka existence a jednoznačnosti řešení pro pevně zvolenou hodnotu z , následně jsou definována *elementární řešení* a je ukázáno, že v jistém smyslu generují množinu všech řešení. Závěrečná sekce je věnována příkladům: Pro konkrétní hodnoty D je ověřeno, zda jsou splněny předpoklady hlavní věty, a ilustrováno, jak lze každé zvolené řešení generovat pomocí elementárních řešení. Oceňuji i vysvětlení a ukázkou, že nejsou-li splněny předpoklady, lze někdy problém vyřešit záměnou D za $-D$. Práce má poměrně kvalitně napsaný úvod – především část, kde je vysvětlen vlastní přínos autorky – i závěr.

Práce je psaná kvalitním formálním jazykem s jen malým množstvím jazykových chyb, překlepů, stylistických či typografických nedostatků. Zvolené značení je adekvátní, ve většině případů dobře vysvětlené a jen málo rozkolísané, takže tyto formální stránky nijak nesnižují srozumitelnost textu. Výjimkou je skutečnost, že pojem *vlastní ideál* je opakovaně používán chybně (autorka měla zřejmě na mysli nenulový ideál). Větším problémem jsou matematické „překlepy“ (často opakované, vzniklé pravděpodobně kopírováním) a občasné změny značení během důkazů: Například v důkazu věty 2.8 je nejprve dvakrát v exponentu $2\alpha_i$ místo 2, následně dvakrát α_i místo $2\alpha_i$, a bezprostředně poté se zjeví β_i a γ_i , které nebyly zavedeny a jejichž význam není vůbec jasný.

Nedůslednosti a nepřesnosti se bohužel vyskytují i v definicích a ve zněních vět. Vzhledem k tomu, jak významně byl původní text přepracován, je to pochopitelné. Například klíčový pojem *normalizovaného řešení* je někdy využíván způsobem, jako kdyby v jeho definici byla přidána podmínka kladnosti (např. když se ve větách 2.12 a 2.13 mluví o počtu řešení); v jiných případech by se ale přidáním této podmínky argumenty zkomplikovaly nebo zneplatnily, a čtenář tak neví, jaká je správná definice. Klíčový předpoklad, že třídivá grupa je izomorfní \mathbb{Z}_2^n , je často (bohužel i v hlavní větě 2.13) uváděn s dovětkem $n > 0$, který je zbytečný a vyřazuje i případy, kdy je zkoumaný okruh oborem hlavních ideálů. Pojem *elementární řešení*, který hraje klíčovou roli v hlavní větě, není pro záporné D definován jednoznačně. Ve znění lemmatu 2.6 chybí předpoklad o Legendreových symbolech.

V některých důkazech jsou chyby z nepozornosti, které ale vedou k tomu, že velká část textu není správně a náprava by nebyla zcela mechanická (byť většinou pořád poměrně jednoduchá). Například v důkazu věty 2.8 jsou ideály násobeny jednotkami a autorka zcela nesmyslně tvrdí, že je daná jednotka určena jednoznačně. Úplně dole na stránce 11 píše $\gamma = p_1^{2n_1} \cdots p_k^{2n_k}$ místo $\pm N(\gamma) = \cdots$, a ve zbytku

důkazu pracuje s touto identitou.

Jak jsem uváděl, úvod a závěr jsou kvalitní a nápomocné. Ocenil bych zdůraznění, že věta 2.13 je výrazně důležitější než všechna ostatní tvrzení. Hlavně by ale v úvodu a závěru měl zaznít nějaký komentář ke klíčovému předpokladu o třídivé grupě tělesa $\mathbb{Q}(\sqrt{-D})$, bez něhož je uvedená technika nepoužitelná. Také by mi přišlo přirozenější zcela vypustit sekci 2.4, která pouze zavádí (navíc velmi nejasně) pojmy, které by se využily při zobecnění pro bezčtvercové D – k němu ale ani náznakem nedojde.

Byť jsou všechny jednotlivé chyby nevýznamné a samostatně by byly snadno opravitelné, jejich frekvence čitelnost textu přece jen snižuje. Na druhé straně je pochopitelné, že při převádění všech důkazů do nového jazyka spojeném s výrazným zobecněním (pro záporné D) takovéto problémy vzniknou, a výsledný text je rozhodně lepším zdrojem než předloha.

OTÁZKY

1. Vyslovte lemma 2.6 precizněji: Nejprve se rozhodněte, zda nechcete změnit definici normalizovaného řešení (je to možné, ale ne nutné) a následně zformulujte lemma 2.6 tak, aby této definici odpovídalo. Ideálně okomentujte i to, zda ho nelze vyslovit jako ekvivalenci.
2. Současná definice elementárního řešení není pro záporné D jednoznačná. Jak to opravit, aby bylo opravdu jasné, jak má znít věta 2.13?

ZÁVĚR

Práci považuji za dobrou a doporučuji ji uznat jako bakalářskou práci. Pokud budou otázky zodpovězeny uspokojivě, kloním se k hodnocení *velmi dobře*.

Jakub Krásenský
Katedra algebry MFF UK
21. června 2023