



**MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ
FAKULTA**
Univerzita Karlova

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Martin Borýsek

**Klasifikační problémy z lineární algebry
a reprezentace toulců**

Katedra algebry

Vedoucí bakalářské práce: doc. RNDr. Jan Šťovíček, Ph.D.

Studijní program: Matematika

Studijní obor: Obecná matematika

Praha 2023

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů. Tato práce nebyla využita k získání jiného nebo stejného titulu.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V dne

Podpis autora

Chtěl bych poděkovat svému vedoucímu doc. Janu Šťovíčkovi za vedení práce, čas, ochotu, trpělivost, předané znalosti a cenné rady. Dále děkuji své rodině a přátelům za podporu.

Název práce: Klasifikační problémy z lineární algebry a reprezentace toulců

Autor: Martin Borýsek

Katedra: Katedra algebry

Vedoucí bakalářské práce: doc. RNDr. Jan Štovíček, Ph.D., Katedra algebry

Abstrakt: Tato práce se zabývá popisem kategorií konečně dimenzionálních reprezentací toulců. Jejím cílem je předvést klasifikaci nerozložitelných objektů v této kategorii pro toulce, jejichž podkladový graf je Dynkinův, a rozebrat teorii na příkladu tzv. problému tří podprostorů. V první kapitole jsou představeny základní poznatky o reprezentacích toulců. V druhé části je s pomocí reflexních funktorů a reflexních transformací již předveden samotný důkaz. Dále se tato práce ve třetí kapitole zabývá základy pro teorii M. Auslandera a I. Reitenové. V závěru je rozebrán Auslanderův-Reitenin toulec pro kategorii konečně dimenzionálních reprezentací již výše zmíněného problému tří podprostorů.

Klíčová slova: reprezentace toulců, klasifikace reprezentací, ireducibilní zobrazení, Auslanderův-Reitenin toulec

Title: Classification problems from linear algebra and representations of quivers

Author: Martin Borýsek

Department: Department of Algebra

Supervisor: doc. RNDr. Jan Štovíček, Ph.D., Department of Algebra

Abstract: This thesis deals with the description of categories of finite-dimensional representations of quivers. Its aim is to present a classification of indecomposable objects in this category for quivers whose underlying graph is Dynkin and to discuss the theory on the example of the so-called three-subspace problem. In the first chapter, the basic concepts of quiver representations are introduced. In the second chapter, the proof itself is demonstrated using reflection functors and reflection transformations. Then, in the third chapter, this thesis deals with the basics for the theory of M. Auslander and I. Reiten. In the conclusion, the Auslander-Reiten quiver is discussed for the category of finite-dimensional representations of the above-mentioned problem of three subspaces.

Keywords: representations of quivers, classification of representations, irreducible morphisms, Auslander-Reiten quiver

Obsah

Úvod	2
1 Toulce a jejich reprezentace	3
1.1 Toulce	3
1.2 Reprezentace toulců	4
1.3 Základní typy reprezentací	7
2 Klasifikace reprezentací	11
2.1 Grafy a formy	11
2.2 Reflexe	17
2.2.1 Reflexní transformace	17
2.2.2 Reflexní funktory	18
2.3 Coxeterovy transformace a funktory	23
2.4 Reprezentace Dynkinových toulců	25
2.5 Problém tří podprostorů	29
3 Auslanderův-Reitenin toulec	32
3.1 Radikály	32
3.2 Ireducibilní a neinvertibilní homomorfismy	37
3.3 Auslanderův-Reitenin toulec	39
3.4 Prostor ireducibilních zobrazení projektivních reprezentací příslušných vrcholu	40
3.5 Ireducibilní zobrazení a preprojektivní reprezentace	45
Závěr	49
Seznam použité literatury	50

Úvod

V této práci se zabýváme konečnými souvislými toulci a jejich konečně dimenzionálními reprezentacemi. Cílem této práce je zpracovat klasifikační problém reprezentací toulců, které mají podkladový graf Dynkinův. Mnohé důkazy doplníme, popř. rozepíšeme více do detailů. Zároveň teorii předvedeme na tzv. problému tří podprostorů, kterému se proto budeme věnovat více. Teorie reprezentací toulců se dá převést do řeči modulů nad tzv. algebrou cest grafu, my ale celou práci budeme vést v řeči samotných reprezentací.

V první kapitole zavedeme základní pojmy ohledně reprezentací toulců a shrneme nějaké základní vlastnosti podle (Krause, 2010). Připomeneme Krullovu-Schmidtovu větu, díky které se bude stačit zabývat pouze nerozložitelnými reprezentacemi.

V druhé kapitole se již dostaneme k samotnému klasifikačnímu problému. Podle (Assem a kol., 2006), (Krause, 2010) a (Ringel, 2006) představíme kvadratické formy příslušné grafům, Dynkinovy a Eukleidovské grafy, definujeme reflexní funktory a reflexní transformace. Ukážeme jejich vlastnosti a poté s pomocí této teorie již dokážeme, že každá třída isomorfismu nerozložitelných reprezentací, které mají za podkladový graf Dynkinův graf, je jednoznačně určena svým dimenzním vektorem. Navíc ukážeme, že tyto dimenzní vektory jsou právě všechny kladné kořeny kvadratické formy příslušné podkladovému grafu. Díky tomu již budeme schopni dokázat, že každá taková kategorie konečně dimenzionálních reprezentací má konečný počet tříd isomorfismu nerozložitelných reprezentací. Poznamenejme, že platí dokonce i silnější věta, kterou dokázal francouzský matematik Pierre Gabriel (též známý jako Peter Gabriel) v (Gabriel, 1972). Ta říká, že kategorie reprezentací toulce má konečný počet tříd isomorfismu nerozložitelných reprezentací právě tehdy, když je podkladovým grafem Dynkinův graf. Námi provedený důkaz naší části nebude tak, jak ho provedl P. Gabriel, ale bude pomocí již zmíněných reflexních funktorů jako v (Krause, 2010) a (Bernstein a kol., 1973). V závěru celé kapitoly rozebereme tuto teorii na příkladu tří podprostorů.

Ve třetí kapitole uděláme úvod do tzv. Auslanderovy-Reiteniny teorie a tzv. Auslanderova-Reitenina toulce. Zadefinujeme ireducibilní zobrazení, radikál dvou reprezentací a ukážeme jejich vztah podobně jako v (Assem a kol., 2006). Poté definujeme prostor ireducibilních zobrazení a Auslanderův-Reitenin toulec kategorie reprezentací toulce. Ukážeme, že pro konečně dimenzionální reprezentace toulce s Dynkinovým podkladovým grafem bude možné každé nenulové neinvertibilní zobrazení mezi nerozložitelnými reprezentacemi zapsat jako sumu kompozic ireducibilních zobrazení mezi nerozložitelnými reprezentacemi. S pomocí (Krause, 2010) nakonec zjistíme počet bázových prvků v prostoru ireducibilních zobrazení mezi nerozložitelnými reprezentacemi toulců s Dynkinovým toulcem, což poté aplikujeme na problém tří podprostorů. Díky tomuto v závěru práce sestavíme Auslanderův-Reitenin toulec pro problém tří podprostorů. Poznamejme, že teorie zkoumající mimo jiné Auslanderův-Reitenin toulec byla představena americkým matematikem Mauricem Auslanderem a norskou matematickou Idun Reiten. V rámci této teorie se studují například tzv. skoro štěpitelné posloupnosti. Více o této teorii lze nalézt v (Auslander a kol., 2010) nebo v (Assem a kol., 2006).

1. Toulce a jejich reprezentace

V této kapitole se budeme zabývat základními poznatky o toulcích a jejich reprezentacích.

1.1 Toulce

Definice 1.1 (Toulec). Toulcem rozumíme čtveřici $\mathcal{Q} = (Q_0, Q_1, s, t)$, kde Q_0, Q_1 jsou množiny, Q_0 je nazývána množinou vrcholů, Q_1 množinou šipek a $s, t : Q_1 \rightarrow Q_0$ jsou dvě zobrazení taková, že každé šípce $\alpha \in Q_1$ přiřadí startovací vrchol $s(\alpha)$ a konečný vrchol $t(\alpha)$. Obvykle pro $\alpha \in Q_1$ takové, že $s(\alpha) = a, t(\alpha) = b$, píšeme $\alpha : a \rightarrow b$ nebo $a \xrightarrow{\alpha} b$. Pak někdy zkráceně též píšeme $\mathcal{Q} = (Q_0, Q_1)$.

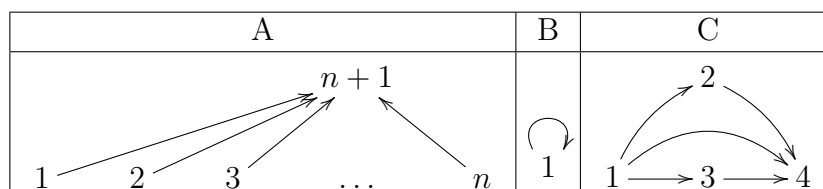
Definice 1.2. Necht $\mathcal{Q} = (Q_0, Q_1, s, t)$ je toulec.

- Toulec \mathcal{Q} nazýváme konečný, jsou-li množiny Q_0 a Q_1 konečné.
- Jeho podkladovým grafem rozumíme multigraf, jehož neorientované hrany odpovídají šípkám v \mathcal{Q} , tedy graf $G = (V, E)$, kde $V = Q_0$ a

$$E = \{\{i, j\}_\alpha \mid \alpha \in Q_1, \alpha : i \rightarrow j\}.$$

- \mathcal{Q} nazýváme souvislý, pokud je jeho podkladový graf souvislý.

Příklad. Uvádíme nějaké příklady toulců s očíslovanými vrcholy. Toulec A je též



Tabulka 1.1: Příklady toulců

někdy nazýván jakožto tzv. problém n podprostorů. Tímto toulcem pro $n = 3$ (tedy na 4 vrcholech) se budeme v této práci zabírat více do hloubky. Toulec B je nazýván Jordanův.

Definice 1.3 (Cesta). Necht $\mathcal{Q} = (Q_0, Q_1, s, t)$ je toulec. Cestou délky $n \geq 1$ v \mathcal{Q} rozumíme posloupnost šipek $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ takovou, že $t(\alpha_i) = s(\alpha_{i+1})$ pro všechna $i = 1, \dots, n - 1$. Píšeme ji ve tvaru

$$(\alpha_1, \dots, \alpha_n).$$

Pro vrchol $i \in Q_0$ definujeme cestu délky 0 z i do i , kterou značíme ε_i . Pro cesty $c_1 = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ a $c_2 = (\beta_1, \dots, \beta_m)$, kde $t(\alpha_n) = s(\beta_1)$, definujeme skládání přirozeně jako

$$c_1 * c_2 := (\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_m).$$

Množinu všech cest z vrcholu i do vrcholu j značíme $Q(i, j)$.

1.2 Reprezentace toulců

Definice 1.4 (Reprezentace toulce). Nechť $\mathcal{Q} = (Q_0, Q_1)$ je toulec. Reprezentací \mathcal{Q} nad komutativním tělesem \mathcal{K} rozumíme $X = (X_i, f_\alpha)_{i \in Q_0, \alpha \in Q_1}$, kde X_i je vektorový prostor pro $i \in Q_0$ a f_α je lineární zobrazení $f_\alpha : X_i \rightarrow X_j$, kde $\alpha : i \rightarrow j$. Je-li toulec zřejmý z kontextu, pak budeme zkráceně zapisovat pouze $X = (X_i, f_\alpha)$.

Máme-li X, Y reprezentace \mathcal{Q} , kde $X = (X_i, f_\alpha), Y = (Y_i, g_\alpha)$, pak říkáme, že Y je podreprezentace X , pokud $Y_i \leq X_i$ pro všechny $i \in Q_0$ a $f_\alpha|_{Y_i} = g_\alpha$ pro všechny $\alpha \in Q_1, \alpha : i \rightarrow j$. Značíme $Y \leq X$.

Reprezentaci X nazýváme konečně dimenzionální, pokud je každý X_i pro $i \in Q_0$ konečně dimenzionální vektorový prostor.

Homomorfismem reprezentací X a Y rozumíme soubor homomorfismů vektorových prostorů $\phi = (\phi_i)_{i \in Q_0}$ takových, že následující diagram pro každé $\alpha \in Q_1$ komutuje:

$$\begin{array}{ccc} X_{s(\alpha)} & \xrightarrow{\phi_{s(\alpha)}} & Y_{s(\alpha)} \\ \downarrow f_\alpha & & \downarrow g_\alpha \\ X_{t(\alpha)} & \xrightarrow{\phi_{t(\alpha)}} & Y_{t(\alpha)} \end{array}$$

Obrázek 1.1: Komutativní diagram

Skládání, identický homomorfismus, jádro, obraz i kojádro definujeme po složkách. Analogicky po složkách definujeme i monomorfismus, epimorfismus atd. Prostor všech homomorfismů z X do Y značíme klasicky $\text{Hom}(X, Y)$ a prostorem endomorfismů na X rozumíme $\text{End}(X) = \text{Hom}(X, X)$.

O reprezentaci X říkáme, že je nerozložitelná, pokud $X \neq 0$ a kdykoli máme $X = X_1 \oplus X_2$, pak $X_1 = 0$, nebo $X_2 = 0$.

Kategorii všech reprezentací \mathcal{Q} nad \mathcal{K} značíme $\text{Rep}(\mathcal{Q}, \mathcal{K})$, podkategorii konečně dimenzionálních reprezentací naopak značíme $\text{rep}(\mathcal{Q}, \mathcal{K})$.

Poznámka.

- Kojádrem homomorfismu vektorových prostorů $f : X \rightarrow Y$ míníme faktor $\text{Coker}(f) := Y/\text{Im}(f)$.
- Složením homomorfismů reprezentací dostaneme opět homomorfismus reprezentací.

V celém textu se budeme zabývat konečně dimenzionálními reprezentacemi konečných souvislých toulců nad komutativním tělesem \mathcal{K} , proto pro přehlednost je tedy někdy nebudeme v předpokladech explicitně zmiňovat. Navíc pro toulce $\mathcal{Q} = (Q_0, Q_1)$ na n vrcholech můžeme předpokládat, že $Q_0 = \{1, \dots, n\}$. Někdy, když budeme mluvit o reprezentaci X toulce \mathcal{Q} , tak pro $\alpha \in Q_1, \alpha : i \rightarrow j$ budeme příslušné zobrazení $X_i \rightarrow X_j$ značit X_α .

Příklad. Rozebereme přirozený případ, kdy jsou dvě reprezentace isomorfní. Mějme toulec \mathcal{Q} , $X = (X_i, f_\alpha)$ jeho reprezentaci, soubor vektorových prostorů

$(Y_i)_{i \in Q_0}$ a necht $X_i \cong Y_i$ pro všechny $i \in Q_0$. Máme tedy soubor isomorfismů $\phi_i : X_i \xrightarrow{\sim} Y_i$. Tvrdíme, že existuje isomorfní reprezentace k X , která má za příslušné vektorové prostory právě Y_i . Tedy pro každé $\alpha \in Q_1$, hledáme $g_\alpha : Y_{s(\alpha)} \rightarrow Y_{t(\alpha)}$, aby diagram na obrázku 1.1 komutoval. Necht $B = (b_j | j \in J)$ je báze $X_{s(\alpha)}$. Navíc víme, že dvě lineární zobrazení jsou stejná právě tehdy, když se shodují jejich obrazy na bázi. Tedy požadujeme, aby $g_\alpha(\phi_{s(\alpha)}(b_j)) = \phi_{t(\alpha)}(f_\alpha(b_j))$. Neboť $\phi_{s(\alpha)}$ je isomorfismus, tak $\phi_{s(\alpha)}(B) = (\phi_{s(\alpha)}(b_j) | j \in J)$ je báze $Y_{s(\alpha)}$. Tudíž definujeme $g_\alpha(\phi_{s(\alpha)}(b_j)) := \phi_{t(\alpha)}(f_\alpha(b_j))$, tímto je již g_α jednoznačně určeno. Tedy $X \cong Y = (Y_i, g_\alpha)$.

Změna báze jednoho vektorového prostoru přímo indukuje přechodové zobrazení, které je isomorfismem. Tudíž ve vrcholech můžeme libovolně měnit bázi.

Příklad. Reprezentace toulce A v tabulce 1.1 jsou právě zobrazení z n vektorových prostorů do jednoho. Toto vysvětluje, proč se mu říká problém n podprostorů. Naopak reprezentace toulce B jsou endomorfismy vektorového prostoru. V konečně dimenzionálních prostorech nad algebraicky uzavřeným tělesem máme tyto endomorfismy popsány, neboť každý takový endomorfismus se dá zapsat maticově a tato matice se dá převést do tzv. Jordanova kanonického tvaru. Proto se tomuto toulci říká Jordanův.

Lemma 1.5. *Necht $f \in \text{Hom}(X, Y)$, $g \in \text{Hom}(Y, X)$ a $gf = \text{id}_X$. Pak $Y = \text{Ker}(g) \oplus \text{Im}(f)$.*

Důkaz. Mějme $y \in Y$, pak $y = fg(y) + (y - fg(y))$. Protože $fg(y) \in \text{Im}(f)$ a protože $g(y - fg(y)) = g(y) - gfg(y) = g(y) - g(y) = 0$, tak $(y - fg(y)) \in \text{Ker}(g)$, tedy $Y = \text{Ker}(g) + \text{Im}(f)$. Pokud $y \in \text{Ker}(g) \cap \text{Im}(f)$, tak $y = f(z)$ pro nějaké $z \in X$. Protože je navíc $y \in \text{Ker}(g)$, tak $0 = g(f(z)) = z$, tedy $y = f(z) = f(0) = 0$. Proto $Y = \text{Ker}(g) \oplus \text{Im}(f)$. \square

Definice 1.6 (Lokální okruh). Říkáme, že okruh \mathbf{R} je lokální, pokud pro každé dva neinvertibilní prvky $x, y \in \mathbf{R}$ je $x + y$ invertibilní.

Poznámka. Ekvivalentní definicí lokálnosti okruhu je to, že obsahuje unikátní maximální levý ideál. Podrobnosti lze najít v (Anderson a Fuller, 1992, 15.15. Proposition., str. 170).

Lemma 1.7. *Necht X je reprezentace a $\phi \in \text{End}(X)$. Pak existuje $r \in \mathbb{N}$ takové, že $X = \text{Im}(\phi^r) \oplus \text{Ker}(\phi^r)$.*

Důkaz. Jelikož je X konečně dimenzionální, tak je každé X_i artinovské. Dále zřejmě $\text{Im}(\phi) \leq X$ a navíc $\text{Im}(\phi^i) \leq \text{Im}(\phi^j)$ pro $i \geq j$. To ukážeme následovně: Stačí, že $\forall i \in \mathbb{N}$ je $\text{Im}(\phi^{i+1}) \leq \text{Im}(\phi^i)$. To ale snadno platí, jak ukážeme indukcí:

- pro $i = 1$ máme

$$\text{Im}(\phi^2) = \phi(\text{Im}(\phi)) \leq \text{Im}(\phi)$$

- pro $i > 1$ díky indukčnímu předpokladu máme

$$\text{Im}(\phi^{i+1}) = \phi(\text{Im}(\phi^i)) \leq \phi(\text{Im}(\phi^{i-1})) = \text{Im}(\phi^i).$$

Tedy z artinovskosti a konečnosti toulce a dostáváme, že nutně existuje $r \in \mathbb{N}$ tak, že $\text{Im}(\phi^r) = \text{Im}(\phi^{r+1}) = \dots$. Podívejme se na

$$\varphi := \phi^r|_{\text{Im}(\phi^r)}.$$

Zřejmě je to epimorfismus $\varphi : \text{Im}(\phi^r) \twoheadrightarrow \text{Im}(\phi^{2r}) = \text{Im}(\phi^r)$. A z toho, že je to zobrazení (po složkách) mezi konečně dimenzionálními prostory stejné dimenze, je navíc i prosté, tedy je to isomorfismus a dokonce automorfismus na $\text{Im}(\phi^r)$. Můžeme vzít inverzní zobrazení. Pak ale $\phi^r \varphi^{-1} = \text{id}_{\text{Im}(\phi^r)}$. Tedy z lemma 1.5 je $X = \text{Im}(\varphi^{-1}) \oplus \text{Ker}(\phi^r) = \text{Im}(\phi^r) \oplus \text{Ker}(\phi^r)$. \square

S pomocí tohoto lemmatu dokážeme důležitou charakterizaci nerozložitelnosti reprezentace.

Tvrzení 1.8 (Charakterizace nerozložitelnosti reprezentace). *Nenulová reprezentace X je nerozložitelná $\iff \text{End}(X)$ je lokální okruh.*

Důkaz. \Rightarrow Mějme nerozložitelnou reprezentaci X a $\phi, \phi' \in \text{End}(X)$ neinvertibilní morfismy. Nechť pro spor je jejich součet invertibilní, tedy existuje $\rho \in \text{End}(X) : \rho(\phi + \phi') = \text{id}_X$. Dokonce $\rho\phi$ i $\rho\phi'$ jsou též neinvertibilní. Kdyby totiž pro spor $\rho\phi$ bylo invertibilní (analogicky pro $\rho\phi'$), tak by ϕ díky asociativitě mělo levý inverz, tedy ϕ by bylo (po složkách) monomorfismem. Nicméně protože ϕ je v každé složce endomorfismem konečně dimenzionálního vektorového prostoru, tak by ϕ bylo i epimorfismus, tedy by bylo i zprava invertibilní, spor.

Dle lemma 1.7 je díky nerozložitelnosti X zobrazení $\rho\phi$ nilpotentní (neboť z neinvertibilnosti a konečné dimenze $\text{Im}((\rho\phi)^r) \neq X$ pro všechna $r \in \mathbb{N}$), tedy existuje $r \in \mathbb{N} : (\rho\phi)^r = 0$. Z distributivity dostáváme, že

$$(\text{id}_X - \rho\phi)(\text{id}_X + \rho\phi + \dots + (\rho\phi)^{r-1}) = \text{id}_X - 0 = \text{id}_X.$$

Tedy $\rho\phi' = \text{id}_X - \rho\phi$ je invertibilní. To je ale spor.

\Leftarrow Nechť pro spor $X = X_1 \oplus X_2$, kde $X, X_1, X_2 \neq 0$. Pak máme projekce $\pi_i : X \rightarrow X_i$, $i = 1, 2$. Zřejmě ani jedna projekce není invertibilní. Nicméně $\pi_1 + \pi_2 = \text{id}_X$, což je invertibilní. Tím dostáváme spor. \square

V této práci bychom chtěli klasifikovat nějaké konečně dimenzionální reprezentace. Krullova-Schmidtova věta nám tuto snahu značně zjednodušuje. Ta nám totiž celé zkoumání konečně dimenzionálních reprezentací omezuje pouze na nerozložitelné. Nejprve ale uvedeme větu, která dává do souvislosti reprezentace a moduly. Tuto větu uvádíme bez důkazu.

Věta 1.9. *Bud' \mathcal{Q} konečný souvislý toulec bez cyklů. Pak existuje \mathcal{K} -algebra A a \mathcal{K} -lineární ekvivalence kategorií*

$$F : \text{Mod-}A \xrightarrow{\cong} \text{Rep}(\mathcal{Q}, \mathcal{K}),$$

která má restrikci na podkategorie

$$\bar{F} : \text{mod-}A \xrightarrow{\cong} \text{rep}(\mathcal{Q}, \mathcal{K}),$$

kde mod- A značí konečně dimenzionální A -moduly.

Poznamenejme, že tato ekvivalence platí moduly nad tzv. algebru cest toulce \mathcal{Q} . Definici této algebry lze najít v (Assem a kol., 2006, str.43). Pak tuto větu lze najít opět v (Assem a kol., 2006, 1.7. Corollary, str. 74), kde je tato věta důsledkem obecnější věty.

Věta 1.10 (Krullova-Schmidtova). *Nechť X je konečně dimenzionální reprezentace toulce \mathcal{Q} nad \mathcal{K} . Pak existují $X_1, \dots, X_n \in \text{rep}(\mathcal{Q}, \mathcal{K})$ nerozložitelné a po dvou neisomorfní a $m_1, \dots, m_n \in \mathbb{N}$ tak, že*

$$X = \bigoplus_{i=1}^n X_i^{m_i}.$$

Navíc pokud existuje jiný takový rozklad

$$X = \bigoplus_{i=1}^{n'} Y_i^{m'_i},$$

pak $n = n'$ a existuje permutace $\sigma \in S(n)$ tak, že $m_i = m'_{\sigma(i)}$ a $X_i \cong Y_{\sigma(i)}$.

Tato věta plyne z ekvivalence kategorie konečně dimenzionálních reprezentací a konečně dimenzionálních modulů ve větě 1.9 a Krullovy-Schmidtovy věty pro konečně dimenzionální moduly. Tuto větu s důkazem lze nalézt například v (Etingof a kol., 2011, Theorem 3.8.1 (Krull-Schmidt theorem), str. 51-52).

1.3 Základní typy reprezentací

V této sekci se podíváme na nějaké základní typy reprezentací. Poté s již dokázanými vlastnostmi reprezentací ukážeme, že všechny typy, které představíme, jsou nerozložitelné.

Definice 1.11 (Jednoduchá reprezentace). *Nechť \mathcal{Q} je toulec a i je jeho vrchol. Jednoduchou reprezentací tohoto vrcholu definujeme jako $S(i)$, kde vektorový prostor zastupující vrchol j je roven*

$$S(i)_j := \begin{cases} 0 & j \neq i, \\ \mathcal{K} & j = i. \end{cases}$$

Všechna zobrazení mezi vektorovými prostory f_α pro šipky α definujeme jako nulová zobrazení.

Zřejmě se jedná o nerozložitelné reprezentace.

Příklad. Pro toulec \mathcal{Q} ilustrujeme jednoduché reprezentace:

\mathcal{Q}	$S(1)$	$S(2)$	$S(3)$	$S(4)$
$\begin{array}{ccc} 1 & & \\ & \searrow & \\ 2 & \succ & 4 \\ & \nearrow & \\ 3 & & \end{array}$	$\begin{array}{ccc} \mathcal{K} & & \\ & \searrow & \\ 0 & \succ & 0 \\ & \nearrow & \\ 0 & & \end{array}$	$\begin{array}{ccc} 0 & & \\ & \searrow & \\ \mathcal{K} & \succ & 0 \\ & \nearrow & \\ 0 & & \end{array}$	$\begin{array}{ccc} 0 & & \\ & \searrow & \\ 0 & \succ & 0 \\ & \nearrow & \\ \mathcal{K} & & \end{array}$	$\begin{array}{ccc} 0 & & \\ & \searrow & \\ 0 & \succ & \mathcal{K} \\ & \nearrow & \\ 0 & & \end{array}$

Definice 1.12 (Projektivní reprezentace). Necht \mathcal{Q} je toulce a i je jeho vrchol. Projektivní reprezentací příslušnou vrcholu i definujeme jako $P(i) = (P(i)_j, \varphi_\alpha)$, kde

$$P(i)_j = \left\{ \sum_{m=1}^p \lambda_m c_m \mid \lambda_m \in \mathcal{K}, c_m \in Q(i,j) \right\}$$

je vektorový prostor daný \mathcal{K} -lineárními kombinacemi cest z vrcholu i do vrcholu j . Morfismus φ_α pro $\alpha : j \rightarrow k$ definujeme následovně: Pro $x = \sum_{m=1}^p \lambda_m c_m \in P(i)_j$, definujeme

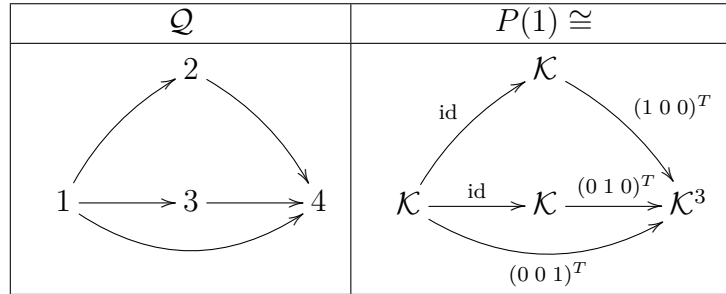
$$\varphi_\alpha(x) := \sum_{m=1}^p \lambda_m (c_m * \alpha).$$

Rovnou vidíme, že vektorové prostory v definici projektivních reprezentací příslušných vrcholů jsou isomorfní \mathcal{K}^{d_j} , kde $d_j = |Q(i,j)|$. Cesty si můžeme představovat jako kanonickou bázi \mathcal{K}^{d_j} , zároveň zobrazení φ_α pro $\alpha : j \rightarrow k$ si lze představovat jako lineární zobrazení f_α , které příslušný prvek (kanonické) báze pošle na jiný prvek (kanonické) báze, který odpovídá prodloužené cestě o α . Tedy všechny projektivní reprezentace jsou isomorfní takové reprezentaci

$$X = (\mathcal{K}^{d_j}, f_\alpha)_{j \in Q_0, \alpha \in Q_1}.$$

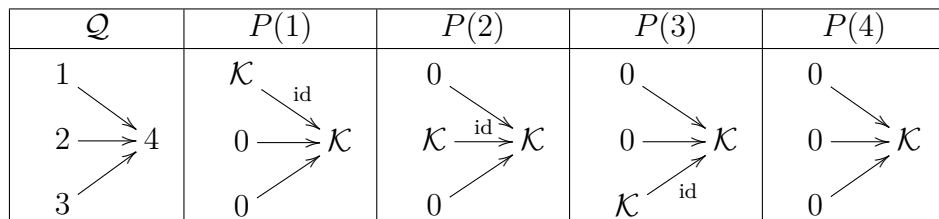
Poznamenejme, že tyto projektivní reprezentace příslušné vrcholu jsou i projektivní ve smyslu projektivního objektu, ale netvoří kompletní výčet. Projektivitu ukážeme na konci této kapitoly.

Příklad. Popíšeme projektivní reprezentaci příslušnou vrcholu 1 toulce C z tabulky 1.1, respektive jeho reprezentanta třídy isomorfismu. Rozbor lze vidět v tabulce 1.2.



Tabulka 1.2: Příklad na projektivní reprezentace příslušné vrcholu

Příklad. Rozebereme projektivní reprezentace příslušné vrcholu toulce A z tabulky 1.1 pro $n = 3$, tedy problém tří podprostorů. Nevyznačená zobrazení jsou nulová zobrazení. Všimněme si, že $P(4) \cong S(4)$.



Tabulka 1.3: Projektivní reprezentace příslušné vrcholu u problému tří podprostorů

Lemma 1.13. *Nechť \mathcal{Q} je toulec a $X = (X_j, f_\alpha)$ jeho reprezentace. Pak zobrazení*

$$\begin{aligned} \gamma : \text{Hom}(P(i), X) &\rightarrow X_i, \\ (\phi_k)_{k \in Q_0} &\mapsto \phi_i(\varepsilon_i) \end{aligned}$$

je isomorfismus vektorových prostorů.

Důkaz. Mějme $\phi = (\phi_k)_{k \in Q_0} \in \text{Hom}(P(i), X)$, $j \in Q_0$ a cestu $c \in Q(i, j)$, $c = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ pro šípky $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in Q_1$ (všechny takové cesty tvoří bázi $P(i)_j$). Z definice projektivní reprezentace a příslušných morfismů je dokonce

$$c = \varphi_{\alpha_n} \dots \varphi_{\alpha_1}(\varepsilon_i),$$

kde ε_i značí cestu délky 0 příslušnou vrcholu i . Protože ϕ je homomorfismus, tak diagram na obrázku 1.2 komutuje.

$$\begin{array}{ccccccc} P(i)_i & \xrightarrow{\varphi_{\alpha_1}} & P(i)_{t(\alpha_1)} & \xrightarrow{\varphi_{\alpha_2}} & \dots & \xrightarrow{\varphi_{\alpha_n}} & P(i)_j \\ \phi_i \downarrow & & \phi_{t(\alpha_1)} \downarrow & & & & \phi_j \downarrow \\ X_i & \xrightarrow{f_{\alpha_1}} & X_{t(\alpha_1)} & \xrightarrow{f_{\alpha_2}} & \dots & \xrightarrow{f_{\alpha_n}} & X_j \end{array}$$

Obrázek 1.2: Komutativní diagram u projektivních reprezentací příslušných vrcholu

Proto

$$\phi_j(c) = \phi_j(\varphi_{\alpha_n} \dots \varphi_{\alpha_1}(\varepsilon_i)) = f_{\alpha_n} \dots f_{\alpha_1}(\phi_i(\varepsilon_i)).$$

Tedy ϕ je jednoznačně určeno hodnotou $\phi_i(\varepsilon_i)$, a proto zobrazení γ ze znění věty je prosté. Navíc je to homomorfismus vektorových prostorů, neboť ϕ_i je homomorfismus.

Zbývá, že je i na. Mějme tedy $x \in X_i$. Definujme homomorfismus $\xi : P(i) \rightarrow X$ následovně: Pro $k \in Q_0$ a bázový prvek $\hat{c} \in Q(i, k)$, $\hat{c} = (\beta_1, \dots, \beta_m)$ obrátíme argument jako výše a definujme na prvcích báze

$$\begin{aligned} \xi_k : P(i)_k &\rightarrow X_k \\ \hat{c} &\mapsto f_{\beta_m} \dots f_{\beta_1}(x) \end{aligned}$$

homomorfismy vektorových prostorů. Navíc vidíme, že $x = \xi_i(\varepsilon_i)$. Zbývá ukázat, že $\xi = (\xi_k)_{k \in Q_0}$ je dokonce homomorfismus reprezentací, tedy že pro $\alpha' \in Q_1$, $\alpha' : a \rightarrow b$ je $f_{\alpha'}\xi_a = \xi_b\varphi_{\alpha'}$. To ale plyne přímo z definice daných zobrazení, neboť opět je-li $d \in Q(i, a)$, $d = (\beta'_1, \dots, \beta'_{m'})$, tak

$$\xi_b(\varphi_{\alpha'}(d)) = \xi_b((\beta'_1, \dots, \beta'_{m'}) * \alpha') = f_{\alpha'} f_{\beta'_{m'}} \dots f_{\beta'_1}(x) = f_{\alpha'}(\xi_a(d)).$$

Tedy $\xi \in \text{Hom}(P(i), X)$. Jelikož $x = \gamma(\xi)$, tak γ je i na. Jedná se tedy o isomorfismus. \square

Toto lemma má několik důsledků.

Důsledek 1.14. *Reprezentace $P(i)$, $i \in Q_0$ jsou po dvou neisomorfní.*

Důkaz. Důsledek předchozího lemmatu 1.13: Necht' pro spor $P(i) \cong P(j)$ pro $i \neq j$. Pak

$$\mathrm{Hom}(P(i), S(i)) \cong S(i)_i = \mathcal{K}, \quad \mathrm{Hom}(P(j), S(i)) \cong S(i)_j = 0.$$

Nicméně protože $P(i) \cong P(j)$, tak $\mathrm{Hom}(P(i), S(i)) \cong \mathrm{Hom}(P(j), S(i))$, tedy $\mathcal{K} \cong 0$, spor. \square

Důsledek 1.15. *Necht' X, Y jsou reprezentace \mathcal{Q} , i vrchol, $h : X \rightarrow Y$ epimorfismus a $f \in \mathrm{Hom}(P(i), Y)$. Pak existuje $f' \in \mathrm{Hom}(P(i), X)$ tak, že $hf' = f$. Tedy $P(i)$ je projektivní objekt.*

Situace je znázorněná na obrázku 1.3.

$$\begin{array}{ccc} P(i) & \xrightarrow{\exists f'} & X \\ & \searrow f & \downarrow h \\ & & Y \end{array}$$

Obrázek 1.3: Projektivní objekt

Důkaz. Dle lemma 1.13 je $\mathrm{Hom}(P(i), Y) \cong Y_i$ a navíc f je jednoznačně určeno hodnotou $f_i(\varepsilon_i) \in Y_i$. Protože h je na, tak speciálně h_i je na, a proto existuje $x_{\varepsilon_i} \in X_i$ tak, že $h_i(x_{\varepsilon_i}) = f_i(\varepsilon_i)$. Analogicky $\mathrm{Hom}(P(i), X) \cong X_i$ a opět z lemma 1.13 také pro každé $x \in X_i$ existuje jednoznačně určený homomorfismus $f' \in \mathrm{Hom}(P(i), X)$ tak, že $f'_i(\varepsilon_i) = x_{\varepsilon_i}$. Protože $hf' \in \mathrm{Hom}(P(i), Y)$ a

$$(hf')_i(\varepsilon_i) = h_i(f'_i(\varepsilon_i)) = h_i(x_{\varepsilon_i}) = f_i(\varepsilon_i),$$

tak z jednoznačnosti dostáváme, že $hf' = f$. \square

Důsledek 1.16. *Necht' \mathcal{Q} je konečný toulec bez cyklů. Pak jsou projektivní reprezentace příslušné vrcholu konečně dimenzionální a pro každé $i \in Q_0$ je*

$$\mathrm{End}(P(i)) \cong \mathcal{K}.$$

Důkaz. Protože toulec je konečný a bez cyklů, tak do každého vrcholu $j \in Q_0$ vede z vrcholu i pouze konečně mnoho cest, tedy i příslušný vektorový prostor má konečnou dimenzi. Navíc pro $i \in Q_0$ je dle definice $P(i)_i \cong \mathcal{K}$, neboť jediná cesta z vrcholu do sebe sama je cesta délky nula (z acykličnosti). Z lemma 1.13 pak dostáváme

$$\mathrm{End}(P(i)) = \mathrm{Hom}(P(i), P(i)) \cong P(i)_i \cong \mathcal{K}. \quad \square$$

Důsledek 1.17. *Pro toulec bez cyklů jsou projektivní reprezentace příslušné vrcholu nerozložitelné.*

Důkaz. Okamžitý důsledek tvrzení 1.8 a důsledku 1.16, neboť těleso je lokálním okruhem. \square

2. Klasifikace reprezentací

V této kapitole se budeme zabývat klasifikací konečně dimenzionálních reprezentací některých toulců. Ukážeme si klasifikaci toulců, které mají za podkladový graf tzv. Dynkinův graf. Uvidíme, že třídy isomorfismu těchto reprezentací souvisí s kořeny nějaké kvadratické formy. Proto se zpočátku budeme zabývat obecnými grafy a kvadratickými formami, abychom poté navázali reflexemi a reflexními funktory, které spolu souvisí, což nám poté onu klasifikaci umožní. Sekce o grafech a formách je převážně podle (Assem a kol., 2006, str. 252-278), (Krause, 2010, kap. 3,4) a (Ringel, 2006, kap. 1). Zbylé sekce o klasifikaci reprezentací pomocí reflexních funktorů jsou podle (Krause, 2010, kap. 5) a (Bernstein a kol., 1973).

2.1 Grafy a formy

V této sekci zavedeme bilineární a kvadratickou formu pro graf, kterou poté použijeme při klasifikaci nerozložitelných reprezentací nějakých toulců. Jak dále v této kapitole uvidíme, tak v některých případech budou dimenzní vektory nerozložitelných reprezentací toulce odpovídat kořenům kvadratické formy příslušné podkladovému grafu tohoto toulce.

Poznamenejme, že smyčkou v grafu rozumíme hranu z vrcholu do sebe sama. Navíc grafem budeme rozumět multigraf.

Definice 2.1. Nechť $G = (V, E)$ je neorientovaný graf s konečně mnoha vrcholy $\{1, \dots, n\}$ bez smyček. Ten nám indukuje symetrickou bilineární formu

$$(-, -)_G : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$$

danou maticí $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$, kde

$$a_{ij} = \begin{cases} -d_{ij} & i \neq j, \\ 2 & i = j, \end{cases}$$

kde d_{ij} označuje počet hran mezi vrcholy i a j .

Dále definujeme příslušnou kvadratickou formu grafu $\chi(G)$ ve tvaru:

$$\chi(G)(x) := \sum_{i=1}^n x_i^2 - \sum_{i < j} d_{ij} x_i x_j = \frac{1}{2}(x, x)$$

pro vektor $x = (x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{Z}^n$.

- Radikál $\chi(G)$ definujeme jako

$$\text{rad } \chi(G) := \{x \in \mathbb{Z}^n \mid (x, -) = 0\}.$$

- Kořenem kvadratické formy $\chi(G)$ rozumíme $x \in \mathbb{Z}^n$ takové, že $\chi(G)(x) = 1$.
- Vektor $x \in \mathbb{Z}^n$ je nazýván věrný, pokud $x_i \neq 0$ po všechny i .

Poznámka.

- Pokud je G zřejmý z kontextu, budeme $\chi(G)$ zkracovat na χ .
- Pozitivní definitnost a semidefinitnost chápeme klasicky ve smyslu kvadratických forem.
- Na \mathbb{Z}^n uvažujeme přirozené uspořádání $x \leq y \stackrel{def.}{\iff} x_i \leq y_i \quad \forall i = 1, \dots, n$.
- Z lineární algebry víme, že pro symetrickou bilineární formu f a její indukovanou kv. formu $g : g(x) = f(x, x)$ platí, že $f(x, y) = \frac{1}{2}(g(x + y) - g(x) - g(y))$. Detaily jsou nahlédnutelné v (Barto a Tůma, Tvrzení 11.18., str. 452). V našem případě přímo dostáváme, že

$$(x, y) = \chi(G)(x + y) - \chi(G)(x) - \chi(G)(y).$$

- Pro toulec \mathcal{Q} budeme $\chi(\mathcal{Q})$ značit kvadratickou formu $\chi(G)$, kde G je podkladový graf \mathcal{Q} .
- V (Krause, 2010) se za kořen uvažují takové nenulové vektory x , pro které $\chi(x) \leq 1$. My ale budeme pracovat s definicí jako v (Assem a kol., 2006) nebo (Ringel, 2006). Kořeny budeme studovat především u pozitivně definitních kvadratických forem, a proto tyto dvě definice budou v těchto případech ekvivalentní.

Dále v textu se budeme zabývat jen konečnými grafy bez smyček na alespoň jednom vrcholu. Navíc budeme v textu předpokládat, že graf na n vrcholech má množinu vrcholů $V = \{1, \dots, n\}$.

Lemma 2.2. *Nechť kvadratická forma $\chi(G)$ souvislého grafu $G = (V, E)$ má radikálový vektor y takový, že $y > 0$. Pak dokonce y je věrný, χ je pozitivně semidefinitní a navíc následující podmínky jsou ekvivalentní:*

1. $\chi(x) = 0$,
2. $x \in \mathbb{Q}y$,
3. $x \in \text{rad } \chi(G)$.

Důkaz. Pro graf na jednom vrcholu je bilineární forma $(a_1, b_1) = 2a_1b_1$, tedy jediným radikálovým vektorem je $y = 0$, který ale nesplňuje $y > 0$. Tedy aby byly splněny předpoklady lemmatu, musí mít graf alespoň dva vrcholy.

Nejprve si všimněme, že z toho, že y je v radikálu, dokonce plyne, že pro každé j máme

$$0 = (y, e_j) = 2y_j - \sum_{i \neq j} d_{ji}y_i$$

a tedy

$$y_j = \frac{1}{2} \left(\sum_{i \neq j} d_{ji}y_i \right). \quad (2.1)$$

Nyní pro spor předpokládejme, že y není věrný. Nechť i_1, \dots, i_p označuje kompletní výčet vrcholů, u nichž $y_{i_\ell} = 0$. Ze souvislosti G a nenulovosti y existuje nějaký vrchol k tak, že $y_k \neq 0$ a že je spojen s nějakým vrcholem z výčtu výše (jinak bychom měli alespoň dvě komponenty souvislosti), tento vrchol z i_1, \dots, i_p označme pro jednoduchost m , tedy $d_{mk} > 0$. Protože $y_m = 0$, tak (2.1) dává, že $0 = \sum_{i \neq m} d_{mi}y_i$. Každý sumand na pravé straně je kvůli $y_i \geq 0$ a $d_{mi} \geq 0$

nezáporný, nutně tedy každý vrchol v spojený s m má $y_v = 0$. Tedy i pro vrchol k je $y_k = 0$, což je spor.

Positivní semidefinitnost χ vyplývá z následujících úprav:

$$\begin{aligned}
\chi(x) &= \sum_{i=1}^n x_i^2 - \sum_{i<j} d_{ij} x_i x_j = \sum_{i=1}^n \frac{y_i}{y_i} x_i^2 - \sum_{i<j} d_{ij} x_i x_j \\
&\stackrel{(2.1)}{=} \sum_{i=1}^n \frac{\sum_{j \neq i} d_{ij} y_j}{2y_i} x_i^2 - \sum_{i<j} d_{ij} x_i x_j = \sum_{i \neq j} \frac{d_{ij} y_j}{2y_i} x_i^2 - \sum_{i<j} d_{ij} x_i x_j \\
&= \sum_{i<j} \frac{d_{ij} y_j}{2y_i} x_i^2 + \sum_{i<j} \frac{d_{ji} y_i}{2y_j} x_j^2 - \sum_{i<j} d_{ij} x_i x_j \\
&\stackrel{d_{ij}=d_{ji}}{=} \sum_{i<j} \frac{d_{ij} y_j}{2y_i} x_i^2 + \sum_{i<j} \frac{d_{ij} y_i}{2y_j} x_j^2 - \sum_{i<j} d_{ij} x_i x_j \\
&= \sum_{i<j} d_{ij} \frac{y_i y_j}{2} \left(\frac{x_i}{y_i} - \frac{x_j}{y_j} \right)^2 \geq 0.
\end{aligned}$$

Z posledního řádku dokonce vidíme, že (1) $\chi(x) = 0$ implikuje $\frac{x_i}{y_i} = \frac{x_j}{y_j}$ pro vrcholy, které jsou spojené. Protože G byl souvislý, tak je nutně tento poměr $\frac{x_i}{y_i}$ stejný pro všechny vrcholy v G . Označme tedy $q := \frac{x_i}{y_i}$ pro libovolný vrchol i . Pak pro každý vrchol $w \in V$ je $x_w = qy_w$, což nám dává $x = qy$, tedy $x \in \mathbb{Q}y$ (2).

Část (2) \Rightarrow (3) plyne z bilinearity formy a část (3) \Rightarrow (1) plyne přímo z definice $\chi(G)$. \square

Lemma 2.3. *Nechť G je graf na vrcholech $V = \{1, \dots, n\}$ a G' je jeho indukovaný podgraf na n' vrcholech $V' \subset V$ a mějme po řadě odpovídající kvadratické formy χ, χ' a pro $z' \in \mathbb{Z}^{n'}$ uvažujme vektor \hat{z} vzniklý přirozeným vnořením x' do podprostoru $\{y \in \mathbb{Z}^n \mid y_j = 0 \text{ pro } j \in V \setminus V'\}$. Pak*

$$\chi'(x') = \chi(\hat{x}) \quad \forall x' \in \mathbb{Z}^{n'}.$$

Důkaz. Všimněme si, že členy obsahující složky odpovídající vrcholům v G' se nezmění. Navíc ale každá složka tvaru x_v^2 nebo $-d_{i,v} x_i x_v$, kde $v \in V \setminus V'$ je též nulová, protože $x_v = 0$. Žádné další složky se v $\chi(\hat{x})$ neobjevují. Tím je lemma dokázáno. \square

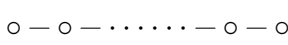
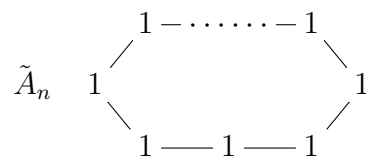
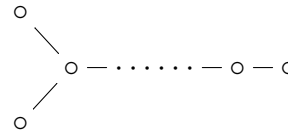
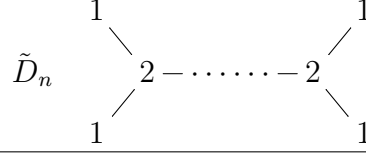
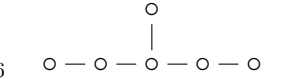
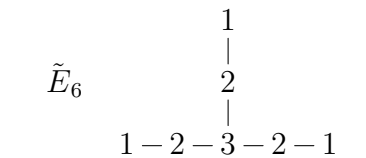
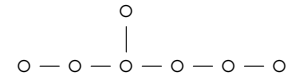
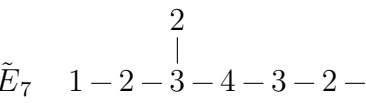
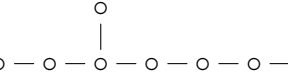
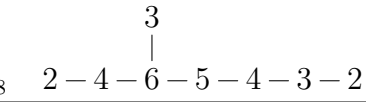
Definice 2.4. Dynkinovými a Eulkeidovskými diagramy rozumíme grafy typů v tabulce 2.1, kde n je u Dynkinových počet vrcholů, zatímco Eukleidovské mají $n+1$ vrcholů. U Eukleidovských grafů definujeme navíc vektor δ , jehož hodnotami jsme nahradili vrcholy, které přísluší dané složce vektoru. Pro A_n, \tilde{A}_n uvažujeme $n \geq 1$ a pro D_n, \tilde{D}_n uvažujeme $n \geq 4$.

Lemma 2.5. *Nechť G je Eukleidovský graf. Pak příslušný vektor δ je radikálový vektor, tedy $(\delta, -) = 0$.*

Důkaz. Ukážeme, že $(\delta, e_i) = 0$ pro každé i , což díky bilinearitě stačí. Pišme $\delta = \sum_{i=1}^n \delta_i e_i$ a označme A množinu všech vrcholů G , jež jsou s vrcholem i spojeny jednou hranou (z definice vidíme, že jsou spojeny nejvýše jednou hranou). Pak

$$(\delta, e_i) = \sum_{j \neq i} \delta_j (e_j, e_i) + \delta_i (e_i, e_i) = \sum_{j \neq i} \delta_j (-d_{ij}) + \delta_i \cdot 2 = 2\delta_i - \sum_{j \in A} \delta_j.$$

Tento vztah nám tedy říká, že pro každý vrchol i stačí zkontrolovat, že dvojnásobek hodnoty δ_i má být roven součtu hodnot vektoru δ v sousedních vrcholech. To je ale z definice vektoru δ přímo zřejmé. \square

Dynkinovy	Eukleidovské
A_n 	\tilde{A}_n 
D_n 	\tilde{D}_n 
E_6 	\tilde{E}_6 
E_7 	\tilde{E}_7 
E_8 	\tilde{E}_8 

Tabulka 2.1: Tabulka Dynkinových a Eukleidovských grafů

Lemma 2.6. *Nechť G je souvislý graf. Pokud G není Dynkinův, pak obsahuje Eukleidovský graf jako podgraf.*

Důkaz. Podrobnosti důkazu lze nalézt v (Assem a kol., 2006, 2.1. Lemma, str. 253). Tam je důkaz proveden pro podkladový graf toulce \mathcal{Q} , který navíc nemá obsahovat cykly. Tato podmínka ale není omezující na podkladový graf, který již cyklus obsahovat může. Pak totiž obsahuje \tilde{A}_n jako podgraf pro nějaké $n \geq 1$. \square

Věta 2.7. *Nechť G je souvislý graf. Pak*

- $\chi(G)$ je pozitivně definitní $\iff G$ je Dynkinův.
- $\chi(G)$ je pozitivně semidefinitní, ale ne pozitivně definitní $\iff G$ je Eukleidovský. Platí-li alespoň jedna (a pak i druhá) strana implikace, pak existuje radikálový vektor $\delta > 0$ tak, že $\text{rad } \chi(G) = \mathbb{Z}\delta$.

Důkaz. Všimněme si, že každý Dynkinův diagram lze získat z odpovídajícího Eukleidovského odebráním jednoho vrcholu. Toho využijeme v druhé části důkazu. Nejprve začneme následující implikací:

(2) \Leftarrow Protože vektor δ pro G je z lemma 2.5 radikálový, tak z lemma 2.2 dostáváme, že celý radikál je $\mathbb{Z}\delta$, neboť všechny vektory mají mít celočíselné složky. Ale vždy alespoň jedna složka vektoru δ má člen roven 1, a proto $\mathbb{Q}\delta \cap \mathbb{Z}^n$ bude roven jen celočíselným násobkům našeho vektoru. (jinak bychom v té složce dostali neceločíselný člen). Navíc podle stejného lemmatu dostáváme, že χ je pozitivně semidefinitní. Navíc díky onomu radikálovému vektoru vidíme, že ani není pozitivně definitní.

Pokračujme další implikací

(1) \Leftarrow Jak jsme již zmínili, tak každý Dynkinův diagram získáme z odpovídajícího Eukleidovského tak, že odebereme jeden vrchol. Mějme tedy konkrétní Dynkinův graf G na n vrcholech a odpovídající Eukleidovský diagram \hat{G} na $n+1$ vrcholech a bez újmy na obecnosti předpokládejme, že G získáme z \hat{G} odebráním vrcholu $n+1$. Z lemma 2.3 a pozitivní semidefinitnosti $\tilde{\chi}$ dostáváme i pozitivní semidefinitnost χ . Navíc kdyby $\chi(x) = 0$, pak i $\tilde{\chi}(\hat{x}) = 0$, kde pro vnoření používáme stejné značení jako ve zmiňovaném lemmatu. Nicméně opět dle lemmatu 2.2 víme, jak vypadají vektory, které vynulují $\tilde{\chi}$ - je to samotný radikál rad $\tilde{\chi} = \mathbb{Z}\delta$. Ten ale díky tomu, že δ je věrný, obsahuje jen jediný vektor, který má nějakou složku nulovou, a to nulový vektor. Proto je

$$\chi(x) = 0 \Rightarrow \tilde{\chi}(\hat{x}) = 0 \Rightarrow \hat{x} = 0 \Rightarrow x = 0,$$

tedy χ je pozitivně definitní.

Implikace (1) \Rightarrow a (2) \Rightarrow ukážeme tak, že dokážeme, že pokud G není ani Dynkinův, ani Eukleidovský, pak odpovídající forma není pozitivně semidefinitní. Mějme tedy takový graf G . Ten ale z lemma 2.6 jako dokonce vlastní podgraf nutně musí obsahovat nějaký Eukleidovský graf $\hat{G} = (\hat{V}, \hat{E})$. Připomeňme, že příslušný radikálový vektor δ je věrný a $\delta > 0$.

- Pokud $V = \hat{V}$, tak \hat{G} vzniknul pouze odebráním nějaké hrany, tedy existuje dvojice $i, j \in V$ tak, že $d_{ij} > \hat{d}_{ij}$ (\hat{d}_{ij} značí počet hran spojujících vrcholy i, j v grafu \hat{G}). Stačí vzít vektor δ příslušný \hat{G} . Pak

$$0 = \hat{\chi}(\hat{G})(\delta) = \sum_{i=1}^n \delta_i^2 - \sum_{i < j} \hat{d}_{ij} \delta_i \delta_j > \sum_{i=1}^n \delta_i^2 - \sum_{i < j} d_{ij} \delta_i \delta_j = \chi(G)(\delta).$$

- Naopak pokud $\hat{V} \subsetneq V$, tak ze souvislosti G existuje vrchol $i \in V \setminus \hat{V}$, který je spojen s nějakým vrcholem $w \in \hat{V}$. Vezměme vektor y , jež bude mít ve složkách odpovídajících vrcholům z \hat{G} složky příslušného radikálového vektoru δ pro \hat{G} a jinde nuly, tedy $y = \sum_{k \in \hat{G}} \delta_k e_k$. Položme $x := 2y + e_i$. Pak totiž dle vztahu z poznámky pod definicí 2.1 kvadratické formy grafu máme

$$\chi(G)(x) = \chi(G)(2y + e_i) = \chi(G)(2y) + \chi(G)(e_i) + (2y, e_i).$$

Využijeme opět lemma 2.3. Z toho $\chi(G)(2y) = 0$. Navíc lze snadno vidět, že $\chi(e_i) = 1$. Dále

$$(2y, e_i) = \sum_{k \in \hat{V}} 2\delta_k (e_k, e_i).$$

Každý sumand je menší nebo roven nule díky $\delta_k > 0$ a $(e_k, e_i) \leq 0$, neboť $k \neq i$ pro všechny $k \in \hat{V}$. Tudíž

$$(2y, e_i) = \sum_{k \in \hat{V}} 2\delta_k (e_k, e_i) \leq 2\delta_w (e_w, e_i) \stackrel{\delta_w \geq 1}{\leq} 2(e_w, e_i) \leq -2.$$

Pomocí celé diskuze výše dostáváme, že

$$\begin{aligned} \chi(G)(x) &= \chi(G)(2y + e_i) = \chi(G)(2y) + \chi(G)(e_i) + (2y, e_i) \\ &= 0 + 1 + (2y, e_i) \leq 1 - 2 = -1 < 0. \end{aligned} \quad \square$$

Lemma 2.8. *Nechť G je Dynkinův nebo Eukleidovský. Pak každý kořen je pozitivní, nebo negativní.*

Důkaz. Nechť x je kořen $\chi(G)(x)$. Rozložme $x = x^+ - x^-$ na kladnou a zápornou část. Opět podle vztahu z poznámky za definicí 2.1 dostaneme, že

$$1 = \chi(G)(x^+ - x^-) = \chi(G)(x^+) + \chi(G)(x^-) + (x^+, -x^-), \quad (2.2)$$

kde navíc využíváme, že $\chi(G)(z) = \chi(G)(-z)$ pro všechny $z \in \mathbb{Z}^n$. Protože x^+ a x^- mají disjunktní nosiče (indexy, kde daný vektor je nenulový), tak nutně podle definice 2.1 je $(x^+, -x^-) \geq 0$. Proto z (2.2) dostaneme, že

$$1 = \chi(x) \geq \chi(G)(x^+) + \chi(G)(x^-) \geq 0. \quad (2.3)$$

Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že G byl Eukleidovský, v případě Dynkinova totiž stačí vzít příslušný Eukleidovský a pracovat s jeho kvadratickou formou díky lemma 2.3. Nyní jelikož u Eukleidovského grafu známe jeho radikálový vektor, tak lze použít lemma 2.2.

Protože $\chi(G)$ je zobrazení nejen do \mathbb{Z} , ale z pozitivní semidefinitnosti do \mathbb{N}_0 , tak dostáváme, že BÚNO $\chi(G)(x^+) = 0$. Z lemma 2.2 části 2. a $x^+ \geq 0$ je buď $x^+ \in \mathbb{Q}^+\delta$, nebo $x^+ = 0$. Pokud platí první, tak máme, že všechny složky x jsou kladné, tedy $x > 0$. Pokud platí druhé, pak žádná ze složek x nebyla kladná, a tedy $x \leq 0$ a z nenulovosti x (jinak by to nebyl kořen) máme tedy $x < 0$. \square

Lemma 2.9. *Nechť kvadratická forma χ nějakého grafu je pozitivně definitní. Pak χ má jen konečně mnoho kořenů.*

Důkaz. Rozšířme přirozeně χ na \mathbb{R}^n . Ukážeme, že je pozitivně definitní na celém \mathbb{R}^n . Pro $x \in \mathbb{Q}^n$, $x = \frac{p}{q}$, $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$, $p \neq 0$ je $\chi(\frac{p}{q}) = \frac{1}{q^2}\chi(p) > 0$. Navíc díky spojitosti χ dostáváme, že

$$\chi(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n. \quad (2.4)$$

Mějme matici A bilineární formy $(-, -)$. Připomeňme, že $2\chi(x) = (x, x) = x^T Ax$. Jelikož A je symetrická reálná matice, tak můžeme využít spektrální větu pro symetrické matice z (Barto a Tůma, Důsledek 10.16., str. 422). Z té dostáváme rozklad $A = Q^T BQ$, kde Q je ortogonální matice (matice, jejíž vektory tvoří ortonormální posloupnost) a B je diagonální matice $B = \text{diag}(d_1, \dots, d_n)$. Protože již víme, že A je pozitivně semidefinitní (díky (2.4)), tak proto všechny $d_i \geq 0$. Kdyby ale pro spor nějaké $d_j = 0$, tak by $\det(B) = 0$. Tedy i $\det(A) = 0$. To ale nelze, nad \mathbb{Q} , tak je její determinant samozřejmě totožný. To by znamenalo, že A je nad \mathbb{Q} singulární, tedy existoval by vektor $0 \neq v \in \mathbb{Q}^n$ takový, že $Av = 0$, speciálně $\chi(v) = \frac{1}{2}(v^T Av) = 0$. To ale nelze, proto je A pozitivně definitní i nad \mathbb{R} , tedy $d_i > 0$ pro každé i .

Protože $\chi(x) = \frac{1}{2}(-, -)$, tak stačí ukázat, že existuje jen konečně mnoho vektorů x takových, že $x^T Ax = 2$. Navíc máme

$$x^T Ax = x^T Q^T BQx = (Qx)^T B(Qx).$$

Dále necht $z = (z_1, \dots, z_n)^T$ je vektor takový, že $z^T Bz = 2$. Pak

$$2 = z^T Bz = \begin{pmatrix} z_1 & z_2 & \dots & z_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & d_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n d_i z_i^2.$$

Protože $d_1, \dots, d_n > 0$, tak pro každé i máme odhad

$$2 = \sum_{i=1}^n d_i z_i^2 \geq d_i z_i^2 \Rightarrow |z_i| \leq \sqrt{\frac{2}{d_i}}.$$

Proto i

$$\|z\|^2 = \sum_{i=1}^n z_i^2 = \sum_{i=1}^n |z_i|^2 \leq \sum_{i=1}^n \frac{2}{d_i} \Rightarrow \|z\| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n \frac{2}{d_i}} =: D,$$

speciálně norma každého takového z je omezená pevnou konstantou D nezávislou na z . Protože Q je ortogonální matice, tak zachovává normu. Mějme tedy $x \in \mathbb{Z}^n$ tak, že $x^T A x = 2$. Pak $(Qx)^T B Qx = 2$, a proto z diskuze výše je $\|x\| = \|Qx\| \leq D$. Existuje ale jen konečně mnoho celočíselných vektorů x s takovou normou, protože například $|x_i| \leq \|x\| \leq D$. Tím je důkaz dokončen. \square

Dokonce platí následující tvrzení o počtu kladných kořenů Dynkinových diagramů.

Tvrzení 2.10. *Nechť G je Dynkinův graf na n vrcholech a $\chi(G)$ je jeho kvadratická forma.*

- Je-li $G = A_n$, pak $\chi(G)$ má $\frac{1}{2}n(n-1)$ kladných kořenů.
- Je-li $G = D_n$, pak $\chi(G)$ má $n(n-1)$ kladných kořenů.
- Je-li $G = E_6$, pak $\chi(G)$ má 36 kladných kořenů.
- Je-li $G = E_7$, pak $\chi(G)$ má 63 kladných kořenů.
- Je-li $G = E_8$, pak $\chi(G)$ má 120 kladných kořenů.

Důkaz. Rozbor lze najít v (Bourbaki, 2002, str. 217-229). \square

2.2 Reflexe

V této sekci představíme reflexní transformace v \mathbb{Z}^n a reflexní funktory mezi kategoriemi reprezentací.

2.2.1 Reflexní transformace

Definice 2.11. Pro graf $G = (V, E)$ a vrchol i definujeme reflexi podle vrcholu i jako

$$\sigma_i(x) = x - (x, e_i)e_i.$$

Poznámka. Vidíme, že tato reflexe upravuje pouze i -tou složku vektoru x , zbylé složky zůstávají neměnné. Lépe řečeno u vektoru x pouze od i -té složky odčítá hodnotu naší symetrické formy na vektorech x a e_i . Kdybychom definiční obor $\chi(G)$ přirozeně rozšířili na \mathbb{R}^n , pak by

$$(x, e_i) = \frac{\partial}{\partial x_i} \chi(G)(x), \text{ neboť } (x, e_i) = 2x_i - \sum_{j \neq i} d_{ij} x_j.$$

Lemma 2.12. *Reflexe σ_i je automorfismus řádu 2, který zachovává bilineární formu $(-, -)$. Tedy*

$$(x, y) = (\sigma_i(x), \sigma_i(y)) \quad \forall x, y \in \mathbb{Z}^n.$$

Důkaz. Linearita plyne z bilinearitě formy $(-, -)$. Navíc mějme $x, y \in \mathbb{Z}^n$. Pak díky symetrii a bilinearitě $(-, -)$ máme

$$\begin{aligned} (\sigma_i(x), \sigma_i(y)) &= (x - (x, e_i)e_i, y - (y, e_i)e_i) \\ &= (x, y) - (x, (y, e_i)e_i) - ((x, e_i)e_i, y) + ((x, e_i)e_i, (y, e_i)e_i) \\ &= (x, y) - (x, e_i)(y, e_i) - (x, e_i)(y, e_i) + (x, e_i)(y, e_i)(e_i, e_i) \\ &= (x, y) - 2(x, e_i)(y, e_i) + 2(x, e_i)(y, e_i) = (x, y). \end{aligned}$$

Díky tomu

$$\begin{aligned} \sigma_i^2(x) &= \sigma_i(x - (x, e_i)e_i) = \sigma_i(x) - (x, e_i)\sigma_i(e_i) \\ &= x - (x, e_i)e_i - (x, e_i)(-e_i) = x. \end{aligned}$$

□

Důsledek 2.13. *Reflexe σ_i zobrazuje kořeny $\chi(G)$ na kořeny $\chi(G)$.*

Důkaz. Protože σ_i podle předchozího lemma 2.12 zachovává bilineární formu, tak i kvadratickou formu $\chi(G)$, tedy i kořen zobrazí na kořen. □

Navíc má-li $\chi(G)$ jen konečně mnoho kořenů, pak je σ_i permutací na množině kořenů, neboť je to automorfismus.

Lemma 2.14. *Nechť G je Dynkinův nebo Eukleidovský graf a x jeho pozitivní kořen. Pokud $\sigma_i(x)$ není pozitivní, pak $x = e_i$.*

Důkaz. Podle lemma 2.13 je $\sigma_i(x)$ kořen a podle lemma 2.8 je dokonce $\sigma_i(x) < 0$. Protože tato reflexe mění jen i -tou složku vektoru, tak nutně $x_j = 0$, $j \neq i$. Tudíž $x = c \cdot e_i$, $c \in \mathbb{N}$. Tedy

$$1 = \chi(G)(c \cdot e_i) = c^2 \chi(G)(e_i) = c^2.$$

Proto $c = 1$ a $x = e_i$. □

2.2.2 Reflexní funktory

V této podsekci se dostaneme k definici reflexních funktorů mezi kategoriemi reprezentací a pak ukážeme jejich důležité vlastnosti. Nejprve si ale zadefinujeme zdroj, stok a přípustné pořadí vrcholů v \mathcal{Q} , což se nám bude dále hodit.

Definice 2.15. Vrchol v \mathcal{Q} nazýváme zdroj, pokud do něj nevede žádná hrana, naopak stok, pokud z něj nevede žádná hrana. Toulcem $\sigma_i \mathcal{Q}$ míníme toulce, ve kterém obrátíme všechny hrany vcházející i vycházející do a z vrcholu i . Pořadí všech vrcholů i_1, \dots, i_n , nazýváme přípustné, pokud je pro všechny j vrchol i_j stok v $\sigma_{i_{j-1}} \dots \sigma_{i_1} \mathcal{Q}$.

Máme-li takové přípustné pořadí i_1, \dots, i_n , pak zřejmě $\sigma_{i_n} \dots \sigma_{i_1} \mathcal{Q} = \mathcal{Q}$. Uvědomme si, že máme-li toulec, který nemá žádné orientované cykly, tak u něj existuje přípustné pořadí vrcholů i_1, \dots, i_n . Indukcí: pro $|Q_0| = 1$ je to snadné. Dále pro $|Q_0| = n$: Jelikož nemáme orientované cykly, tak můžeme vzít nejdelší cestu v \mathcal{Q} , $c_1 \rightarrow \dots \rightarrow c_k$. Protože tato cesta je nejdelší, tak do c_1 již nevede žádná hrana, a tak po odebrání tohoto vrcholu a jemu příslušících hran dostáváme toulec na $|Q_0| - 1$ vrcholech a zde existuje podle indukčního předpokladu přípustné seřazení vrcholů i_1, \dots, i_{n-1} . Pak ale vrchol c_1 je v $\sigma_{i_{n-1}} \dots \sigma_{i_1} \mathcal{Q}$ stok, neboť v původním toulci vedly jen hrany z něj, ale ty byly všechny obráceny, a tak tedy vedou jen hrany do něj. Přidáním c_1 na konec pořadí dostáváme požadované pořadí.

Všimněme si, že tvrzení výše je dokonce ekvivalence, acykličnost je totiž i nutnou podmínkou.

Tímto jsme dokázali následující lemma.

Lemma 2.16. *V toulci \mathcal{Q} existuje přípustné pořadí vrcholů právě tehdy, když je bez cyklů.*

Nyní si již dostáváme k definici reflexních funktorů.

Definice 2.17. Necht \mathcal{Q} je toulec bez smyček.

- Pro vrchol $i \in Q_0$, který je stokem, definujeme funktor

$$S_i^+ : \text{Rep}(\mathcal{Q}, \mathcal{K}) \rightarrow \text{Rep}(\sigma_i \mathcal{Q}, \mathcal{K})$$

následovně: Označíme-li $Y := S_i^+ X$, pak $Y_j := X_j$ pro $j \neq i$. A nyní pro vrchol i vezmeme všechny hrany $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ do něj vedoucí a mějme zobrazení

$$\xi = (X_{\alpha_1}, \dots, X_{\alpha_k}) : \bigoplus_{\ell=1}^k X_{s(\alpha_\ell)} \rightarrow X_i.$$

Pak definujeme $Y_i := \text{Ker}(\xi)$. Označme $\hat{\xi}$ vnoření

$$\text{Ker}(\xi) \xrightarrow{\hat{\xi}} \bigoplus_{\ell=1}^k X_{s(\alpha_\ell)}.$$

Dále pro hrany α , které nevedou do X_i , definujeme $Y_\alpha = X_\alpha$. Nyní X_i byl stok, a tedy v $\sigma_i \mathcal{Q}$ je odpovídající vrchol zdroj a tedy pro hrany $\alpha'_1, \dots, \alpha'_k$ (což jsou opačné hrany k příslušným α_ℓ) definujeme

$$Y_{\alpha'_\ell} : Y_i \rightarrow Y_{t(\alpha'_\ell)} = X_{t(\alpha'_\ell)} = X_{s(\alpha_\ell)}$$

jako $Y_{\alpha'_\ell} = p_\ell \hat{\xi}$, kde p_ℓ je příslušná projekce

$$p_\ell : \bigoplus_{l=1}^k X_{s(\alpha_l)} \rightarrow X_{s(\alpha_\ell)}.$$

Morfismus $\phi : X \rightarrow X'$ tento funktor přeneseme na $S_i^+(\phi) = \psi$, kde $(\psi)_j = (\phi)_j$, $j \neq i$ a $\phi_i : Y_i \rightarrow Y'_i$ definujeme pouze jako restrikcí zobrazení

$$(\phi_{s(\alpha_1)} \oplus \dots \oplus \phi_{s(\alpha_k)}) : \bigoplus_{\ell=1}^k X_{s(\alpha_\ell)} \rightarrow \bigoplus_{\ell=1}^k X'_{s(\alpha_\ell)}$$

na $Y_i = \text{Ker}(\xi) \leq \bigoplus_{\ell=1}^k X_{s(\alpha_\ell)}$.

- Je-li naopak vrchol i zdroj, pak je definice funktoru

$$S_i^- : \text{Rep}(\mathcal{Q}, \mathcal{K}) \rightarrow \text{Rep}(\sigma_i \mathcal{Q}, \mathcal{K})$$

duální. Označme $Y = S_i^- X$. Na vrcholech $j \neq i$ opět položíme $Y_j = X_j$. Nyní mějme opět $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ kompletní výčet hran vycházejících z vrcholu i . Pak Y_i položíme jako kojádru zobrazení

$$\zeta = \left(X_{\alpha_1}, \dots, X_{\alpha_k} \right)^T : X_i \rightarrow \bigoplus_{\ell=1}^k X_{t(\alpha_\ell)}.$$

Položme $\hat{\zeta} : \bigoplus_{\ell=1}^k X_{t(\alpha_\ell)} \rightarrow Y_i = (\bigoplus_{\ell=1}^k X_{t(\alpha_\ell)}) / \text{Im}(\zeta)$ kanonickou projekci na kojádru ζ . Dále opět pro hrany α , které nezačínají v i , ponecháme $Y_\alpha := X_\alpha$ a naopak pro hrany vedoucí z X_i máme opět v $\sigma_i \mathcal{Q}$ odpovídající opačné hrany $\alpha'_1, \dots, \alpha'_k$ vcházející do vrcholu i . Zde definujeme $Y_{\alpha'_\ell}$ jakožto restrikcí $\hat{\zeta}$ na $Y_{s(\alpha'_\ell)} = X_{t(\alpha_\ell)}$.

Morfismus $\phi : X \rightarrow X'$ tento funktor přeneseme na $S_i^-(\phi) = \psi$, kde opět $(\psi)_j = (\phi)_j$, $j \neq i$ a $\psi_i : Y_i \rightarrow Y'_i$ definujeme pouze jako zobrazení indukované zobrazením

$$(\phi_{t(\alpha_1)} \oplus \dots \oplus \phi_{t(\alpha_k)}) : \bigoplus_{\ell=1}^k X_{t(\alpha_\ell)} \rightarrow \bigoplus_{\ell=1}^k X'_{t(\alpha_\ell)}$$

na faktorů těchto dvou vektorových prostorů, tedy na kojádrech ζ, ζ' .

Poznámka. S_i^\pm jsou opravdu funktory.

Mějme i stok a X reprezentaci. Poté, v reprezentaci $S_i^+(X)$ ve vrcholu i máme $\text{Ker}(\xi)$ jako v definici výše. Poté v $Z := S_i^-(S_i^+(X))$ dostáváme ve vrcholu i $(X_{s(\alpha_1)} \oplus \dots \oplus X_{s(\alpha_k)}) / (\text{Im}(\zeta))$. Jelikož ale $\text{Im}(\zeta) \cong \text{Ker}(\xi)$, tak z první věty o isomorfismu dostáváme, že

$$Z_i = (X_{s(\alpha_1)} \oplus \dots \oplus X_{s(\alpha_k)}) / (\text{Im}(\zeta)) \cong (X_{s(\alpha_1)} \oplus \dots \oplus X_{s(\alpha_k)}) / (\text{Ker}(\xi)) \cong \text{Im}(\xi).$$

Protože $\text{Im}(\xi) \leq X_i$, tak máme přirozené vnoření $\iota_i : Z_i \hookrightarrow X_i$.

Podobně máme-li i zdroj a X reprezentaci, tak ve vrcholu i v $S_i^-(X)$ máme $\text{Coker}(\zeta)$ jako v definici výše. Poté v $Z = S_i^+(S_i^-(X))$ je ve vrcholu i jádro $\text{Ker}(\xi)$, kde ξ je přirozená projekce

$$\xi : (X_{t(\alpha_1)} \oplus \dots \oplus X_{t(\alpha_k)}) \twoheadrightarrow (X_{t(\alpha_1)} \oplus \dots \oplus X_{t(\alpha_k)}) / (\text{Im}(\zeta)).$$

Tedy

$$Z_i = \text{Ker}(\xi) \cong \text{Im}(\zeta) \xleftarrow{\zeta} X_i.$$

Proto máme přirozený epimorfismus $\rho_i : X_i \twoheadrightarrow Z_i$

Tato dvě zobrazení motivují následující definici.

Definice 2.18. Necht \mathcal{Q} je toulec bez smyček a X jeho reprezentace.

- Je-li vrchol i stok, pak definujeme vnoření

$$\nu_i(X) : S_i^- S_i^+ X \hookrightarrow X$$

následovně: $(\nu_i(X))_j := \text{id}_{X_j}$ pro $j \neq i$ a $(\nu_i(X))_i := \iota_i$, kde ι_i je jako před touto definicí výše.

- Je-li vrchol i zdroj, pak definujeme projekci

$$\pi_i(X) : X \rightarrow S_i^+ S_i^- X$$

následovně: $(\pi_i(X))_j := \text{id}_{X_j}$ pro $j \neq i$ a $(\pi_i(X))_i := \rho_i$, kde ρ_i je jako před touto definicí výše.

Poznámka. Zobrazení $\nu_i(X)$ i $\pi_i(X)$ jsou opravdu homomorfismy reprezentací.

Lemma 2.19. *Nechť X, X' jsou reprezentace \mathcal{Q} a i je vrchol. Pak, pokud jsou příslušné funktory definovány, platí:*

1. $S_i^\pm(X \oplus X') = S_i^\pm X \oplus S_i^\pm X'$.
2. $X \cong (S_i^- S_i^+ X) \oplus \text{Coker } \nu_i(X)$ a $X \cong (S_i^+ S_i^- X) \oplus \text{Ker } \pi_i(X)$.
3. Pokud $\text{Coker } \nu_i(X) = 0$, pak $\dim(S_i^+ X) = \sigma_i(\dim(X))$.
4. Pokud $\text{Ker } \pi_i(X) = 0$, pak $\dim(S_i^- X) = \sigma_i(\dim(X))$.

Důkaz. Část 1.

Přímo z definice $S_i^\pm(X \oplus X')_j = S_i^\pm(X)_j \oplus S_i^\pm(X')_j$. Stejně tak i pro homomorfismy reprezentací $\phi, \psi : X \rightarrow X'$ je $S_i^\pm(\phi + \psi) = S_i^\pm(\phi) + S_i^\pm(\psi)$.

Část 2.

Dokážeme nejprve první část. Zaměříme se jen na i -tý vektorový prostor, v ostatních vektorových prostorech pro vrchol $j \neq i$ je $(S_i^- S_i^+ X)_j = X_j$ a $(\text{Coker } \nu_i(X))_j = 0$. Z definice vyplývá, že

$$(\text{Coker } \nu_i(X))_i \cong X_i / \text{Im}(\xi) = \text{Coker } \xi$$

pro ξ jako v definici 2.17 reflexních funktorů. Máme tedy krátkou exaktní posloupnost

$$0 \rightarrow \text{Im}(\xi) \hookrightarrow X_i \twoheadrightarrow X_i / (\text{Im}(\xi)) \rightarrow 0.$$

Protože jsou tato zobrazení mezi vektorovými prostory, tak k projekci $\phi : X_i \twoheadrightarrow \text{Coker } \xi$ existuje pravý inverz $\hat{\phi} : \text{Coker } \xi \rightarrow X_i$, který je zároveň (prostým) homomorfismem, tak z lemma 1.5 je

$$X_i = \text{Ker}(\phi) \oplus \text{Im}(\hat{\phi}) \cong \text{Im}(\xi) \oplus \text{Coker}(\xi) \cong (S_i^- S_i^+ X)_i \oplus (\text{Coker } \nu_i(X))_i,$$

protože $\text{Im}(\hat{\phi}) \cong \text{Coker}(\xi) / \text{Ker}(\hat{\phi}) \cong \text{Coker}(\xi)$ a protože $(S_i^- S_i^+ X)_i \cong \text{Im}(\xi)$.

Analogicky by se ukázala i druhá část s pomocí krátké exaktní posloupnosti

$$0 \rightarrow \text{Ker}(\zeta) \hookrightarrow X_i \twoheadrightarrow \text{Im}(\zeta) \rightarrow 0,$$

kde ζ je opět jako v definici 2.17.

Část 3.

Protože reflexe i reflexní funktor mění jen i -tou složku, resp. vektorový prostor ve vrcholu i , tak stačí ověřit jen dimenzi v i -tém vrcholu. Připomeňme, že $\sigma_i(\dim(X)) = \dim(X) - (\dim(X), e_i) \cdot e_i$. Označme $A \subset Q_0$ takové vrcholy, pro které existuje šipka do i . Tedy v i -té složce máme

$$\begin{aligned} (\sigma_i(\dim(X)))_i &= \dim(X_i) + \sum_{j \in A} d_{ij}(\dim(X_j)) - 2 \dim(X_i) = \\ &= \sum_{\substack{\alpha \in Q_1 \\ t(\alpha)=i}} \dim(X_{s(\alpha)}) - \dim(X_i). \end{aligned} \tag{2.5}$$

Naopak protože $\text{Coker}(\nu_i(X)) = 0$, tak nutně při značení jako v definici reflexních funktorů je $\text{Im}(\xi) = X_i$. Označme $Y_i := (S_i^+ X)_i$. Můžeme použít větu o dimenzi jádra a obrazu z (Barto a Tůma, Věta 6.31, str. 236). Z té

$$\begin{aligned} \dim\left(\bigoplus_{\substack{\alpha \in Q_1 \\ t(\alpha)=i}} X_{s(\alpha)}\right) &= \dim(\text{Ker}(\xi)) + \dim(\text{Im}(\xi)) = \dim(Y_i) + \dim(X_i) \\ \implies \dim(Y_i) &= \dim\left(\bigoplus_{\substack{\alpha \in Q_1 \\ t(\alpha)=i}} X_{s(\alpha)}\right) - \dim(X_i) = \sum_{\substack{\alpha \in Q_1 \\ t(\alpha)=i}} \dim(X_{s(\alpha)}) - \dim(X_i). \end{aligned}$$

Tedy společně s (2.5) je $\sigma_i(\dim(X)) = \dim(S_i^+ X)$.

Část 4.

Analogicky jako část 3. □

Z tohoto lemmatu plyne již následující důležité tvrzení.

Tvrzení 2.20. *Nechť X je nerozložitelná reprezentace \mathcal{Q} a mějme vrchol i .*

<i>Je-li i stok, pak následující podmínky jsou ekvivalentní:</i>	<i>Je-li i zdroj, pak následující podmínky jsou ekvivalentní:</i>
---	--

- | | |
|--|--|
| <ol style="list-style-type: none"> 1. $X \not\cong S(i)$, 2. $S_i^+ X \not\cong 0$, 3. $S_i^- S_i^+ X \cong X$, 4. $\dim(S_i^+ X) = \sigma_i(\dim(X))$, 5. $\sigma_i(\dim(X)) > 0$, 6. $S_i^+ X$ je nerozložitelná. | <ol style="list-style-type: none"> 1. $X \not\cong S(i)$, 2. $S_i^- X \not\cong 0$, 3. $S_i^+ S_i^- X \cong X$, 4. $\dim(S_i^- X) = \sigma_i(\dim(X))$, 5. $\sigma_i(\dim(X)) > 0$, 6. $S_i^- X$ je nerozložitelná. |
|--|--|

Důkaz. Dokážeme jen ekvivalenci podmínek pro i stok. Podobně by se dokázala část pro i zdroj.

1. \iff 2. Zřejmé. (\Leftarrow) Je-li $X \cong S(i)$, pak zřejmě $S_i^+(X) \cong 0$.

(\Rightarrow) Pokud naopak $X \not\cong S(i)$, pak z nerozložitelnosti musí být nějaké $X_j \neq 0$ pro $j \neq i$. Protože S_i^+ vektorový prostor v tomto vrcholu nezmění, tak $S_i^+(X) \not\cong 0$.

1., 2. \iff 3. (\Rightarrow) Z předchozího lemma 2.19 a nerozložitelnosti X dostáváme, že $X \cong S_i^+ S_i^- X$, nebo $X \cong \text{Coker } \nu_i(X)$. Kdyby pro spor $X \cong \text{Coker } \nu_i(X)$, tak by ale bylo X direktní sumou kopií $S(i)$, protože $\text{Coker } \nu_i(X)$ má vektorové prostory ve vrcholech kromě i nulové. Z nerozložitelnosti by bylo $X \cong S(i)$, spor.

(\Leftarrow) Kdyby $S_i^+ X \cong 0$, pak by i $S_i^- S_i^+ X \cong 0$, což by byl spor s 3.

1. – 3. \iff 4. Implikace (\Rightarrow) plyne z části 3. v lemma 2.19. (\Leftarrow) Naopak pokud $X \cong S(i)$, pak $\sigma_i(\dim(X)) = -e_i \neq 0 = \dim(S_i^+(X))$.

1. – 4. \iff 5. Implikace (\Rightarrow) plyne z 2. a 4. (\Leftarrow) Naopak opět kdyby $X \cong S(i)$, pak $\sigma_i(\dim(X)) = -e_i < 0$.

1. – 5. \iff 6. Pro (\Rightarrow) označme $Y = S_i^+(X)$, $Y = (Y_i, Y_\alpha)$ a $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ všechny šipky v $\sigma_i \mathcal{Q}$ vedoucí z Y_i . Pokud by Y byla rozložitelná (z 2. nemůže být nulová), tedy $Y = Z_1 \oplus Z_2 \oplus \dots \oplus Z_m$, Z_i , $i = 1, 2, \dots, m$ nerozložitelné (tento rozklad máme z Krullov-Schmidtovy věty 1.10), pak bychom z předpokladu 3. a části 1. z lemma 2.19 měli, že

$$X \cong S_i^-(S_i^+(X)) = S_i^-(Z_1 \oplus Z_2 \oplus \dots \oplus Z_m) = S_i^-(Z_1) \oplus S_i^-(Z_2) \oplus \dots \oplus S_i^-(Z_m).$$

Z nerozložitelnosti X dostáváme, že pouze jeden člen v direktním součtu je nulový, bez újmy na obecnosti předpokládejme, že $S_i^-(Z_1) \neq 0$ a $S_i^-(Z_j) = 0$, $j = 2, \dots, m$. Z verze pro funktor S_i^- dostáváme, že $Z_2, \dots, Z_m \cong S(i)$, kde $S(i)$ je jednoduchá reprezentace toulce $\sigma_i \mathcal{Q}$. To by znamenalo, že některé nenulové prvky z $Y_i = (Z_1)_i \oplus \dots \oplus (Z_m)_i$ se v zobrazení

$$(Y_{\alpha_1}, \dots, Y_{\alpha_k})^T : Y_i \rightarrow \bigoplus_{j=1}^k Y_{t(\alpha_j)}$$

zobrazí na nulu, tedy zobrazení není prosté. Nicméně toto zobrazení je podle definice přímo vnoření jádra zobrazení

$$\xi = (X_{\alpha_1}, \dots, X_{\alpha_k}) : \bigoplus_{j=1}^k X_{s(\alpha_j)} \rightarrow X_i,$$

které je prosté, spor.

Konečně implikace (\Leftarrow) plyne z toho, že $S_i^+(S(i)) = 0$, tedy v tomto případě by nebyla nerozložitelná. \square

2.3 Coxeterovy transformace a funktory

O toulci \mathcal{Q} říkáme, že je Dynkinův, resp. Eukleidovský, pokud má příslušný graf jako podkladový.

Definice 2.21 (Coxeterova transformace). Necht \mathcal{Q} je acyklický toulec a necht i_1, \dots, i_n je příslušné přípustné pořadí vrcholů. Pak definujeme Coxeterovu transformaci

$$\begin{aligned} c : \mathbb{Z}^n &\rightarrow \mathbb{Z}^n, \\ x &\mapsto \sigma_{i_n} \cdots \sigma_{i_1}(x), \end{aligned}$$

kde σ_j značí reflexi příslušnou vrcholu j v podkladovém grafu \mathcal{Q} .

Poznámka. Coxeterova transformace nezávisí na volbě přípustného pořadí vrcholů, detaily lze nalézt v (Krause, 2010, str. 15). Navíc se jedná o automorfismus, neboť je to složení automorfismů.

Lemma 2.22. *Necht \mathcal{Q} je acyklický toulec. Pak $c(x) = x \iff x \in \text{rad } \chi$.*

Důkaz. Jelikož každá transformace v c mění vždy jen i -tou složku, tak proto

$$\begin{aligned} c(x) = x &\iff \sigma_i(x)_i = x_i \quad \forall i \iff x_i - (x, e_i) = x_i \quad \forall i \\ &\iff (x, e_i) = 0 \quad \forall i \iff (x, -) = 0, \end{aligned}$$

kde poslední ekvivalence plyne z bilinearity. \square

Lemma 2.23. *Je-li \mathcal{Q} Dynkinův toulec a $x \in \mathbb{Z}^n$, pak existuje $r \geq 0$ tak, že $c^r(x) \not\geq 0$, tedy není kladný (tj. existuje $i \in \{1, \dots, n\}$ tak, že $c^r(x)_i < 0$, nebo $c^r(x) = 0$).*

Důkaz. Je-li $x = 0$, pak tvrzení zřejmě platí. Naopak mějme index i takový, že $x_i \neq 0$. Protože $\chi(\mathcal{Q})$ má dle lemma 2.9 jen konečně mnoho kořenů, pak c je permutace na těchto kořenech. Tudíž jistě existuje $h > 0$ tak, že c^h je identita na těchto kořenech (při rozkladu na nezávislé cykly vezmeme h jako nejmenší společný násobek délek cyklů). Protože ale i kanonické bázové vektory \mathbb{Z}^n jsou kořeny, pak je c^h z linearity i identita na celém prostoru. Podívejme se na vektor

$$y = \sum_{j=0}^{h-1} c^j(x).$$

Díky $c^h = \text{id}$ máme, že $c(y) = y$. Tedy dle předchozího lemma 2.22 je $y = 0$, neboť z pozitivní definitnosti je $\text{rad } \chi = \{0\}$. Nutně tedy pro nějaké $r \in \{1, \dots, h-1\}$ je $c^r(x)_i < 0$, protože v sumě je i $c^0(x) = x$. \square

Definice 2.24 (Coxeterovy funkory). Necht \mathcal{Q} je acyklický toulce a i_1, \dots, i_n přípustné pořadí vrcholů. Pak definujeme Coxeterovy funkory

$$\begin{aligned} C^+ : \text{Rep}(\mathcal{Q}, \mathcal{K}) &\rightarrow \text{Rep}(\mathcal{Q}, \mathcal{K}), & C^- : \text{Rep}(\mathcal{Q}, \mathcal{K}) &\rightarrow \text{Rep}(\mathcal{Q}, \mathcal{K}), \\ X &\mapsto S_{i_n}^+ \dots S_{i_1}^+(X), & X &\mapsto S_{i_1}^- \dots S_{i_n}^-(X). \end{aligned}$$

Poznámka. Coxeterovy funkory nezávisí na zvoleném přípustném pořadí vrcholů. Podrobnosti lze nalézt v (Krause, 2010, str. 11).

Definice 2.25. Necht X je nerozložitelná reprezentace acyklického toulce \mathcal{Q} . Pak o X říkáme, že je preprojektivní, pokud $X \cong (C^-)^r(P(i))$ pro nějaké $r \geq 0$ a nějaký vrchol i .

Lemma 2.26 (Vztah transformací, funktorů a nerozložitelnosti). Necht \mathcal{Q} je acyklický toulce, X jeho nerozložitelná reprezentace a i_1, \dots, i_n přípustné pořadí vrcholů. Pak pro každé $m = 1, \dots, n$ je

1. $\sigma_{i_m} \cdots \sigma_{i_1}(\dim(X)) > 0 \iff S_{i_m}^+ \dots S_{i_1}^+(X)$ je nerozložitelná.
2. $\sigma_{i_m} \cdots \sigma_{i_1}(\dim(X)) > 0 \iff S_{i_1}^- \dots S_{i_m}^-(X)$ je nerozložitelná.

Důkaz. Ukážeme jen 1. část, druhá je analogická. Označme $x = \dim(X)$.

\implies Indukcí podle m :

$m = 1$: To je přímo tvrzení 2.20.

$m > 1$ Označme $y = \sigma_{i_m} \cdots \sigma_{i_1}(x)$. Protože σ_m mění jen m -tou složku a protože předchozími reflexemi m -tá složka nemohla být změněna, tak z toho, že x je dimenzní vektor, je

$$y' = (\sigma_{i_{m-1}} \cdots \sigma_{i_1}(x))_m \geq 0.$$

Navíc i z $y > 0$ nutně tedy i ostatní složky jsou větší nebo rovny nule. Dokonce $y' \neq 0$, protože jinak by y byl nulový vektor (reflexe jsou automorfismy). Tedy $y' > 0$ a z indukčního předpokladu tedy

$$S_{i_{m-1}}^+ \dots S_{i_1}^+(X)$$

je nerozložitelná. Nyní na ni můžeme aplikovat tvrzení 2.20 díky $y > 0$ a tím dostaneme požadovanou implikaci.

\Leftarrow Stačí ukázat, že

$$Y = S_{i_{m-1}}^+ \dots S_{i_1}^+(X)$$

je nerozložitelná. Poté lze aplikovat tvrzení 2.20. Tedy kdyby pro spor byla rozložitelná nebo nulová, tak vezmeme nejmenší takové k , že

$$Z = S_{i_k}^+ \dots S_{i_1}^+(X)$$

je rozložitelná nebo nulová. Tedy z tvrzení 2.20 dostáváme, že $Z = 0$. Pak by ale $Y = S_{i_{m-1}}^+ \dots S_{i_{k+1}}^+(Z) = 0$, spor. \square

Volbou $m = n$ v předchozím lemma dostáváme následující důsledek.

Důsledek 2.27. *Nechť \mathcal{Q} je acyklický toulcec, X jeho nerozložitelná reprezentace. Pak*

1. $c(\dim(X)) > 0 \iff C^+(X)$ je nerozložitelná.
2. $c^{-1}(\dim(X)) > 0 \iff C^-(X)$ je nerozložitelná.

2.4 Reprezentace Dynkinových toulců

V této sekci klasifikujeme nerozložitelné reprezentace Dynkinových toulců. Důkaz provedeme s pomocí reflexních funktorů jako v Krause (2010). Jiný důkaz lze najít v Ringel (2006, str. 83).

Věta 2.28 (Klasifikace reprezentací Dynkinových toulců). *Nechť \mathcal{Q} je Dynkinův toulcec s n vrcholy. Označme A množinu reprezentantů (vůči isomorfismu) nerozložitelných reprezentací \mathcal{Q} a B množinu kladných kořenů $\chi(\mathcal{Q})$. Pak zobrazení*

$$\begin{aligned} f : A &\rightarrow B, \\ [X] &\mapsto \dim(X) \end{aligned}$$

je dobře definovaná bijekce.

Důkaz. Mějme i_1, \dots, i_n přípustné pořadí vrcholů. Zřejmě máme-li $X, Y \in [X]$, pak $\dim(X) = \dim(Y)$. Dále ukážeme, že $\dim(X)$ je opravdu kořenem $\chi(\mathcal{Q})$ (z toho pak bude f dobře definované) a že zobrazení f je prosté.

Mějme $[X] \in A$ a označme $x := \dim(X)$. Podle lemma 2.23 existuje $\hat{r} \geq 0$ tak, že $c^{\hat{r}}(x)$ není kladný. Nechť r označuje takové nejmenší \hat{r} . Jelikož $\dim(X) > 0$, tak je i $r > 0$. Dále tedy existuje speciálně nejmenší takové $s \in \{1, \dots, n\}$, že

$$\sigma_{i_s} \sigma_{i_{s-1}} \dots \sigma_{i_1} c^{r-1}(x) \not\geq 0. \quad (2.6)$$

To stejné provedeme analogicky s reflexními funktory. Použijeme-li důsledek 2.27 $r - 1$ krát a poté lemma 2.26, tak dostaneme, díky minimalitě r a s , že

$$(S_{i_{s-1}}^+ \dots S_{i_1}^+)(C^+)^{r-1}(X)$$

je nerozložitelná a že

$$(S_{i_s}^+ S_{i_{s-1}}^+ \dots S_{i_1}^+)(C^+)^{r-1}(X)$$

není nerozložitelná. Proto opět z tvrzení 2.20 části 1. \iff 6. je

$$(S_{i_{s-1}}^+ \dots S_{i_1}^+)(C^+)^{r-1}(X) \cong \tilde{S}(i_s), \quad (2.7)$$

kde $\tilde{S}(i_s)$ značí jednoduchou reprezentaci toulce $\sigma_{i_{s-1}} \cdots \sigma_{i_1} \mathcal{Q}$. Protože reflexe jsou řádu dva, tak můžeme společně s minimalitou r a s a (2.6) induktivně použít tvrzení 2.20 na (2.7) část 5. \iff 3., abychom dostali, že

$$\begin{aligned} X &\cong (C^-)^{r-1} S_{i_1}^- \cdots S_{i_{s-1}}^- (S_{i_{s-1}}^+ \cdots S_{i_1}^+) (C^+)^{r-1} (X) \\ &\cong (C^-)^{r-1} S_{i_1}^- \cdots S_{i_{s-1}}^- (\tilde{S}(i_s)). \end{aligned} \quad (2.8)$$

Všimněme si, že dokonce každý funktor musel vytvořit nenulovou reprezentaci, tedy ze stejného tvrzení nerozložitelnou. Jelikož $\dim(\tilde{S}(i_s)) = e_{i_s}$, tak opakovaným použitím tvrzení 2.20 části 6. \iff 4. dostáváme, že

$$\dim(X) = c^{r-1} \sigma_{i_1} \cdots \sigma_{i_{s-1}} (e_{i_s}).$$

Protože kanonické vektory jsou zřejmě kořeny $\chi(\mathcal{Q})$, tak díky důsledku 2.13 je tedy i $\dim(X)$ kořenem $\chi(\mathcal{Q})$. Speciálně je pozitivní, neboť zřejmě $\dim(X) > 0$. Prostota zobrazení plyne přímo z isomorfního vyjádření X v (2.8), neboť $\dim(X) = \dim(Y)$ podle postupu výše implikuje, že

$$X \cong (C^-)^{r-1} S_{i_1}^- \cdots S_{i_{s-1}}^- (\tilde{S}(i_s)) \cong Y.$$

Z toho máme, že $[X] = [Y]$.

Nyní ukážeme, že každý kladný kořen $\chi(\mathcal{Q})$ odpovídá nějaké třídě isomorfismu nerozložitelných reprezentací, tedy že f je na, což důkaz dokončí. Necht $x \in B$ je kladný kořen. Jako výše mějme $r > 0$ nejmenší takové, že vektor $c^r(x)$ není kladný. A opět mějme $s \in \{1, \dots, n\}$ nejmenší takové, že

$$\sigma_{i_s} \cdots \sigma_{i_1} c^{r-1}(x) \not> 0.$$

Tedy

$$y = \sigma_{i_{s-1}} \cdots \sigma_{i_1} c^{r-1}(x) > 0 \quad \text{a} \quad \sigma_{i_s}(y) \not> 0$$

a na tento vektor y použijeme lemma 2.14 a dostaneme, že

$$\sigma_{i_{s-1}} \cdots \sigma_{i_1} c^{r-1}(x) = e_{i_s}. \quad (2.9)$$

Tvrdíme, že

$$X = (C^-)^{r-1} S_{i_1}^- \cdots S_{i_{s-1}}^- (\tilde{S}(i_s)),$$

kde $\tilde{S}(i_s)$ opět značí jednoduchou reprezentaci vrcholu i_s toulce $\sigma_{i_{s-1}} \cdots \sigma_{i_1} \mathcal{Q}$, má dimenzní vektor $\dim(X)$ rovný x . Využijeme toho, že reflexe mají řád dva. Tedy pro každé $1 \leq t \leq s-1$ je z rovnosti (2.9) a z minimality r a s

$$0 < \sigma_{i_t} \cdots \sigma_{i_1} c^{r-1}(x) = \sigma_{i_{t+1}} \cdots \sigma_{i_{s-1}} (e_{i_s})$$

a také pro každé $1 \leq t \leq n$ a $1 \leq p < r$ je

$$0 < \sigma_{i_t} \cdots \sigma_{i_1} c^{p-1}(x) = \sigma_{i_{t+1}} \cdots \sigma_{i_n} c^{-(r-p-1)} \sigma_{i_1} \cdots \sigma_{i_{s-1}} (e_{i_s}).$$

Tedy lze $r-1$ krát využít důsledek 2.27 a jednou lemma 2.26, abychom dostali, že X je nerozložitelná. Navíc analogicky induktivně s pomocí tvrzení 2.20 dostaneme, že

$$\dim(X) = c^{-r+1} \sigma_{i_1} \cdots \sigma_{i_{s-1}} (e_{i_s}) = x.$$

Z toho je tedy zobrazení f na. □

Důsledek 2.29. *Dynkinův toulec má jen konečně mnoho nerozložitelných tříd isomorfismu nerozložitelných reprezentací.*

Důkaz. Důsledek předchozí věty 2.28 a lemma 2.9. \square

Z důkazu věty 2.28 navíc vidíme, jaký tvar mají všechny nerozložitelné reprezentace Dynkinova toulce.

Důsledek 2.30. *Nechť \mathcal{Q} je Dynkinův toulec a i_1, \dots, i_n přípustné pořadí vrcholů. Nechť X je nerozložitelná reprezentace \mathcal{Q} . Pak existuje $s \in \{1, \dots, n\}$ a $r \geq 0$ takové, že*

$$X = (C^-)^{r-1} S_{i_1}^- \dots S_{i_{s-1}}^- (\tilde{S}(i_s)),$$

kde $\tilde{S}(i_s)$ je jednoduchá reprezentace vrcholu i_s toulce $\sigma_{i_{s-1}} \dots \sigma_{i_1} \mathcal{Q}$.

Důkaz. Důsledek plyne z důkazu věty 2.28, konkrétně z (2.8), protože X jsme v tom důkazu mohli volit libovolně. \square

Lemma 2.31. *Nechť \mathcal{Q} je acyklický toulec a i_1, \dots, i_n je jeho přípustné pořadí vrcholů. Pak pro každé $s \in \{1, \dots, n\}$ je*

1. $\dim(P(i_s)) = \sigma_{i_1} \dots \sigma_{i_{s-1}}(e_{i_s})$.
2. $P(i_s) \cong S_{i_1}^- \dots S_{i_{s-1}}^- (\tilde{S}(i_s))$, kde $\tilde{S}(i_s)$ je jednoduchá reprezentace vrcholu i_s toulce $\sigma_{i_{s-1}} \dots \sigma_{i_1} \mathcal{Q}$.

Důkaz. Část 1. Nejprve si všimněme, že pro $j > s$ je $P(i_s)_{i_j} = 0$. Kdyby totiž vedla cesta z i_s do i_j ve tvaru $(\alpha_1 \dots \alpha_m)$, pak by muselo existovat $\hat{u} \in \{1, \dots, m\}$ tak, že $s(\alpha_{\hat{u}}) \in \{i_1, \dots, i_s\}$. Nechť u označuje nejvyšší takové \hat{u} , tedy speciálně $t(\alpha_u) = i_a$ pro $a > s$. Navíc $s(\alpha_u) = i_b$ pro nějaké $b \in \{1, \dots, s\}$. Ale v \mathcal{Q} nemůže být šipka $i_b \rightarrow i_a$, pro spor předpokládejme, že v \mathcal{Q} tato šipka je. Pak, protože $a > s > b - 1$, by v $\sigma_{b-1} \dots \sigma_1 \mathcal{Q}$ tato šipka nebyla otočena, tedy by tu stále byla, což je spor s tím, že b byl v $\sigma_{b-1} \dots \sigma_1 \mathcal{Q}$ stok.

Nyní indukci ukážeme, že pro každé $0 \leq t < s$ je

$$\sigma_{i_{s-t}} \dots \sigma_{i_{s-1}}(e_{i_s}) = \sum_{j=0}^t |Q(i_s, i_{s-j})| \cdot e_{i_{s-j}}, \quad (2.10)$$

kde speciálně pro $t = 0$ rozumíme použití 0 reflexních transformací. Poté totiž pro $t = i - 1$ dostáváme, že

$$\sigma_{i_1} \dots \sigma_{i_{s-1}}(e_{i_s}) = \sum_{j=0}^{s-1} |Q(i_s, i_{s-j})| \cdot e_{i_{s-j}} = \dim(P(i_s)),$$

kde poslední rovnost je z diskuze výše a z definice $P(i_s)$.

Pro $t = 0$ je rovnost zřejmá, neboť \mathcal{Q} je acyklický.

$s > t > 0$: Využijeme indukčního předpokladu pro $t - 1$.

$$\begin{aligned} \sigma_{i_{s-t}} \sigma_{i_{s-(t-1)}} \dots \sigma_{i_{s-1}}(e_{i_s}) &= \sigma_{i_{s-t}} \left(\sum_{j=0}^{t-1} |Q(i_s, i_{s-j})| \cdot e_{i_{s-j}} \right) \\ &= \sum_{j=0}^{t-1} |Q(i_s, i_{s-j})| \cdot e_{i_{s-j}} - \sum_{j=0}^{t-1} |Q(i_s, i_{s-j})| (e_{i_{s-j}}, e_{i_{s-t}}) \cdot e_{i_{s-t}} \\ &= \sum_{j=0}^{t-1} |Q(i_s, i_{s-j})| \cdot e_{i_{s-j}} + \sum_{j=0}^{t-1} |Q(i_s, i_{s-j})| d_{i_{s-j}, i_{s-t}} \cdot e_{i_{s-t}}. \end{aligned}$$

Protože, jak jsme rozebrali výše, z i_s nemohou vést cesty do jiných vrcholů, jak do i_1, \dots, i_s , tak každá cesta z $Q(i_s, i_{s-t})$ vznikne prodloužením cesty z i_s do nějakého vrcholu z i_1, \dots, i_s , ze kterého vede šipka do i_{s-t} . Navíc protože i_{s-t} je stok v $\sigma_{i_{s-(t+1)}} \dots \sigma_{i_1} \mathcal{Q}$, tak do něj v \mathcal{Q} nemohly vést šipky z vrcholů $i_1, \dots, i_{s-(t+1)}$, naopak mezi i_{s-t} a $i_{s-(t-1)}, \dots, i_s$ mohou v \mathcal{Q} vést šipky jen do vrcholu i_{s-t} . Proto je pro každé $j = 0, \dots, t-1$ počet šipek $i_{s-j} \rightarrow i_{s-t}$ roven celému počtu hran $d_{i_{s-j}, i_{s-t}}$. Tudíž z celé diskuze je

$$|Q(i_s, i_{s-t})| = \sum_{j=0}^{t-1} |Q(i_s, i_{s-j})| d_{i_{s-j}, i_{s-t}}.$$

Proto (2.10) pro toto t platí, čímž je důkaz této části dokončen.

Část 2.

Dostáváme z první části, neboť pro každé $0 \leq t < i$ bylo speciálně

$$\sigma_{i_{s-t}} \dots \sigma_{i_{s-1}}(e_{i_s}) > 0$$

díky složce i_s , protože vždy $|Q(i_s, i_s)| = 1$. Díky tomu můžeme opakovaně použít tvrzení 2.20, abychom dostali

$$P(i_s) \cong S_{i_1}^- \dots S_{i_{s-1}}^-(\tilde{S}(i_s)). \quad \square$$

Důsledek 2.32. *Nechť \mathcal{Q} je Dynkinův toulec. Pak je každá nerozložitelná reprezentace preprojektivní, tedy ve tvaru $(C^-)^r(P(i))$ pro nějaký vrchol i a nějaké $r \geq 0$.*

Důkaz. Důsledek důsledku 2.30 a lemma 2.31. □

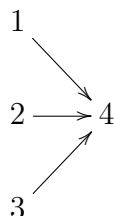
Níže uvádíme větu, kterou dokázal francouzský matematik Pierre Gabriel. My jsme výše v důsledku 2.29 ukázali pouze jednu implikaci. Důkaz druhé implikace neuvádíme, pomocí reflexních funktorů lze najít například v (Krause, 2010, Corollary 5.3.3 (Gabriel), str. 19), kde je důkaz podle (Bernstein a kol., 1973, Theorem 3.1, str. 28). Tuto větu společně s větou 2.28 P. Gabriel dokázal bez použití reflexních funktorů. Původní důkazy lze najít například v (Gabriel, 1972).

Věta 2.33 (Gabriel). *Nechť \mathcal{Q} je konečný souvislý toulec. Pak má konečně mnoho tříd isomorfismu nerozložitelných reprezentací právě tehdy, když je podkladový graf \mathcal{Q} Dynkinův.*

Poznamenejme pouze, že pro implikaci, kterou zde v tomto textu nedokazujeme, stačí ukázat, že každý toulec s Eukleidovským podkladovým grafem má nekonečně mnoho tříd isomorfismu nerozložitelných reprezentací. Pak pro toulec, který není Dynkinův, vezměme jeho podkladový graf. Ten má za podgraf nějaký Eukleidovský graf (lemma 2.6). Pak stačí vzít nerozložitelné reprezentace pro podtoulec odpovídající tomuto podgrafu a rozšířit nulovými vektorovými prostory a nulovými zobrazeními na reprezentace celého toulce. Tyto reprezentace budou navíc zřejmě také nerozložitelné. Proto i tento toulec bude mít nekonečně mnoho tříd isomorfismu nerozložitelných reprezentací.

2.5 Problém tří podprostorů

Konečně se vrátíme k problému tří podprostorů. Budeme tedy zkoumat reprezentace $\mathcal{Q} = (Q_0, Q_1)$, kde $Q_0 = \{1, 2, 3, 4\}$ a $Q_1 = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$, kde $\alpha_i : i \rightarrow 4$. Tento toulec je Dynkinův, přesněji řečeno má podkladový graf D_4 . Poznamenejme, že pro čtyři a více podprostorů dostáváme z věty 2.33, že tento toulec má právě nekonečně mnoho tříd isomorfismu nerozložitelných reprezentací. Pro čtyři podprostory máme totiž ještě podkladový graf Eukleidovský graf \tilde{D}_4 .



Obrázek 2.1: Problém tří podprostorů

Pro zjištění všech tříd isomorfismu nerozložitelných reprezentací bychom mohli spočítat kořeny příslušné kvadratické formy $\chi(D_4)$ a použít větu 2.28. Namísto toho využijeme důsledek 2.32. V příkladu na konci první kapitoly jsme v tabulce 1.3 ukázali všechny projektivní reprezentace příslušné vrcholu. Dle tohoto důsledku opakovanou aplikací Coxeterova funktoru C^- musíme dostat všechny nerozložitelné reprezentace (poznamenejme, že pro problém tří podprostorů s číslováním jako na obrázku 2.1 je 4,3,2,1 přípustné pořadí vrcholů). Dokonce díky lemma 2.26 stačí pro získání dimenzních vektorů zkoumat jen aplikaci c^{-1} , dokud stále dostáváme kladné vektory. Pak, díky tomu, že máme jen konečně mnoho tříd nerozložitelných reprezentací a všechny jsou preprojektivní, se tento postup někdy musí zastavit.

Aplikujeme inverzní Coxeterovu transformaci $c^{-1} = \sigma_4\sigma_3\sigma_2\sigma_1$ na příslušné vektory, dokud budeme dostávat kladné vektory.

- $\dim(P(1)) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad c^{-1}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad c^{-1}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$
- $\dim(P(2)) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad c^{-1}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad c^{-1}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$
- $\dim(P(3)) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad c^{-1}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad c^{-1}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$
- $\dim(P(4)) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad c^{-1}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad c^{-1}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$

Další aplikací inverzní Coxeterovy transformace bychom dostali záporný nebo nulový vektor, tedy odpovídající reprezentace by již byla nulová. Navíc i podle tvrzení 2.10 máme požadovaný počet.

i	$P(i) \cong$	$C^-(P(i)) \cong$	$(C^-)^2(P(i)) \cong$
1	$\begin{array}{c} \mathcal{K} \\ \searrow \\ 0 \rightarrow \mathcal{K} \\ \nearrow \\ 0 \end{array}$	$\begin{array}{c} 0 \\ \searrow \\ \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{K} \\ \nearrow \\ \mathcal{K} \end{array}$	$\begin{array}{c} \mathcal{K} \\ \searrow \\ 0 \rightarrow 0 \\ \nearrow \\ 0 \end{array}$
2	$\begin{array}{c} 0 \\ \searrow \\ \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{K} \\ \nearrow \\ 0 \end{array}$	$\begin{array}{c} \mathcal{K} \\ \searrow \\ 0 \rightarrow \mathcal{K} \\ \nearrow \\ \mathcal{K} \end{array}$	$\begin{array}{c} 0 \\ \searrow \\ \mathcal{K} \rightarrow 0 \\ \nearrow \\ 0 \end{array}$
3	$\begin{array}{c} 0 \\ \searrow \\ 0 \rightarrow \mathcal{K} \\ \nearrow \\ \mathcal{K} \end{array}$	$\begin{array}{c} \mathcal{K} \\ \searrow \\ \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{K} \\ \nearrow \\ 0 \end{array}$	$\begin{array}{c} 0 \\ \searrow \\ 0 \rightarrow 0 \\ \nearrow \\ \mathcal{K} \end{array}$
4	$\begin{array}{c} 0 \\ \searrow \\ 0 \rightarrow \mathcal{K} \\ \nearrow \\ 0 \end{array}$	$\begin{array}{c} \mathcal{K} \\ \searrow \\ \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{K}^2 \\ \nearrow \\ \mathcal{K} \end{array}$	$\begin{array}{c} \mathcal{K} \\ \searrow \\ \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{K} \\ \nearrow \\ \mathcal{K} \end{array}$

Tabulka 2.2: Nerozložitelné reprezentace problému tří podprostorů- dimenze

Pokud uvažujeme jen dimenze příslušných vektorových prostorů, tak tedy v tabulce 2.2 dostáváme výčet všech tříd isomorfismu nerozložitelných reprezentací.

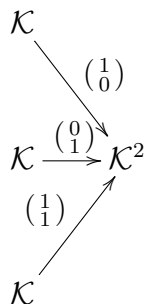
Zobrazení mezi $\mathcal{K} \rightarrow \mathcal{K}$ jsou identity, neboť máme-li takové zobrazení, tak zobrazuje prvek báze na nenulový (z nerozložitelnosti) prvek báze, a tak můžeme změnit bázi v koncovém nebo počátečním vektorovém prostoru a dostat isomorfní reprezentaci s identickým zobrazením. Zobrazení z nebo do nulového prostoru jsou nulová.

Jediný zajímavý případ nastává u $C^-(P(4))$, kterému se někdy říká problém tří přímků v rovině. Jelikož žádné ze zobrazení nemůže být nulové, tak obrazem je vždy jednodimenzionální podprostor. Tedy touto argumentací dostáváme vnoření tří jednodimenzionálních prostorů do prostoru dimenze 2.

Jak vypadají zobrazení v třídě isomorfismu této nerozložitelné reprezentace? Každá dvě zobrazení musejí být do různých dvou podprostorů- jinak bychom měli rozklad. Kdyby totiž například z vrcholu 1 nebo 2 byly zobrazení do stejného vektorového prostoru a z vrcholu 3 do jiného, tak by tato reprezentace byla isomorfní reprezentací (vhodnými změnami báze v počátečních i koncových vrcholech), kde $X_{\alpha_1} = X_{\alpha_2} = (1 \ 0)^T$ a $X_{\alpha_3} = (0 \ 1)^T$, tak dostáváme rozklad na $C^-(P(3)) \oplus P(3)$ (pro $X_{\alpha_3} = (1 \ 0)^T$ bychom dostali rozklad na $(C^-)^2(P(4)) \oplus S(4)$). Analogicky pro jiné kombinace.

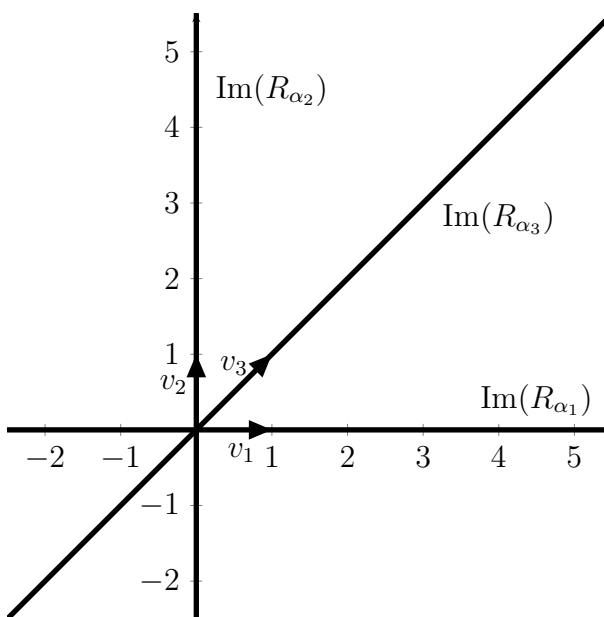
Tedy obecně nutně $X_{\alpha_1}(1) = v_1$, $X_{\alpha_2}(1) = v_2$, $X_{\alpha_3}(1) = v_3$, kde v_1, v_2, v_3 jsou po dvou lineárně nezávislé. Tedy $v_3 = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2$, kde $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathcal{K} \setminus \{0\}$. Vezmeme-li v_1, v_2 za báze vektory $X_4 = \mathcal{K}^2$, tak je tato reprezentace isomorfní reprezentací Y , kde $Y_i = X_i$ a $Y_{\alpha_i}(1) = e_i$, $i = 1, 2$ a $Y_{\alpha_3} = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2$. Dále můžeme ve vektorových prostorech X_1, X_2 změnit bázi z 1 na $\frac{1}{\lambda_1}$, resp. $\frac{1}{\lambda_2}$. Tím dostaneme,

že tato reprezentace je isomorfní reprezentaci Z , kde $Z_i = Y_i$ a $Z_{\alpha_i}(1) = \lambda_i e_i$, $i = 1, 2$ a $Z_{\alpha_3} = Y_{\alpha_3}$. Nyní můžeme změnou báze v Z_4 na $\lambda_1 e_1, \lambda_2 e_2$ docílit, že tato reprezentace bude konečně isomorfní reprezentaci R , kde $R_i = Z_i$ a $R_{\alpha_i}(1) = e_i$, $i = 1, 2$ a $R_{\alpha_3}(1) = e_1 + e_2$. Tedy dostáváme reprezentaci s příslušnými zobrazeními na obrázku 2.2.



Obrázek 2.2: Diagram problému tří přímek v rovině pro obecné komutativní těleso

Grafické znázornění pro $\mathcal{K} = \mathbb{R}$ máme na obrázku 2.3, kde $v_i = R_{\alpha_i}(1)$, $i = 1, 2, 3$.



Obrázek 2.3: Grafické znázornění problému tří přímek v rovině

3. Auslanderův-Reitenin toulec

3.1 Radikály

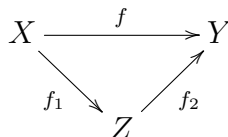
V této sekci se budeme zabývat radikály. Celou tuto sekci radikálů budeme uvažovat reprezentace toulce \mathcal{Q} nad \mathcal{K} . Nejprve si ale zdefinujme pojmy ohledně homomorfismů. Tato sekce byla zpracována především podle (Assem a kol., 2006, str. 98-101, 420-424). Proto budeme používat definici radikálu reprezentací jako v (Assem a kol., 2006), v (Krause, 2010) a (Auslander a kol., 2010) používají jinou, nicméně, jak se později ukáže, ekvivalentní.

Definice 3.1. Necht $f : X \rightarrow Y$ je homomorfismus reprezentací. Říkáme, že f je:

- sekce, pokud f má levý inverz, který je zároveň homomorfismem,
- retrakce, pokud f má naopak pravý inverz, který je zároveň homomorfismem.

Definice 3.2. Homomorfismus $f : X \rightarrow Y$ se nazývá ireducibilní, pokud

- f není ani sekce, ani retrakce
- a pokud $f = f_2 f_1$ pro nějakou reprezentaci Z a $f_1 : X \rightarrow Z$, $f_2 : Z \rightarrow Y$ homomorfismy, pak buď f_1 je sekce, nebo f_2 je retrakce.



Obrázek 3.1: Rozklad zobrazení

Poznámka. Je snadno vidět, že každé ireducibilní zobrazení $f : X \rightarrow Y$ je právě buď monomorfismus, nebo epimorfismus. Máme totiž rozklad $f = f_2 f_1$ v následující posloupnosti

$$X \xrightarrow{f_1} \text{Im} f \xrightarrow{f_2} Y.$$

- Pokud f není na, tak ani f_2 není na a tedy nemůže být ani retrakce, tudíž je f_1 sekce, nutně tedy prosté. f je pak složení dvou prostých zobrazení, tedy prosté.
- Naopak pokud není f prosté, pak opět z posloupnosti výše není f_1 prosté, tedy není ani sekce. A tedy f_2 je retrakce, speciálně na. A opět složení dvou zobrazení surjekcí je také surjekce.

Připomeňme definici a základní vlastnosti Jacobsonova radikálu okruhu. Detaily vlastností jsou nahlédnutelné v (Assem a kol., 2006, str. 4-5, 21-22).

Definice 3.3 (Jacobsonův radikál okruhu). Necht \mathbf{R} je okruh. Pak jeho Jacobsonovým radikálem $\text{rad}(\mathbf{R})$ rozumíme

$$\text{rad}(\mathbf{R}) = \{x \in \mathbf{R} \mid 1 - yx \text{ je invertibilní pro všechny } y \in \mathbf{R}\}.$$

Poznámka.

- Ekvivalentně $\text{rad}(\mathbf{R})$ je průnik všech maximálních pravých (nebo levých) ideálů.
- Radikál okruhu je dokonce oboustranný ideál.
- Je-li okruh lokální, pak je jeho Jacobsonův ideál roven unikátnímu maximálnímu pravému (levému) ideálu.

Nyní definujeme radikál dvou reprezentací.

Definice 3.4 (Radikál reprezentací). Necht X, Y jsou reprezentace toulce \mathcal{Q} . Pak definujeme jejich radikál

$$\text{rad}(X, Y) := \{f \in \text{Hom}(X, Y) \mid \text{id}_X - g \circ f \text{ je invertibilní } \forall g \in \text{Hom}(Y, X)\}.$$

Dále pro $n > 1$ definujeme

$$\text{rad}^n(X, Y) := \{f \in \text{Hom}(X, Y) \mid f = f_n \circ \dots \circ f_1, f_i \in \text{rad}(X_{i-1}, X_i)\}.$$

Poznámka. Zřejmě $\text{rad}(X, X) = \text{rad}(\text{End}(X))$, kde radikál napravo je Jacobsonův radikál okruhu.

Lemma 3.5. Necht X, Y, Z jsou reprezentace toulce \mathcal{Q} . Necht $n \in \mathbb{N}$, $f, f_1, f_2 \in \text{rad}^n(X, Y)$, $f' \in \text{Hom}(Y, Z)$ a $f'' \in \text{Hom}(Z, X)$. Pak

1. $f'f \in \text{rad}^n(X, Z)$,
2. $ff'' \in \text{rad}^n(Z, Y)$,
3. $f_1 + f_2 \in \text{rad}^n(X, Y)$,
4. $\text{rad}^{n+1}(X, Y) \subseteq \text{rad}^n(X, Y)$.

Důkaz. První tři body nejprve ukážeme pro $n = 1$.

Část 1., $n = 1$

Snadno plyne z asociativity skládání zobrazení, neboť pro $g \in \text{Hom}(Z, X)$ najdeme inverzní zobrazení pro $1 - (gf')f$.

Část 2., $n = 1$

Mějme $g \in \text{Hom}(Y, Z)$. Ukážeme, že $\text{id}_Z - gff''$ je invertibilní. Nejprve ale $f''g \in \text{Hom}(Y, X)$, tedy z definice radikálu máme inverz h pro $\text{id}_X - (f''g)f$, tedy

$$(\text{id}_X - (f''g)f)h = \text{id}_X = h(\text{id}_X - (f''g)f).$$

Nyní

$$\begin{aligned} (\text{id}_Z - gff'')(\text{id}_Z + gfhf'') &= \\ \text{id}_Z + gfhf'' - gff'' - gff''gfhf'' &= \\ \text{id}_Z + gf(h - \text{id}_X - f''gfh)f'' &= \\ \text{id}_Z + gf(-\text{id}_X + (\text{id}_X - f''gf)h)f'' &= \\ \text{id}_Z + gf(-\text{id}_X + \text{id}_X)f'' &= \text{id}_Z + 0 = \text{id}_Z. \end{aligned}$$

Analogicky by se ukázalo, že $\text{id}_Z + gfhf''$ je i levým inverzem k $\text{id}_Z - gff''$.

Část 3., $n = 1$

Nechť tedy $g \in \text{Hom}(Y, X)$. Ukážeme, že

$$y := \text{id}_X - g(f_1 + f_2) = \text{id}_X - gf_1 - gf_2$$

má inverz. Z toho, že f je v radikálu, tak pro $\text{id}_X - gf$ máme inverz u . Aplikujme toto zobrazení zleva na y .

$$u(\text{id}_X - gf_1 + gf_2) = u(\text{id}_X - gf_1) - ugf_2 = \text{id}_X - (ug)f_2$$

a opět tohle zobrazení má inverz u' . Takto dostáváme levý inverz pro y a to $u'u$.

Naopak aplikací u na y zprava dostáváme

$$(\text{id}_X - gf_1 + gf_2)u = (\text{id}_X - gf_1)u + gf_2u = \text{id}_X - (gf_2)u$$

Navíc díky části 2. je $f_2u \in \text{rad}(X, Y)$ a tedy $\text{id}_X - g(f_2u)$ má pravý inverz u'' . Tedy y má pravý inverz a to uu'' , celkově je tedy invertibilní.

Nechť nyní $n > 1$.

Část 1., $n > 1$

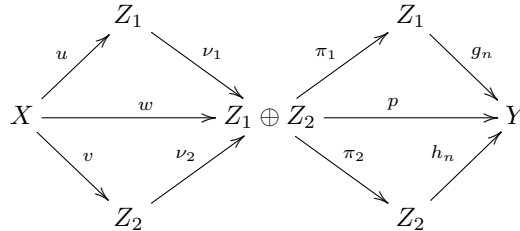
Nechť $f = g_n \dots g_1$, kde $g_i \in \text{rad}(X_{i-1}, X_i)$. Dále to plyne z části 1. výše, jelikož pak $f'g_n \in \text{rad}(X_{n-1}, Z)$ a $f'f = f'g_n g_{n-1} \dots g_1 = (f'g_n)g_{n-1} \dots g_1$.

Část 2., $n > 1$

Analogicky jako část 1.

Část 3., $n > 1$

Protože $n = 1$ jsme vyřešili již výše, tak pro $n > 1$ lze pokračovat již indukčním krokem: Nechť $f_1 = g_n g_{n-1} \dots g_1$, kde $g_i \in \text{rad}(X_{i-1}, X_i)$ a $f_2 = h_n h_{n-1} \dots h_1$, kde $h_i \in \text{rad}(\hat{X}_{i-1}, \hat{X}_i)$ a navíc $X_0 = X = \hat{X}_0$ a $X_n = Y = \hat{X}_n$. Navíc označme $Z_1 := X_{n-1}$, $Z_2 := \hat{X}_{n-1}$, $u := g_{n-1} \dots g_1$ a $v = h_{n-1} \dots h_1$. Navíc nechť $\nu_i : Z_i \hookrightarrow Z_1 \oplus Z_2$ a $\pi_i : Z_1 \oplus Z_2 \twoheadrightarrow Z_i$ značí příslušná vnoření a projekce pro $i = 1, 2$. Navíc dle části 1. máme, že $\nu_1 u, \nu_2 v \in \text{rad}^{n-1}(X, Z_1 \oplus Z_2)$ a dle indukčního předpokladu $w := \nu_1 u + \nu_2 v \in \text{rad}^{n-1}(X, Z_1 \oplus Z_2)$. Stejně tak $g_n \pi_1, h_n \pi_2 \in \text{rad}(Z_1 \oplus Z_2, Y)$, tedy i $p := g_n \pi_1 + h_n \pi_2 \in \text{rad}(Z_1 \oplus Z_2, Y)$. Máme situaci na obrázku 3.2.



Obrázek 3.2: Diagram

Nyní již $f_1 + f_2 = pw$, neboť rozepsáním dostáváme, že

$$pw = (g_n \pi_1 + h_n \pi_2)(\nu_1 u + \nu_2 v) = g_n u + h_n v = f_1 + f_2,$$

protože $\pi_i \nu_i = \text{id}_{Z_i}$ a $\pi_j \nu_i = 0$ pro $j \neq i$. Nicméně $pw \in \text{rad}^n(X, Y)$.

Část 4.

Konečně část 4. plyne již následovně: Necht $f \in \text{rad}^{n+1}(X,Y)$, tedy opět $f = g_{n+1}g_n g_{n-1} \dots g_1$, kde $g_i \in \text{rad}(X_{i-1}, X_i)$. Pak lze uzávorkováním díky části 1. dostat, že

$$f = (g_{n+1}g_n)g_{n-1} \dots g_1 \in \text{rad}^n(X,Y),$$

neboť $g_{n+1}g_n \in \text{rad}(X_{n-1}, X_{n+1})$ □

Důsledek 3.6. *Pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $\text{rad}^n(X,Y)$ je vektorový podprostor prostoru $\text{Hom}(X,Y)$. Navíc $\text{rad}^{n+1}(X,Y) \leq \text{rad}^n(X,Y)$.*

Důkaz. Dle předchozího lemmatu 3.5 části 4. stačí ukázat, že pro každé $m \in \mathbb{N}$ je $\text{rad}^m(X,Y)$ je vektorový prostor. Necht $f, f' \in \text{rad}^m(X,Y)$, pak $f + f' \in \text{rad}^m(X,Y)$ z předchozího lemmatu části 3. Navíc je-li $t \in \mathcal{K}$, pak tf můžeme též brát jako gf , kde $g \in \text{End}(X,X)$ je násobení vektorů konstantou t . Dle části 2. je $gf \in \text{rad}^m(X,Y)$. □

Lemma 3.7. *Necht $X, X_1, X_2, \dots, X_n, Y, Y_1, Y_2, \dots, Y_m$ jsou reprezentace. Pak*

1. $\text{rad}(X, Y_1 \oplus Y_2) = \text{rad}(X, Y_1) \oplus \text{rad}(X, Y_2)$,
2. $\text{rad}(X_1 \oplus X_2, Y) = \text{rad}(X_1, Y) \oplus \text{rad}(X_2, Y)$,
3. $\text{rad}\left(\bigoplus_{i=1}^n X_i, \bigoplus_{j=1}^m Y_j\right) = \bigoplus_{i,j=1}^{n,m} \text{rad}(X_i, Y_j)$.

Důkaz. Část 1.

Označme π_i , $i = 1, 2$ po řadě příslušné projekce $Y_1 \oplus Y_2 \rightarrow Y_i$ a ν_i , $i = 1, 2$ příslušné vnoření $Y_i \hookrightarrow Y_1 \oplus Y_2$, $i = 1, 2$.

" \subseteq " : Mějme $f \in \text{rad}(X, Y_1 \oplus Y_2)$. Pak lze f psát jako $f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}$. Protože $f_i = \pi_i f$, tak z lemma 3.5 části 1. dostáváme, že $f_i \in \text{rad}(X, Y_i)$ pro $i = 1, 2$.

" \supseteq " : Necht naopak $f_i \in \text{rad}(X, Y_i)$. Pak opět z lemma 3.5 jsou $\nu_i f_i \in \text{rad}(X, Y_1 \oplus Y_2)$ a ze stejného lemmatu je i jejich součet $\nu_1 f_1 + \nu_2 f_2 = f$ v radikálu.

Část 2.

Podobně jako 1.

Část 3.

Indukcí z 1. a 2. □

Tvrzení 3.8. *Necht X, Y jsou nerozložitelné reprezentace. Pak $\text{rad}(X, Y)$ sestává ze všech neinvertibilních zobrazení.*

Důkaz. Díky nerozložitelnosti X, Y a tvrzení 1.8 dostáváme, že oba prostory endomorfismů jsou lokální. To využijeme v důkazu.

Nejprve pokud $f \in \text{rad}(X, Y)$, pak zřejmě f není invertibilní.

Necht naopak $f : X \rightarrow Y$ je nenulový neinvertibilní homomorfismus (nulový v radikálu zřejmě je). Ukážeme, že $1 - gf$ je invertibilní pro všechny $g \in \text{Hom}(Y, X)$.

Nejprve ale ukážeme, že gf je samo o sobě neinvertibilní. Sporem: Mějme takový inverz h . Tedy $hgf = \text{id}_X$. Speciálně hg je zobrazení na. Tedy $\text{Im}(f) = \text{Im}(fhg)$ a z nenulovosti f je i zobrazení $e = fhg$ nenulové a zřejmě je to díky asociativitě skládání zobrazení idempotent, a proto

$$(\text{id}_Y - e)e = 0. \tag{3.1}$$

Nicméně $e \notin \text{rad}(\text{End}(Y))$. Kdyby totiž bylo $e \in \text{rad}(\text{End}(Y))$, tak by $\text{id}_Y - e$ bylo invertibilní. Pak z (3.1) by $e = 0$, což nelze. Nyní z lokálnosti $\text{End}(Y)$ je radikál maximální pravý ideál, a tak tedy existuje $k \in \text{End}(Y)$ a $r \in \text{rad}(\text{End}(Y))$ tak, že $\text{id}_Y = r + ek$. Z toho, že r je v radikálu, je tedy $ek = \text{id}_Y - r$ invertibilní. Konečně mějme takový inverz u . Použijme ku nyní na rovnost (3.1) a z toho dostáváme, že

$$0 = (\text{id}_Y - e)e \Rightarrow 0 = (\text{id}_Y - e)eku = \text{id}_Y - e \Rightarrow e = \text{id}_Y.$$

Tím bychom ale dostali, že f má pravý inverz hg . Stejně tak ale bylo f i zleva invertibilní, protože jsme měli $hgf = \text{id}_X$. Tím dostáváme, že f je invertibilní, spor. Takže máme, že $gf \in \text{End}(X)$ není invertibilní. Z lokálnosti $\text{End}(X)$ je nutně $\text{id}_X - gf$ invertibilní (jinak by kvůli lokálnosti $gf + (\text{id}_X - gf) = \text{id}_X$ muselo být neinvertibilní). Homomorfismus g jsme volili libovolně a z toho tedy dostáváme, že $f \in \text{rad}(X, Y)$. \square

Důsledek 3.9. *Pokud X, Y jsou nerozložitelné a $X \not\cong Y$, pak $\text{rad}(X, Y) = \text{Hom}(X, Y)$.*

Pozorování. Necht $f : X \rightarrow Y$ je invertibilní homomorfismus. Pak je f^{-1} též homomorfismus.

Tvrzení 3.10. *Necht X, Y jsou nerozložitelné reprezentace. Pak*

$$f : X \rightarrow Y \text{ je ireducibilní} \iff f \in \text{rad}(X, Y) \setminus \text{rad}^2(X, Y).$$

Důkaz. \implies Necht f je ireducibilní. Protože je neinvertibilní, tak z tvrzení 3.8 je $f \in \text{rad}(X, Y)$. Kdyby pro spor $f \in \text{rad}^2(X, Y)$, pak by $f = gh$, kde $h \in \text{rad}(X, Z)$, $g \in \text{rad}(Z, Y)$ pro nějakou reprezentaci Z . Protože f je ireducibilní, tak h je sekce, nebo g je retrakce. Pokud by h byla sekce, tak máme $h' \in \text{Hom}(Z, X)$ tak, že $h'h = \text{id}_X$. Nicméně z lemma 3.5 je $h'h \in \text{rad}(X, X)$. To je ale spor, neboť $\text{id}_X \notin \text{rad}(X, X)$ - jinak by z definice muselo být $\text{id}_X - \text{id}_X \text{id}_X = 0$ invertibilní, což nelze. Příklad g retrakce je analogický.

\impliedby Necht naopak $f \in \text{rad}(X, Y) \setminus \text{rad}^2(X, Y)$. Kdyby pro spor f bylo sekci, tak bychom měli levý inverz $f' \in \text{Hom}(Y, X)$ a tedy z definice by $\text{id}_X - f'f = \text{id}_X - \text{id}_X = 0$ muselo být invertibilní, spor. Kdyby pro spor f bylo retrakce, tak bychom měli pravý inverz $f'' \in \text{Hom}(Y, X)$. Pak by opět z lemma 3.5 bylo $\text{id}_Y = ff'' \in \text{rad}(Y, Y)$, ale opět $\text{id}_Y \notin \text{rad}(Y, Y)$, spor.

Necht nyní $f = gh$, $h \in \text{Hom}(X, Z)$ a $g \in \text{Hom}(Z, Y)$ pro nějakou reprezentaci

Z . Rozložme Z jako $Z = \bigoplus_{i=1}^t Z_i$, a pišme h a g jako

$$h = (h_1 h_2 \dots h_t)^T : X \rightarrow \bigoplus_{i=1}^t Z_i, \quad g = (g_1 \ g_2 \ \dots \ g_t) : \bigoplus_{i=1}^t Z_i \rightarrow Y.$$

Z toho tedy $f = \sum_{i=1}^t g_i h_i$. Nicméně $f \notin \text{rad}^2(X, Y)$, tedy nutně existuje index i takový, že $g_i h_i \notin \text{rad}^2(X, Y)$ - kdyby totiž každé $g_i h_i$ bylo v $\text{rad}^2(X, Y)$, pak by z lemma 3.5 muselo být i $f \in \text{rad}^2(X, Y)$, to ale nelze. Mějme tedy index i takový, že $g_i h_i \notin \text{rad}^2(X, Y)$. Pak buď $g_i \notin \text{rad}(Z_i, Y)$, nebo $h_i \notin \text{rad}(X, Z_i)$. Rozeberme druhý případ. Protože tedy $h_i \notin \text{rad}(X, Z_i)$, tak z tvrzení 3.8 je h_i invertibilní a inverz je tedy homomorfismus. Proto také zobrazení

$$h' = (0 \dots 0 \ h_i^{-1} \ 0 \dots 0) : \bigoplus_{i=1}^t Z_i \rightarrow X$$

je homomorfismus a $h'h = h_i^{-1}h_i = \text{id}_X$ a tedy h je sekce. V případě, že $g_i \notin \text{rad}(Z_i, Y)$, by se analogicky ukázalo, že g je retrakce. Tedy f je ireducibilní. \square

Nyní dává smysl následující definice:

Definice 3.11 (Irr). Necht X a Y jsou nerozložitelné reprezentace. Pak definujeme

$$\text{Irr}(X, Y) := \text{rad}(X, Y) / \text{rad}^2(X, Y)$$

jakožto kvocient dvou \mathcal{K} -vektorových prostorů.

Poznámka. Tento kvocient měří počet ireducibilních zobrazení z X do Y . Je nazýván prostorem ireducibilních zobrazení.

Pozorování. Necht X, Y jsou nerozložitelné reprezentace a $[f] \in \text{Irr}(X, Y)$ je nenulový prvek. Pak f je ireducibilní.

Důkaz. Kdyby f nebylo ireducibilní, pak by $[f] = [f - f] = [0]$, spor. \square

3.2 Ireducibilní a neinvertibilní homomorfismy

V této sekci ukážeme, že každý neinvertibilní homomorfismus mezi nerozložitelnými reprezentacemi v kategorii reprezentací $\text{rep}(\mathcal{Q}, \mathcal{K})$, kde \mathcal{Q} je Dynkinův, lze zapsat pomocí ireducibilních zobrazení. Provedeme důkaz podobně jako v (Assem a kol., 2006, 5.6. Corollary., str. 143) s použitím Harada-Sai lemma, kde je dokázaná verze v řeči modulů. Podobný důkaz v řeči reprezentací lze nalézt v (Krause, 2010, Theorem 7.6.1 (1), str. 26). V (Auslander a kol., 2010, Theorem 7.8, str. 183) lze najít jiný důkaz (opět v řeči modulů). Připomeňme, že máme-li konečně dimenzionální reprezentaci X , pak její délkou $\ell(X)$ rozumíme nejvyšší $n \in \mathbb{N}$, pro které existuje řetězec podreprezentací

$$0 \subsetneq X_n \subsetneq X_{n-1} \subsetneq \cdots \subsetneq X_2 \subsetneq X_1 = X.$$

Terminologie je jako v řeči modulů, kde se stejný pojem definuje pro moduly konečné délky. Zřejmě $\ell(X) = \sum_{i \in \mathcal{Q}_0} \dim(X_i)$ a z věty o dimenzi obrazu a jádra je $\ell(X) = \ell(Y) + \ell(X/Y)$ pro každou podreprezentaci $Y \leq X$.

Lemma 3.12 (Harada-Sai). Necht $n \in \mathbb{N}$. Necht

$$X_1 \xrightarrow{f_1} X_2 \xrightarrow{f_2} \cdots \xrightarrow{f_{2^{n-1}}} X_{2^n}$$

je posloupnost neinvertibilních homomorfismů mezi nerozložitelnými reprezentacemi a necht $\ell(X_i) \leq n$ pro každé i . Pak $f_{2^{n-1}} \cdots f_2 f_1 = 0$.

Důkaz. Indukcí ukážeme, že pro každé $1 \leq m \leq n$ je

$$\ell(\text{Im}(f_{2^{m-1}} \cdots f_2 f_1)) \leq n - m.$$

Pro $m = n$ pak dostaneme, že $\text{Im}(f_{2^{n-1}} \cdots f_2 f_1) = 0$.

$m = 1$: f_1 není isomorfismus, tak buď není prosté, nebo na. Pokud f_1 není prosté, pak $\ell(\text{Im}(f_1)) < \dim(X_1) \leq n$. Pokud naopak není na, pak $\ell(\text{Im}(f_1)) < \dim(X_2) \leq n$.

$n \geq m > 1$: Uvažujme dva homomorfismy

$$f = f_{2^{m-1}-1} \cdots f_2 f_1, \quad h = f_{2^{m-1}} \cdots f_{2^{m-1}+2} f_{2^{m-1}+1}.$$

Dle indukčního předpokladu je $\ell(\text{Im}(f)), \ell(\text{Im}(h)) \leq n - (m - 1)$. Pokud je alespoň jedna z nerovností ostrá, tak je důkaz hotov. Necht' dále $\ell(\text{Im}(f)) = \ell(\text{Im}(h)) = n - (m - 1) > 0$ a označme $g = f_{2^{m-1}}$. Ukážeme, že $\ell(\text{Im}(hgf)) \leq n - m$.

Necht' pro spor $\ell(\text{Im}(hgf)) > n - m$. Ukážeme, že $g = f_{2^{m-1}}$ je nutně isomorfismus, což bude spor. Protože

$$n - m < \ell(\text{Im}(hgf)) \leq \ell(\text{Im}(gf)) \leq \ell(\text{Im}(f)) = n - (m - 1),$$

tak

$$\ell(\text{Im}(hgf)) = \ell(\text{Im}(gf)) = n - (m - 1) = \ell(\text{Im}(f)) = \ell(\text{Im}(h)). \quad (3.2)$$

Protože z první věty o isomorfismu

$$\begin{aligned} \text{Im}(f)/(\text{Im}(f) \cap \text{Ker}(hg)) &\cong \text{Im}(hgf), \\ \text{Im}(gf)/(\text{Im}(gf) \cap \text{Ker}(h)) &\cong \text{Im}(hgf), \end{aligned} \quad (3.3)$$

tak

$$\begin{aligned} \ell(\text{Im}(hgf)) &= \ell(\text{Im}(f)) - \ell(\text{Im}(f) \cap \text{Ker}(hg)), \\ \ell(\text{Im}(hgf)) &= \ell(\text{Im}(gf)) - \ell(\text{Im}(gf) \cap \text{Ker}(h)). \end{aligned}$$

Proto

$$\text{Im}(f) \cap \text{Ker}(hg) = 0, \quad \text{Im}(gf) \cap \text{Ker}(h) = 0. \quad (3.4)$$

Tedy z (3.3) je $\text{Im}(f) \cong \text{Im}(hgf) \cong \text{Im}(gf)$. Navíc protože $\text{Im}(hgf) \subseteq \text{Im}(hg) \subseteq \text{Im}(f)$, tak z (3.2) je nutně $\ell(\text{Im}(hg)) = \ell(\text{Im}(f))$. Navíc z věty o dimenzi jádra a obrazu je

$$\ell(X_{2^m-1}) = \ell(\text{Im}(hg)) + \ell(\text{Ker}(hg)) = \ell(\text{Im}(f)) + \ell(\text{Ker}(hg)),$$

tak díky (3.4) tyto dva podprostory již nutně generují celé X_{2^m-1} . Proto je $X_{2^m-1} = \text{Im}(f) \oplus \text{Ker}(hg)$. Z nerozložitelnosti, protože $f \neq 0$, je $\text{Ker}(hg) = 0$, tedy hg je prosté a speciálně i g je tedy monomorfismus.

Analogicky opět z (3.2) a u věty o dimenzi jádra a obrazu je

$$\ell(X_{2^{m-1}+1}) = \ell(\text{Im}(h)) + \ell(\text{Ker}(h)) = \ell(\text{Im}(gf)) + \ell(\text{Ker}(h)).$$

Proto opět díky (3.4) je $X_{2^{m-1}+1} = \text{Im}(gf) \oplus \text{Ker}(h)$ a opět z nerozložitelnosti a $gf \neq 0$ máme $\text{Im}(gf) = X_{2^{m-1}+1}$ a tedy speciálně g je epimorfismus.

Celkově dostáváme, že $g = f_{2^{m-1}}$ je isomorfismus, což je ve sporu s tím, že je neinvertibilní. Proto $\ell(hgf) \leq n - m$. \square

Věta 3.13. *Necht' \mathcal{Q} je Dynkinův toulec a X, Y jeho nerozložitelné reprezentace. Pak každý nenulový neinvertibilní homomorfismus $f : X \rightarrow Y$ lze zapsat jako suma kompozic ireducibilních zobrazení mezi nerozložitelnými reprezentacemi.*

Důkaz. Protože uvažujeme konečně dimenzionální reprezentace a z důsledku 2.29 jich je konečně mnoho, tak jistě je délka všech omezená a tedy z Harada-Sai lemma 3.12 existuje $m \geq 1$ tak, že $\text{rad}^{m+1}(X, Y) = 0$. Protože X, Y jsou nerozložitelné, tak $f \in \text{rad}(X, Y)$ dle tvrzení 3.8. Pokud $f \notin \text{rad}^2(X, Y)$, tak dle tvrzení 3.10 je f samo o sobě ireducibilní. Pokud naopak $f \in \text{rad}^2(X, Y)$, tak protože $f \neq 0$, tak existuje nějaké $1 \leq s \leq m$ tak, že $f \in \text{rad}^s(X, Y) \setminus \text{rad}^{s+1}(X, Y)$. Tedy $f = g_s \dots g_1$, kde $g_i \in \text{rad}(A_i, A_{i+1})$ pro nějaké konečně dimenzionální reprezentace $X = A_1, A_2, \dots, A_s, A_{s+1} = Y$. Rozložme každé A_j dle Krullovy-Schmidtovy věty 1.10 a poté použijeme lemma 3.7, z čehož dostaneme, že

$$f = \sum_{j=0}^k f_{j_s} \dots f_{j_1}$$

pro nějaké k a pro nějaká radikálová zobrazení f_{j_a} mezi nerozložitelnými reprezentacemi. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že pro každé $j = 0, \dots, k$ je $f_{j_s} \dots f_{j_1} \neq 0$, protože z nenulovosti f nějaký sumand bude nenulový, tak můžeme uvažovat jen ty sumandy, které jsou nenulové. Nyní již ukážeme, že f je suma ireducibilních zobrazení mezi nerozložitelnými reprezentacemi. Indukcí podle s :

$s = m$: Kdyby pro nějaké $j \in \{1, \dots, k\}$ a $l \in \{1, \dots, s\}$ bylo f_{j_l} v druhé mocnině radikálu, pak by ale celý sumand byl i v $\text{rad}^{s+1}(X, Y) = \text{rad}^{m+1}(X, Y) = 0$. Tedy z tvrzení 3.10 jsou všechny f_{j_l} ireducibilní.

$1 \leq s < m$: Označme f' sumu těch sumandů v f , které jsou složené jen z ireducibilních zobrazení. Pokud $f' = f$, tak je věta pro toto s dokázána. Pokud naopak $f' \neq f$, tak $f'' := f - f' \neq 0$. Navíc $f'' \in \text{rad}^{s+1}(X, Y)$, neboť v každém sumandu se musí vyskytovat neireducibilní zobrazení, které je dle tvrzení 3.10 v druhé mocnině radikálu, a proto je celý sumand v $\text{rad}^{s+1}(X, Y)$ a z lemma 3.5 je i celá suma v $\text{rad}^{s+1}(X, Y)$. Podle indukčního předpokladu je f'' suma kompozicí neireducibilních zobrazení mezi nerozložitelnými reprezentacemi, f' je takovou sumou také, a proto $f = f' + f''$ je také sumou kompozicí ireducibilních zobrazení mezi nerozložitelnými reprezentacemi. \square

3.3 Auslanderův-Reitenin toulec

Definice 3.14 (Auslanderův-Reitenin toulec). Nechť \mathcal{Q} je toulec a \mathcal{K} komutativní těleso. Pak definujeme toulec $\Gamma(\text{rep}(\mathcal{Q}, \mathcal{K}))$ následovně:

- Vrcholy jsou třídy isomorfismu nerozložitelných reprezentací.
- Šipky mezi vrcholy bijektivně odpovídají prvkům báze v prostoru ireducibilních zobrazení mezi příslušnými reprezentanty daných tříd.

Tento toulec $\Gamma(\text{rep}(\mathcal{Q}, \mathcal{K}))$ nazýváme **Auslanderův-Reitenin toulec** \mathcal{Q} .

Pokud bude \mathcal{K} jasné z kontextu, tak v tomto textu budeme $\Gamma(\text{rep}(\mathcal{Q}, \mathcal{K}))$ zkracovat na $\Gamma(\mathcal{Q})$.

V závěru práce rozebereme, jak vypadají toulce $\Gamma(\mathcal{Q})$, kde \mathcal{Q} je Dynkinův toulec. Konkrétně rozebereme problém tří podprostorů.

3.4 Prostor ireducibilních zobrazení projektivních reprezentací příslušných vrcholu

V této sekci zjistíme, čemu je isomorfní prostor ireducibilních zobrazení mezi dvěma projektivními reprezentacemi příslušných vrcholu. Budeme pracovat s reprezentacemi pouze acyklických toulců. Tato i následující sekce jsou kromě posledního příkladu zpracovány podle (Krause, 2010, kap. 3, 7) s rozepsanými a doplněnými důkazy.

Definice 3.15. Mějme v \mathcal{Q} šipku $\alpha : i \rightarrow j$, tak ta nám přirozeně indukuje homomorfismus reprezentací $\alpha^* : P(j) \rightarrow P(i)$, kde

$$\begin{aligned} \alpha_n^* : P(j)_n &\rightarrow P(i)_n, \\ c &\mapsto \alpha * c \end{aligned}$$

pro cesty c z j do n , které tvoří bázi $P(j)_n$.

Mějme vrchol i a označme $B = \{\beta_1, \dots, \beta_m\}$ všechny šipky začínající ve vrcholu i a j_1, \dots, j_m vrcholy takové, že $\beta_k : i \rightarrow j_k$.

Definujme homomorfismus (na bázevých prvcích) $\sigma(i) : \bigoplus_{k=1}^m P(j_k) \rightarrow P(i)$. Pro vrchol $n \in Q_0$:

$$\begin{aligned} \sigma(i)_n : \bigoplus_{k=1}^m P(j_k)_n &\rightarrow P(i)_n, \\ (c_k)_{k=1}^m &\mapsto \sum_{k=1}^m \beta_k * c_k. \end{aligned}$$

Mějme vrchol i a označme $C = \{\gamma_1, \dots, \gamma_{m'}\}$ všechny šipky končící ve vrcholu i a $j_1, \dots, j_{m'}$ vrcholy takové, že $\gamma_k : j_k \rightarrow i$.

Definujme homomorfismus (na bázevých prvcích) $\tau(i) : P(i) \rightarrow \bigoplus_{k=1}^{m'} P(j_k)$. Pro vrchol $n \in Q_0$:

$$\begin{aligned} \tau(i)_n : P(i)_n &\rightarrow \bigoplus_{k=1}^{m'} P(j_k)_n \\ c &\mapsto (\gamma_k * c)_{k=1}^{m'}. \end{aligned}$$

Poznámka. Zřejmě se jedná o homomorfismy reprezentací a navíc α^* i $\sigma(i)$ jsou monomorfismy pro každé $\alpha \in Q_1$ a pro každé $i \in Q_0$. Navíc $\beta_k^* = \sigma(i)^k$ a $\gamma_k^* = \tau^k$, kde horní index k značí k -tou složku tohoto zobrazení.

Máme-li acyklický toulec a šipku $\alpha : i \rightarrow j$, pak $P(j)_i = 0$, a proto díky lemma 1.13 je $\text{Hom}(P(i), P(j)) = 0$, a proto α^* nemůže být zprava invertibilní, tedy s použitím důsledku 1.17 a tvrzení 3.8 je $\alpha^* \in \text{rad}(P(j), P(i))$.

Pozorování. Necht $i \in Q_0$ a $Y = (Y_j, g_\alpha)$ a $Y \leq P(i) = (P(i)_j, \varphi_\alpha)$. Pak $Y = P(i)$ právě tehdy, když $\varepsilon_i \in Y_i$.

Důkaz. \implies Zřejmé.

\impliedby Plyne z toho, že pro každé $k \in Q_0$ lze každý bázevý prvek $c \in P(i)_k$, $c = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ zapsat jako

$$c = \varphi_{\alpha_n} \cdots \varphi_{\alpha_1}(\varepsilon_i).$$

Protože $\varepsilon_i \in Y_i$, tak $\varphi_{\alpha_n} \cdots \varphi_{\alpha_1}(\varepsilon_i) = g_{\alpha_n} \cdots g_{\alpha_1}(\varepsilon_i) \in Y_k$. □

Lemma 3.16. *Pro $i \in Q_0$ je $\text{Im}(\sigma(i))$ unikátní maximální podreprezentace $P(i)$.*

Důkaz. Plyne z pozorování výše, neboť $\text{Im}(\sigma(i))_k$ obsahuje všechny cesty z i do k délky alespoň jedna. Jediná cesta, kterou $\text{Im}(\sigma(i))_k$ neobsahuje, je pro $k = i$ cesta délky 0 a to ε_i . Zřejmě každá jiná vlastní podreprezentace $P(i)$ je i podreprezentací $\text{Im}(\sigma(i))$. \square

Lemma 3.17. *Nechť X je reprezentace, i vrchol a $\phi \in \text{Hom}(X, P(i))$. Pak následující podmínky jsou ekvivalentní:*

1. $\phi \in \text{rad}(X, P(i))$,
2. ϕ není epimorfismus,
3. ϕ lze faktorizovat jako $\phi = \sigma(i)\psi$.

Důkaz. 1. \iff 2.: Nejprve ukážeme, že $\phi \in \text{rad}(X, P(i)) \iff \phi$ není retrakce. Implikace \Rightarrow je zřejmá, kdyby $\phi\phi'' = \text{id}_{P(i)}$ pro $\phi'' \in \text{Hom}(P(i), X)$, tak jinak by díky lemma 3.5 bylo $\text{id}_{P(i)} = \phi\phi'' \in \text{rad}(X, P(i))$, to ale nelze. Naopak pro implikaci \Leftarrow pro spor předpokládejme, že $\phi \notin \text{rad}(X, P(i))$. Rozložme X dle Krullov-Schmidtovy věty 1.10 na $X = \bigoplus_{j=1}^k X_j$. Pak $\phi = (\phi_1 \ \dots \ \phi_k)$. Díky lemma 3.7 tedy existuje ℓ tak, že $\phi_\ell \notin \text{rad}(X_\ell, P(i))$. Z tvrzení 3.8 je proto ϕ_ℓ isomorfismus. Tím bychom ale dostali pravý inverz $\phi' = (0 \ \dots \ \phi_\ell^{-1} \ \dots \ 0)^T$, který je homomorfismem, spor.

Nyní stačí již ukázat, že každý epimorfismus $\varphi \in \text{Hom}(X, P(i))$ je dokonce retrakce. Protože speciálně φ_i je epimorfismus, tak existuje $x \in X_i$ tak, že $\varphi_i(x) = \varepsilon_i$. Z lemma 1.13 existuje $\varphi'' \in \text{Hom}(P(i), X)$ tak, že $\varphi''(\varepsilon_i) = x$. Protože $\varphi\varphi'' \in \text{End}(P(i))$ a $\varphi_i\varphi''_i(\varepsilon_i) = \varepsilon_i$, tak opět z lemma 1.13 je nutně $\varphi\varphi'' = \text{id}_{P(i)}$. Tím je ekvivalence 1. \iff 2. dokázána.

2. \Rightarrow 3.: Protože ϕ není epimorfismus, tak z lemma 3.16 je $\text{Im}(\phi) \leq \text{Im}(\sigma(i))$. Proto navíc z prostoty $\sigma(i)$ lze definovat pro každý vrchol k a pro každý bázev prvek $c \in Q(i, k)$ $\psi_k(c) := \sigma(i)^{-1}(\phi(c))$. Zřejmě pak $\psi = (\psi_k)_{k \in Q_0}$ je homomorfismus reprezentací a $\phi = \sigma(i)\psi$.

3. \Rightarrow 2.: Jelikož $\sigma(i)$ není epomorfismus, tak ani $\phi = \sigma(i)\psi$. \square

Tvrzení 3.18. *Nechť X je nerozložitelná reprezentace a i vrchol.*

1. *Nechť $\phi : X \rightarrow P(i)$ je ireducibilní. Pak existuje šipka $\alpha : i \rightarrow j$ tak, že $X \cong P(j)$.*
2. *Nechť $P(i) \cong S(i)$ a $\phi : P(i) \rightarrow X$ je ireducibilní. Pak existuje šipka $\alpha : j \rightarrow i$ tak, že $X \cong P(j)$.*

Důkaz. Část 1.

Protože $X, P(i)$ jsou nerozložitelné, tak z tvrzení 3.10 je $\phi \in \text{rad}(X, P(i))$. Proto díky předchozímu lemma 3.17 máme rozklad $\phi = \sigma(i)\psi$, $\psi \in \text{Hom}(X, Y)$, kde $Y = \bigoplus_{k=1}^m P(j_k)$, kde používáme B i příslušné vrcholy jsou jako v definici 3.15. Protože $\sigma(i)$ není na, tak nemůže být ani retrakcí, a proto z definice ireducibilního zobrazení je nutně ψ sekce s levým inverzem $\psi' \in \text{Hom}(Y, X)$. Díky lemma 1.5 je tedy $Y = \text{Ker}(\psi') \oplus \text{Im}(\psi)$. Protože ψ jakožto sekce je prosté, tak z první věty o isomorfismu je $X \cong \text{Im}(\psi)$. Z definice Y a nerozložitelnosti všech $P(j_k)$ nutně existuje $A \subset \{1, \dots, m\}$ tak, že $\text{Im}(\psi) = \bigoplus_{\ell \in A} P(j_\ell)$. Z nerozložitelnosti X je

$|A| = 1$, tedy existuje $\beta_n : i \rightarrow j_n$, že $X \cong P(j_n)$.

Část 2.

Protože $P(i) \cong S(i)$, tak i je stok. Protože ϕ je ireducibilní, tak nemůže být $X \cong S(i) \cong P(i)$, protože z důsledku 1.16 $\text{End}(P(i)) \cong \mathcal{K}$, ale ϕ není ani nulový homomorfismus, ani invertibilní. Proto z tvrzení 2.20 je $X \cong S_i^+ S_i^- X$ a společně s lemma 2.19 částí 2. a nerozložitelnosti X je Coker $\nu_i(X) = 0$. Nicméně $(\text{Coker } \nu_i(X))_i = X_i / (\text{Im}(\xi))$, kde

$$\xi = (X_{\gamma_1}, \dots, X_{\gamma_k}) : \bigoplus_{j=1}^k X_{j_k} \rightarrow X_i.$$

Proto je nutně ξ epimorfismus.

S pomocí tohoto dokážeme, že ϕ se faktorizuje pomocí $\tau(i)$ jako $\phi = \phi' \tau(i)$. Označme C jako v definici 3.15. Navíc označme $\text{Hom}(-, X)$ kontravariantní Hom funktor (podrobnosti definice lze najít v (Rotman, 2009, str. 20)). Navíc

$$\text{Hom}\left(\bigoplus_{k=1}^{m'} P(j_k), X\right) \cong \bigoplus_{k=1}^{m'} \text{Hom}(P(j_k), X) \cong \bigoplus_{k=1}^{m'} X_{j_k},$$

kde využíváme lemma 1.13. Podle tohoto lematu je též $\text{Hom}(P(i), X) \cong X_i$. Označme $\lambda_1 := \tilde{\lambda}$. Máme situaci na diagramu na obrázku 3.3. Ukážeme, že

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}\left(\bigoplus_{k=1}^{m'} P(j_k), X\right) & \xrightarrow{\text{Hom}(\tau(i), X)} & \text{Hom}(P(i), X) \\ \lambda_1 \downarrow \wr & & \lambda_2 \downarrow \wr \\ \bigoplus_{k=1}^{m'} X_{j_k} & \xrightarrow{\xi} & X_i \end{array}$$

Obrázek 3.3: Diagram

tento diagram dokonce komutuje. Necht $\psi \in \text{Hom}(\bigoplus_{k=1}^{m'} P(j_k), X)$. Pišme indexy příslušných zobrazení pro příslušné sumandy v $\bigoplus_{k=1}^{m'} P(j_k)$ v horním indexu. Pak

$$\psi = (\psi^1 \quad \dots \quad \psi^{m'}) \quad \text{a} \quad \tau(i) = \begin{pmatrix} \tau(i)^1 \\ \vdots \\ \tau(i)^{m'} \end{pmatrix}.$$

Potom

$$\begin{aligned} \xi \lambda_1(\psi) &= \xi((\psi_{j_k}^k(\varepsilon_{j_k}))_{k=1}^{m'}) = \sum_{k=1}^{m'} X_{\gamma_k} \psi_{j_k}^k(\varepsilon_{j_k}) \\ &= \sum_{k=1}^{m'} \psi_i^k P(j_k)_{\gamma_k}(\varepsilon_{j_k}) = \sum_{k=1}^{m'} \psi_i^k(\gamma_k), \end{aligned}$$

kde předposlední rovnost platí, protože ψ a jednotlivé složky jsou homomorfismy reprezentací (tedy diagram na obrázku 1.1 komutuje z definice homomorfismu reprezentací). Poslední rovnost platí přímo z definice zobrazení $P(j_k)_{\gamma_k}$. Naopak

$$\begin{aligned}\lambda_2 \text{Hom}(\tau(i), X)(\psi) &= \lambda_2(\psi\tau(i)) = \lambda_2\left(\sum_{k=1}^{m'} \psi^k \tau(i)^k\right) \\ &= \sum_{k=1}^{m'} \psi_{j_k}^k \tau(i)_{j_k}^k (\varepsilon_{j_k}) = \sum_{k=1}^m \psi_{j_k}^k ((\gamma_k * \varepsilon_{j_k})) = \sum_{k=1}^{m'} \psi_{j_k}^k (\gamma_k).\end{aligned}$$

Dohromady $\xi\lambda_1(\psi) = \lambda_2 \text{Hom}(\tau(i), X)(\psi)$, tedy diagram na obrázku 3.3 komutuje.

Protože ξ je epimorfismus, tak již nutně i $\text{Hom}(\tau(i), X)$ je na, a proto pro ϕ ze znění věty existuje $\phi' \in \text{Hom}(\bigoplus_{k=1}^{m'} P(j_k), X)$ tak, že $\phi = \phi'\tau(i)$. Protože pracujeme s acyklickým toulcem, tak pro každé $k = 1, \dots, m'$ je $P(i)_{j_k} = 0$, tedy z lemma 1.13 dokonce $\text{Hom}(P(j_k), P(i)) = 0$. Proto tedy $\text{Hom}(\bigoplus_{k=1}^{m'} P(j_k), P(i)) = \bigoplus_{k=1}^m \text{Hom}(P(j_k), P(i)) = 0$, a proto nemůže být $\tau(i)$ sekci, a proto je nutně ϕ' retrakce, tudíž analogicky jako v části 1. je $X \cong P(j_n)$ pro nějaký vrchol j_n , pro který existuje šipka $\gamma_{j_n} : j_n \rightarrow i$. \square

Definice 3.19. Pro toulec $\mathcal{Q} = (Q_0, Q_1)$ a vrcholy i, j budeme symbolem $Q_1(i, j)$ značit množinu všech šipek z $i \rightarrow j$.

Poznámka. Pokud šipky uvažujeme jako cesty délky 1, pak $Q_1(i, j) = Q(i, j) \cap Q_1$.

Věta 3.20. Necht \mathcal{Q} je acyklcký toulec, necht $|Q_1(i, j)| > 0$ a necht $Q_1(i, j) = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$. Označme $A(j) = \{\sum_{k=1}^n \lambda_k \alpha_k \mid \lambda_k \in \mathcal{K}\}$ jakožto \mathcal{K} -vektorový prostor s bází danou $Q_1(i, j)$. Pak zobrazení

$$\begin{aligned}f : A(j) &\rightarrow \text{Irr}(P(j), P(i)), \\ \sum_{k=1}^n \lambda_k \alpha_k &\mapsto \sum_{k=1}^n \lambda_k [\alpha_k^*]\end{aligned}$$

je isomorfismus vektorových prostorů.

Důkaz. Zobrazení f je dobře definované, protože z poznámky za definicí 3.15 je $\alpha^* \in \text{rad}(P(j), P(i))$. Navíc je f homomorfismus vektorových prostorů.

Ukážeme, že f je prosté a na. Označme B a j_1, \dots, j_m jako v definici 3.15.

f je na: Necht $[\phi] \in \text{Irr}(P(j), P(i))$. Z lemma 3.17 lze psát $\phi = \sigma(i)\psi$. Pak lze psát

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi^1 \\ \vdots \\ \psi^m \end{pmatrix} \text{ a } \sigma(i) = \begin{pmatrix} \beta_1^* & \cdots & \beta_m^* \end{pmatrix}.$$

Pak $\sigma(i)\psi = \sum_{k=1}^m \beta_k^* \psi^k$.

Je-li $j_k = j$, pak $\psi^k \in \text{End}(P(j)) \cong \mathcal{K}$ díky důsledku 1.16. Proto

$$\beta_k^* \psi^k = \beta_k^* \lambda_k \text{id}_{P(j)} = \lambda_k \beta_k^*$$

pro nějaké $\lambda_k \in \mathcal{K}$.

Pokud naopak $j_k \neq j$, pak $\psi^k \in \text{Hom}(P(j), P(j_k))$. Nyní díky lemma 1.14 a důsledku 3.9 je $\psi^k \in \text{rad}(P(j), P(j_k))$. Proto díky poznámce za definicí 3.15 je $\beta_k^* \psi^k \in \text{rad}^2(P(j), P(i))$. Proto vzorem $[\phi]$ je $y = \sum_{\substack{\beta_k \in B \\ j_k = j}} \lambda_k \beta_k$, neboť $\phi - \sum_{\substack{\beta_k \in B \\ j_k = j}} \lambda_k \beta_k^* \in \text{rad}^2(P(j), P(i))$.

f je prosté: Mějme $f(\sum_{k=1}^n \lambda_k \alpha_k) = 0$ pro $\alpha_k : i \rightarrow j$ a označme $x = \sum_{k=1}^n \lambda_k \alpha_k$. Tedy $\theta = \sum_{k=1}^n \lambda_k \alpha_k^* \in \text{rad}^2(P(j), P(i))$. Proto existuje reprezentace Z taková, že $\theta = \theta_2 \theta_1$ a že $\theta_1 \in \text{rad}(P(j), Z)$ a $\theta_2 \in \text{rad}(Z, P(i))$. Z lemma 3.17 dostáváme faktorizaci $\theta_2 = \sigma(i) \psi'$ pro nějaké $\psi' \in \text{Hom}(Z, \bigoplus_{\ell=1}^m P(j_\ell))$. Nyní se podíváme podrobněji na $\omega = \psi' \theta_1 \in \text{Hom}(P(j), \bigoplus_{\ell=1}^m P(j_\ell))$. Opět lze psát

$$\omega = \begin{pmatrix} \omega^1 \\ \vdots \\ \omega^m \end{pmatrix} \text{ a } \sigma(i) = \begin{pmatrix} \beta_1^* & \cdots & \beta_m^* \end{pmatrix}.$$

Díky lemma 3.5 je $\omega \in \text{rad}(P(j), \bigoplus_{\ell=1}^m P(j_\ell))$. Analogicky jako výše je $\omega^\ell = \hat{\lambda}_\ell \text{id}_{P(j)}$ pro $j_\ell = j$. Navíc z lemma 3.7 je ω^ℓ v radikálu, a proto tedy nutně $\omega^\ell = 0$. Dále máme dvě vyjádření

$$\theta = \sum_{k=1}^n \lambda_k \alpha_k^* = \sigma(i) \omega = \sum_{\ell=1}^m \beta_\ell^* \omega^\ell. \quad (3.5)$$

Definujme zobrazení $\tilde{\omega} \in \text{Hom}(P(j), \bigoplus_{\ell=1}^m P(j_\ell))$ následovně:

$$\tilde{\omega}^\ell = \begin{cases} \lambda_k \text{id}_{P(j)} & \text{pokud } j_\ell = j \text{ a } \alpha_k = \beta_\ell, \\ 0 & \text{jinak,} \end{cases}$$

což je dobře definovaný homomorfismus, protože šipky $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ bijektivně odpovídají šipkám z B , které mají za koncový bod vrchol j . Proto také z (3.5) je

$$\sigma(i) \tilde{\omega} = \sum_{k=1}^n \lambda_k \alpha_k^* = \sigma(i) \omega.$$

Nicméně $\sigma(i)$ je monomorfismus, a proto nutně $\omega = \tilde{\omega}$. Tedy $\omega^\ell = 0$ pro $j_\ell \neq j$. Navíc společně s diskuzí výše pro ℓ takové, že $j_\ell = j$ a $\alpha_k = \beta_\ell$, je

$$0 = \omega^\ell = \tilde{\omega}^\ell = \lambda_k \text{id}_{P(j)}.$$

Proto $\lambda_k = 0$ pro $k = 1, \dots, n$, tedy $x = 0$. Proto f je prosté. \square

Důsledek 3.21. *Nechť \mathcal{Q} je acyklický toulec. Pak $\text{Irr}(P(j), P(i)) \cong \mathcal{K}^{|\mathcal{Q}_1(i,j)|}$ a speciálně $\dim(\text{Irr}(P(j), P(i))) = |\mathcal{Q}_1(i,j)|$.*

Důkaz. Pokud existuje šipka $i \rightarrow j$, tak stačí použít předchozí větu 3.20 a to, že $A(j) \cong \mathcal{K}^{|\mathcal{Q}_1(i,j)|}$.

Pokud naopak neexistuje šipka $i \rightarrow j$, pak díky tvrzení 3.18 nemůže existovat ireducibilní zobrazení $P(j) \rightarrow P(i)$, a proto $\text{Irr}(P(j), P(i)) = 0 \cong \mathcal{K}^0$. \square

3.5 Ireducibilní zobrazení a preprojektivní reprezentace

V této sekci budeme používat zkrácené značení pro Coxeterovy funktory, kdy

$$C^r = \begin{cases} (C^+)^r & r > 0, \\ \text{id} & r = 0, \\ (C^-)^r & r < 0. \end{cases}$$

Navíc rozšíříme definici radikálu pro $n = 0$, kdy $\text{rad}^0(X, Y) := \text{Hom}(X, Y)$. Vlastnosti z lemma 3.5 zřejmě platí i pro $n = 0$.

Lemma 3.22. *Nechť i, j jsou vrcholy acyklického toulce \mathcal{Q} . Pak*

$$C^r(P(i)) \cong C^s(P(j)) \neq 0 \implies i = j \text{ a } r = s.$$

Důkaz. Nechť $1, \dots, n$ je přípustné pořadí vrcholů.

Nejprve ukážeme, že $C^+P(k) = 0$ pro každý vrchol k . To platí díky lemma 2.31, neboť

$$C^+(P(k)) \cong S_n^+ \dots S_1^+ S_1^- S_2^- \dots S_{k-1}^-(S(k)) \cong S_n^+ \dots S_k^+(S(k)) \cong 0.$$

Proto $C^r(P(i)) \cong C^s(P(j)) \neq 0$ společně s tvrzením 2.20 implikuje, že

$$0 \neq P(i) \cong C^{s-r}(P(j)), \quad 0 \neq P(j) \cong C^{r-s}(P(i)).$$

Proto $r - s \leq 0$ a $s - r \leq 0$. Proto $r = s$. Proto dále $P(i) \cong P(j)$, nicméně dle lemma 1.14 je nutně $i = j$. \square

Tvrzení 3.23. *Nechť vrchol i je stok a X, Y jsou nerozložitelné reprezentace neisomorfní $S(i)$. Pak pro každé $n \geq 0$ je*

$$\text{rad}^n(X, Y) \cong \text{rad}^n(S_i^+ X, S_i^+ Y).$$

Důkaz. Podrobnosti důkazu lze najít v (Krause, 2010, Lemma 7.3.1, str. 23). \square

Důsledek 3.24. *Nechť vrchol i je stok a X, Y jsou nerozložitelné reprezentace neisomorfní $S(i)$. Pak*

$$\text{Irr}(X, Y) \cong \text{Irr}(S_i^+ X, S_i^+ Y).$$

Věta 3.25. *Nechť $X = C^r(P(i))$ a $Y = C^s(P(j))$ jsou dvě nerozložitelné reprezentace acyklického toulce \mathcal{Q} . Pak*

$$\text{Irr}(X, Y) \cong \begin{cases} \mathcal{K}^a & r = s, \\ \mathcal{K}^b & r = s + 1, \\ 0 & \text{jinak,} \end{cases} \quad (3.6)$$

kde $a = |Q_1(j, i)|$, $b = |Q_1(i, j)|$.

Důkaz. Necht existuje $f : X \rightarrow Y$ ireducibilní. Necht $r \leq s$. Pak $C^{r-s}P(i) \neq 0$. Společně s důsledkem 3.24 pak máme

$$\text{Irr}(X, Y) \cong \text{Irr}(C^r(P(i)), C^s(P(j))) \cong \text{Irr}(C^{r-s}(P(i)), P(j)), \quad (3.7)$$

tedy existuje ireducibilní zobrazení $\hat{f} : C^{r-s}(P(i)) \rightarrow P(j)$, tedy z lemma 3.18 je $C^{r-s}P(i) \cong P(k)$ a existuje šipka $j \rightarrow k$. Díky lemma 3.22 je $r - s = 0$ a $i = k$. Proto díky důsledku 3.21 je $\text{Irr}(X, Y) \cong \mathcal{K}^a$.

Necht naopak $r > s$. Necht navíc je $1, \dots, n$ přípustné pořadí vrcholů (bez újmy na obecnosti lze očíslovat vrcholy tak, aby byly v přípustném pořadí). Pak i s použitím lemma 2.31 a důsledku 3.24 máme

$$\begin{aligned} \text{Irr}(X, Y) &\cong \text{Irr}(C^r(P(i)), C^s(P(j))) \cong \text{Irr}(P(i), C^{s-r}(P(j))) \\ &\cong \text{Irr}(S_1^- \cdots S_{i-1}^-(\tilde{S}(i)), (S_1^- \cdots S_{i-1}^-)(S_i^- \cdots S_n^-)C^{s-r+1}P(j)) \\ &\cong \text{Irr}(\tilde{S}(i), (S_i^- \cdots S_n^-)C^{s-r+1}(S_1^- \cdots S_{j-1}^-)(\hat{S}(j))), \end{aligned} \quad (3.8)$$

kde $\tilde{S}(i)$ je jednoduchá reprezentace toulce $\tilde{\mathcal{Q}} = (\tilde{\mathcal{Q}}_0, \tilde{\mathcal{Q}}_1) = \sigma_{i-1} \cdots \sigma_1 \mathcal{Q}$ a $\hat{S}(j)$ je jednoduchá reprezentace toulce $\sigma_{j-1} \cdots \sigma_1 \mathcal{Q}$. V toulci $\tilde{\mathcal{Q}}$ je přípustné pořadí vrcholů $i, i+1, \dots, n, 1, \dots, i-1$. Navíc označme \tilde{C} Coxeterovu transformaci příslušnou toulci $\tilde{\mathcal{Q}}$ a pro odlišení budeme i projektivní reprezentace příslušné vrcholu u toulce $\tilde{\mathcal{Q}}$ značit \tilde{P} . Nyní rozebereme případy:

- $j = i$: Pak z (3.8) a lemma 2.31 máme, že

$$\begin{aligned} \text{Irr}(X, Y) &\cong \text{Irr}(\tilde{S}(i), (S_i^- \cdots S_n^-)C^{s-r+1}(S_1^- \cdots S_{i-1}^-)(\tilde{S}(i))) \\ &\cong \text{Irr}(\tilde{S}(i), \tilde{C}^{s-r}(\tilde{S}(i))). \end{aligned}$$

Protože v $\tilde{\mathcal{Q}}$ je vrchol i stok, tak $\tilde{P}(i) = \tilde{S}(i)$, tak použitím tvrzení 3.18 a lemmatu 3.22 máme $s - r = 0$, ale protože $\text{End}(\tilde{P}(i)) \cong \mathcal{K}$, tak proto $\text{Irr}(\tilde{P}(i), \tilde{P}(i)) = 0$, to je ve sporu s předpokladem, že $\text{Irr}(X, Y) \neq 0$.

- $j > i$: Pak z (3.8) a lemma 2.31 dostáváme, že

$$\begin{aligned} \text{Irr}(X, Y) &\cong \text{Irr}(\tilde{S}(i), (S_i^- \cdots S_n^-)C^{s-r+1}(S_1^- \cdots S_{i-1}^-)(S_i^- \cdots S_j^-)(\hat{S}(j))) \\ &\cong \text{Irr}(\tilde{S}(i), \tilde{C}^{s-r}(\tilde{P}(j))). \end{aligned}$$

Opět použitím tvrzení 3.18 a lemmatu 3.22 dostáváme, že $r = s$, což je ve sporu s předpokladem $r > s$.

- $j < i$: Opět použitím (3.8) a lemma 2.31 dostáváme, že

$$\begin{aligned} \text{Irr}(X, Y) &\cong \text{Irr}(\tilde{S}(i), \tilde{C}^{s-r+1}(S_i^- \cdots S_n^- S_1^- \cdots S_j^-)(\hat{S}(j))) \\ &\cong \text{Irr}(\tilde{S}(i), \tilde{C}^{s-r+1}(\tilde{P}(j))) \cong \text{Irr}(\tilde{P}(i), \tilde{P}(j)). \end{aligned}$$

a opět z tvrzení 3.18 a lemmatu 3.22 dostáváme, že $r = s + 1$, a šipku $\alpha : j \rightarrow i$. Navíc s použitím důsledku 3.21 máme

$$\text{Irr}(X, Y) \cong \text{Irr}(\tilde{P}(i), \tilde{P}(j)) \cong \mathcal{K}^d,$$

kde $d = |\tilde{\mathcal{Q}}_1(j, i)|$, tedy počet šipek v $\tilde{\mathcal{Q}} = \sigma_{i-1} \cdots \sigma_1 \mathcal{Q}$. Protože $j < i$, tak tyto šipky byly oproti \mathcal{Q} otočeny právě jednou. To znamená, že $|\tilde{\mathcal{Q}}_1(j, i)| = |\mathcal{Q}_1(i, j)|$, tedy $d = b$.

Dokázali jsme tedy, že pokud $\text{Irr}(X,Y) \not\cong 0$, pak $\text{Irr}(X,Y) \cong \mathcal{K}^a$ a $r = s$ a existuje šipka $j \rightarrow i$, nebo $\text{Irr}(X,Y) \cong \mathcal{K}^b$ a $r = s + 1$ a existuje šipka $i \rightarrow j$, tedy nutné podmínky pro existenci ireducibilního zobrazení mezi X a Y . Dokonce jsme rozebrali příslušný prostor ireducibilních zobrazení. Nyní ukážeme, že výše uvedené podmínky jsou i postačující:

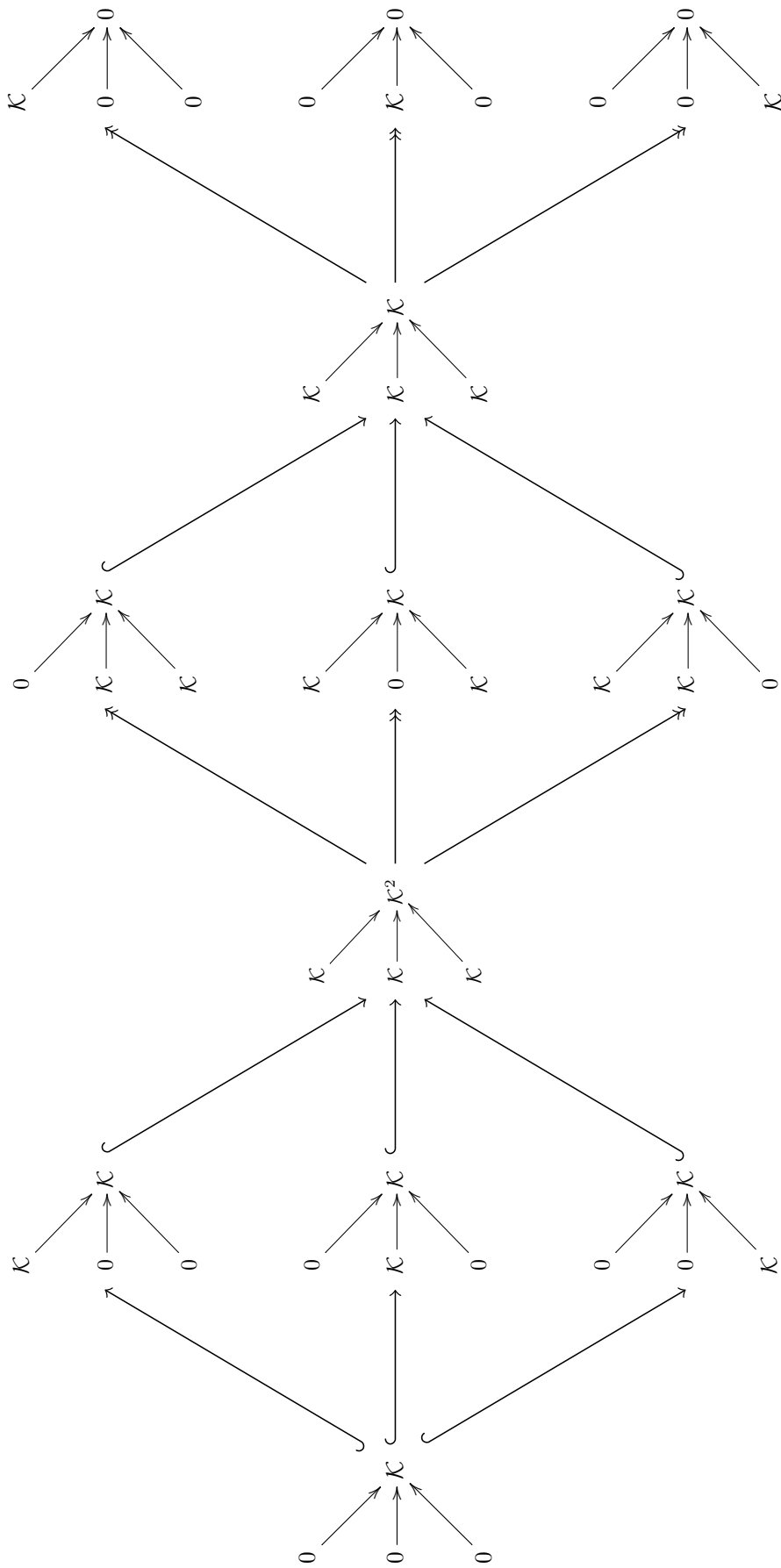
Pokud $r = s$, tak stejně jako v (3.7) je

$$\text{Irr}(X,Y) \cong \text{Irr}(P(i),P(j)) \cong \mathcal{K}^a$$

a tedy buď existuje šipka $j \rightarrow i$ a tedy z tohoto vyjádření $\text{Irr}(X,Y) \not\cong 0$, nebo $a = |Q_1(j,i)| = 0$, a proto $\text{Irr}(X,Y) \cong 0$.

Je-li naopak $r = s + 1$, pak stejnými argumenty jako v druhé části důkazu by se ukázalo, že $\text{Irr}(X,Y) \cong \mathcal{K}^b$. \square

Příklad. Podle právě dokázané věty 3.25 a dříve odvozené tabulky 2.2 již můžeme sestavit Auslanderův-Reitenin toulec pro problém tří podprostorů. Tento toulec jsme znázornili na obrázku 3.4. Ve vrcholech jsme znázornili reprezentanta třídy isomorfismu. Díky pozorování za definicí prostoru ireducibilních zobrazení 3.11 jsou reprezentanti bazových prvků tohoto prostoru ireducibilní, a proto z poznámky pod definicí ireducibilního zobrazení 3.2 je tohle zobrazení buď prosté, nebo na. Proto jsme podle toho šipky znázornili speciálně i podle toho, zda je odpovídající reprezentant bazového prvku monomorfismus, nebo epimorfismus. Zda je zobrazení monomorfismus, nebo epimorfismus jsme zjistili přímo ze struktury konkrétních nerozložitelných reprezentací, neboť vždy pouze jedna možnost připadala v úvahu.



Obrázek 3.4: Auslanderův-Reitenin toulec problému tří podprostorů

Závěr

V této práci jsme studovali kategorie konečně dimenzionálních reprezentací toulců. V první kapitole jsme vysvětlili, že díky Krullově-Schmidtově větě stačí studovat pouze nerozložitelné objekty. Poté v druhé kapitole jsme klasifikovali všechny nerozložitelné objekty v kategorii konečně dimenzionálních reprezentací toulce, jehož pokladový graf je Dynkinovský. Díky tomu jsme byli schopni popsat všechny nerozložitelné konečně dimenzionální reprezentace toulce pro problém tří podprostorů, který jsme rozebrali podrobněji. V kapitole tři jsme rozebrali význam ireducibilních zobrazení. Nakonec jsme sestavili Auslanderův-Reitenin toulce pro kategorii konečně dimenzionálních reprezentací právě tzv. problému tří podprostorů. Primárními zdroji v naší práci byly práce (Assem a kol., 2006) a (Krause, 2010). Oproti použité literatuře jsme mnohé důkazy doplnili, popř. upravili nebo rozebrali podrobněji. Samostatnou prací byl rozbor jak objektů, tak prostoru ireducibilních zobrazení a s tím souvisejícího Auslanderova-Reitenin toulce na příkladu kategorie konečně dimenzionálních reprezentací problému tří podprostorů.

Seznam použité literatury

- ANDERSON, F. W. a FULLER, K. R. (1992). *Rings and Categories of Modules*. Springer New York. ISBN 978-0-387-97845-1.
- ASSEM, I., SIMSON, D. a SKOWRONSKI, A. (2006). *Elements of the Representation Theory of Associative Algebras*. Cambridge University Press. ISBN 978-0-511-34545-6.
- AUSLANDER, M., REITEN, I. a SMALØ, S. O. (2010). *Representation Theory of Artin Algebras*. Cambridge University Press. ISBN 978-0-511-62360-8.
- BARTO, L. a TŮMA, J. Lineární algebra. URL https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~stovicek/dl/20-21-zs/skripta_la6.pdf.
- BERNSTEIN, I. N., GELFAND, I. M. a PONOMAREV, V. A. (1973). Coxeter Functors and Gabriel's Theorem. *Russian Mathematical Surveys*, **28**(2), 17–32.
- BOURBAKI, N. (2002). *Lie Groups and Lie Algebras*. Springer. ISBN 978-3-540-69171-6.
- ETINGOF, P., GOLBERG, O., HENSEL, S., LIU, T., SCHWENDNER, A., VAINTROB, D., YUDOVINA, E. a GEROVITCH, O. (2011). *Introduction to Representation Theory*. American Mathematical Society. ISBN 978-0-8218-5351-1.
- GABRIEL, P. (1972). Unzerlegbare Darstellungen I. *Manuscripta Mathematica*, **6**(1), 71–103.
- KRAUSE, H. (2010). Representations of quivers via reflection functors. URL <https://arxiv.org/abs/0804.1428>.
- RINGEL, C. M. (2006). *Tame Algebras and Integral Quadratic Forms*. Lecture Notes in Mathematics. Springer London, Limited. ISBN 978-3-540-39127-2.
- ROTMAN, J. J. (2009). *An Introduction to Homological Algebra*. Springer New York, NY. ISBN 978-0-387-68324-9.