

**MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ  
FAKULTA**  
Univerzita Karlova

**BAKALÁŘSKÁ PRÁCE**

Marie Guadalupe Papáčková

**Alternující cesty v obarvených bodových  
množinách v konvexní poloze**

Katedra aplikované matematiky

Vedoucí bakalářské práce: doc. RNDr. Pavel Valtr, Dr.

Studijní program: MOMP

Studijní obor: Obecná matematika

Praha 2023

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval(a) samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů. Tato práce nebyla využita k získání jiného nebo stejného titulu.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V ..... dne .....

Podpis autora

Ráda bych poděkovala především doc. RNDr. Pavlu Valtrovi, Dr. za to, že se ujal vedení mé práce, že mě s tématem seznámil, a za jeho cenné připomínky a rady. Dále děkuji všem, kteří mi byli při psaní této práce oporou.

Název práce: Alternující cesty v obarvených bodových množinách v konvexní poloze

Autor: Marie Guadalupe Papáčková

Katedra: Katedra aplikované matematiky

Vedoucí bakalářské práce: doc. RNDr. Pavel Valtr, Dr., Katedra aplikované matematiky

Abstrakt: Tato práce se zabývá problémem nejdelších alternujících cest v obarvených bodových množinách v konvexní poloze, především v bodových množinách s  $n$  červenými a  $n$  modrými body. Cílem práce je shrnout hlavní výsledky dosažené v této oblasti a dát je do souvislostí. Nejprve uvedeme základní pojmy a algoritmus pro hledání nejdelší alternující cesty na konkrétní bodové množině. Vyjádříme si  $l(n)$ , největší číslo takové, že pro každé uspořádání  $2n$  bodů s  $n$  červenými a  $n$  modrými body existuje alternující cesta o délce alespoň  $l(n)$ . Ukážeme souvislost  $l(n)$  s problémem největšího separovaného párování. Uvedeme nejdůležitější dolní i horní odhady  $l(n)$ , včetně nejlepších dosud publikovaných. Nakonec zobecníme problém pro více barev a ukážeme související problém o (anti)palindromech binárních cyklických slov.

Klíčová slova: rovina, alternující cesta, obarvená bodová množina, konvexní poloha, separované párování

Title: Alternating paths in colored point sets in convex position

Author: Marie Guadalupe Papáčková

Department: Department of Applied Mathematics

Supervisor: doc. RNDr. Pavel Valtr, Dr., Department of Applied Mathematics

Abstract: This thesis deals with the problem of the longest alternating paths in colored point sets in a convex position, especially in point sets with  $n$  red and  $n$  blue points. The aim of the thesis is to summarize the main results in this area and put them in context. First, we present the basic concepts and the algorithm for finding the longest alternating path on a specific point set. We express  $l(n)$ , the largest number such that for each arrangement of  $2n$  points with  $n$  red and  $n$  blue points, there is an alternating path of at least  $l(n)$ . We show the connection of  $l(n)$  to the problem of the largest separated matching. We present the most important lower and upper bounds of  $l(n)$ , including the best ones published so far. Finally, we generalize the problem for multicolored point sets and show the related problem about (anti)palindromic subsequences of binary circular words.

Keywords: plane, alternating path, colored point set, convex position, separated matching

# Obsah

<b>Úvod</b>	<b>2</b>
<b>1 Uvedení do problému</b>	<b>3</b>
1.1 Základní pojmy . . . . .	3
1.2 Hledání nejdelší alternující cesty . . . . .	6
<b>2 Dolní odhad</b>	<b>11</b>
2.1 Dolní odhad $l(n) \geq (1 + \varepsilon)n$ . . . . .	15
<b>3 Horní odhad</b>	<b>20</b>
<b>4 Zobecnění problému</b>	<b>26</b>
<b>5 Související problém</b>	<b>29</b>
<b>Závěr</b>	<b>32</b>
<b>Seznam použité literatury</b>	<b>33</b>
<b>Seznam obrázků</b>	<b>35</b>

# Úvod

Představme si, že máme modré a červené body v rovině. Kolik nejvíce bodů můžeme využít na cestu, aby se barvy bodů střídaly a cesta sama sebe nekřížila? Pokud přidáme požadavek, že červených a modrých bodů je stejný počet a že body musí ležet na kružnici, pak tím získáme problém, který kolem roku 1989 zformuloval Erdős (Kynčl, Pach a Tóth, 2005).

Pro konkrétní uspořádání bodů je tento problém algoritmicky řešitelný, mnohem složitější však je, pokud se ptáme, kolik bodů můžeme využít pro obecné uspořádání, tedy, aby ve všech uspořádáních existovala cesta na tolika bodech. Tento počet bodů se snažili shora i zdola odhadnout mimo jiné Kynčl, Pach a Tóth (2005), Abellanas a kol. (2003), Mulzer a Valtr (2020a) a Csóka a kol. (2022).

Tímto problémem se zabývají matematici už dlouho a byla publikována spousta výsledků, ale není nám známo, že by všechny důležité poznatky stran obou odhadů byly shrnuty do jedné práce.

Cílem této práce je proto nabídnout shrnutí dosud známých hlavních výsledků i důkazů a dát je do vzájemných souvislostí. Všechny definice, znění vět a důkazy přejímáme či volně adaptujeme z použitých zdrojů.

V první kapitole si uvedeme základní pojmy, zformulujeme náš problém a ukážeme si několik algoritmů na hledání nejdelší cesty s požadovanými vlastnostmi. V druhé kapitole představíme úzce související problém a shrneme dosud známé výsledky ohledně dolního odhadu. Ve třetí kapitole se zaměříme na horní odhad. Čtvrtá kapitola se věnuje zobecněnému problému, kdy nemáme jenom červené a modré body, ale uvažujeme obecně více barev. V páté a zároveň poslední kapitole se podíváme na související problém o (anti)palindromech v cyklických posloupnostech nul a jedniček

# Kapitola 1

## Uvedení do problému

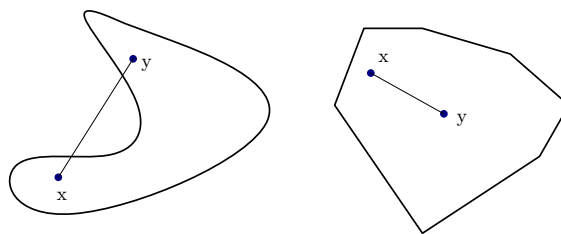
Cílem této práce je mimo jiné shrnout výsledky o problému alternujících cest v obarvených bodových množinách v rovině v konvexní poloze. Abychom mohli nahlédnout a porozumět tomuto problému, který kolem roku 1989 Erdős zformuloval (Brass, Moser a Pach, 2006, str. 409), musíme si nejprve zadefinovat několik základních pojmů.

V celé této práci budeme pracovat v  $\mathbb{R}^2$  a  $n$  bude vždy představovat přirozené číslo.

### 1.1 Základní pojmy

V názvu našeho problému se objevuje mnoho pojmů, které je potřeba přesně definovat, abychom s nimi dále mohli pracovat a využívat je. Začneme s konvexní polohou bodů, k tomu budeme potřebovat první tři níže uvedené definice. Dále si řekneme, co je to obarvení a alternující cesta.

**Definice 1** (konvexní množina). *Množina  $M \subset \mathbb{R}^2$  se nazývá konvexní, pokud pro každé dva body z množiny  $M$  je úsečka spojující tyto dva body obsažena v  $M$ , tj. pro všechna  $x, y \in M$  platí  $tx + (1 - t)y \in M$ , pro všechna  $t \in [0, 1]$ .*



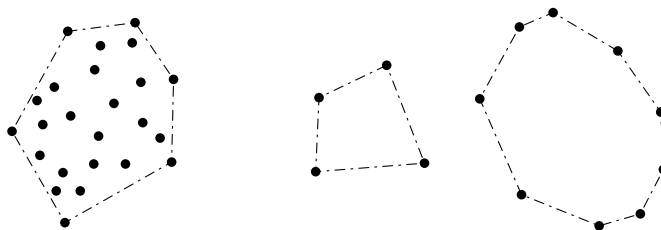
**Obrázek 1.1** vlevo: nekonvexní množina, vpravo: konvexní množina

**Definice 2** (konvexní obal). Necht'  $M \subset \mathbb{R}^2$ , pak konvexním obalem množiny  $M$  rozumíme nejmenší konvexní množinu (vzhledem k inkluzi) takovou, že obsahuje množinu  $M$ . Značíme  $\text{conv}(M)$ .

**Definice 3** (konvexní kombinace). Konvexní kombinací bodů  $x_1, x_2, \dots, x_n$  rozumíme libovolný bod  $x \in \mathbb{R}^2$  tvaru  $x = \sum_{i=1}^n t_i x_i$ , kde  $t_1, t_2, \dots, t_n \in \mathbb{R}, t_i \geq 0$  a  $\sum_{i=1}^n t_i = 1$ .

**Definice 4** (konvexní poloha bodů). Řekneme, že body  $x_1, x_2, \dots, x_n$  jsou v konvexní poloze, pokud žádný z bodů nelze vyjádřit jako konvexní kombinace zbývajících bodů. Tedy body jsou v konvexní poloze pokud pro každé  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$  platí, že  $x_i \notin \text{conv}(\{x_1, x_2, \dots, x_n\} \setminus \{x_i\})$ .

**Poznámka 1.** Pro konečnou množinu  $n > 2$  bodů platí, že konvexní obal těchto bodů tvoří konvexní mnohoúhelník. Pro body v konvexní poloze navíc platí, že konvexním obalem je konvexní  $n$ -úhelník a dané body jsou jeho vrcholy.



**Obrázek 1.2** vlevo: konvexní obal konečné množiny bodů  
vpravo: body v konvexní poloze jsou vrcholy konvexních mnohoúhelníků

**Definice 5** ( $k$ -obarvení). Necht'  $M$  je množina bodů a necht'  $k \in \mathbb{N}$ , pak definujeme  $k$ -obarvení množiny  $M$  pomocí  $k$  barev jako zobrazení  $c : M \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$ .

**Definice 6** (vyvážené  $k$ -obarvení (angl. balanced coloring)). Uvažujme  $k$ -obarvení  $c$  množiny  $M$ . Řekneme, že  $c$  je vyvážené  $k$ -obarvení, pokud platí, že mohutnosti vzorů jednotlivých barev při zobrazení  $c$  jsou stejně velké.

Například pro  $k=2$  musí platit  $|c^{-1}(1)| = |c^{-1}(2)| = |M|/2$ . V této kapitole budeme uvažovat vždy vyvážené 2-obarvení červenou a modrou barvou. Nyní si již zadefinujeme pojem alternující cesta, a následně zformulujeme problém o alternujících cestách v obarvených bodových množinách v konvexní poloze.

**Definice 7** (cesta, hrany). Necht'  $M$  je množina alespoň  $n$  bodů v rovině. Cestou  $w$  délky  $n$  na množině  $M$  rozumíme posloupnost  $(p_1, p_2, \dots, p_n)$  bodů množiny  $M$ . Úsečkám  $(p_i, p_{i+1})$  pro  $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$  budeme říkat hrany.



**Definice 8** (alternující cesta (angl. alternating path)). *Nechť  $M$  je množina bodů s  $k$ -obarvením. Alternující cestu  $w$  délky  $l(w) = n$  na množině  $M$  definujeme jako cestu  $w = (p_1, p_2, \dots, p_n)$ , která splňuje, že  $\forall i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$   $p_i$  a  $p_{i+1}$  mají různé barvy a hrany  $(p_i p_{i+1})$  se neprotínají.*

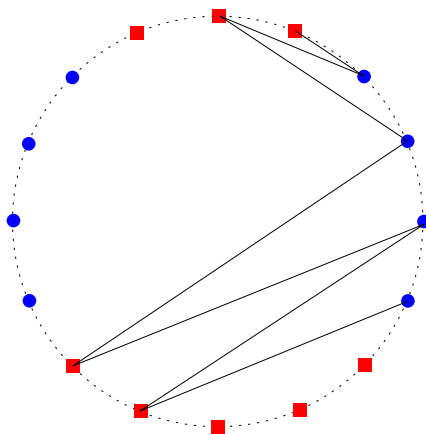
Již víme, co znamenají pojmy jako alternující cesta, obarvení a konvexní poloha bodů. Také jsme zmínili (poznámka 1), že body v konvexní poloze jsou vrcholy nějakého konvexního mnohoúhelníku viz obrázek 1.2. Jelikož náš problém na přesné poloze bodů nezáleží, tak proto můžeme uvažovat uspořádání bodů do kružnice.

**Úmluva.** *Body v konvexní poloze budeme uvažovat uspořádané do kružnice. Číslovat je budeme ve směru hodinových ručiček  $v_1, v_2, \dots, v_{2n}$ , kde bod  $v_1$  zvolíme libovolně, a pracovat s nimi budeme modulo  $2n$ . Takové uspořádání bodů s vyváženým 2-obarvením budeme značit  $P$ . A množinu všech různých uspořádání  $P$  budeme značit  $\mathcal{P}$ .*

Kolem roku 1989 Erdős sdělil Jánosovi Pachovi následující problém (Kynčl, Pach a Tóth, 2005), kterým se budeme výhradně zabývat téměř v celé práci.

**Problém 1** (Erdős). *Určete největší číslo  $d$  takové, že pro jakoukoli množinu  $P$   $2n$  bodů uspořádaných do kružnice, kde  $n$  bodů je obarveno červeně a  $n$  bodů modře, je možné nalézt alternující cestu o délce alespoň  $d$ .*

**Značení.** Číslo  $d$  z tohoto problému budeme chápat jako funkci s proměnou  $n$  a označovat ji budeme  $l(n)$ .



**Obrázek 1.3** alternující cesta délky 8 na 16 bodech (je zřejmé, že tato cesta není nejdelší)

Problémem nejdelší alternující cesty na obarvených bodových množinách se zabývali mimo jiné, Kynčl, Pach a Tóth (2005), Mészáros a Hajnal (2010), Mulzer a Valtr (2020a) a Csóka a kol. (2022). Všichni napsali o tomto problému články, ze kterých budeme čerpat, a jejich výsledky dáme do souvislosti.

Problém analyzovali především na bodech v konvexní poloze, ale i na množinách bodů v rovině v obecné poloze, tedy na množinách, ve které žádné tři body neleží na jedné přímce. Abellanas a kol. (2003) se domnívají, že jeden z aspektů zájmu studia problému nejdelší alternující cesty na množině bodů právě v konvexní poloze je ten, že pro takové uspořádání bodů se dosahuje nejhorsích výsledků, tedy je to uspořádání, kdy nejdelší alternující cesta je nejkratší.

Pro jedno uspořádání  $2n$  bodů  $P$  existuje více alternujících cest, nás však zajímá, jaká je mezi nimi ta nejdelší. Pro zjištění  $l(n)$  je však třeba hledat minimální délku alternujících cest přes množinu  $\mathcal{P}$ . Mészáros a Hajnal (2010) vyjádřili  $l(n)$  následovně:

$$l(P) := \max_{w: \text{alternující cesta}} l(w)$$

$$l(n) = \min_{P \in \mathcal{P}} l(P)$$

Erdős se domníval, že lze vždy na  $2n$  bodech obarvených dvěma barvami najít alternující cestu o délce alespoň  $3n/2$  (Kynčl, Pach a Tóth, 2005), ale tuto domněnku nezávisle na sobě vyvrátili Abellanas a kol. (2003) a Kynčl, Pach a Tóth (2005), kteří našli uspořádání bodů, pro které má nejdelší alternující cesta délku  $4n/3 + c$  pro konstantu  $c$ . Více si k tomu ukážeme ve 3. kapitole.

## 1.2 Hledání nejdelší alternující cesty

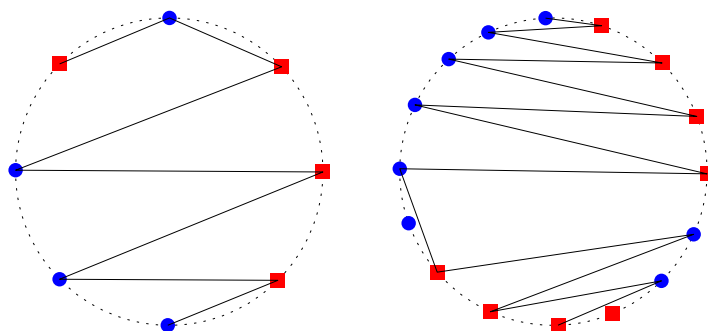
Pokud se zaměříme pouze na jedno dané uspořádání  $P$ , pak nás bude zajímat, jakou má délku nejdelší alternující cesta na tomto uspořádání, tedy  $l(P)$  (nejdelší alternující cestu dokážeme vždy nalézt, neboť máme konečný počet bodů a tedy konečný počet cest, tedy i konečný počet alternujících cest).

Pro některá uspořádání je jednoduché určit, zda daná alternující cesta je ta nejdelší možná (viz obrázek 1.3), nebo zda existuje alternující cesta na všech bodech uspořádání. Například, stačí si představit uspořádání, kde se barvy bodů po jednom střídají nebo, kde prvních  $n$  po sobě jdoucích bodů je jedné barvy a zbylých  $n$  druhé barvy, na takovémto uspořádání je jasné, že existuje alternující cesta obsahující všechny body.

Pro takové alternující cesty, které obsahují všechny body z uspořádání si zavědeme následující pojem.

**Definice 9** (alternující Hamiltonovská cesta). *Alternující Hamiltonovská cesta v uspořádání  $P$  je taková alternující cesta, která obsahuje všechny body  $P$  právě jednou.*

Jak jsme již zmínili, existují uspořádání bodů taková, že na nich neexistuje alternující cesta o délce  $3n/2$ . To znamená, že ne vždy je možné na daném uspořádání najít alternující Hamiltonovskou cestu.



**Obrázek 1.4** vlevo: alternující Hamiltonovská cesta, vpravo: uspořádání, na kterém alternující Hamiltonovská cesta neexistuje

Akiyama a Urrutia (1990) ve svém článku sepsali algoritmus, který zjistí, zda na daném uspořádání  $P$  existuje alternující Hamiltonovská cesta, a případně ji zkonstruuje.

**Značení.** Pro přehlednost budeme psát  $x_i = 1$ , pokud bod  $v_i$  z uspořádání  $P$  má červenou barvu, a  $x_i = 0$ , pokud bod  $v_i$  má barvu modrou.

Vstupem algoritmu je posloupnost nul a jedniček  $x_1, x_2, \dots, x_{2n}$  a výstupem je odpověď, zda alternující Hamiltonovská cesta na tomto uspořádání existuje. Algoritmus je založen na myšlence, že každý počáteční úsek alternující Hamiltonovské cesty  $p_1, p_2, \dots, p_k$  musí být permutací intervalu  $[v_i, v_{i+k-1}]$ , tedy bodů  $v_i, v_{i+1}, \dots, v_{i+k-1}$  pro nějaké  $i$ , kde  $v_{2n+1} = v_1$  (Akiyama a Urrutia, 1990).

**Poznámka 2.** Kdyby neplatilo, že každý počáteční úsek alternující Hamiltonovské cesty  $p_1, p_2, \dots, p_k$  je permutací intervalu  $[v_i, v_{i+k-1}]$  pro nějaké  $i$ , pak bychom nutně nějaké body museli vynechat, a tedy by nešlo o alternující Hamiltonovskou cestu. Neboť s každou hranou rozdělujeme body na dvě části a my můžeme vést další hranu jen do jedné z nich.

Nyní si ukážeme první algoritmus, který zjišťuje, zda alternující Hamiltonovská cesta existuje.

---

**Algoritmus 1** Existence alternující Hamiltonovské cesty

---

```
 $S_1 := \{i : x_i = 1\}$   
for  $k : 2, 3, \dots, 2n$  do  
   $S_k := \emptyset$   
  for all  $i \in S_{k-1}$  do  
    if  $x_{i-1} \equiv k \pmod{2}$  then  
      add  $i - 1$  to  $S_k$   
    end if  
    if  $x_{i+k-1} \equiv k \pmod{2}$  then  
      add  $i$  to  $S_k$   
    end if  
  end for  
end for  
if  $S_{2n} \neq \emptyset$  then  
  alternující Hamiltonovská cesta existuje  
end if
```

---

Je-li výstupem, že alternující Hamiltonovská cesta existuje, můžeme pokračovat následujícím algoritmem, který dostane jako vstup neprázdné množiny  $S_i$  (výstup z algoritmu 1) a výstupem je alternující Hamiltonovská cesta  $p_1, p_2, \dots, p_{2n}$ .

---

**Algoritmus 2** Konstrukce alternující Hamiltonovské cesty

---

```
 $i :=$  libovolný prvek množiny  $S_{2n-1}$   
 $p_{2n} := v_{i-1}$   
  
for  $k = 2n - 1, 2n - 2, \dots, 2$  do  
  if  $i \in S_{k-1}$  then  
     $p_k := v_{i+k-1}$   
  else  
     $p_k := v_i, i := i + 1$   
  end if  
end for  
 $p_1 := v_i$ 
```

---

Algoritmus 1 nám zodpovídá otázku, zda pro dané uspořádání bodů existuje alternující Hamiltonovská cesta, a pokud existuje, tak algoritmus 2 tuto cestu zkonstruuje. Pokud však  $S_{2n} = \emptyset$ , pak to znamená, že alternující Hamiltonov-

ská cesta neexistuje. Pokud označíme  $m$  největší takový index, pro který platí, že  $S_m \neq \emptyset$ , potom existuje alternující cesta o délce alespoň  $m$  a algoritmus 2 ji zkonstruuje, stačí v algoritmu zaměnit  $2n$  za  $m$ .

**Příklad.** Ukážeme si, jak funguje algoritmus 2 na konkrétním příkladu. Uvažujme uspořádání z obrázku 1.4 vpravo, pak vstupem do algoritmu 1 je například posloupnost 1111001111000000. Pak dostáváme  $S_1 = \{1, 2, 3, 4, 7, 8, 9, 10\}$ ,  $S_2 = \{4, 6, 10\}$ ,  $S_3 = \{3, 6, 9, 16\}$ ,  $S_4 = \{3, 9, 15\}$ ,  $S_5 = \{2, 3, 8, 15\}$ ,  $S_6 = \{8, 14\}$ ,  $S_7 = \{7, 14\}$ ,  $S_8 = \{6, 7, 13, 14\}$ ,  $S_9 = \emptyset$ ,  $S_{10} = S_{11} = S_{12} = S_{13} = S_{14} = S_{15} = S_{16} = \emptyset$ .

To znamená, že alternující Hamiltonovská cesta na tomto uspořádání neexistuje, avšak použijeme-li algoritmus 2, ve kterém místo  $2n = 16$  použijeme  $m = 8$ , dostaneme jako výstup alternující cestu délky 8. V algoritmu 2 si na začátku libovolně volíme prvek  $i$  v našem případě z množiny  $S_7$ , která obsahuje dva prvky, jejich volbou, pak můžeme dostat různé alternující cesty délky 8.

Pro  $i = 7$  nám algoritmus vrátí alternující cestu  $w = v_{10}, v_{11}, v_9, v_{12}, v_8, v_{13}, v_7, v_6$ .

Pro  $i = 14$  dostaneme alternující cestu  $w = v_1, v_{16}, v_2, v_{15}, v_3, v_{14}, v_4, v_{13}$ .

Z obrázku 1.4 vidíme, že nejdelší alternující cesta na uspořádání z příkladu 1.2 má délku větší než 8. Tedy alternující cesty, které nám zkonstruoval upravený algoritmus 2, nejsou nejdelší možné.

Pojďme se nyní podívat na jiný algoritmus, který zjistí délku nejdelší alternující cesty daného uspořádání. Výstupem algoritmu je tedy číslo  $l(P)$ , algoritmus nejdelší alternující cestu nezkonstruuje. Tento algoritmus je založen na dynamickém programování a sepsali ho Abellanas a kol. (2003, str. 3).

Uvažujme množinu  $P$   $2n$  bodů, tedy bodů v konvexní poloze, očíslovaných ve směru hodinových ručiček  $v_1, v_2, \dots, v_{2n}$ , kde bod  $v_1$  jsme vybrali libovolně, a zdefinujme si délku nejdelší alternující cesty na bodech intervalu  $[v_i, v_j]$  následovně:

**Definice 10** ( $l^+(i, j)$ ,  $l^-(i, j)$ ). Definujme  $l^+(i, j)$  jako délku nejdelší alternující cesty na bodech intervalu  $[v_i, v_j]$  s počátečním bodem  $v_i$ . Obdobně  $l^-(i, j)$  definujme jako délku nejdelší alternující cesty na bodech intervalu  $[v_i, v_j]$ , s počátečním bodem  $v_j$ . Pro  $i = j$  definujeme  $l^+(i, j) = l^-(i, j) = 0$ .

Algoritmus postupně určuje všechny hodnoty  $l^+(i, j)$  a  $l^-(i, j)$  pro zvětšující se interval  $[v_i, v_j]$ . Nejdříve tedy určí všechny hodnoty  $l^+(i, j)$ ,  $l^-(i, j)$  pro intervaly o délce jedna, poté je určí pro intervaly o délce dva a pokračuje dál až do intervalů délky  $2n$ .

V algoritmu 3 je popsáno, jak se určí  $l^+(i, j)$ . Obdobně algoritmus určí  $l^-(i, j)$  a následně vybere maximum z  $l^+(i, j)$  a  $l^-(i, j)$  přes intervaly  $[v_i, v_j]$  o velikosti  $2n$ .

---

**Algoritmus 3** Určení  $l(P)$  - velikosti nejdelší alternující cesty na  $P$ 

---

$$c(v_i) := \text{barva bodu } v_i$$
$$l^+(i, j) = \begin{cases} \max(l^+(i+1, j), l^-(i+1, j)), & c(v_j) = c(v_i) = c(v_{i+1}), \\ l^-(i+1, j) + 1, & c(v_j) \neq c(v_i) = c(v_{i+1}), \\ l^+(i+1, j) + 1, & c(v_j) = c(v_i) \neq c(v_{i+1}), \\ \max(l^+(i+1, j), l^-(i+1, j)) + 1, & c(v_i) \neq c(v_j) = c(v_{i+1}). \end{cases}$$
$$L^+ := \max_{i,j:[v_i, v_j] \text{ interval o délce } 2n} l^+(i, j)$$
$$L^- := \max_{i,j:[v_i, v_j] \text{ interval o délce } 2n} l^-(i, j)$$
$$l(P) = \max\{L^+, L^-\}$$

---

Maximum z těchto dvou hodnot je pak  $l(P)$ , tedy velikost nejdelší alternující cesty na  $P$ . V algoritmu však už není zahrnuta konstrukce nejdelší alternující cesty, nicméně ji lze zkonstruovat, pokud se zpětně podíváme na všechny kroky algoritmu a sledujeme větev, která vedla k té maximální hodnotě  $l^+(i, j)$ , popřípadě  $l^-(i, j)$ , kde  $[v_i, v_j]$  je interval o velikosti  $2n$  (stačí se vždy podívat do formule pro výpočet příslušného  $l^\pm(i, j)$ , který ze čtyř řádků se použil).

V této sekci jsme si ukázali dva algoritmy zaměřené na hledání alternující Hamiltonovské cesty. První z nich nám zodpovídá otázku, zda taková cesta existuje, druhý z nich případně alternující Hamiltonovskou cestu zkonstruuje. Na příkladu jsme si ukázali, že i když alternující Hamiltonovská cesta na daném uspořádání  $P$  neexistuje, dokáže druhý algoritmus 2 zkonstruovat nějakou alternující cestu, která ovšem nemusí být tou nejdelší na  $P$ . Algoritmus 1 má časovou složitost  $\mathcal{O}(n^2)$ , to můžeme nahlédnout z toho, že algoritmus využívá dva do sebe vnořené for cykly a každý z nich běží v  $\mathcal{O}(n)$  krocích. Algoritmus 2 má časovou složitost  $\mathcal{O}(n)$ , neboť používá jen jeden for cyklus a test na nalezení do množiny lze provést v konstantním čase.

Třetí algoritmus 3 pro dané uspořádání  $P$  vždy zjistí  $l(P)$ , tedy jakou má velikost nejdelší alternující cesty na tomto uspořádání. Algoritmus určuje  $l^+(i, j)$  přes intervaly o délce 1 až  $n$ , a počet intervalů dané délky je vždy  $n$ . To znamená, že algoritmus 3 má časovou složitost  $\mathcal{O}(n^2)$ .

# Kapitola 2

## Dolní odhad

Připomeňme, že  $l(n)$  označuje největší číslo takové, že na všech množinách  $2n$  bodů v konvexní poloze s vyváženým 2-obarvením existuje alternující cesta o délce  $l(n)$ . V této kapitole se budeme zabývat dolním odhadem  $l(n)$ .

Začneme jednoduchými dolními odhady a budeme postupovat k těm složitějším a silnějším.

**Tvrzení 1** (Kynčl, Pach a Tóth, 2005). *Pro uspořádání  $P$   $2n$  bodů, tedy bodů rozmístěných do kružnice, kde  $n$  bodů je obarveno modře a  $n$  bodů červeně, vždy existuje alternující cesta o délce alespoň  $n$ .*

*Důkaz.* Nechť  $P$  je množina  $2n$  bodů splňující předpoklad z tvrzení. Kružnici s body rozdělme přímkou tak, aby každá polovina obsahovala přesně  $n$  bodů. V jedné z polovin musí být  $m \geq n/2$  červených bodů, a tedy v druhé části je přesně  $m$  modrých bodů. Vhodným spojením těchto  $2m$  bodů dostáváme alternující cestu o délce  $2m \geq 2n/2 = n$ , a tím je důkaz hotov. □

**Poznámka 3.** *Tvrzení 1 platí i pro body v obecné poloze, kde důkaz využívá stejné myšlenky rozdělení bodů na dvě poloviny (Abellanas a kol., 2003, Lemma 1). Pro body v obecné poloze není úplně zřejmé, že to lze, a dokazuje se to jako samostatná Věta o centru.*

Od této chvíle se budeme věnovat především jinému problému, který ale úzce souvisí s tím naším, jak brzy ukážeme. Zdefinujeme si pojem separované párování a místo hledání nejdelší alternující cesty se zaměříme na hledání maximálního separovaného párování.

**Definice 11** (párování). *Nechť  $G = (V, E)$  je graf. Párování je podmnožina hran  $M \subseteq E$ , taková, že každý vrchol z  $V$  je incidentní s nejvýše jednou hranou v  $M$ .*

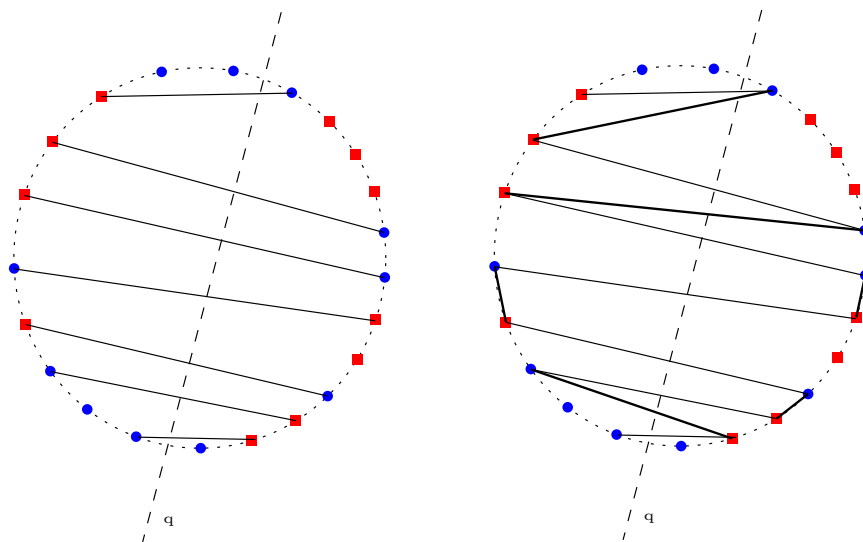
Mějme obarvenou množinu bodů  $P$  uspořádaných do kružnice, pak  $P$  můžeme chápat jako úplný graf s  $2n$  vrcholy a tedy na něm uvažovat párování. Nechť na  $P$  máme alternující cestu  $w$ . Vezmeme-li každou druhou hranu z  $w$ , získáme množinu po dvou disjunktních hran ( $w$  je cesta), tedy dostaneme párování, kde každá hrana spojuje různě barevné body z  $P$  (takovému párování říkáme dvoubarevné párování).

**Definice 12** (dvoubarevné párování (angl. bichromatic matching)). *Nechť  $G = (V, E)$  je graf s vrcholy obarvenými dvěma barvami. Dvoubarevné párování  $M$  je takové párování, kde každá hrana z  $M$  vede mezi různě barevnými vrcholy.*

Problém nejdelší alternující cesty úzce souvisí s nalezením maximálního dvoubarevného párování takového, že existuje přímka, která protíná všechny jeho hrany (Mulzer a Valtr, 2020a). Pro takové dvoubarevné párování si zavedeme speciální označení: separované párování.

**Definice 13** (separované párování (angl. separated (bichromatic) matching)). *Separované párování  $M$  v uspořádání  $P$  s  $k$  hranami je množina  $k$  hran  $\{p_1q_1, p_2q_2, \dots, p_kq_k\}$ , kde  $p_i, q_j \in P$ , taková, že se jedná o dvoubarevné párování, hrany se nekříží a existuje přímka protínající všechny hrany z  $M$ .*

**Úmluva.** *Velikostí separovaného párování  $M$  v  $P$  budeme rozumět celkový počet bodů obsažený v  $M$ , tedy velikost  $M$  se rovná dvojnásobku hran patřící do  $M$ .*



**Obrázek 2.1** vlevo: separované párování, vpravo: alternující cesta vytvořená ze separovaného párování

V následujícím lemmatu si ukážeme již zmíněnou souvislost mezi alternující cestou a separovaným párováním.



**Lemma 2** (Mulzer a Valtr, 2020a). *Nechť na uspořádání  $P$  existuje separované párování s  $k$  hranami, pak na  $P$  existuje alternující cesta o délce alespoň  $2k$ .*

Kynčl, Pach a Tóth (2005) důkaz lemmatu podrobně sepsali ve svém článku. Důkaz není těžký, proto ho zde nebudeme uvádět. Nicméně obrázek 2.1, kde vidíme konstrukci alternující cesty ze separovaného párování, může sloužit jako obrázkový důkaz.

Zatím jsme pracovali s obecným uspořádáním  $P$ . Pokud bychom si uspořádání dokázali podle nějaké vlastnosti rozlišit, mohli bychom při odhadování  $l(n)$  docílit lepších výsledků.

**Definice 14** (běh (angl. run)). *Běh množiny  $P$  je maximální posloupnost bodů  $p_i, p_{i+1}, \dots, p_{i+k}$ , které mají stejnou barvu. Tedy pro  $j = i, \dots, i+k-1$  mají body  $p_j, p_{j+1}$  stejnou barvu a dvojice bodů  $p_{i-1}, p_i$  a  $p_{i+k}, p_{i+k+1}$  mají různou barvu.*

Každá množina bodů  $P$  s vyváženým 2-obarvením uspořádaná do kružnice vždy obsahuje stejný počet červených a modrých běhů, proto celkový počet běhů je vždy sudý. Nyní si zavedeme pojem  $k$ -konfigurace, který budeme definovat jako Kynčl, Pach a Tóth (2005) a následně si uvedeme lemma o dolním odhadu  $l(n)$  pro  $k$ -konfigurace, jehož důkaz jsme volně adaptovali z článku (Kynčl, Pach a Tóth, 2005).

**Definice 15** ( $k$ -konfigurace). *Nechť  $P$  je množina  $2n$  bodů. Řekneme, že  $P$  je  $k$ -konfigurace, pokud se  $P$  skládá z  $k$  červených a  $k$  modrých běhů.*

**Tvrzení 3** (Kynčl, Pach a Tóth, 2005). *Nechť  $n \geq k \geq 1$ , pak pro každou  $k$ -konfiguraci  $2n$  bodů existuje alternující cesta o délce alespoň  $n+k-1$ .*

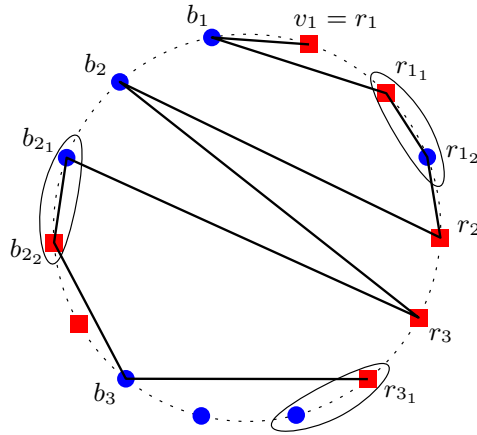
*Důkaz.* Buď  $P$   $k$ -konfigurace a bez újmy na obecnosti předpokládejme, že bod  $v_1$  je červený. Pokud pro jakékoliv  $1 \leq i \leq 2n$  platí, že  $v_i$  je červený bod a  $v_{i+1}$  modrý, nazveme tyto body speciálními, viz obrázek 2.2. Takových bodů je přesně  $2k$ , neboť  $P$  je  $k$ -konfigurace. Zbýlých, nespeciálních bodů je tedy  $2n-2k$  a přesně polovina z nich je červených. Označme  $B_m = \{v_i : 1 \leq i \leq m\}$  oblouk prvních  $m$  po sobě jdoucích bodů a jako  $M$  označme nejmenší číslo takové, že oblouk  $B_M$  obsahuje právě  $n-k$  nespeciálních bodů. Potom  $\overline{B_M} = \{v_i : M+1 \leq i \leq 2n\}$  také obsahuje  $n-k$  nespeciálních bodů.

Předpokládejme, že v  $B_M$  je  $t \geq \lceil \frac{n-k}{2} \rceil$  červených bodů, v opačném případě (že je v něm  $t$  modrých bodů) se lemma dokáže obdobně. Pak v množině  $\overline{B_M}$  je  $t$  modrých bodů. Označme červené body z  $B_M$  po směru hodinových ručiček  $r_1, r_2, \dots, r_t$  a modré body z oblouku  $\overline{B_M}$  proti směru hodinových ručiček  $b_1, b_2, \dots, b_t$ , viz obrázek 2.2. Červené body  $r_1, r_2, \dots, r_t$  rozdělují  $B_M$  na  $t+1$  částí, ty označme  $I_0, I_1, \dots, I_t$ , modré body  $b_1, b_2, \dots, b_t$  zas rozdělují na  $t+1$  částí oblouk  $\overline{B_M}$ , očíslovme je proti směru hodinových ručiček  $J_0, J_1, \dots, J_t$ .

Pokud pro  $0 \leq i \leq t$  obsahuje  $I_i$  nebo  $J_i$  nějaké speciální body, označme tyto body  $r_{i_1}, r_{i_2}, \dots, r_{i_{\alpha_i}}$  popřípadě  $b_{i_1}, b_{i_2}, \dots, b_{i_{\beta_i}}$ . Speciální bod  $r_{i_j}$  je červený, pokud  $j$  je liché, a modrý, pokud je  $j$  sudé. Naopak bod  $b_{i_j}$  je červený, pokud  $j$  je sudé, a modrý, pokud  $j$  je liché, viz obrázek 2.2. Nyní uvažujme cestu

$$p = r_{0_1}, r_{0_2}, \dots, r_{0_{\alpha_0}}, r_1, b_{0_1}, b_{0_2}, \dots, b_{0_{\beta_0}}, b_1, r_{1_1}, \dots, r_{1_{\alpha_1}}, r_2, b_{1_1}, \dots, b_{1_{\beta_1}}, \\ b_2, \dots, r_t, b_{t-1_1}, \dots, b_{t-1_{\beta_{t-1}}}, b_t, r_{t_1}, \dots, r_{t_{(\alpha_t-1)}}, b_{t_1}, \dots, b_{t_{\beta_t}}.$$

Tato cesta je alternující cesta bez křížení o délce  $2t + 2k - 1$  (obsahuje  $t$  červených,  $t$  modrých bodů a  $2k - 1$  speciálních bodů) a platí  $2t + 2k - 1 \geq n - k + 2k - 1 = n + k - 1$ , a tím je lemma dokázané. □



**Obrázek 2.2** Příklad 3-konfigurace, se zakroužkovanými speciálními body a alternující cestou  $p = r_1, b_1, r_{1_1}, r_{1_2}, r_2, b_2, r_3, b_{2_1}, b_{2_2}, b_3, r_{3_1}$  z tvrzení 3.

Z tvrzení 3 vidíme, že pro větší  $k$  dostáváme lepší dolní odhad a také to, že pokud  $P$  je  $k$ -konfigurace, pak na  $P$  existuje alternující cesta o délce  $n + \Omega(k)$ . Kynčl, Pach a Tóth (2005) využili tvrzení 3 k dokázání dolního odhadu  $l(n) \geq n + c\sqrt{\frac{n}{\log(n)}}$ . Mészáros a Hajnal (2010) tento odhad zlepšili na  $n + \Omega(\sqrt{n})$ . K důkazu tohoto odhadu budeme potřebovat následující větu, kterou přejímáme z článku (Mészáros a Hajnal, 2010, sekce 5).

**Věta 4** (Mészáros a Hajnal, 2010). *Nechť  $P$  je  $k$ -konfigurace. Pak existuje separované párování  $M$  o velikosti alespoň  $n + \lfloor \frac{n-1}{2k} \rfloor$ .*

Věta 4 na rozdíl od tvrzení 3 dává lepší dolní odhad pro menší  $k$ . Spojením těchto dvou výsledků dostáváme následující důsledek, který sepsali Mészáros a Hajnal (2010), jehož důkaz jsme doplnili o konkrétní aritmetické úpravy.

**Důsledek.**  $l(n) \geq n - 1 + \sqrt{\frac{n-1}{2}} = n + \Omega(\sqrt{n})$

*Důkaz.* Pro každou  $k$ -konfiguraci  $P$  nám tvrzení 3 říká, že  $l(P) \geq n + k - 1$ , a z věty 4 máme  $l(P) \geq n + \lfloor \frac{n-1}{2k} \rfloor$ . Vhodnými úpravami a využitím nerovnosti mezi aritmetickým a geometrickým průměrem dostáváme:

$$\begin{aligned} l(P) &\geq \frac{(n + k - 1) + (n + \lfloor \frac{n-1}{2k} \rfloor)}{2} \geq \frac{2(n - 1) + (k + \frac{n-1}{2k})}{2} \\ &\geq n - 1 + A(k, \frac{n-1}{2k}) \geq n - 1 + G(k, \frac{n-1}{2k}) \\ &\geq n - 1 + \sqrt{\frac{n-1}{2}}. \end{aligned}$$

Jelikož tato nerovnost platí pro každé uspořádání  $P$ , platí i  $l(n) \geq n - 1 + \sqrt{\frac{n-1}{2}}$ .  $\square$

V této sekci jsme si nejprve ukázali jednoduchý dolní odhad  $l(n) \geq n$ , poté jsme dali do souvislosti alternující cestu a separované párování. Představili jsme si dva dolní odhady  $l(P)$  pro  $k$ -konfigurace  $P$  a nakonec jsme si dokázali dolní odhad  $l(n) \geq n + \Omega(\sqrt{n})$ .

## 2.1 Dolní odhad $l(n) \geq (1 + \varepsilon)n$

Dolní odhad  $l(n) \geq n + \Omega(\sqrt{n})$  byl v článku Long Alternating Paths Exist (Mulzer a Valtr, 2020a) vylepšen na  $l(n) \geq (1 + \varepsilon)n$ . V této sekci se budeme zabývat tímto výsledkem. Nejdříve si uvedeme důležité definice a pojmy, které byly v důkazu použity, a následně zformulujeme větu 6, z níž zmíněný dolní odhad plyne.

Když si uspořádání  $P$  rozdělíme na menší části, můžeme se v nich zaměřit na poměr mezi červenými a modrými body. Mulzer a Valtr (2020a) zvolili rozdělení uspořádání  $P$  na  $k$ -úseky.

**Definice 16** ( $k$ -úsek (angl.  $k$ -chunk), index). *Nechť  $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ . Definujme  $k$ -úsek  $C$  jako posloupnost po sobě jdoucích bodů z  $P$ , která obsahuje přesně  $k$  bodů jedné barvy a méně než  $k$  bodů druhé barvy. Je-li  $C$  červený  $k$ -úsek, pak označme  $r(C) = k$  počet červených bodů v  $C$  a  $b(C) < k$  jako počet modrých bodů v  $C$ .*

*Indexem  $k$ -úseku budeme nazývat číslo  $r(C)/k$  pro modrý  $k$ -úsek a  $b(C)/k$  pro červený  $k$ -úsek.*

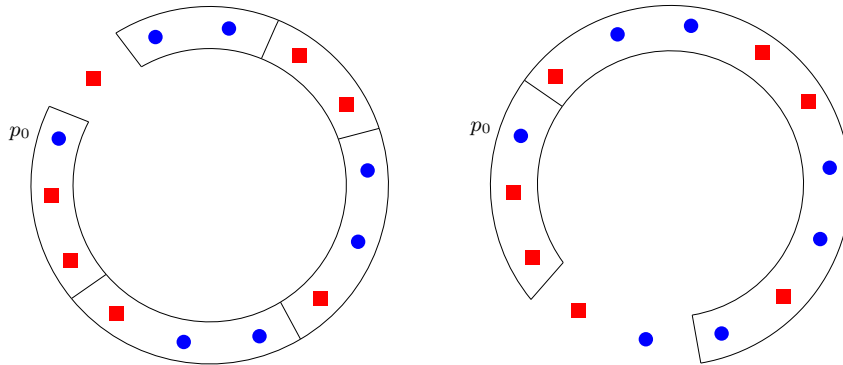
Tedy index může nabývat hodnot od 0 do  $(k - 1)/k$ .

**Úmluva.** *Pravým  $k$ -úsekem budeme označovat minimální posloupnost po sobě jdoucích bodů po směru hodinových ručiček, splňující definici  $k$ -úseku. Levým  $k$ -úsekem budeme označovat minimální  $k$ -úsek proti hodinových ručiček.*

Nyní si ukážeme konstrukci sepsanou Mulzerem a Valtrem (Mulzer a Valtr, 2020a, sekce 2.2), pomocí níž si zadefinujeme pojem  $(k, \lambda)$ -rozdělení.

**Konstrukce:** Mějme uspořádání  $P$  s body  $p_0, p_1, \dots, p_{2n-1}$ . Nechť  $k \in \{1, 2, \dots, n\}$  a  $\lambda \in \mathbb{N} \cup 0$  a předpokládejme, že  $k$  je liché. Sestrojme maximální posloupnost pravých  $k$ -úseků  $C_0, C_1, \dots$  následovně: nejdříve zkonstruujeme  $C_0$  s počátečním bodem  $p_0$ , a označme  $l_0$  počet bodů v  $C_0$ . Dále pokračujeme s nalezením  $C_1$  s počátečním bodem  $p_{l_0}$  a  $l_1$  nechť označuje počet bodů v  $C_1$  a takto pokračujeme do té doby než nalezneme poslední pravý  $k$ -úsek, který neprotíná  $C_0$ . Následně zkonstruujeme maximální posloupnost  $D_0, D_1, \dots$  levých  $(k+3)$ -úseků s počátečním bodem  $p_{2n-1}$ .

Označme  $\lambda'$  minimum z  $\lambda$  a počtu levých  $(k+3)$ -úseků  $D_i$ . Uvažujme množinu  $M_{k,\lambda}$   $\lambda$  levých  $(k+3)$ -úseků  $D_0, D_1, \dots, D_{\lambda'-1}$  a maximálního počtu pravých  $k$ -úseků  $C_0, C_1, \dots$ , tak, aby byly disjunktní s  $D_0, D_1, \dots, D_{\lambda'-1}$ . Pro  $k$  sudé se konstrukce a získání množiny  $M_{k,\lambda}$  provede obdobně, jen se zamění směry, místo pravých  $k$ -úseků uvažujeme levé  $k$ -úseky a místo levých  $(k+3)$ -úseků, uvažujeme pravé  $(k+3)$ -úseky.



**Obrázek 2.3** vlevo:  $(2, 0)$ -rozdělení, vpravo:  $(2, 1)$ -rozdělení.

V  $(2, 0)$ -rozdělení máme pět levých 2-úseků: červený 2-úsek s indexem  $1/2$ , dva po sobě jdoucí modré 2-úseky s indexem  $1/2$ , červený 2-úsek s indexem  $0$  a modrý 2-úsek s indexem  $0$ . Průměrný index červených úseků je  $1/4$  a průměr modrých úseků je  $1/3$ , tedy index  $(2, 0)$ -rozdělení je  $1/3$ .

V  $(2, 1)$ -rozdělení máme jeden červený levý 2-úsek s indexem  $1/2$  a jeden pravý modrý 5-úsek s indexem  $4/5$ . Index  $(2, 1)$ -rozdělení je tedy  $4/5$ .

**Definice 17** ( $(k, \lambda)$ -rozdělení, index  $(k, \lambda)$ -rozdělení). Nechť  $k \in \{1, 2, \dots, n\}$  a nechť  $\lambda \in \mathbb{N} \cup 0$ . Rozdělení množiny  $P$  na  $k$ -úseky a  $(k+3)$ -úseky z množiny  $M_{k,\lambda}$ , kterou jsme zkonstruovali výše, budeme nazývat  $(k, \lambda)$ -rozdělení. Indexem  $(k, \lambda)$ -rozdělení budeme rozumět maximum z průměrného indexu červených úseků a průměrného indexu modrých úseků v daném  $(k, \lambda)$ -rozdělení.

Následující definici jsme převzali z článku (Mulzer a Valtr, 2020a).

**Definice 18** (*k*-rozdělení (angl. *k*-configuration), index *k*-rozdělení). *Definujeme k-rozdělení množiny P jako rozdělení P na disjunktní k-úseky, které pokrývají celé P. Indexem k-rozdělení budeme rozumět maximum z průměrného indexu červených k-úseků a průměrného indexu modrých k-úseků v daném k-rozdělení.*

V *k*-rozdělení tedy nemusíme mít minimální *k*-úseky, pouze se požaduje, aby *k*-úseky pokrývaly všechny body z *P*. Pojmy *k*-rozdělení z definice 18 a *k*-konfigurace z definice 15 mají stejný anglický název *k*-configuration, ale jedná se o zcela jiný pojem.

Výše uvedené definice nám popisují a specifikují daná uspořádání *P*, aniž bychom věděli, jak přesně daná uspořádání vypadají. Hlavní myšlenkou, jak získat lepší dolní odhad, je soustředit se na *k*-rozdělení s určitým indexem. Mulzer a Valtr ve dvou lemmatech (Mulzer a Valtr, 2020a, Lemma 10, 11) dokázali, že pro  $(k, 0)$ -rozdělení množiny *P* existuje dlouhá alternující cesta, pokud:

- máme malé *k* (konstanta) a index *k*-rozdělení je velký (alespoň 0.1),
- nebo je-li  $k = \Omega(n)$  a index *k*-rozdělení je malý (nanejvýš 0.1).

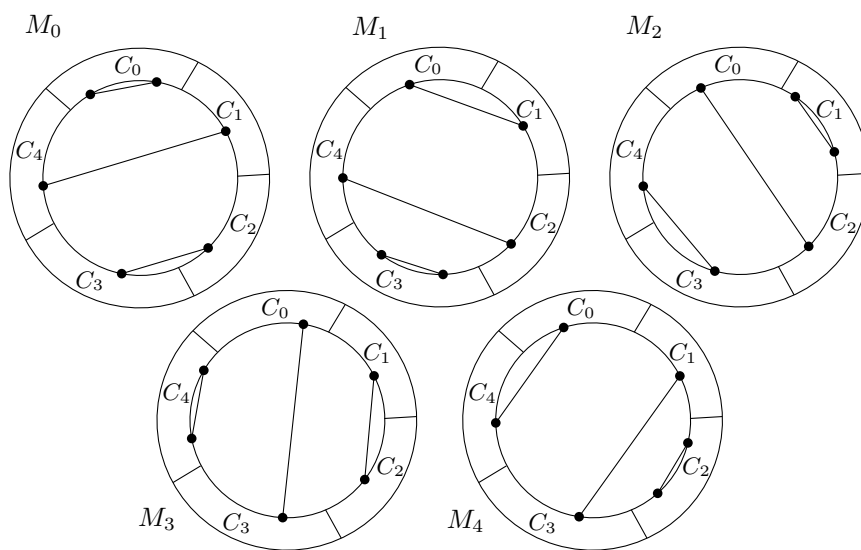
Jedním z jejich cílů bylo ukázat, že na bodové množině *P* se můžeme zaměřit na *k*-rozdělení pro takové *k*, které není ani příliš malé, ani příliš velké, s indexem kolem 0.1.

Již jsme si ukázali, jak spolu souvisí separované párování a alternující cesta. Další definice (párování úseků), kterou si uvedeme, je důležitou součástí článku (Mulzer a Valtr, 2020a) a konstrukce pod definicí 19 nám říká, jak můžeme z párování úseků získat separované párování.

**Definice 19** (párování úseků (angl. chunk matching)). *Nechť  $C_0, C_1, \dots, C_{l-1}$  jsou k-úseky v k-rozdělení množiny P. Definujeme párování úseků jako párování mezi úseky jako na obrázku 2.4. Takových párování je *l* a značit je budeme  $M_0, M_1, \dots, M_{l-1}$ , tak, že v  $M_i$  je úsek  $C_j$  je spojen s úsekem  $C_{(i-j) \bmod l}$  pro každé  $i, j \in \{0, 1, \dots, l-1\}$ .*

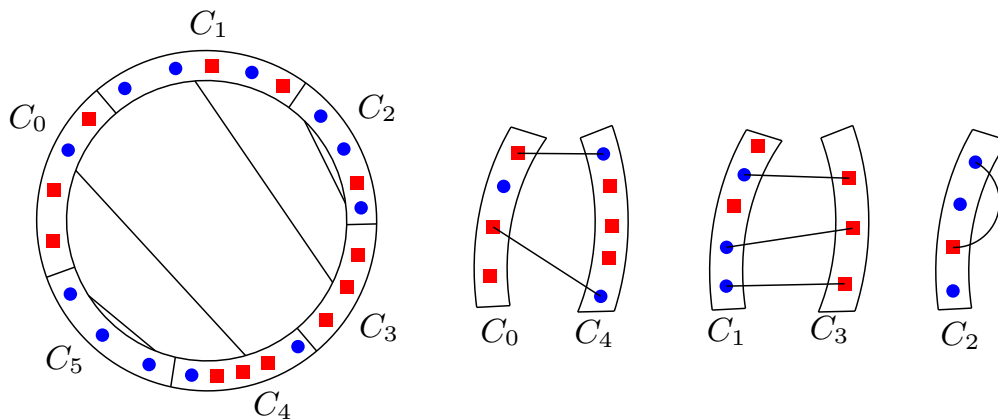
Uvažujme *k*-rozdělení *P* a na něm párování úseků. Pak z něho můžeme zkonstruovat separované párování.

**Konstrukce separovaného párování z párování úseků:** Máme-li spojený červený *k*-úsek *C* a modrý *k*-úsek *B*, pak můžeme spárovat *k* červených bodů z *C* s *k* modrými body z *B*. Pokud v párování úseků jsou spojeny *k*-úseky stejné barvy, například červené, pak můžeme spojit některé z *k* červených bodů jednoho úseku s modrými body druhého úseku nebo naopak. Je-li spojen *k*-úsek *C* (například



**Obrázek 2.4** 5-rozdělení a na něm 5 možných párování úseků

modrý) sám se sebou, rozdělíme  $k$ -úsek tak, aby v každé části bylo  $\lceil k/2 \rceil$  modrých bodů. V jedné z částí je alespoň  $\lceil r(C)/2 \rceil$  červených bodů a ty spojíme s modrými body z druhé části jako na obrázku 2.5.



**Obrázek 2.5** vlevo: 3-rozdělení a na něm párování úseků  $M_4$ , vpravo: hrany separovaného párování získané z párování úseků, kdy jsou spojeny: stejně barevné úseky, různobarevné úseky, úsek sám se sebou

**Lemma 5** (Mulzer a Valtr, 2020a). *Nechť  $\Gamma$  je  $k$ -rozdělení množiny  $P$  a  $M$  náhodně zvolené párování úseků v  $\Gamma$ . Pak střední hodnota počtu hran v odpovídajícím separovaném párování je alespoň  $n/2$ .*

To, že separované párování na uspořádání  $P$  má vždy alespoň  $n/2$  hran, můžeme nahlédnout z důkazu tvrzení 1. Tento výsledek není tedy nijak zvlášť zajímavý, avšak v důkazu tohoto lemmatu využili dolní odhad  $\max\{a, b\} \geq \frac{a+b}{2}$  pro vyjádření  $\max\{b(C), b(D)\}$  a  $\max\{r(E), r(F)\}$ , kde  $C, D$  jsou modré úseky a  $E, F$  červené úseky Mulzer a Valtr (2020a). Pokud je mezi  $b(C), b(D)$  nebo mezi  $r(E), r(F)$  velký rozdíl, pak můžeme získat větší separované párování, s výrazně více hranami než  $n/2$ .

Jeden z hlavních triků, jak z párování úseků získat větší separované párování, je ten, že pokud předpokládáme, že  $k$  je dělitelné třemi a že žádný z  $k$ -úseků nemá index větší než 0.3, pak můžeme každý z  $k$ -úseků rozdělit na  $(k/3)$ -úseky stejné barvy (tj.  $(k/3)$ -úsek vzniklý z červeného  $k$ -úseku je také červený) (Mulzer a Valtr, 2020a).

Následující věta je hlavním výsledkem článku Long Alternating Paths Exist (Mulzer a Valtr, 2020a, viz Theorem 2). K jejímu důkazu využili pojmy a konstrukce uvedené výše, a také museli nejprve dokázat mnoho lemmat a pomocných tvrzení. Pokud máte zájem si celý důkaz přečíst, naleznete ho v plné verzi článku Mulzer a Valtr, 2020b, str. 9-22.

**Věta 6** (Mulzer a Valtr, 2020a). *Existuje pevné  $\varepsilon$  takové, že pro každé uspořádání  $P$   $2n$  bodů existuje separované párování  $M$  o velikosti alespoň  $n + \varepsilon n$ .*

Z lemmatu 2 pak dostáváme následující důsledek, který nám dává slibovaný dolní odhad pro  $l(n)$ .

**Věta 7** (Mulzer a Valtr, 2020a). *Existuje pevné  $\varepsilon$  takové, že na každém uspořádání  $P$   $2n$  bodů existuje alternující cesta délky alespoň  $n + \varepsilon n$ .*

# Kapitola 3

## Horní odhad

V této kapitole se zaměříme na výsledky ohledně horního odhadu  $l(n)$ . Nejprve se podíváme na Erdősův odhad  $l(n) \leq 3n/2 + 2$  a na uspořádání bodů, které k němu vedlo. Následně si uvedeme dvě lemmata 9, 10, která nám pomohou při dokazování horního odhadu  $l(n) \leq \frac{4}{3}n + c'\sqrt{n}$ , a uvedeme  $k$ -konfiguraci, na které nelze zkonstruovat separované párování o velikosti větší než  $2n^{\frac{2k-1}{3k-2}}$ . Na závěr ukážeme tvrzení, které zformulovali a dokázali Csóka a kol. (2022), říkající, že  $l(n) \leq cn + o(n)$  pro  $c = 4 - 2\sqrt{2} \approx 1.17$ .

Erdős se domníval, že platí  $\lim_{n \rightarrow \infty} l(n)/n = 3/2$  (Mulzer a Valtr, 2020a). Myslel si, že extrémní situace nastává při uspořádání, kde body na kružnici jsou uspořádány následovně: prvních  $\frac{n}{2}$  bodů je červených, dále následuje  $\frac{n}{4}$  bodů modrých,  $\frac{n}{2}$  červených a nakonec  $\frac{3}{4}n$  modrých bodů (Kynčl, Pach a Tóth, 2005).

Na obrázku 3.1 máme takové uspořádání pro  $2n = 16$  s vyznačenou alternující cestou délky  $\frac{3}{2}n + 2$ . Jaká je velikost nejdelší alternující cesty na takovémto uspořádání, nám říká následující tvrzení.

**Tvrzení 8.** *Nechť  $P$  je množina  $2n$  bodů uspořádaných následovně ( $\frac{n}{2}$  červených,  $\frac{n}{4}$  modrých,  $\frac{n}{2}$  červených,  $\frac{3}{4}n$  modrých bodů). Pak nejdelší alternující cesta na  $P$  má délku  $\frac{3}{2}n + 2$ .*

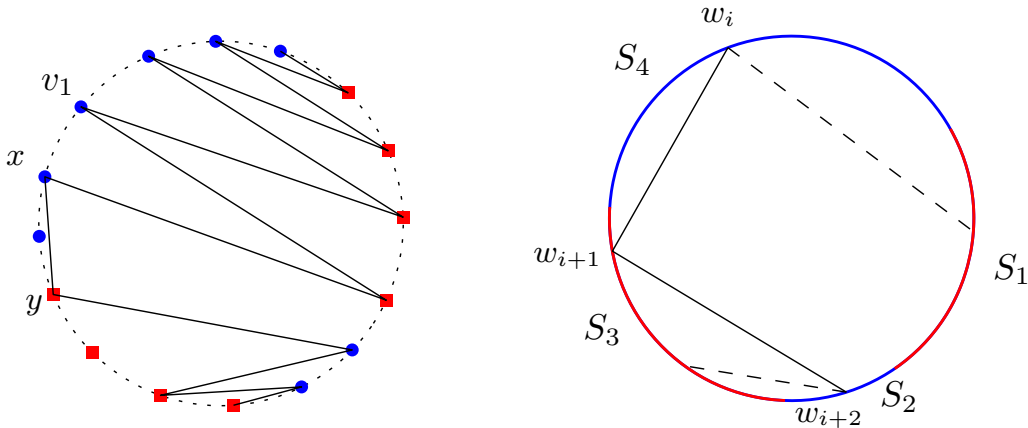
*Důkaz.* Buď  $P$  z předpokladu tvrzení a označme si běhy uspořádání postupně  $S_1, S_2, S_3, S_4$ . Rozdělme si kružnici, na které jsou body uspořádány, na dvě poloviny tak, že v jedné bude za sebou  $\frac{n}{2}$  modrých bodů z běhu  $S_4$  (první bod označme  $v_1$ ) a všechny body z běhu  $S_1$ . V druhé polovině bude navazovat  $\frac{n}{4}$  modrých, tedy běh  $S_2$ , dále běh  $S_3$ , a zbývajících  $\frac{n}{4}$  modrých bodů z běhu  $S_4$ . Je zřejmé, že v první polovině dokážeme zkonstruovat alternující cestu  $w_1$  délky  $n$  s koncovým červeným bodem  $v_n$ . V druhé polovině dokážeme zkonstruovat alternující cestu  $w_2$  délky  $n/2$  s počátečním modrým bodem  $v_{n+1}$ . Dále uvažujme libovolný



červený bod  $x$  z intervalu  $[v_{3n/2+1}, v_{7n/4}]$  a libovolný modrý bod  $y$  z intervalu  $[v_{7n/4+1}, v_{2n}]$ . Pak spojením dostaneme alternující cestu  $w = w_1, y, x, w_2$  délky  $\frac{3}{2}n + 2$  viz obrázek 3.1. Tím je dokázána existence alternující cesty o délce  $\frac{3}{2}n + 2$ .

Nyní je potřeba dokázat, že na  $P$  neexistuje alternující cesta o délce větší než  $\frac{3}{2}n + 2$ . Pro spor předpokládejme, že taková alternující cesta existuje a označme ji  $w$ . Pak  $w$  musí obsahovat více než  $3/4$  modrých bodů, tedy  $w$  musí obsahovat body z běhu  $S_4$  i z běhu  $S_2$ . V takovém případě  $w$  musí obsahovat hrany  $w_i, w_{i+1}, w_{i+1}, w_{i+2}$  takové, že  $w_i \in S_4$ , a bod  $w_{i+1}$  je červený, bez újmy na obecnosti z běhu  $S_3$  a  $w_{i+2} \in S_2$ . Část alternující cesty  $w_i, w_{i+1}, w_{i+2}$  může na obou koncích pokračovat dvěma různými způsoby, tedy dohromady mohou nastat čtyři možnosti. Na obrázku 3.1 je znázorněna jedna z nich, kdy z bodu  $w_i$  pokračujeme do běhu  $S_1$  a z bodu  $w_{i+2}$  do běhu  $S_3$ . Uvažujme tuto možnost (zbylé tři se dokáží podobně). Potom  $w$  obsahuje nanejvýš  $\frac{n}{2}$  červených bodů z  $S_1$  (a k tomu nanejvýš  $\frac{n}{2}$  nějakých modrých bodů), dále  $w$  obsahuje nanejvýš  $\frac{n}{4}$  modrých bodů z  $S_2$  (k tomu nanejvýš  $\frac{n}{4}$  červených bodů  $S_3$ ). Dohromady i s body  $w_i$  a  $w_{i+1}$  (bod  $w_{i+2}$  je zahrnut do  $\frac{n}{4}$  modrých bodů z  $S_2$ ) může alternující cesta  $w$  obsahovat nanejvýš  $n + \frac{n}{2} + 2 = \frac{3}{2}n + 2$  bodů, což je spor.

□



**Obrázek 3.1** vlevo: uspořádání podle Erdőse z tvrzení 8 pro  $2n = 16$  bodů s nejdelší alternující cestou délky 14, vpravo: názorný obrázek k důkazu tvrzení 8

Z tvrzení vidíme, že platí  $l(n) \leq \frac{3}{2}n + 2$ , tento odhad však není asymptoticky těsný (angl. asymptotically tight), což nezávisle na sobě dokázali Abellanas a kol. (2003) a Kynčl, Pach a Tóth (2005), ti navíc ukázali, že  $l(n) \leq \frac{4}{3}n + c\sqrt{n}$ . My se nyní podíváme, jak k takovým závěrům dospěli.

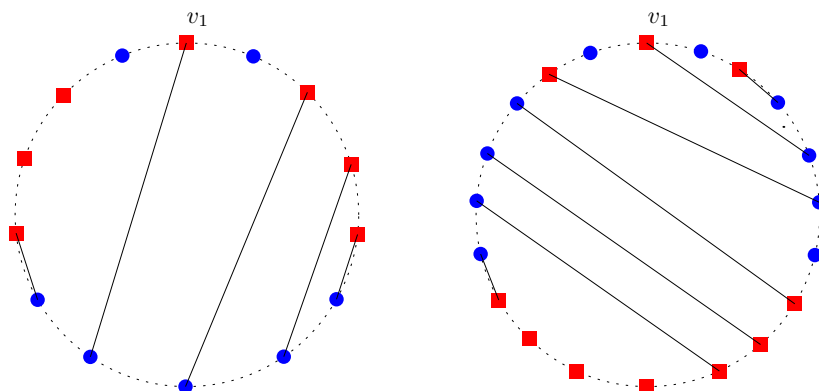
Uvažujme symetrické uspořádání  $2n = 6k - 4$  bodů množiny  $P$  následujícím způsobem, viz obrázek 3.2. Bod  $v_1$  nechť je červený bod, po kterém následuje  $k - 2$  bodů z nichž první je modrý a které alternují mezi modrou a červenou barvou.

Symetricky totéž pro  $k - 2$  bodů před  $v_1$ . Tedy body  $v_{k-1}$  a  $v_{5k-1}$  jsou červené, pokud  $k$  je sudé, a modré, pokud  $k$  je liché. Dále následuje  $k$  bodů opačné barvy než má bod  $v_{k-1}$ , symetricky body  $v_{5k-1}, \dots, v_{4k-1}$  mají opačnou barvu, než bod  $v_{k-1}$ . Nakonec následuje  $2k - 1$  bodů opačné barvy než  $v_{2k-1}$ , tedy stejné barvy jako  $v_{k-1}$ .

Následující lemma 9 nám říká, jakou má velikost maximální separované párování v uspořádání popsaném výše.

**Lemma 9** (Abellanas a kol., 2003). *Nechť  $P$  je množina  $2n = 6k - 4$  bodů uspořádaná jako výše. Pak maximální separované párování na  $P$  obsahuje přesně  $2k - 1$  hran.*

Slabší verzi toho lemmatu, která dává jen horní odhad velikosti maximálního separovaného párování, si ukážeme v následujícím lemmatu 10.



**Obrázek 3.2** Maximální separované párování na uspořádání bodů jako v Lemmatu 9 pro  $k = 3$  a  $k = 4$ .

Máme-li uspořádání jako v lemmatu 9, pak díky lemmatu 2 dostáváme, že v takovém uspořádání existuje alternující cesta o délce  $4k - 2$ , tedy je pokryto  $4k - 2$  z  $6k - 4$  bodů. Pro velké  $k$  poměr pokrytých bodů konverguje k  $\frac{2}{3}$ , a tedy  $l(n)$  konverguje k  $\frac{4}{3}n$  (Abellanas a kol., 2003). To vyvrací domněnku, že horní odhad  $l(n) \leq \frac{3}{2}n$  je asymptoticky těsný.

**Lemma 10** (Kynčl, Pach a Tóth, 2005). *Nechť  $k \geq 2$  a nechť  $n$  je dělitelné  $3k - 2$ . Pak velikost jakéhokoli separovaného párování v  $k$ -konfiguraci, kde body jsou uspořádány v běžích ( $k \frac{n}{3k-2}$  červených,  $(2k - 1) \frac{n}{3k-2}$  modrých,  $k \frac{n}{3k-2}$  červených,  $\frac{n}{3k-2}$  modrých,  $\frac{n}{3k-2}$  červených,  $\dots$ ,  $\frac{n}{3k-2}$  modrých), je nanejvýš  $2n \frac{2k-1}{3k-2}$ .*

Pokud  $n = 3k - 2$ , pak dostáváme stejné uspořádání bodů jako v lemmatu 9, proto si ukážeme důkaz jen tohoto lemmatu, dle Kynčl, Pach a Tóth, 2005, Lemma 2.2.

*Důkaz.* Mějme  $k$ -konfiguraci  $(k \frac{n}{3k-2}, (2k-1) \frac{n}{3k-2}, k \frac{n}{3k-2}, \frac{n}{3k-2}, \dots, \frac{n}{3k-2})$  jako v předpokladu lemmatu a na něm libovolné separované párování  $M$ . Označme si popořadě jednotlivé běhy  $k$ -konfigurace  $S_1, S_2, \dots, S_{2k}$ . Pak  $S_i$  je červený běh, pokud  $i$  je liché, a modrý, pokud  $i$  je sudé. V  $M$  jsou hrany spojující běhy opačných barev (z definice separovaného párování), my se zaměříme na běh  $S_2$ . Může nastat pět případů, které postupně dokážeme.

1. Žádná hrana z  $M$  nemá koncový bod v  $S_2$ :

Potom  $M$  obsahuje nanejvýš  $n - (2k-1) \frac{n}{3k-2}$  modrých bodů, tedy velikost  $M$  je nanejvýš  $2n - 2(2k-1) \frac{n}{3k-2} = 2n \frac{k-1}{3k-2} < 2n \frac{2k-1}{3k-2}$ .

2. Žádná hrana nevede mezi  $S_2$  a  $S_1 \cup S_3$ :

Potom body z  $S_2$  mohou být spojeny hranou pouze s body z běhů  $S_5, S_7, \dots, S_{2k-1}$ . Proto nanejvýš  $(k-2) \frac{n}{3k-2}$  bodů z  $S_2$  je spárováno hranou z  $M$  a nejméně  $(k+1) \frac{n}{3k-2}$  bodů z  $S_2$  není. Velikost  $M$  je potom nanejvýš  $2n - (k+1) \frac{n}{3k-2} = 2n \frac{2k-3}{3k-2} < 2n \frac{2k-1}{3k-2}$ .

3.  $M$  obsahuje hrany spojující  $S_2$  s  $S_1$  a  $S_2$  s  $S_3$ :

Potom je v  $M$  obsaženo nanejvýše  $(2k-1) \frac{n}{3k-2}$  modrých bodů, neboť modré body z  $S_4, \dots, S_{2k}$  nemohou být obsaženy v  $M$ , neboť je to separované párování. Kdyby totiž  $M$  obsahovalo hranu spojující nějaký modrý bod z  $S_4 \cup S_6, \cup \dots, \cup S_{2k}$  s libovolným červeným bodem, pak by neexistovala přímka protínající tuto hranu, hranu mezi  $S_2$  a  $S_1$  a hranu mezi  $S_2$  a  $S_3$ . Velikost  $M$  je tedy menší nebo rovna  $2n \frac{2k-1}{3k-2}$ .

4.  $S_2$  je spojeno hranou z  $M$  s  $S_1$ , ale ne s  $S_3$ :

Předpokládejme, že velikost  $M$  je větší než  $2n \frac{2k-1}{3k-2}$ . Potom  $M$  obsahuje více než  $n \frac{k}{3k-2}$  modrých bodů z  $S_2$ , neboť modrých bodů nenáležících do  $S_2$  je  $n \frac{k-1}{3k-2}$ . Proto alespoň jedna hrana z  $M$  spojuje  $S_2$  s jiným červeným během, než je  $S_1$  (obsahuje jen  $n \frac{k}{3k-2}$  červených bodů). Nechť  $i > 1$  je nejmenší přirozené číslo takové, že  $M$  obsahuje hranu mezi  $S_2$  s  $S_{2i+1}$ . Potom  $M$  obsahuje nanejvýš  $n \frac{k+(k-i)}{3k-2}$  modrých bodů z  $S_2$  (tedy alespoň  $n \frac{2k-1-(2k-i)}{3k-2}$  bodů z  $S_2$  není obsaženo v  $M$ ), a protože  $M$  je separované párování, pak neobsahuje  $n \frac{k-i}{3k-2}$  modrých bodů z  $S_{2i+2} \cup S_{2i+4}, \cup \dots, \cup S_{2k}$ . Proto více než  $n \frac{2k-1-(2k-i)+k-i}{3k-2} = n \frac{k-1}{3k-2}$  modrých bodů není spojeno žádnou hranou z  $M$ , a tedy velikost  $M$  je menší než  $2n \frac{2k-1}{3k-2}$ .

5.  $S_2$  je spojeno hranou z  $M$  s  $S_3$ , ale ne s  $S_1$ :

Symetricky jako ve 4.

□

K dokázání horního odhadu  $l(n) \leq \frac{4}{3}n + c'\sqrt{n}$  budeme potřebovat ještě následující lemma. Protože je důkaz poměrně dlouhý a technický, nebudeme ho tady uvádět. Kynčl, Pach a Tóth (2005) ho však důkladně sepsali ve svém článku.

**Lemma 11** (Kynčl, Pach a Tóth, 2005). *Nechť  $k > 0$  je přirozené a  $P$  je  $k$ -konfigurace, na které existuje alternující cesta o délce  $L$ . Pak na  $P$  existuje separované párování o velikosti alespoň  $L - 4k - 1$ .*

Nyní již máme vše potřebné k dokázání následujícího tvrzení.

**Tvrzení 12** (Kynčl, Pach a Tóth, 2005). *Pro každé přirozené  $n \geq k > 0$  existuje  $k$ -konfigurace  $P$   $2n$  bodů, pro kterou neexistuje alternující cesta delší než  $2n \frac{2k-1}{3k-2} + 16k$ .*

*Důkaz.* Pro  $k = 1$  to zřejmě platí a pro všechna  $n \leq 8k$  také, neboť potom dostáváme  $2n \frac{2k-1}{3k-2} + 16 \geq 2n \frac{2k-1}{3k-2} + 2n = 2n \frac{5k-3}{3k-2} > 2n$ . Předpokládejme tedy, že  $k \geq 2$  a  $n < 8k$ . Označme  $n_0 \leq n$  největší přirozené číslo dělitelné  $3k - 2$  a nechť  $C_0$  je  $k$ -konfigurace na  $2n_0$  bodech s uspořádáním jako v Lemmatu 10. Doplňme do  $C_0$   $2n - 2n_0$  bodů tak, že  $n - n_0$  červených bodů doplníme k  $S_1$  a  $n - n_0$  modrých bodů do  $S_2$ , a takto vzniklou  $k$ -konfiguraci označme jako  $C$ . Ukážeme, že  $C$  je požadovaná  $k$ -konfigurace dokazující toto tvrzení. Nechť  $w$  je alternující cesta na  $C$  o délce  $l_w$ . Pak z Lemmatu 11 máme, že existuje separované párování  $M_1$  o velikosti  $l(M_1) \geq l_w - 4k - 1$  (připomeňme, že velikostí separovaného párování rozumíme počet bodů, tedy dvojnásobek počtu hran patřící do daného separovaného párování). Odstraňme nyní všechny hrany z  $M_1$ , které jsou incidentní s těmi  $2n - 2n_0$  body, které jsme přidali do  $C_0$ . Tím získáme separované párování  $M$  o velikosti  $l(M) \geq l(M_1) - 2(2n - 2n_0) \geq l(M_1) - 4(3k - 2) = l(M_1) - 12k + 8 > l_w - 16k$ . Z Lemmatu 10 víme, že platí  $l(M) \geq 2n_0 \frac{2k-1}{3k-2}$ , a dohromady s dolním odhadem  $l(M)$  dostáváme, že  $l_w \leq 2n_0 \frac{2k-1}{3k-2} + 16k \leq 2n \frac{2k-1}{3k-2} + 16k$ , čímž je důkaz hotov.  $\square$

Z tvrzení 12 ihned plyne, že  $l(n) \leq \frac{4}{3}n + c'\sqrt{n}$ . Stačí pro každé  $n$  zvolit  $k = \lfloor \sqrt{n} \rfloor$ , pak použitím tvrzení 12 dostáváme  $l(n) \leq 2n \frac{2k-1}{3k-2} + 16k < \frac{4}{3}n + 20\sqrt{n}$ .

**Věta 13** (Csóka a kol., 2022).  $l(n) \leq (4 - 2\sqrt{2})n + o(n)$ .

Větu dokázali Csóka a kol. (2022, viz Construction 2) ve své publikaci tak, že zkonstruovali uspořádání bodů, pro které má libovolné separované párování velikost nanejvýš  $(4 - 2\sqrt{2})n + o(n)$ . Pojdme si nyní ukázat konstrukci takového uspořádání.

**Konstrukce:** Necht parametr  $s \geq 2$  je přirozené číslo a necht  $n = s^{5s+1}$ . Body rozdělme na  $s$  částí, které označme  $L_1, L_2, \dots, L_s$ , každá z nich obsahuje  $s^{5s}$  červených bodů a  $s^{5s}$  modrých bodů. Každé  $L_i$  je rozděleno na  $s^{2s-i}$  červených a  $s^{2s-i}$  modrých běhů o velikosti  $s^{3s+i}$ . Označme  $l_{i,j}$   $j$ -tý běh  $L_i$  pro všechna  $1 \leq j \leq 2s^{2s-i}$ . Buď  $\lambda \leq 1/2$  kladné reálné číslo. Pro pevné  $i$  rozdělme každé  $l_{i,j}$  na  $s^{s+2i}$  částí o velikosti  $s^{2s-i}$  a v každé této části změňme barvu  $\lfloor \lambda s^{2s-i} \rfloor$  bodům.

Csóka a kol. (2022) ukázali, že pro  $\lambda = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}$  a pro  $s$  jdoucí k nekonečnu nám konstrukce popsaná výše dává uspořádání, na kterém je velikost separovaného párování nanejvýš  $(4 - 2\sqrt{2})n + o(n)$ .

V této kapitole jsme si představili horní odhady  $l(n)$ , které jsme doplnili o důkazy či o konstrukce uspořádání, které odhady dokazují. Zmínili jsme Erdősův odhad  $l(n) \leq 3n/2 + 2$ , který Abellanas a kol. (2003) a Kynčl, Pach a Tóth (2005) nezávisle na sobě zlepšili na  $l(n) \leq \frac{4}{3}n + c'\sqrt{n}$ . A na závěr jsme si ukázali konstrukci uspořádání, které dokazuje, že  $l(n) \leq (4 - 2\sqrt{2})n + o(n)$ .

Spojením výsledků ohledně horního odhadu z této kapitoly a dolního odhadu z druhé kapitoly dostáváme, že  $(1 + \varepsilon)n < l(n) < (4 - 2\sqrt{2})n + o(n)$ , pro nějaké pevné  $\varepsilon > 0$ . Potom pro  $n$  jdoucí k nekonečnu máme  $(1 + \varepsilon) < l(n)/n < 4 - 2\sqrt{2} \approx 1.17$ , neboť  $\lim_{n \rightarrow \infty} o(n)/n = 0$ .

Rozdíl konstant u lineárního členu v odhadech je  $\approx (0.17 - \varepsilon)$ . Vidíme tedy, že ačkoliv rozdíl lineárního koeficientu u dolního a horního odhadu není příliš velký, pořád je zde prostor pro zlepšení, ať už optimalizací hodnoty  $\varepsilon$  z věty 7 či dalším snížením horního odhadu.

# Kapitola 4

## Zobecnění problému

Do této chvíle jsme se zabývali pouze bodovými množinami v konvexní poloze, které byly obarveny dvěma barvami. Nyní se zaměříme na množiny v konvexní poloze obarvené  $k$  barvami pro  $k \geq 2$  a ukážeme si, že na množinách  $k \cdot n$  bodů s vyváženým  $k$ -obarvením můžeme vždy nalézt alternující cestu o délce alespoň  $(k - 1)n$ . Všechny pojmy, věty a důkazy budeme čerpat budeme z článku Merino, Salazar a Urrutia (2006).

**Úmluva.** Jako  $P$  budeme označovat množinu  $n$  bodů v konvexní poloze obarvenou  $k$  barvami, kde  $k \geq 2$  a  $P = P_1 \cup P_2 \cup \dots \cup P_k$ , kde množiny  $P_i$  jsou po dvou disjunktní a  $|P_i| \geq 2$ . Dále ať body z  $P_i$  mají barvu  $c_i$  a  $c(u)$  nechť označuje barvu prvku  $u \in P$ .

Než se podíváme na lemmata a tvrzení potřebná k dokázání, že na množinách s vyváženým  $k$ -obarvením lze vždy nalézt alternující cestu obsahující alespoň  $(k - 1)/k$  všech bodů, zdefinujme si pojem cik-cak cesta.

**Definice 20** (cik-cak cesta). Definujme cik-cak cestu  $Z$  na  $P$  jako alternující cestu, pro kterou existuje přímka, která protíná všechny hrany  $Z$ . Délku cik-cak cesty  $Z$ , tedy počet bodů v  $Z$ , budeme značit  $l(Z)$ .

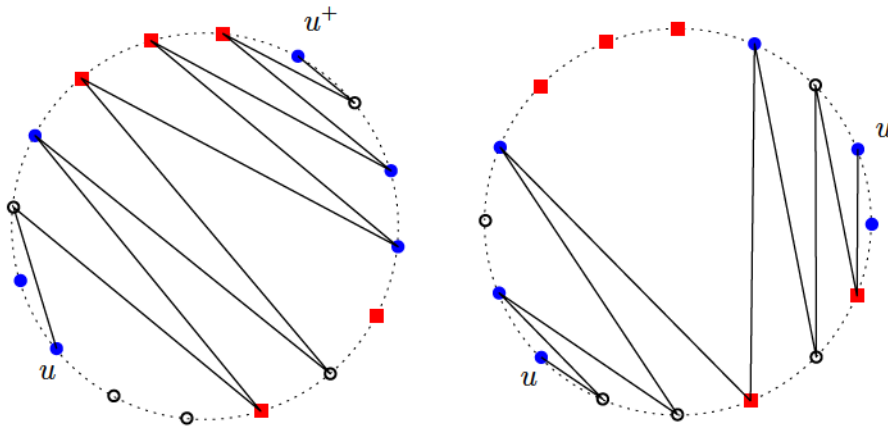
**Konstrukce:** Označme si body  $P$  po směru hodinových ručiček postupně  $v_1, v_2, \dots, v_n$ , kde bod  $v_1$  jsme zvolili libovolně. Zkonstruujeme cik-cak cestu  $Z_{v_1}^+$  začínající v bodě  $v_1$  následovně:

- označme  $i_1$  jako nejmenší index takový, že  $c(i_1) \neq c(1)$ , pak jako druhý bod v  $Z_{v_1}^+$  zvolme  $v_{i_1}$
- označme  $j_1$  jako největší index takový, že  $c(j_1) \neq c(i_1)$ , bod  $v_{j_1}$  je třetím bodem  $Z_{v_1}^+$

- předpokládejme, že jsme již vybrali prvních  $2k + 1$  bodů cik-cak cesty  $Z_{v_1}^+$   $v_1, v_{i_1}, v_{j_1}, \dots, v_{i_k}, v_{j_k}$ . Pak dalším bodem, pokud existuje, je bod  $v_{i_{k+1}}$  pro nejmenší index  $i_{k+1}$  takový, že  $c(i_{k+1}) \neq c(j_k)$  a  $i_k < i_{k+1} < j_k$ .

**Definice 21** ( $Z_u^+, Z_u^-, u^+, u^-$ ). Pro každý bod  $u \in P$  definujeme  $Z_u^+$  jako cik-cak cestu začínající v bodě  $u$  a pokračující po směru hodinových ručiček podle předchozí konstrukce. Obdobně definujeme  $Z_u^-$  začínající v bodě  $u$  pokračující proti směru hodinových ručiček.

Koncové body cik-cak cest  $Z_u^+, Z_u^-$  budeme značit  $u^+$ , respektive  $u^-$ .



**Obrázek 4.1** cik-cak cesty:  $Z_u^+$  s koncovým bodem  $u^+$  a  $Z_u^-$  s koncovým bodem  $u^-$

**Pozorování.**  $Z_u^+$  a  $Z_u^-$  jsou různé cik-cak cesty.

Následující lemmata a tvrzení využijeme k důkazu věty, jejíž důsledek, říká, že na množinách  $k \cdot n$  bodů s vyváženým  $k$ -obarvením můžeme vždy nalézt alternující cestu o délce alespoň  $(k - 1)n$ .

**Lemma 14** (Merino, Salazar a Urrutia, 2006). Označme  $\mathcal{Z} = \{Z_u^+, Z_u^-; u \in P\}$  množinu cik-cak cest. Pak platí  $|\mathcal{Z}| = |P|$ .

*Důkaz.* Zkonstruujeme graf  $G = (V, E)$ , s množinou vrcholů  $V = \mathcal{Z} \cup P$  a množinou hran  $E = \{(u, Z_u^+); u \in P\} \cup \{(u, Z_u^-); u \in P\}$ . Ukážeme, že  $G$  je 2-regulární (všechny vrcholy mají stupeň 2) a bipartitní graf (množina  $V$  lze rozdělit na 2 disjunktní množiny tak, že mezi žádnými dvěma vrcholy ze stejné množiny nevede hrana).

Bipartita grafu  $G$  je zřejmá z konstrukce hran, z níž také plyne, že stupeň každého vrcholu  $u \in P$  je 2. Díky pozorování nad lemmatem dostáváme, že stupeň vrcholu  $Z \in \mathcal{Z}$  je také 2. Graf  $G$  je tedy je 2-regulární bipartitní graf s partitami  $\mathcal{Z}$  a  $P$  a z toho plyne, že  $|\mathcal{Z}| = |P|$ .

□

**Lemma 15** (Merino, Salazar a Urrutia, 2006). *Pro každou úsečku  $uv$ , s koncovými body  $u$  a  $v$  odlišné barvy, existují přesně 2 cik-cak cesty z  $\mathcal{Z} = \{Z_u^+, Z_u^-; u \in P\}$ , které obsahují hranu  $uv$ .*

I když důkaz není těžký, nebudeme ho tu sepisovat, čtenář si ho může přečíst v (Merino, Salazar a Urrutia, 2006).

Nyní se podíváme na pomocné tvrzení k nejdůležitější větě této kapitoly, jehož důkaz vychází z lemmatu 15.

**Tvrzení 16** (Merino, Salazar a Urrutia, 2006). *Nechť  $k > 1$ ,  $P = P_1 \cup P_2 \cup \dots \cup P_k$  a nechť  $|P_i| = n_i$ . Pak pro  $\mathcal{Z} = \{Z_u^+, Z_u^-; u \in P\}$  platí  $\sum_{Z \in \mathcal{Z}} l(Z) = 2 \sum_{1 \leq i < j \leq k} n_i n_j$ .*

**Věta 17** (Merino, Salazar a Urrutia, 2006). *Nechť  $k > 1$  a  $P = P_1 \cup P_2 \cup \dots \cup P_k$ . Dále nechť  $|P_1| \geq |P_2| \geq \dots \geq |P_k|$ . Pak existuje cik-cak cesta o délce alespoň  $|P| - |P_1|$ .*

*Důkaz.* Dokážeme větu tak, že si vyjádříme průměrnou délku cik-cak cesty z množiny  $\mathcal{Z}$  z lemmatu 14. Nechť  $|P| = n$  a  $|P_i| = n_i$  pro každé  $1 \leq i \leq k$ . Pak

$$\text{platí, že } \frac{1}{|\mathcal{Z}|} \sum_{Z \in \mathcal{Z}} l(Z) = \frac{1}{n} \sum_{1 \leq i < j \leq k} 2n_i n_j = \frac{1}{n} (n^2 - \sum_{i=1}^k n_i^2) \geq n - n_1.$$

V druhé rovnosti jsme využili, že  $|\mathcal{Z}| = |P|$  (lemma 14), a tvrzení 16. Existuje tedy cik-cak cesta z množiny  $\mathcal{Z}$  o délce alespoň  $n - n_1$ . □

Z věty 17 dostáváme následující důsledek pro množiny s vyváženým  $k$ -obarvením. Speciálně pro  $k = 2$  dostaneme tvrzení 1.

**Důsledek.** *Nechť  $P$  je množina  $k \cdot n$  bodů s vyváženým  $k$ -obarvením. Pak existuje alternující cesta o délce alespoň  $(k - 1)n$ .*



# Kapitola 5

## Související problém

V této kapitole si představíme související problém o (anti)palindromech v cyklických posloupnostech nul a jedniček a ukážeme ekvivalentní reformulaci problému o separovaném párování na obarvené množině dvěma barvami.

Definice a značení budeme uvádět jako v článku (Müllner a Ryzhikov, 2019).

**Definice 22** (lineární slovo, podposloupnost slova). *Lineární slovo (dále jen slovo) nad abecedou  $A$  je konečná posloupnost prvků z  $A$ . Počet prvků v posloupnosti udává délku slova. Podposloupnost slova  $w = a_1, a_2, \dots, a_n$  je libovolné slovo  $w' = a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_m}$ , kde  $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_m \leq n$ .*

**Definice 23** (binární slovo). *Slovo nad abecedou  $A = \{0, 1\}$  budeme nazývat binární slovo.*

**Definice 24** (cyklické slovo, reprezentace). *Řekneme, že slovo  $w = a_1, a_2, \dots, a_n$  je ekvivalentní slovu  $z = z_1, z_2, \dots, z_n$ , pokud  $w$  je rotací  $z$ , nebo-li pokud platí, že  $w = z_k, z_{k+1}, \dots, z_n, z_1, \dots, z_{k-1}$  pro nějaké  $1 \leq k \leq n$ . Třidu ekvivalencí slova  $z$  nazveme cyklické slovo  $z$  a každé slovo patřící do třídy ekvivalence slova  $z$  nazveme reprezentace slova  $z$ .*

**Definice 25** (podposloupnost cyklického slova). *Řekneme, že slovo  $w$  je podposloupností cyklického slova  $z$ , pokud je  $w$  podposloupností nějaké reprezentace slova  $z$ .*

Cyklické slovo si tedy můžeme představit jako slovo, jehož písmena jsou zapsaná na kružnici bez určeného začátku a konce. To nám také může připomínat uspořádání  $P$  z předchozích kapitol.

Pokud si zvolíme abecedu  $A = \{0, 1\}$  a uvažujeme cyklická slova se stejným počtem nul a jedniček, pak opravdu získáváme uspořádání  $P$ , které jsme si zdefinovali v první kapitole, jen s tím rozdílem, že místo červených a modrých bodů uvažujeme nuly a jedničky.

Nyní si zdefinuujeme klíčové pojmy této kapitoly.

**Definice 26** (palindrom). Slovo  $w = a_1, \dots, a_n$  je *palindrom*, pokud  $a_i = a_{n-i+1}$  pro všechna  $1 \leq i \leq \lfloor n/2 \rfloor$ .

**Definice 27** (antipalindrom). Binární slovo  $w = a_1, \dots, a_n$  je *antipalindrom*, pokud  $a_i \neq a_{n-i+1}$  pro všechna  $1 \leq i \leq \lfloor n/2 \rfloor$ .

Lyngsø a Pedersen (1999) se ve svém článku, pojednávajícím o aproximačních algoritmech souvisejících se skládáním proteinů, zabývali problémem, který vedl k zajímavé kombinatorické otázce. S touto motivací Müllner a Ryzhikov (2019) zformulovali následující hypotézu.

**Hypotéza 18** (Müllner a Ryzhikov, 2019). *Nechť  $n$  je dělitelné 6. Pak každé binární cyklické slovo o délce  $n$  se stejným počtem nul a jedniček má jako podposloupnost antipalindrom délky alespoň  $\frac{2}{3}n$ .*

Toto tvrzení lze ekvivalentně vyjádřit jako problém separovaného párování v množině obarvené dvěma barvami. Máme-li antipalindrom binárního cyklického slova sudé délky, pak z definice první a poslední prvek se liší, stejně tak druhý a předposlední prvek a takto bychom mohli pokračovat dál. Když postupně tyto dvojice spojíme hranou, dostaneme dvoubarevné párování (mezi nulou a jedničkou), hrany se navíc nekříží, neboť antipalindrom je podposloupností, tedy dostaneme separované párování. Stejně tak ze separovaného párování můžeme získat antipalindrom sudé délky.

Přeformulované tvrzení by nám tedy říkalo, že na každé množině  $P$   $2n$  bodů, kde  $n$  je dělitelné 3, s vyváženým 2-obarvením existuje separované párování o velikosti alespoň  $\frac{4}{3}n$ , tedy existuje alternující cesta o délce alespoň  $\frac{4}{3}n \approx 1.33n$ . Ze třetí kapitoly však víme, že  $l(n) \leq (4 - 2\sqrt{2})n + o(n) \approx 1.17n + o(n)$  (věta 13), takže tato hypotéza 18 nemůže být pravdivá.

Nyní se podíváme na další tvrzení o antipalindromech v binárních cyklických slovech, které je reformulací věty 6 o separovaném párování.

**Tvrzení 19** (Mulzer a Valtr, 2020a). *Existuje pevné  $\varepsilon > 0$  takové, že pro každé sudé  $n$  má každé binární cyklické slovo o délce  $n$  se stejným počtem nul a jedniček jako podposloupnost antipalindrom délky alespoň  $n/2 + \varepsilon n$ .*

Podívejme se nyní na palindromy v cyklických binárních slovech. Na palindromy může nahlížet jako na separované párování s hranami vedoucími mezi stejně barevnými body.

Buď  $n$  dělitelné 4 a uvažujme binární cyklické slovo  $z$  délky  $n$  se stejným počtem nul a jedniček. Vezměme si jednu jeho reprezentaci  $w = w_1w_2w_3w_4$  rozdělenou na čtyři stejně dlouhá binární slova. Následující tvrzení říká, že vždy lze nalézt palindrom  $pp'$  délky  $\frac{1}{2}n$  takový, že  $p$  je podposloupnost  $w_1w_2$  a  $p'$  je podposloupnost  $w_3w_4$ , nebo palindrom  $qq'$  délky  $\frac{1}{2}n$  takový, že  $q$  je podposloupnost  $w_2w_3$  a  $q'$  je podposloupnost  $w_4w_1$ .

**Značení.** Pro palindromy splňující podmínky popsané výše budeme dále používat značení  $pp'$  a  $qq'$ .

**Hypotéza 20** (Müllner a Ryzhikov, 2019). Pro každé binární cyklické slovo délky  $n$  dělitelné 4 se stejným počtem nul a jedniček, a pro každou jeho reprezentaci  $w = w_1w_2w_3w_4$  má palindrom  $pp'$  nebo palindrom  $qq'$  délku alespoň  $\frac{1}{2}n$ .

Müllner a Ryzhikov (2019) ve svém článku dokázali pouze slabší verzi, která říká, že palindrom  $pp'$  nebo palindrom  $qq'$  má délku alespoň  $\frac{1}{3}n$ . Hypotézu 20 nedokázali, ale její správnost ověřili pomocí počítače do  $n = 30$ .

Nicméně Petr a Soukup (2021) pravdivost hypotézy 20 vyvrátili zkonstruováním binárního slova  $w$  se stejným počtem nul a jedniček takového, že nejdelší z palindromů  $pp'$ ,  $qq'$  má délku  $15n/32 + o(n)$ .

**Příklad.** Necht' parametr  $s$  je přirozené číslo, a necht'  $n = 16s^4$ . Uvažujme následující binární slova:  $w_1 = 0^{4s^4}$ ,  $w_2 = (1^30)^{s^4}$ ,  $w_3 = (1^{s^2}0^{s^2})^{2s^2}$ ,  $w_4 = (1^{3s}0^s)^{s^3}$ . Každé z těchto čtyř binárních slov, které je závislé na parametru  $s$ , má délku  $n/4$ .

**Tvrzení 21** (Petr a Soukup, 2021). Buď  $w_1, w_2, w_3, w_4$  jako z příkladu výše. Pak pro binární slovo  $w = w_1w_2w_3w_4$  platí, že nejdelší z palindromů  $pp'$ ,  $qq'$  na  $w$  má délku  $15n/32 + o(n)$ .

Petr a Soukup (2021) důkaz tohoto tvrzení detailně sepsali ve svém článku. Důkaz je však velmi technický a dlouhý, proto ho zde nebudeme uvádět. Autoři poznamenali, že nejmenší hodnota parametru  $s$ , pro kterou hypotéza 20 neplatí, je 5. Pro  $s = 5$  máme  $n = 16s^4 = 10000$ , a spočítáme-li pomocí počítače maximum z délek palindromů  $pp'$  a  $qq'$ , dostáváme hodnotu 4894, což je menší než 5000, tedy nejdelší z palindromů je menší než  $\frac{1}{2}n$  (Petr a Soukup, 2021).

V této kapitole jsme si ukázali, jak spolu souvisí antipalindromy cyklických binárních slov a separovaná párování na obarvené množině bodů dvěma barvami uspořádaných do kružnice. Uvedli jsme dvě hypotézy od Müllnera a Ryzhikova a ukázali jsme, že nejsou pravdivé. Jedna byla v rozporu s horním odhadem pro separované párování, který dokázal Csóka a kol. (2022), a druhá byla vyvrácena příkladem konkrétní konstrukce dle Petr a Soukup (2021), pro niž hypotéza neplatí.

# Závěr

V celé práci jsme se věnovali problému o nejdelších alternujících cestách v obarvených bodových množinách v konvexní poloze a souvisejícímu problému o separovaném párování.

Abychom porozuměli problému o alternujících cestách, který jsme zformulovali v první kapitole, zavedli jsme si nejprve potřebné pojmy. Vyjádřili jsme si číslo  $d$  z problému 1 jako funkci s proměnou  $n$ , kterou jsme označili  $l(n)$ .

Představili jsme nejlepší dosud publikovaný horní i dolní odhad  $l(n)$  a dohromady jsme ukázali, že  $(1 + \varepsilon)n < l(n) < (4 - 2\sqrt{2})n + o(n)$ , pro nějaké pevné kladné epsilon, které je však velmi malé, ale zatím není přesně vyčísleno. Vycházeli jsme při tom z uvedených článků, především z (Mulzer a Valtr, 2020a), (Kynčl, Pach a Tóth, 2005) a (Csóka a kol., 2022). Uvedené důkazy jsme volně adaptovali, v některých případech jsme je pro lepší srozumitelnost doplnili o potřebné kroky.

Ve čtvrté kapitole jsme se věnovali zobecnění problému na množiny obarvené více barvami. Celá tato kapitola vycházela z výsledků článku Merino, Salazar a Urrutia (2006). Pro množiny  $P = P_1 \cup P_2 \cup \dots \cup P_k$  obarvené  $k$  barvami jsme si ukázali, že na nich vždy existuje cik-cak cesta o délce alespoň  $|P| - |P_1|$ , kde  $P_1$  je největší z množin  $P_i$ . Pro množiny s vyváženým obarvením  $k$  barvami pak v důsledku platí, že vždy existuje alternující cesta na  $(k - 1)/k$  všech bodů dané množiny.

Na závěr jsme uvedli související problém (anti)palindromů v cyklických binárních slovech. Ukázali jsme, že problém hledání separovaného párování je ekvivalentní problému hledání antipalindromů. Uvedli jsme hypotézu 18 vycházející z problému o aproximačních algoritmech souvisejících se skládáním proteinů, který byl zformulován jako problém hledání délky nejdelšího antipalindromu v cyklickém binárním slově se stejným počtem nul a jedniček. Využitím věty 13 jsme však ukázali, že tato hypotéza není pravdivá.

## Seznam použité literatury

- Abellanas, Manuel a kol. (2003). “Camino alternantes”. In: *Actas X Encuentros de Geometria Computacional (in Spanish), Sevilla*, s. 7–12.
- Akiyama, Jin a Jorge Urrutia (1990). “Simple alternating path problem”. In: *Discrete Mathematics* 84.1, s. 101–103. ISSN: 0012-365X. DOI: [https://doi.org/10.1016/0012-365X\(90\)90276-N](https://doi.org/10.1016/0012-365X(90)90276-N). URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0012365X9090276N>.
- Brass, P., W.O.J. Moser a J. Pach (2006). *Research Problems in Discrete Geometry*. Springer New York. ISBN: 9780387238159. URL: <https://books.google.cz/books?id=WehCspo0Qa0C>.
- Csóka, Endre a kol. (2022). “Upper bounds for the necklace folding problems”. In: *Journal of Combinatorial Theory, Series B* 157, s. 123–143. ISSN: 0095-8956. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jctb.2022.05.012>. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0095895622000569>.
- Kynčl, Jan, János Pach a Géza Tóth (2005). “Long Alternating Paths in Bicolored Point Sets”. In: *Graph Drawing*. Ed. János Pach. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, s. 340–348. ISBN: 978-3-540-31843-9.
- Lyngsø, Rune B. a Christian N. S. Pedersen (1999). “Protein Folding in the 2D HP Model”. In: *BRICS Report Series* 6.16. DOI: 10.7146/brics.v6i16.20073. URL: <https://tidsskrift.dk/brics/article/view/20073>.
- Merino, C., G. Salazar a J. Urrutia (2006). “On the length of longest alternating paths for multicoloured point sets in convex position”. In: *Discrete Mathematics* 306.15, s. 1791–1797. ISSN: 0012-365X. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.disc.2006.03.035>. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0012365X06002214>.
- Müllner, Clemens a Andrew Ryzhikov (2019). “Palindromic Subsequences in Finite Words”. In: *Language and Automata Theory and Applications*. Ed. Carlos Martín-Vide, Alexander Okhotin a Dana Shapira. Cham: Springer International Publishing, s. 460–468. ISBN: 978-3-030-13435-8.
- Mulzer, Wolfgang a Pavel Valtr (2020a). “Long Alternating Paths Exist”. In: *36th International Symposium on Computational Geometry (SoCG 2020)*. Ed. Sergio Cabello a Danny Z. Chen. Sv. 164. Leibniz International Proceedings in

- Informatics (LIPIcs). Dagstuhl, Germany: Schloss Dagstuhl–Leibniz-Zentrum für Informatik, 57:1–57:16. ISBN: 978-3-95977-143-6. DOI: 10.4230/LIPIcs.SocG.2020.57. URL: <https://drops.dagstuhl.de/opus/volltexte/2020/12215>.
- Mulzer, Wolfgang a Pavel Valtr (2020b). “Long Alternating Paths Exist”. In: *CoRR* abs/2003.13291. arXiv: 2003.13291. URL: <https://arxiv.org/abs/2003.13291>.
- Mészáros, Viola a Peter Hajnal (2010). “Note on noncrossing path in colored convex sets”. In: s. 14. URL: <http://infoscience.epfl.ch/record/175677>.
- Petr, Jan a Jan Soukup (2021). “On longest palindromic subwords of finite binary words”. In: *Discrete Mathematics* 344.9, s. 112493. ISSN: 0012-365X. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.disc.2021.112493>. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0012365X21002065>.

# Seznam obrázků

1.1	Příklad konvexní a nekonvexní množiny . . . . .	3
1.2	Konvexní obal bodů a body v konvexní poloze . . . . .	4
1.3	Příklad alternující cesty . . . . .	5
1.4	Příklad alternující Hamiltonovské cesty a uspořádání, na kterém neexistuje alternující Hamiltonovská cesta . . . . .	7
2.1	Příklad separovaného párování a alternující cesty z něho vytvořené	12
2.2	Příklad k lemmatu 3 . . . . .	14
2.3	Příklad $(k, \lambda)$ -rozdělení . . . . .	16
2.4	párování úseků . . . . .	18
2.5	Příklad ke konstrukci separovaného párování z párování úseků .	18
3.1	Extrémní uspořádání podle Erdőse . . . . .	21
3.2	Příklad uspořádání jako v Lemmatu 9 . . . . .	22
4.1	cik-cak cesty $Z_u^+, Z_u^-$ . . . . .	27