MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ FAKULTA
Univerzita Karlova

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Štěpán Pardubický

Kellyho kritérium a Bayesovská statistika

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí bakalářské práce: doc. RNDr. Jan Večeř, Ph.D.
Studijní program: Matematika
Studijní obor: Obecná matematika

Praha 2023

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval(a) samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů. Tato práce nebyla využita k získání jiného nebo stejného titulu.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V .... dne ....

Podpis autora

Chtěl bych poděkovat svému vedoucímu bakalářské práce doc. RNDr. Janu Večeřovi, Ph.D. za odborné vedení, za pomoc a rady při zpracování této práce.

Název práce: Kellyho kritérium a Bayesovská statistika

Autor: Štěpán Pardubický

Katedra: Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí bakalářské práce: doc. RNDr. Jan Večeř, Ph.D., Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Abstrakt: Klasickým problémem investora je hledání výhodných investičních příležitostí. Jak by se měl však investor zachovat, pokud takovou příležitost nalezne? Na tuto otázku odpovídá Kellyho kritérium, nesoucí jméno po americkém vědci J.L.Kellym. Kritérium při opakovaných sázkách maximalizuje asymptotickou exponenciální míru růstu kapitálu, čehož docílí maximalizací střední hodnoty logaritmické užitkové funkce. Kritérium předpokládá fixní názor investora na skutečné pravděpodobnostní rozdělení. V praxi však není jasné, jak by měl být tento názor utvořen. V této práci zkombinujeme Kellyho kritérium s bayesovským přístupem, který umožní namísto fixního názoru uvažovat názorů více a nechat je validovat vývojem kapitálu. Na závěr aplikujeme získané poznatky na situaci investora na binomickém trhu.

Klíčová slova: Kellyho kritérium, Bayesovská statistika, Binomický trh

Title: Kelly criterion and Bayesian statistics

Author: Štěpán Pardubický

Department: Department of Probability and Mathematical Statistics

Supervisor: doc. RNDr. Jan Večeř, Ph.D., Department of Probability and Mathematical Statistics

Abstract: The classic problem of the investor is the search for profitable investment opportunities. But how should an investor behave if he finds such an opportunity? The Kelly criterion, named after the American scientist J.L. Kelly, answers this question. The criterion maximises the asymptotic exponential growth rate of capital in repeated bets, which it achieves by maximising the expected value of the logarithmic utility function. The criterion assumes a fixed investor's view of the true probability distribution. In practice, however, it is not clear how this opinion should be formed. In this paper, we combine the Kelly criterion with a Bayesian approach that allows to consider multiple opinions instead of a fixed opinion and let them be validated by the evolution of capital. Finally, we apply the findings to the investor's situation in the binomial market.

Keywords: Kelly criterion, Bayesian statistics, Binomial market

Obsah

Úvod

Při opakovaných sázkách s kladnou střední hodnotou je problematické nalézt rozumnou výši vsazené částky. Příliš velká sázka vede k vysoké pravděpodobnosti krachu. Příliš nízká sázka naopak není schopna dostatečně využít potenciál možného zisku. Tuto problematiku nastíníme na následující motivační úloze.

Mějme hráče prezentovaného s možností vsadit libovolnou část svého kapitálu na výsledek hodu férovou mincí. Výsledek hodu je nezávislá náhodná veličina s alternativním rozdělením s parametrem $p = 0{,}5$. Pokud vyhraje, obdrží nazpět jistý u-násobek vsazené částky ($u \in \mathbb{R}_+$). Pokud prohraje tak o celou vsazenou částku přijde. Buď X_1 náhodná veličina reprezentující výsledek hodu, V_0 počáteční kapitál hráče, V_1 kapitál po odehraném kole a $f_1 \in [0{,}1]$ část kapitálu, kterou se hráč rozhodne do hry vložit. Potom $V_1 = ((1 - f_1) + f_1 u X_1)V_0$ a

$$\mathsf{E}\,[V_1] = ((1 - f_1) + f_1 u\,\mathsf{E}\,X_1)V_0 = (1 + f_1(\frac{u}{2} - 1))V_0.$$

Z toho docházíme k intuitivnímu závěru, že hra bude výhodnou (ve smyslu positivní střední hodnoty), pokud $u > 2$. Za této podmínky bude $\mathsf{E}\,[V_1]$ maximalizována volbou $f_1 = 1$, neboli vsazením všeho.

Předpokládejme nyní, že hráč má možnost sázet opakovaně s cílem maximalizovat svůj kapitál v čase. Jednoduše lze nahlédnout, že střední hodnota kapitálu hráče v čase n bude maximalizována, pokud hráč v každém kole vsadí vše. Tato strategie má však zjevný problém. Hráč dříve nebo později neuspěje a přijde o veškerý svůj kapitál. Pravděpodobnost bankrotu v čase n je rovna $\left(\frac{1}{2}\right)^n \to 0$. Maximalizace střední hodnoty se tudíž pro racionálního hráče v dlouhodobém horizontu nejeví jako rozumná.

Co kdybychom jsme se pokusili naopak minimalizovat pravděpodobnost eventuálního bankrotu? Snadno lze nahlédnout, že toho hráč dosáhne, pokud nebude sázet vůbec nic. Potom by však zároveň minimalizoval střední hodnotu kapitálu V_1 a nebyl by schopen využít ani zjevně výhodné sázky. Proto není ani tato strategie žádoucí.

Poznámka. Pokud uvažujeme krach v běžném podání ($V_n = 0$), pak by i libovolná volba $f_i \in (0{,}1)$ nikdy nevedla ke krachu. V našem textu budeme za krach považovat pokles kapitálu pod jistou malou hladinu $\epsilon > 0$, která v praxi odpovídá minimální možné sázce.

Jak najít optimální výši sázky? Uspokojivou odpověď na tuto otázku lze nalézt v Kelly (1956). Kellyho kritérium namísto maximalizace střední hodnoty kapitálu maximalizuje střední hodnotu logaritmu v čase n. Kelly ve své práci argumentuje využitím logaritmu pro možnost použití zákona velkých čísel.

Definujme X_t náhodné veličiny popisující výsledek hodu mincí v časech t, V_t jako kapitál hráče v čase t a f_t jako část současného kapitálu V_{t-1} vsazenou na dané kolo hry. Dále definujme $Z_t = uX_t - 1$. Potom

$$V_n = (1 + f_n Z_n)V_{n-1} = \cdots = \prod_{t=1}^{n} (1 + f_t Z_t)V_0. \tag{1}$$

Jelikož jsou $Z_1, \ldots, Z_n$ nezávislé stejně rozdělené (dále značeno iid) náhodné veličiny, jeví se rozumné pro dlouhodobou strategii volit pevné f, takové že $f_t = f\ \forall t$.

Pokud se omezíme na tuto situaci, lze díky slabému zákonu velkých čísel (Anděl (1985) (Kapitola 10)) ukázat, že

$$\frac{1}{n}\log\left(\frac{V_n}{V_0}\right) = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}\log(1+fZ_t) \xrightarrow{P} \mathsf{E}^{P}[\log(1+fZ_1)] := g(f),$$

pro $n \to \infty$. Maximalizaci $g(f)$ lze chápat jako maximalizaci asymptotické exponenciální míry růstu. Výhody tohoto přístupu budou diskutovány později.

1. Kellyho kritérium

1.1 Odvození Kellyho zlomku

Prezentujme si situaci, která nás bude provázet během následujících kapitol. Buď $X_1, X_2 \dots$ posloupnost náhodných veličin, reprezentující binární výsledek daného kola hry. Tyto veličiny považujeme za iid s rozdělením $X_i \sim \text{Alt}(p')$, kde p' je neznámý parametr. Uvažujme dva aktéry. Jedním z nich je trh (sázková kancelář), určující cenu hry d. Druhým bude investor (hráč), snažící se maximalizovat hodnotu svého kapitálu. V celé práci budeme uvažovat několik základních zjednodušujích předpokladů.

1. Neuvažujeme transakční náklady.
2. Neuvažujeme časovou hodnotu aktiv (peněz).
3. Neuvažujeme minimální výši sázky.

Trh nabízí hráči možnost vsadit si na výsledek hry v kole t pomocí koupě libovolného množství digitálních kontraktů $K(0), K(1)$. Kontrakt $K(i)$ stojí v každém kole t cenu $d_i \in (0{,}1)$. Jeho držitel obdrží 1 v případě, že $X_t = i$ a 0 jinak.

$$K(1) = \begin{cases} 1 & \dots \text{ pro } X_t = 1, \\ 0 & \dots \text{ pro } X_t = 0. \end{cases} \qquad K(0) = \begin{cases} 0 & \dots \text{ pro } X_t = 1, \\ 1 & \dots \text{ pro } X_t = 0. \end{cases}$$

Koupí obou kontraktů $K(0), K(1)$ lze garantovat výplatu 1. Pro zamezení možnosti arbitráže (bezrizikového zisku) musí proto platit $d_0 + d_1 \geq 1$. Předpokládejme dále, že trh dovoluje dané kontrakty prodávat na krátko (prodávat trhu za cenu d_i). Pro zamezení arbitráže tak musí zároveň platit $d_0 + d_1 \leq 1$. Celkově dostáváme podmínku $d_0 = 1 - d_1$.

Poznámka. Pro více informací o arbitráži (arbitrage), prodeji na krátko (shorting) a digitálních kontraktech (Arrow-Debreu securities) odkazujeme čtenáře do Vecer (2011).

Pomocí definovaných kontraktů je hráč schopen pro zvolenou f_t docílit vývoje kapitálu

$$V_t = (1 + f_t(X_t - d_1))V_{t-1}. \tag{1.1}$$

Pro $f_t > 0$ toho docílí koupí $f_t V_{t-1}$ jednotek kontraktu $K(1)$. Pro $f_t < 0$ naopak koupí $-f_t V_{t-1}$ jednotek kontraktu $K(0)$. Možnost vsadit celý kapitál odpovídá omezení $f_t \in [-\frac{1}{d_0}, \frac{1}{d_1}]$. Pro zjednodušení výpočtu se omezíme na interval $(-\frac{1}{d_0}, \frac{1}{d_1})$. Kladná hodnota f_t vede k zisku při $X_t = 1$ (úspěch), zatímco záporná vede k zisku při $X_t = 0$ (neúspěch).

Poznámka. Všimněme si, že námi definované f_t nepopisuje přímo jaká část kapitálu je v daném kole vsazena. Ta se dá z f_t spočíst jako

$$f_t' = f_t d_1 \mathbb{1}(f_t > 0) - f_t d_0 \mathbb{1}(f_t < 0).$$

Jelikož pro ceny kontraktů platí $d_1 + d_0 = 1$, lze pomocí nich zkonstruovat pravděpodobnostní míru Q, pro kterou platí $Q(X_t = i) = d_i, \forall t, i \in \{0,1\}$. Tuto míru budeme chápat jako subjektivní názor trhu. Je snadné nahlédnout, že pro libovolné d_1 platí $\mathsf{E}^Q[K(i)] = 1d_i + 0 = d_i$. Střední hodnota digitálních kontraktů vzhledem k míře Q bude rovna jejich ceně. Jelikož hráč sází pomocí lineární kombinace těchto kontraktů, platí díky linearitě střední hodnoty pro libovolnou volbu $f_1, \dots, f_n$

$$\mathsf{E}^Q[V_n] = \cdots = V_0. \tag{1.2}$$

Hráč má konstantní subjektivní pravděpodobnostní názor P na výsledek každého kola hry. Tento názor lze reprezentovat pomocí $p = P(X_i = 1)$ subjektivního názoru hráče na „úspěch“. Obdobně budeme využívat značení $q = Q(X_i = 1) = d_1$. Dále se omezíme na situaci $q \in (0,1)$, neboli že ve hře je dle trhu přítomný element náhody.

Poznámka. Obě míry P,Q jsou subjektivní, skutečné rozdělení X_1,$X_2, \dots$ je určeno mírou $P' := P'(X_i = 1) = p'$.

Cílem hráče využívajícího Kellyho kritéria (dále jen Kellyho hráče) je zvolit konstantní $f_i = f, \forall i$ maximalizující jeho subjektivní střední hodnotu logaritmické užitkové funkce v čase n. Kellyho f^* odpovídá řešení následující deterministické optimalizační úlohy:

$$\begin{aligned} \max_f \quad & \mathsf{E}^P[\log(V_n)] \\ s.t \quad & \mathsf{E}^Q[V_n] = V_0 \end{aligned} \tag{1.3}$$

Jelikož

$$\log(V_n) = \log(\prod_{i=1}^n (1 + f(X_i - q))V_0) = \log(V_0) + \sum_{i=1}^n \log(1 + f(X_i - q))$$

a $X_1, \dots, X_n$ jsou iid, platí

$$\begin{aligned} \mathsf{E}^P[\log(V_n)] = \log(V_0) + \sum_{i=1}^n \mathsf{E}^P[\log(1 + f(X_i - q))] \\ = \log(V_0) + n\,\mathsf{E}^P[\log(1 + f(X_1 - q))]. \end{aligned}$$

Z toho plyne, že f^* maximalizující $\mathsf{E}^P[\log(V_n)]$ bude stejné jako f^* maximalizující $\mathsf{E}^P[\log(V_1)]$, neboli optimální vsazená část nezávisí na n. Podmínka $\mathsf{E}^Q[V_n] = V_0$ určuje pouze konkrétní ceny sázek. Kellyho zlomek f^* tak ekvivalentně obdržíme jako řešení úlohy

$$\max_f \quad \mathsf{E}^P[\log\left(\frac{V_1}{V_0}\right)] = p\log(1 + f(1-q)) + (1-p)\log(1 - fq) := g(f). \tag{1.4}$$

Díky diferencovatelnosti g a otevřenosti intervalu $(-\frac{1}{d_0}, \frac{1}{d_1}) = (-\frac{1}{1-q}, \frac{1}{q})$ obdržíme potenciální bod maxima jako kořen derivace g podle f.

$$\frac{\partial g}{\partial f} = \frac{p(1-q)}{1 + f(1-q)} - \frac{(1-p)q}{1 - fq}$$

$$f^* = \frac{p-q}{q(1-q)} \tag{1.5}$$

To, že se skutečně jedná o maximum plyne ze zápornosti druhé derivace

$$\frac{\partial^2 g}{\partial f^2} = -p(1-q)^2\left(\frac{1}{1+f(1-q)}\right)^2 - (1-p)q^2\left(\frac{1}{1-fq}\right)^2 < 0.$$

Funkce g nabývá svého ostrého globálního maxima v bodě f^*, jehož znaménko je určeno znaménkem $p-q$. Jinými slovy kritérium radí vsadit na ten výsledek, který je dle hráčova názoru pravděpodobnější, než dle názoru trhu. Pokud $p=q$, hráč by neměl sázet vůbec. Pokud $p \in \{0{,}1\}$, radí kritérium hráči vsadit vše co má. Při omezení se na $p \in (0{,}1)$ vidíme, že

$$\lim_{f \to -\frac{1}{1-q}^+} g(f) = \lim_{f \to \frac{1}{q}^-} g(f) = -\infty.$$

To odpovídá diskutovanému faktu, že sázení celého kapitálu v každém kole vede k eventuálnímu bankrotu.

Výše diskutované je shrnuto v následující větě.

Věta 1. *Uvažujme situaci binárních iid her prezentovanou výše, $p,q \in (0{,}1)$, $p \neq q$. Potom $g(f)$ definovaná v (1.4) nabývá na svém definičním oboru $(-\frac{1}{1-q},\frac{1}{q})$ ostrého globálního maxima v bodě $f^* = \frac{p-q}{q(1-q)}$ a má dva kořeny, jeden nulový a druhý v bodě f_0 takovém, že $0 < f^* < f_0$ nebo $f_0 < f^* < 0$. Funkce g je kladná mezi 0 a f_0 a záporná jinde.*

Důkaz. Funkce g je na $(-\frac{1}{1-q},\frac{1}{q})$ spojitá a dvakrát spojitě diferencovatelná. Bez újmy na obecnosti uvažujme $p > q$ (jinak bychom argumentovali obdobně symetricky). Existence f_0 plyne ze spojitosti g a faktů, že $g(f^*) > 0$ (f^* je ostré globální maximum a $g(0) = 0$) a $\lim_{f \to \frac{1}{q}^-} g(f) = -\infty$. Jedinečnost je zaručena ryzí monotonií na $(f^*, \frac{1}{q})$, plynoucí z nenulovosti derivace na tomto intervalu. Obdobně lze ukázat, že g je na $(-\frac{1}{1-q},f^*)$ ryze rostoucí.

□

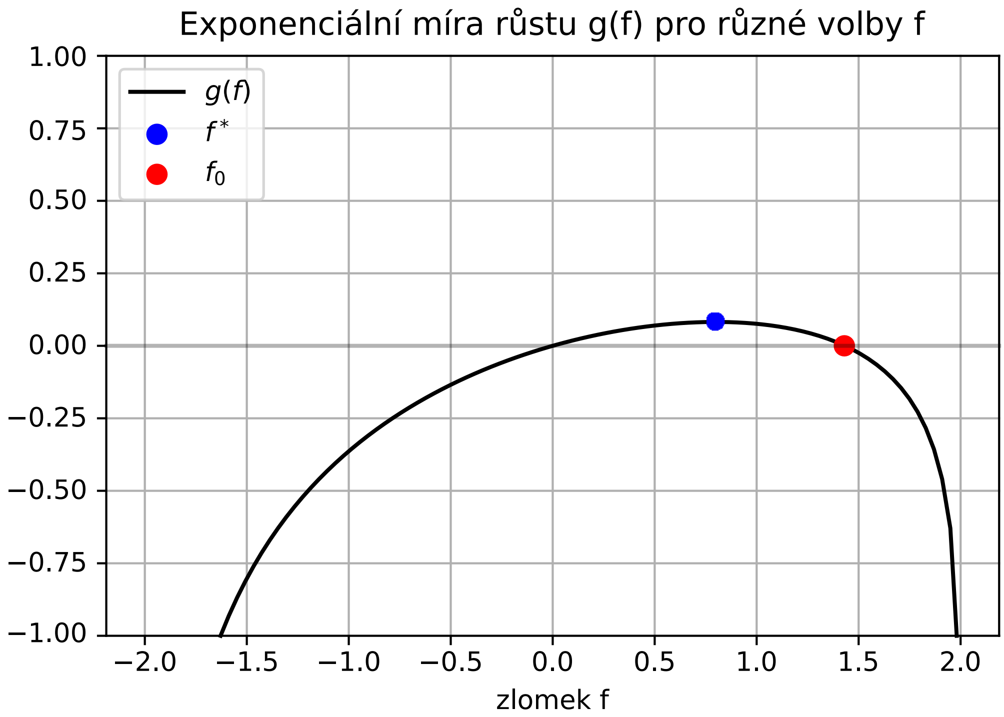
Příklad. Trh nabízí sázku za cenu $q = 0{,}5$. Hráčův pravděpodobnostní názor je $p = 0{,}7$. Dostáváme Kellyho $f^* = 0{,}8$ odpovídající reálné vsazené části $f^{*'} = 0{,}4$ v každém kole „na“ výsledek hry $X_i = 1$. Nenulový kořen g vychází $f_0 \approx 1{,}43$. Graf funkce $g(f)$ lze vidět na obrázku 1.1.

1.2 Vývoj kapitálu Kellyho hráče

V předchozí sekci jsme ukázali, jakou konstantní část kapitálu by měl hráč snažící se maximalizovat střední hodnotu logaritmu svého kapitálu vsadit v každém kole hry. Nyní budeme zkoumat vývoj kapitálu Kellyho hráče a ukážeme spojitost se známým Neymanovým-Pearsonovým lemmatem.

Dosazením f^* do (1.1) obdržíme vývoj

$$V_n = \begin{cases} \frac{p}{q} V_{n-1} & \dots \text{ pro } X_n = 1, \\ \frac{1-p}{1-q} V_{n-1} & \dots \text{ pro } X_n = 0. \end{cases} \tag{1.6}$$



Obrázek 1.1: Exponenciální míra růstu pro volbu p=0.7, q=0.5

Označme $\boldsymbol{X}_n = (X_1, \ldots, X_n)$ náhodný vektor popisující výsledky v kolech 1 až n a $\boldsymbol{x}_n = (x_1, \ldots, x_n)$ nula-jedničkový vektor popisující konkrétní realizaci. Potom lze jednoduchou rekurzí nahlédnout, že pro pevné $\boldsymbol{X}_n = \boldsymbol{x}_n$ bude kapitál v čase n

$$V_n = \left(\frac{p}{q}\right)^{\sum_{i=1}^n x_i} \left(\frac{1-p}{1-q}\right)^{n-\sum_{i=1}^n x_i} V_0. \tag{1.7}$$

Záleží tedy jen na počtu úspěchů (a neúspěchů), nikoliv na jejich pořadí. Označme dále $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ počet úspěchů v n kolech.

Definice 1 (věrohodnost)**.** *Buď $\boldsymbol{X}_n = (X_1 \ldots X_n)$ náhodný vektor, jehož rozdělení závisí na parametru $\theta \in \Theta$. Předpokládejme, že existuje hustota $\pi(\boldsymbol{x}_n; \theta)$ vektoru $\boldsymbol{X}_n$ vzhledem k nějaké σ-konečné míře λ pro každé $\theta \in \Theta$. Potom funkci L_n z Θ do $[0,\infty)$ takovou že $L_n(\theta) = \pi(\boldsymbol{x}_n; \theta)$ (pro $\boldsymbol{x}_n$ pevné) nazveme věrohodností θ.*

V našem případě je $\Theta = [0,1]$ a λ je (součinovou) čítací mírou. Pro pevné $S_n = s_n$ bude mít věrohodnost tvar

$$L_n(p) = p^{\sum_{i=1}^n x_i}(1-p)^{n-\sum_{i=1}^n x_i} = p^{s_n}(1-p)^{n-s_n}.$$

Pro kapitál v čase n platí

$$V_n = \frac{L_n(p)}{L_n(q)} V_0. \tag{1.8}$$

Neboli kapitál je proporcionální poměru věrohodností p a q. Následující známé lemma ukazuje význam poměru věrohodností.

Lemma 2 (Neymanovo-Pearsonovo lemma). *Buď P,Q pravděpodobnostní rozdělení odpovídající parametrům p,q. Nechť mají P,Q hustoty π_p,π_q vzhledem k σ-konečné míře λ. Potom:*

i Pro testování hypotézy $H_0 : p' = p$ proti alternativě $H_1 : p' = q$ na hladině $\alpha \in (0{,}1)$ existuje test ϕ a konstanta $k \geq 0$ taková, že $E^P \phi(X) = \alpha$ (X generované z rozdělení P) a $\phi(x) = \begin{cases} 1, & \text{je-li } \frac{\pi_q(x)}{\pi_p(x)} > k, \\ 0, & \text{je-li } \frac{\pi_q(x)}{\pi_p(x)} < k. \end{cases}$

ii Takto definovaný test je nejsilnější pro testování $H_0 : p' = p$ proti $H_1 : p' = q$ na hladině $\alpha \in (0{,}1)$.

Důkaz. viz Anděl (1985)

□

Díky Neymanovu-Pearsonovu lemmatu můžeme hodnotu kapitálu hráče využít jako testovou statistiku pro testování hypotézy $H_0 : p' = p$ proti alternativě $H_1 : p' = q$. H_0 zamítneme ve prospěch $H_1 : p' = q$ pro $\frac{V_n}{V_0} < k$. Tento test bude v jistém smyslu nejsilnější možný. Hodnotu k lze určit z podmínky $E^P \phi(X) = \alpha$ (jelikož testová statistika nabývá jen konečně mnoha hodnot, bude zapotřebí volit konzervativní α, nebo využít znáhodněného testu, viz Anděl (1985)). Pro dostatečně nízkou hodnotu kapitálu zamítáme hypotézu pravdivosti názoru hráče ve prospěch názoru trhu. Obdobně lze ukázat, že pro dostatečně velkou hodnotu kapitálu lze zamítnout hypotézu o validitě názoru trhu ve prospěch názoru hráče.

Pomocí hodnoty kapitálu jsme tak schopni zamítat nulové hypotézy o validitě pravděpodobnostních názorů. Na obrázku 1.2 lze vidět vývoj asymptotických konfidenčních intervalů pro logaritmus kapitálu v čase, zkonstruovaných pomocí centrální limitní věty (viz Anděl (1985)(Kapitola 10)). Vidíme, že postupem času se tyto intervaly stanou disjunktní. Díky dualitě intervalových odhadů a testování hypotéz lze pozorovaný vývoj kapitálu využít ke konstrukci asymptotických testů o reálné pravděpodobnosti výsledku p'.

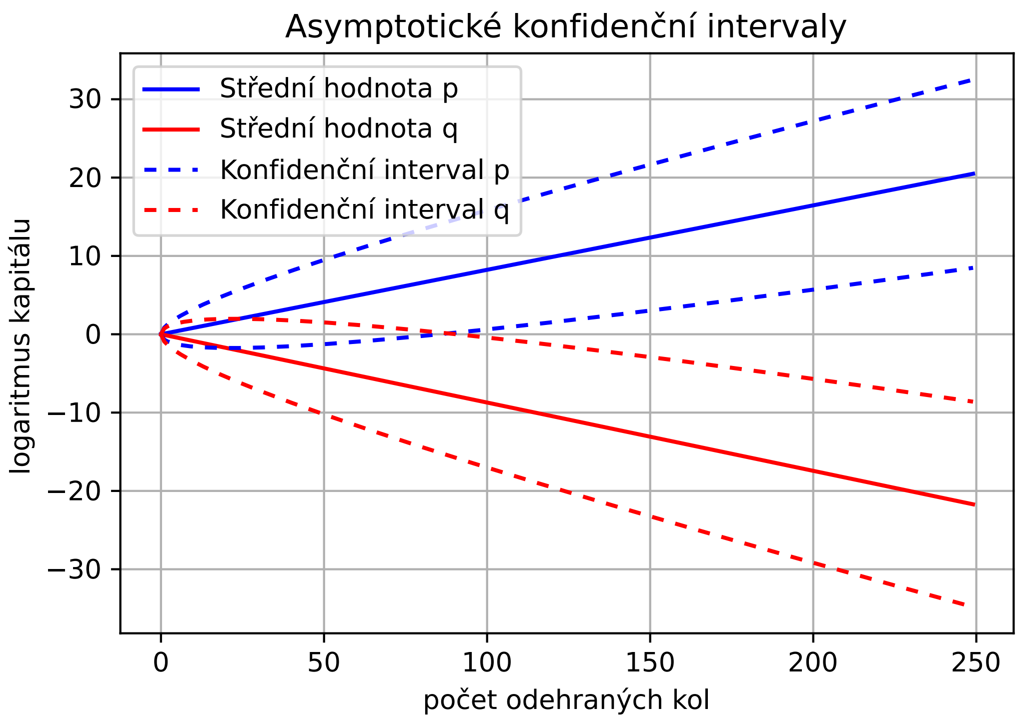
1.3 Vztah s teorií informace

Nyní nahlédneme propojení Kellyho kritéria s teorií informace. Klíčový zde bude pojem Kullbackovy-Lieblerovy divergence, někdy též nazývané relativní entropie.

Definice 2 (Kullbackova-Lieblerova divergence). *Buď P,Q pravděpodobnostní míry definované na stejném měřitelném prostoru. Nechť mají P,Q hustoty π_p,π_q vzhledem k σ-konečné míře λ. Potom Kullbackovu-Lieblerovu divergenci rozdělení P a Q definujeme*

$$D_{KL}(P||Q) = \int \log\left(\frac{\pi_p(x)}{\pi_q(x)}\right) \pi_p(x) d\lambda(x).$$

Relativní entropii lze chápat jako jakousi míru vzdálenosti mezi dvěma rozděleními. Má dvě podstatné vlastnosti (viz Kullback (1978)).



Obrázek 1.2: Asymptotické 95% konfidenční intervaly, zkonstruované pomocí centrální limitní věty, pro hodnotu logaritmu kapitálu hráče podle názoru hráče (p) a trhu (q) ($p = 0.7$, $q = 0.5$)

- nezápornost: $D_{KL}(P||Q) \geq 0$, kde rovnost nastává pouze když $P = Q$ s.j. (pravděpodobnostní míry splývají na všech množinách nenulové míry).
- asymetrie: $D_{KL}(P||Q) \neq D_{KL}(Q||P)$ (obecně).

V našem případě má relativní entropie tvar:

$$D_{KL}(P||Q) = p \log\left(\frac{p}{q}\right) + (1-p)\log\left(\frac{1-p}{1-q}\right) = \mathsf{E}^P[\log\left(\frac{V_1}{V_0}\right)].$$

Očekávaný nárůst logaritmu kapitálu Kellyho hráče v jednom kole odpovídá Kullbackově-Lieblerově divergenci mezi jeho názorem P a názorem trhu Q. Okamžitým důsledkem je, že toto očekávání bude vždy kladné, pokud se názory hráče a trhu liší. Navíc lze vidět, že očekávání bude tím vyšší, čím „vzdálenější“ jsou oba názory. Zároveň vidíme, že $\mathsf{E}^Q[\log(\frac{V_1}{V_0})] = -D_{KL}(Q||P)$ a proto bude toto očekávání naopak záporné.

Příklad. Uvažujme opět situaci s $p = 0{,}7$ a $q = 0.5$. Dosazením dostáváme

$$D_{KL}(P||Q) \approx 0.036 > 0, \qquad -D_{KL}(Q||P) \approx -0.038 < 0.$$

1.4 Asymptotické vlastnosti

Jak jsme již diskutovali, uvažovaná pravděpodobnostní rozdělení P a Q jsou pouze subjektivní, reálné rozdělení $X_1, \ldots$ je P'. V této sekci prozkoumáme vývoj kapitálu Kellyho hráče pro různé konfigurace parametrů p,q a p'. Omezíme se na situaci $p,q \in (0,1)$, aby byly všechny hodnoty dobře definovány.

Podívejme se nejprve na střední hodnotu kapitálu $\mathsf{E}^{P'}[V_n]$. Zajímá nás, kdy bude sázka výhodná ve střední hodnotě, neboli kdy bude $\mathsf{E}^{P'}[V_{i+1} - V_i] > 0$. Přímý výpočet dává

$$\mathsf{E}^{P'}[V_{i+1} - V_i] = \mathsf{E}^{P'}[f(X_{i+1} - q)V_i] = f(p' - q)V_i.$$

Hra bude výhodná pro situace, kdy $f(p' - q) > 0$. Pro Kellyho hráče to odpovídá situacím $\operatorname{sgn}((p - q)(p' - q)) = 1$ (sgn značí funkci signum). Pokud $p = q$ ($f = 0$) nebo $p' = q$ bude střední hodnota sázky nulová.

Vraťme se opět ke střední hodnotě logaritmu. Následující dvě věty dávají význam její maximalizaci.

Věta 3. *Uvažujme situaci opakovaných iid her s rozdělením P' prezentovanou výše. Nechť V_i značí kapitál hráče po i kolech. Nechť hráč sází v každém kole konstantní zlomek f. Buď $g(f) = \mathsf{E}^{P'}[\frac{1}{n}\log\left(\frac{V_n}{V_0}\right)] = \mathsf{E}^{P'}[\log\left(\frac{V_1}{V_0}\right)]$ střední hodnota logaritmu jednokrokového poměru kapitálu pro danou volbu f.*

i Pokud $g(f) > 0$, potom $\forall M \in \mathbb{R}_+$: $P'[\liminf_{n\to\infty} V_n > M] = 1$.

ii Pokud $g(f) < 0$, potom $\forall m \in \mathbb{R}_+$: $P'[\limsup_{n\to\infty} V_n < m] = 1$.

iii Pokud $g(f) = 0$ a $f \neq 0$, potom $\forall M,m \in \mathbb{R}_+$: $P'[\liminf_{n\to\infty} V_n > M] = 1$ a $P'[\limsup_{n\to\infty} V_n < m] = 1$.

Důkaz. Díky vlastnostem logaritmu platí

$$\log\left(\frac{V_n}{V_0}\right) = \log\left(\frac{V_n}{V_{n-1}} \cdots \frac{V_1}{V_0}\right) = \log\left(\frac{V_n}{V_{n-1}}\right) + \cdots + \log\left(\frac{V_1}{V_0}\right).$$

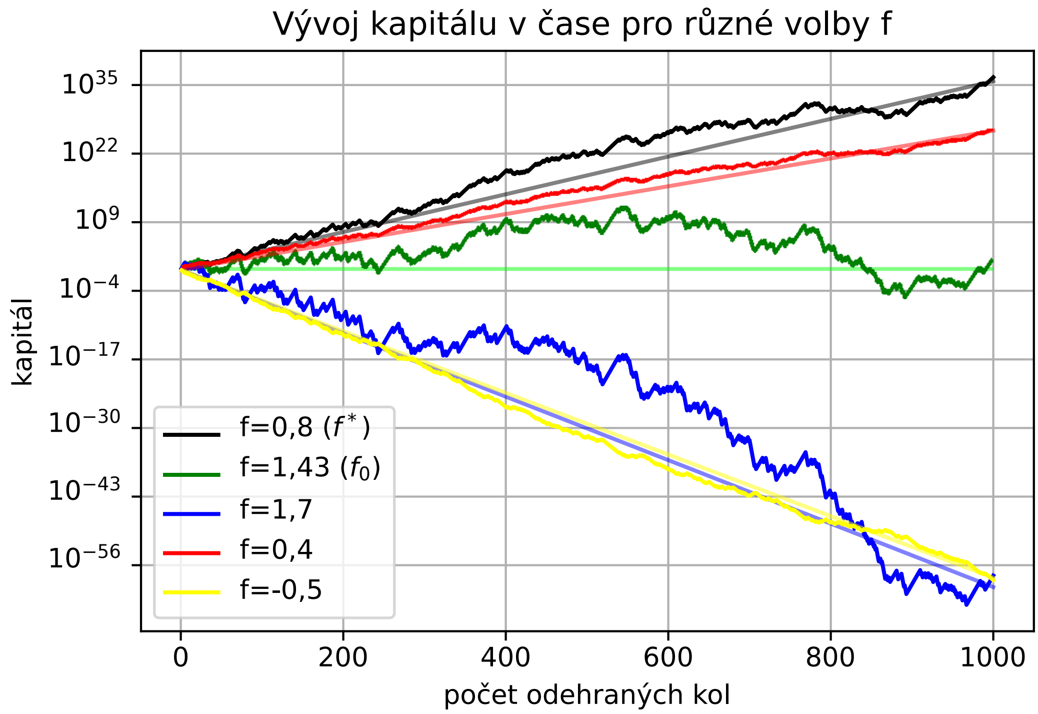
$\log\left(\frac{V_{i+1}}{V_i}\right)$ jsou iid náhodné veličiny s $\mathsf{E}^{P'}[\log\left(\frac{V_{i+1}}{V_i}\right)] = g(f)$. Zbytek plyne ze zákona velkých čísel. Důkaz lze detailněji nalézt v Thorp (1969) (Theorem 5). $\square$

Předchozí věta říká, že pro asymptotické vlastnosti vývoje kapitálu je klíčové znaménko $g(f)$. Pokud je $g(f) > 0$, může hráč krátkodobě pozorovat pokles kapitálu, postupem času však bude jeho kapitál růst nade všechny meze. Naopak pro $g(f) < 0$ je bankrot hráče s postupem času jistý. Pro $g(f) = 0$ bude kapitál hráče oscilovat kolem počáteční hodnoty V_0. Ukázku vývoje kapitálu pro různé volby f lze pozorovat na obrázku 1.3. Můžeme si všimnout, že vyšší vsazená část vede k vyšší volatilitě.

Z věty 1 víme, že pro $q \neq p'$ existuje celé kontinuum f, pro které je $g(f) > 0$. Význam volby právě f^* je popsán v následující větě.

Věta 4. *Uvažujme situaci z věty 3. Buď f_1, f_2 takové, že $g(f_1) > g(f_2)$. Nechť V_{n,f_i}, $i \in \{1,2\}$ značí kapitál v čase n hráče sázejícího v každém kole zlomek f_i. Potom*

$$\frac{V_{n,f_2}}{V_{n,f_1}} \xrightarrow{P'} 0, \qquad \textit{pro } n \to \infty.$$



Obrázek 1.3: Realizace vývoje kapitálu pro různé volby zlomku f ($p = p' = 0{,}7$, $q = 0{,}5$). Bledě jsou vyznačeny střední hodnoty.

Důkaz. Postup důkazu je obdobný jako ve větě 3. Detailní postup lze nalézt v Thorp (1969) (Theorem 6).

□

Kapitál Kellyho hráče (se znalostí reálné pravděpodobnosti p') tak eventuálně přeroste kapitál hráče užívajícího jakékoliv jiné konstantní f.

Poznámka. Lze ukázat, že užití Kellyho zlomku maximalizuje $\mathsf{E}^{P'}[\log(V_n)]$ nejen mezi strategiemi užívajících konstantních zlomků, ale i mezi strategiemi užívajících zlomků proměnlivých (viz Bellman a Kalaba (1957)).

Vraťme se k situaci Kellyho hráče s názorem p různým od p'. Z věty 3 plyne, že pro asymptotické vlastnosti vývoje kapitálu bude klíčové znaménko

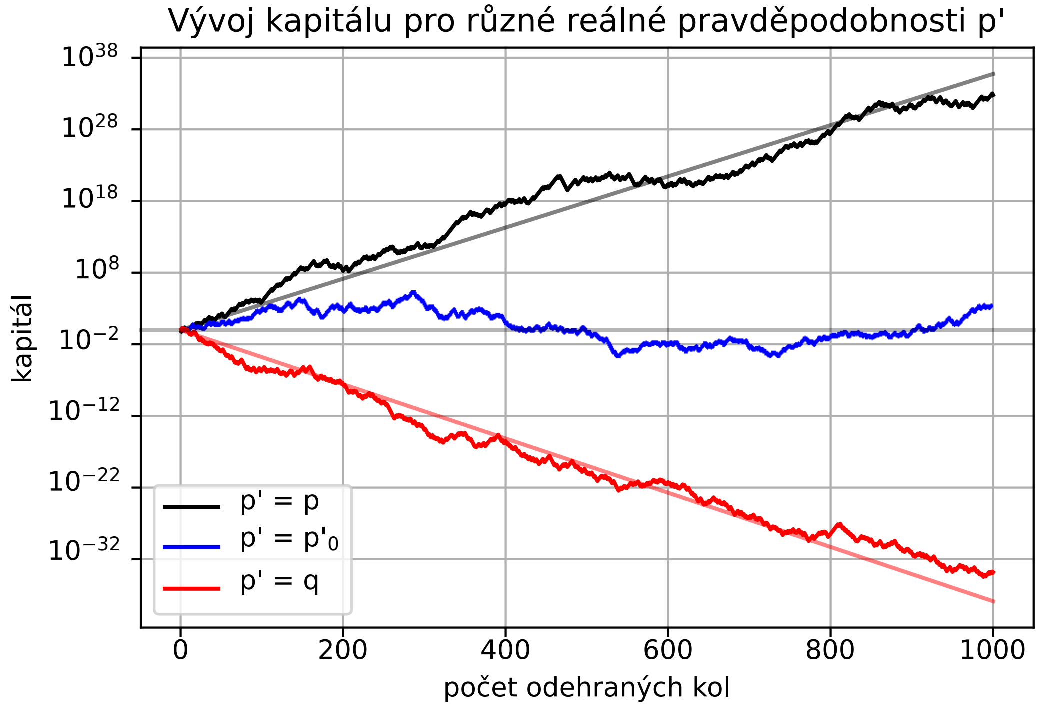
$$g(p') := \mathsf{E}^{P'}[\log(1 + f^*(X_1 - q))] = p' \log\left(\frac{p}{q}\right) + (1 - p') \log\left(\frac{1-p}{1-q}\right).$$

Pro $p = q$ je $f^* = 0$ a $g(p') = 0$. Pro $p \neq q$ má $g(p')$ jeden kořen a to v bodě

$$p'_0 = \frac{log(\frac{1-q}{1-p})}{log(\frac{p}{q}) + log(\frac{1-q}{1-p})}. \tag{1.9}$$

$$\frac{\partial g}{\partial p'} = log\left(\frac{p}{q}\right) - log\left(\frac{1-p}{1-q}\right) = log\left(\frac{\frac{p}{q}}{\frac{1-p}{1-q}}\right) = log\left(\frac{\frac{p}{1-p}}{\frac{q}{1-q}}\right)$$

Derivace $g(p')$ je konstantní (rovna logaritmu poměru šancí), kladná pro $p > q$, záporná naopak. Funkce $g(p')$ je tudíž lineární. Kořen p'_0 bude ležet mezi body p



Obrázek 1.4: Realizace vývoje kapitálu Kellyho hráče pro různé volby reálných pravděpodobností p' ($p = 0{,}7, q = 0{,}5$). Bledě jsou vyznačeny střední hodnoty.

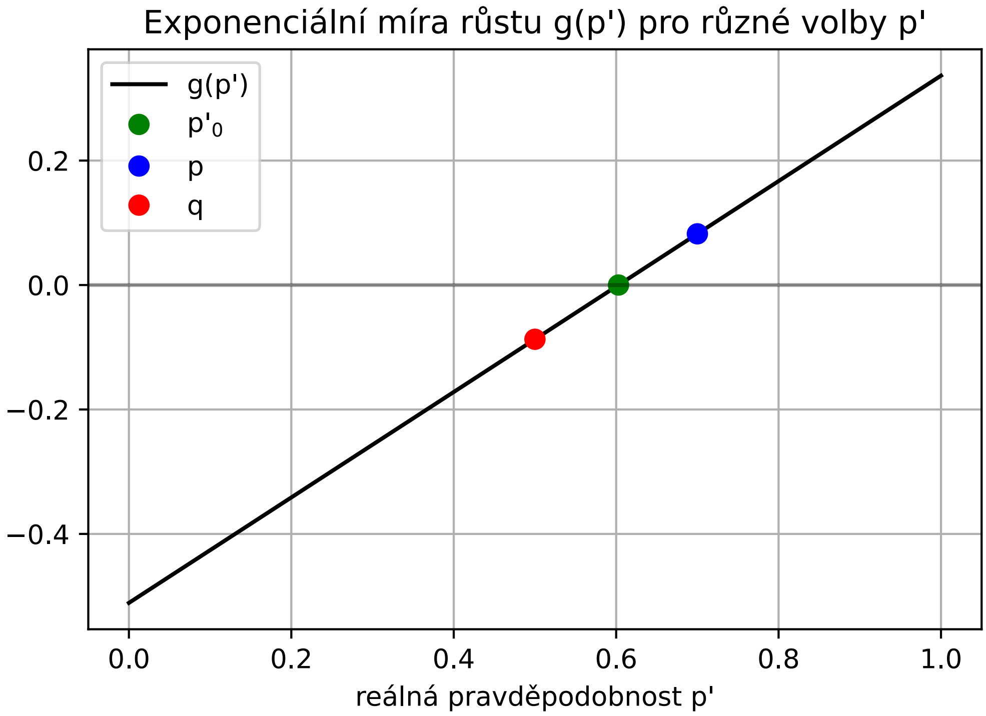
a q, což je důsledkem teorie diskutované v sekci 1.3:

$$g(p) = p \log\left(\frac{p}{q}\right) + (1-p)\log\left(\frac{1-p}{1-q}\right) = D_{KL}(P||Q) > 0$$

$$g(q) = q \log\left(\frac{p}{q}\right) + (1-q)\log\left(\frac{1-p}{1-q}\right) = -D_{KL}(Q||P) < 0$$

Funkce $g(p')$ bude nulová pouze v p'_0, kladná na tom z intervalů $[0,p'_0)$, $(p'_0,1]$ obsahujícím p a záporná na intervalu obsahujícím q. Pomocí věty 3 lze tak snadno nahlédnout, jak se bude kapitál vyvíjet pro konkrétní hodnoty p'.

Příklad. Předpokládejme opět $p = 0{,}7$ a $q = 0.5$. Dosazením do (1.9) dostáváme $p'_0 \approx 0{,}603$. Ukázku realizací vývoje kapitálu Kellyho hráče v tomto případě pro různé volby reálné pravděpodobnosti p' lze vidět na obrázku 1.4. Linearitu funkce $g(p')$ lze nahlédnout z obrázku 1.5.



Obrázek 1.5: Exponenciální míra růstu v závislosti na p'_0 ($p = 0{,}7, q = 0{,}5$)

2. Bayesovský přístup

Jedním z problémů prezentovaného přístupu byl předpoklad pevného pravděpodobnostního názoru hráče. V praxi není jasné, jak by si ho měl hráč předem utvořit. Jednou z možností, jak tento problém vyřešit, je umožnit hráči mít názorů více. Právě to umožňuje využití metod bayesovské statistiky.

2.1 Základní principy bayesovské statistiky

Bayesovská statistika, nesoucí jméno po anglickém knězi Thomasu Bayesovi, je větev statistiky, která je alternativou častější frekventistické statistiky. Frekventistická statistika stojí na následujících třech postulátech (viz Wasserman (2004)(Kapitola 11)):

F1 Pravděpodobnost popisuje asymptotické relativní frekvence.

F2 Parametry jsou pevné neznámé konstanty. Jelikož jsou fixní, pravděpodobnostní výroky o jejich hodnotách nedávají smysl.

F3 Statistické procedury by měly být navrhnuty tak, aby měly dobře definované limitní vlastnosti.

Tyto postuláty jsou v kontrastu s postuláty bayesovskými:

B1 Pravděpodobnost popisuje míru jistoty, kterou o daném jevu máme. To umožňuje přidělovat pravděpodobnost jevům, které se neopakují. Například má smysl mluvit o pravděpodobnosti, že daný politik vyhraje v prezidentských volbách.

B2 Parametry chápeme jako náhodné veličiny. Pravděpodobnostní výroky o neznámých parametrech dávají smysl.

B3 Statistické inference o hodnotách neznámého parametru se provádí pomocí sestrojení jejich pravděpodobnostního rozdělení, které lze následně využít k sestrojení odhadů.

Bayesovská statistika vnímá pravděpodobnost jako subjektivní, což bývá mezi statistiky vnímáno jako kontroverzní. V naší situaci jsme však již od začátku brali pravděpodobnostní míry aktérů jako názory a neřešili jejich objektivní validitu. Bayesovský přístup umožní pevný názor p hráče dále „rozmělnit“ a zároveň dá jednoduchý návod, jak názor měnit při pozorování nových výsledků.

Zásadní roli v bayesovké statistice hraje podmíněná pravděpodobnost a známá Bayesova věta.

Definice 3 (podmíněná pravděpodobnost)**.** *Nechť A,B jsou jevy a $P(B) > 0$. Potom podmíněnou pravděpodobnost jevu A a podmínky B definujeme $P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$.*

Věta 5 (Bayesova věta)**.** *Mějme nejvýše spočetnou posloupnost navzájem se vylučujících jevů A_i, tvořící rozklad prostoru elementárních jevů Ω, $P(A_i) > 0$ pro každé i a jev B takový, že $P(B) > 0$. Potom*

$$P(A_i|B) = \frac{P(B|A_i)P(A_i)}{P(B)} = \frac{P(B|A_i)P(A_i)}{\sum_j (P(B|A_j)P(A_j))}.$$

Důkaz. První rovnost plyne přímo z definice podmíněné pravděpodobnosti, druhá z věty o úplné pravděpodobnosti (viz Wasserman (2004)(Theorem 1.16)).

□

Při bayesovské inferenci typicky známe tzv. apriorní pravděpodobnosti $P(A_i)$ a podmíněné pravděpodobnosti $P(B|A_i)$. Z nich jsme pomocí Bayesovy věty schopni určit tzv. aposteriorní pravděpodobnosti $P(A_i|B)$.

Příklad. Mějme pytel s mincemi, o němž víme, že obsahuje 10% mincí falešných a zbytek pravých. Víme, že na falešné minci padne panna s pravděpodobností $\frac{3}{4}$ a orel s pravděpodobností $\frac{1}{4}$. U pravé mince je pravděpodobnost obou výsledků stejná. Z pytle jsme vytáhli jednu minci, hodili s ní a padla panna. Jaká je pravděpodobnost, že je vytažená mince falešná?

Nechť A_1 symbolizuje vytažení pravé mince a A_2 vytažení mince falešné. Dále nechť B_1 značí padnutí panny. Apriorní pravděpodobnosti jsou $P(A_1) = 0.9$ a $P(A_2) = 0.1$. Dále známe pravděpodobnosti $P(B_i|A_j)$. Pomocí Bayesova vzorce jsme schopni požadovanou pravděpodobnost $P(A_2|B_1)$ spočíst následovně:

$$P(A_2|B_1) = \frac{P(B_1|A_2)P(A_2)}{P(B_1)} = \frac{P(B_1|A_2)P(A_2)}{\sum_{i=1}^{2} P(B_1|A_i)P(A_i)} \approx 0.14$$

Předchozí příklad nastiňuje běžný bayesovský postup.

0 Specifikace modelu

1 Sestrojení apriorního rozdělení

2 Provedení pozorování a aktualizace apriorního rozdělení na aposteriorní

3 Využití aposteriorního rozdělení k zodpovězení statistických otázek

Bayesovu větu lze přímočaře zobecnit pro spojité náhodné veličiny pomocí podmíněných hustot (převzato z Anděl (1985)).

Definice 4 (podmíněná hustota)**.** *Mějme náhodný vektor $Z = (X_1, \dots, X_n)$. Položme $X = (X_1, \dots, X_r)$, $Y = (X_{r+1}, \dots, X_n)$, kde $1 \le r < n$. Předpokládejme, že Z má hustotu $\pi_z(z)$ vzhledem k součinové míře $\mu = \lambda \times \nu$, kde λ je σ-konečná míra na $(\mathbb{R}_r, \mathscr{B}_r)$ a ν je σ-konečná míra na $(\mathbb{R}_{n-r}, \mathscr{B}_{n-r})$. Podmíněnou hustotou náhodného vektoru Y při pevném $X = x$ nazveme takovou nezápornou měřitelnou funkci $\pi_y(y|x)$, která pro libovolné množiny $B \in \mathscr{B}_r$ a $C \in \mathscr{B}_{n-r}$ splňuje*

$$P(X \in B, Y \in C) = \int_B \left(\int_C \pi_y(y|x) d\nu(y) \right) \pi_x(x) d\lambda(x),$$

kde $\pi_x(x)$ je marginální hustota vektoru X.

Věta 6 (Bayesova věta, spojitá verze)**.** *Buď $\pi_y(y)$ marginální hustota náhodného vektoru Y a $\pi_x(x|y)$ podmíněná hustota vektoru X při daném Y. Potom podmíněná hustota $\pi_y(y|x)$ vektoru Y při daném X je rovna*

$$\pi_y(y|x) = \begin{cases} \frac{\pi_x(x|y)\pi_y(y)}{\int \pi_x(x|y)\pi_y(y)d\nu(y)}, & \textit{pokud} \int_{\mathbb{R}_{n-r}} \pi_x(x|y)\pi_y(y)d\nu(y) > 0, \\ 0, & \textit{jinak.} \end{cases}$$

Důkaz. viz Anděl (1985)(Věta 14)

□

Definice 5 (apriorní hustota, aposteriorní hustota)**.** *V kontextu bayesovské statistiky nazýváme $\pi_y(y)$ z předchozí definice apriorní hustotou, $\pi_y(y|x)$ aposteriorní hustotou a $\pi_x(x|y)$ věrohodností.*

Poznámka. V předchozí definici plní Y roli parametru a X roli pozorování. V uvažovaných situacích typicky známe (volíme si) apriorní hustotu a věrohodnost (plyne z uvažovaného modelu). Na základě pozorování z nich lze pomocí Bayesovy věty spočíst aposteriorní hustotu. Jmenovatel v předchozí definici nezávisí na hodnotě y. Jedná se pouze o normující konstantu. Často se využívá značení $\pi_y(y|x) \propto \pi_x(x|y)\pi_y(y)$, kde znaménko $\propto$ značí proporcionalitu (rovnost až na konstantu).

Poznámka. V sekci 1.2 jsme definovali pojem věrohodnosti jakožto funkci parametru θ (značeno $L_n(\theta)$). V kontextu bayesovské statistiky budeme používat běžně ustálené značení $\pi_x(x|\theta)$.

Důležitý význam v bayesovské inferenci mají takzvané konjungované systémy rozdělení (hustot). Zhruba řečeno se jedná o takové systémy rozdělení, kde pro libovolné apriorní rozdělení z tohoto systému a libovolná pozorování (věrohodnosti) bude i vzniklé aposteriorní rozdělení patřit do tohoto systému. V naší situaci iid binárních náhodných veličin bude tuto roli zastávat systém beta rozdělení.

Definice 6 (beta rozdělení)**.** *Řekneme, že náhodná veličina X má beta rozdělení s parametry $\alpha,\beta > 0$ ($X \sim Be(\alpha,\beta)$), pokud její hustota, vzhledem k Lebesgueově míře je rovna*

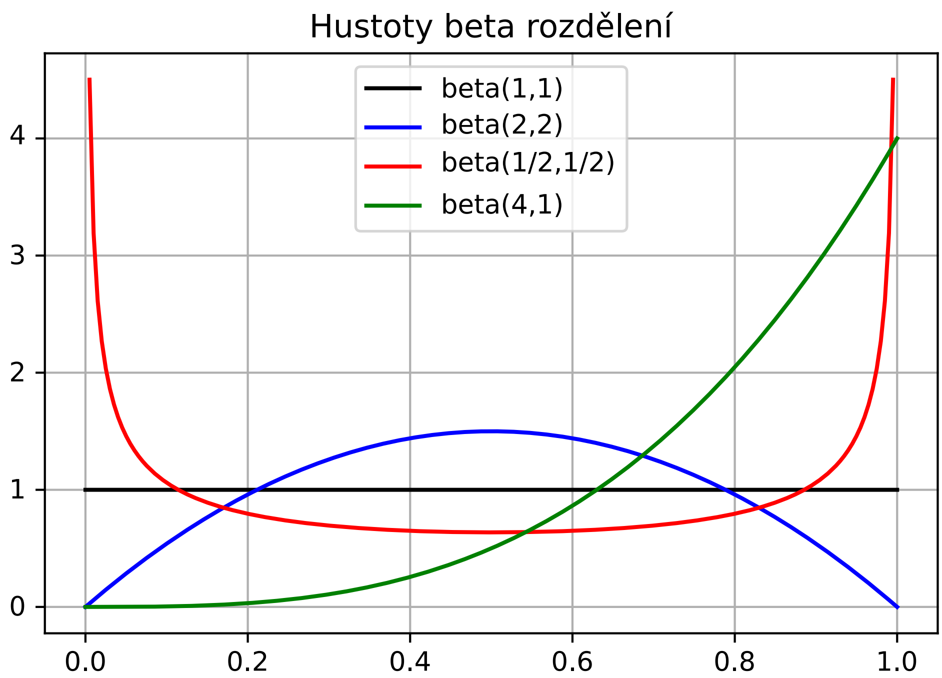
$$\pi_x(x;\alpha,\beta) = \begin{cases} \frac{1}{B(\alpha,\beta)} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}, & \textit{pro } x \in [0,1], \\ 0, & \textit{jinak.} \end{cases}$$

$B(\alpha,\beta) = \int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}dx = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$ *značí beta funkci.*

Systém beta rozdělení je relativně široký. Příklady některých beta hustot lze vidět na obrázku 2.1. V této práci se omezíme právě na tento systém pro usnadnění výpočtů. Beta funkce má následující užitečnou vlastnost.

Lemma 7. *Buď $\alpha,\beta \in \mathbb{R}_+$. Potom platí*

$$B(\alpha+1,\beta) = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}B(\alpha,\beta), \qquad B(\alpha,\beta+1) = \frac{\beta}{\alpha+\beta}B(\alpha,\beta).$$



Obrázek 2.1: Hustoty některých beta rozdělení

Důkaz. Plyne z rekurzivní vlastnosti gamma funkce $\Gamma(a+1) = a\Gamma(a)$ (pro a kladná) a vztahu $B(\alpha,\beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$.

□

Často budeme potřebovat znát střední hodnotu náhodné veličiny s beta rozdělením. Následující lemma dává jednoduchý vzorec pro její výpočet.

Lemma 8. *Buď X náhodná veličina s Be(α,β) rozdělením. Potom*

$$\mathsf{E}[X] = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}.$$

Důkaz. Plyne z lemmatu 7, konkrétně pro $X \sim \mathrm{Be}(\alpha,\beta)$

$$\mathsf{E}[X] = \frac{B(\alpha+1,\beta)}{B(\alpha,\beta)} = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}.$$

□

2.2 Bayesovský hráč

Následující sekce je převzata z článku Browne a Whitt (1996). Propojme nyní pojmy z předchozí sekce s uvažovanou situací hráče a trhu. Pevný pravděpodobnostní názor hráče p nahradíme apriorním rozdělením $\pi(p)$ na intervalu [0,1]. To umožní reprezentovat hráčův volnější pravděpodobnostní názor. Bayesova věta (věta 6) dává návod, jak se tento názor bude měnit s pozorovanými výsledky. Ať

$\pi(p)$ značí apriorní názor hráče a $q \in (0,1)$ fixní názor trhu, reflektovaný v ceně hry. Aposteriorní názor hráče po k kolech bude

$$\pi(p|\boldsymbol{X}_k = \boldsymbol{x}_k) = \frac{\pi(p)p^{\sum_{i=1}^k x_i}(1-p)^{k-\sum_{i=1}^k x_i}}{\int_0^1 \pi(p)p^{\sum_{i=1}^k x_i}(1-p)^{k-\sum_{i=1}^k x_i}} \propto \pi(p)p^{\sum_{i=1}^k x_i}(1-p)^{k-\sum_{i=1}^k x_i}. \tag{2.1}$$

Pro apriorní rozdělení Be(α,β) dostáváme aposteriorní rozdělení

$$\pi(p|\boldsymbol{X}_k = \boldsymbol{x}_k) = \mathrm{Be}(\alpha + \sum_{i=1}^k x_i, \beta + k - \sum_{i=1}^k x_i). \tag{2.2}$$

Aposteriorní rozdělení závisí pouze na celkovém počtu úspěchů a neúspěchů, nikoliv na jejich pořadí. Označme $S_k = \sum_{i=1}^k X_k$, $S_0 = 0$ počet úspěchů a $\pi(p|\boldsymbol{X}_k = \boldsymbol{x}_k) = \pi(p|S_k = s_k)$ aposteriorní hustotu po k kolech hry. Z (2.1) lze zároveň nahlédnout, že systém beta rozdělení bude v této situaci skutečně konjungovaný. Definujme dále apriorní střední hodnotu parametru p jako $\mathsf{E}^P[p] = \int_0^1 p\pi(p)dp$ a aposteriorní střední hodnotu jako $\mathsf{E}^P[p|S_k = s_k] = \int_0^1 p\pi(p|S_k = s_k)dp$.

Z hráčova pohledu je pravděpodobnost úspěchu p v každém kole náhodná s daným aposteriorním rozdělením. Při její znalosti platí $P(X_i = 1|p) = p$ a tak pro $n > k$ definujeme

$$P(X_n = 1|S_k) = \int_0^1 P(X_n = 1|p)\pi(p|S_k)dp = \mathsf{E}^P[p|S_k],$$

jako názor hráče na výsledek n-tého kola hry po k pozorovaných kolech. Pravděpodobnostní míru $P(.|S_k)$ je zapotřebí chápat jako agregovanou pravděpodobnostní míru, vzniklou kombinací pravděpodobnostních měr $P(.|p)$ jednotlivých názorů váženě pomocí aposteriorní střední hodnoty. Jelikož $X_n \in \{0,1\}$, definujeme

$$\mathsf{E}^P[g(X_n)|S_k] = \int_0^1 (P(X_n = 1|p)g(1) + (1 - P(X_n = 1|p))g(0))\pi(p|S_k)dp,$$

jako aposteriorní střední hodnotu $g(X_n)$ v čase k pro libovolnou funkci g, pro kterou je integrál definován.

Cílem bayesovského hráče je maximalizovat

$$\mathsf{E}^P[\log\left(\frac{V_n}{V_0}\right)] = \mathsf{E}^P[\sum_{i=1}^n \log(1 + f_i(X_i - q))].$$

V každém kole smí přitom vsazený zlomek f_k záviset nanejvýš na výsledcích z kol $1,\ldots,k-1$. Pro nalezení optimálních $f_1,\ldots,f_n$ využijeme následující rekurzivní argumentace. Nechť hráč hrál hru $n-1$ kol. Jeho cílem je zvolit f_n maximalizující

$$\begin{aligned}
\mathsf{E}^P[\log\left(\frac{V_n}{V_{n-1}}\right)|S_{n-1}, V_{n-1}] &= \mathsf{E}^P[\log(1 + f_n(X_n - q))|S_{n-1}] \\
&= \int_0^1 (p\log(1 + f_n(1-q)) + (1-p)\log(1 - f_nq))\pi(p|S_{n-1})dp \\
&= \log(1 + f_n(1-q))\,\mathsf{E}^P[p|S_{n-1}] + \log(1 - f_nq)(1 - \mathsf{E}^P[p|S_{n-1}]).
\end{aligned} \tag{2.3}$$

Obdobně jako v první kapitole lze pomocí diferenciace ukázat, že f_n maximalizující (2.3) bude

$$f_n^* = \frac{\mathsf{E}^P[p|S_{n-1}] - q}{q(1-q)}.$$

Namísto názoru p používá hráč při volbě zlomku současnou aposteriorní střední hodnotu $\mathsf{E}^P[p|S_{n-1}]$. Jelikož f_n^* nezávisí na hodnotě kapitálu V_{n-1}, lze spočíst f_{n-1}^* jako zlomek maximalizující $\mathsf{E}^P[\log(V_{n-1})|S_{n-2},V_{n-2}]$ a obdobně postupovat až po f_1^*. Celkově dostáváme, že $f_1^*, \dots, f_n^*$ maximalizující $\mathsf{E}^P[\log(V_n)]$ pro libovolný (konečný) počet kol n budou

$$f_i^* = \frac{\mathsf{E}^P[p|S_{i-1}] - q}{q(1-q)} \qquad \forall i = 1, \dots, n. \tag{2.4}$$

Volbou Be(α,β) za apriorní rozdělení dostáváme díky lemmatu 8 a (2.2)

$$f_i^* = \frac{\frac{\alpha+S_{i-1}}{\alpha+\beta+i-1} - q}{q(1-q)} \qquad \forall i = 1, \dots, n.$$

Předpokládejme, že hráč využívá zlomků definovaných v (2.4) s apriorním Be(α,β) rozdělením. Pomocí (1.6), (2.2) a lemmat 7 a 8 lze nahlédnout deterministický vývoj kapitálu

$$V_{k+1} = \begin{cases} \frac{\mathsf{E}^P[p|S_k=s_k]}{q} V_k = \frac{1}{q} \frac{B(\alpha+s_k+1,\beta+k-s_k)}{B(\alpha+s_k,\beta+k-s_k)} V_k & \dots \text{pro } X_{k+1} = 1, \\ \frac{1-\mathsf{E}^P[p|S_k=s_k]}{1-q} V_k = \frac{1}{1-q} \frac{B(\alpha+s_k,\beta+k-s_k+1)}{B(\alpha+s_k,\beta+k-s_k)} V_k & \dots \text{pro } X_{k+1} = 0. \end{cases} \tag{2.5}$$

Pomocí beta funkcí tak lze vyjádřit kapitál hráče V_k jako

$$V_k = \left(\frac{1}{q}\right)^{S_k} \left(\frac{1}{1-q}\right)^{k-S_k} \frac{B(\alpha+S_k,\beta+k-S_k)}{B(\alpha,\beta)} V_0. \tag{2.6}$$

Výsledný kapitál opět nezávisí na pořadí úspěchů a neúspěchů, přestože hráč nevyužívá konstantního zlomku.

2.3 Alternativní pohled

V předchozí sekci jsme ukázali, jak Kellyho strategie bayesovského hráče vede k nahrazení pevné hodnoty názoru p v každém kroku jeho aposteriorní střední hodnotou. Zajímavým pozorováním je, že tato strategie je ekvivalentní „rozložení“ kapitálu hráče mezi jeho názory váženě pomocí apriorního rozdělení a ponechání dílčích kapitálů samostatnému vývoji pomocí metod z první kapitoly.

Poznámka. Držení dílčích kapitálů dává smysl pouze pro nejvýše spočetně mnoho názorů. Pro kontinuum názorů (apriorní hustotu absolutně spojitou vzhledem k Lebesgueově míře) je zapotřebí chápat dílčí kapitály pomocí hustoty. Jelikož pak každému konkrétnímu názoru nepřipadá žádný kapitál, nelze v praxi provést apriorní rozložení kapitálu. Pro praktické využití by bylo zapotřebí aproximovat apriorní rozdělení nějakým diskrétním rozdělením a rolzožit kapitál pomocí něj.

Pro apriorní rozdělení Be(α,β) s hustotou $\pi(p)$ platí

$$V_1 = \begin{cases} \int_0^1 \frac{p}{q}\pi(p)dpV_0 = \frac{1}{q}\frac{B(\alpha+1,\beta)}{B(\alpha,\beta)}V_0 & \dots \text{pro } X_1 = 1, \\ \int_0^1 \frac{1-p}{1-q}\pi(p)dpV_0 = \frac{1}{1-q}\frac{B(\alpha,\beta+1)}{B(\alpha,\beta)}V_0 & \dots \text{pro } X_1 = 0. \end{cases}$$

Pomocí relativního zhodnocování jednotlivých názorů pak bude mít aposteriorní hustota tvar

$$\pi(p|S_1) \propto p^{S_1}(1-p)^{1-S_1}\pi(p).$$

Dostáváme stejný výsledek jako v předchozí sekci. Názory „podpořené“ pozorovanými výsledky obdržují větší váhu ve formě relativního nárůstu aposteriorní hustoty. Bayesovský hráč tak nemusí pravidelně přepočítávat své názory. Pokud provede počáteční diverzifikaci a umožní jednotlivým názorům samostatný vývoj, bude jeho kapitál v součtu sám reflektovat příchozí informace z výsledků v každém kole. Hráč pak nemusí vloženou optimální část v každém kole pracně přepočítávat.

2.4 Asymptotické vlastnosti

Vraťme se nyní k situaci z podkapitoly 1.4. Uvažujeme pevné p' popisující skutečnou pravděpodobnost výhry v každém kole hry ($X_i \sim \text{Alt}(p'), i = 1, \dots$). Budeme studovat vývoj kapitálu pro různé konfigurace $\pi(p)$,q a p'. Užitečné bude následující lemma o aposteriorní střední hodnotě.

Lemma 9. *Buď $\pi(p)$ apriorní hustota odpovídající Be(α,β) rozdělení. Buď S_n počet úspěchů pozorovaných v n kolech hry. Aposteriorní střední hodnotu parametru p lze vyjádřit jako konvexní kombinaci apriorní střední hodnoty a výběrového průměru*

$$\mathsf{E}^P[p|S_n] = \frac{\alpha+\beta}{\alpha+\beta+n}\,\mathsf{E}^P[p] + \frac{n}{\alpha+\beta+n}\frac{S_n}{n}. \tag{2.7}$$

Důkaz. Plyne přímo z lemmatu 8 a (2.2).

□

Lze nahlédnout, že pro n jdoucí do nekonečna jde koeficient u apriorní střední hodnoty v (2.7) do 0 a koeficient u výběrového průměru do 1. Jelikož $\mathsf{E}^{P'}[X_i] = p'$ a $X_1, \dots$ jsou iid, platí díky slabému zákonu velkých čísel

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \frac{S_n}{n} \xrightarrow{P'} p' \qquad \text{pro } n \to \infty.$$

Díky Cramérově-Sluckého větě (viz Anděl (1985)(Kapitola 10)) platí také

$$\mathsf{E}^P[p|S_n] \xrightarrow{P'} p' \qquad \text{pro } n \to \infty. \tag{2.8}$$

Z předchozího a z (2.4) dostáváme díky větě o spojité transformaci (viz Anděl (1985)(Kapitola 10)), pro volbu $g(x) = \frac{x-q}{q(1-q)}$

$$f_n^* \xrightarrow{P'} f_{p'}^*,$$

kde $f_{p'}^*$ značí Kellyho zlomek hráče se znalostí reálné pravděpodobnosti výhry p'. Předchozí je shrnuto v následující větě.

Věta 10. *Uvažujme situaci opakovaných iid her prezentovanou výše. Buď $q \in (0,1)$ cena hry určená trhem, $p' \in (0,1)$ skutečná pravděpodobnost úspěchu v každém kole hry a $\pi(p) \sim Be(\alpha, \beta)$ apriorní hustota pravděpodobnostního názoru hráče, kde $\alpha,\beta \in \mathbb{R}_+$. Potom pro $n \to \infty$ platí*

$$
\begin{aligned}
\mathsf{E}^P[p|S_n] &\xrightarrow{P'} p' && \text{pro } n \to \infty,\\
f_n^* = \frac{\mathsf{E}^P[p|S_{n-1}] - q}{q(1-q)} \xrightarrow{P'} \frac{p'-q}{q(1-q)} &= f_{p'}^* && \text{pro } n \to \infty.
\end{aligned}
$$

Zlomek bayesovského hráče s libovolným apriorním beta rozdělením bude konvergovat ke Kellyho zlomku hráče s pravděpodobnostním názorem P', tedy Kellyho zlomku hráče s přesnou znalostí pravděpodobnosti výhry. To znamená že bayesovský hráč bude limitně sázet optimálně nezávisle na konkrétní volbě apriorního rozdělení $\mathrm{Be}(\alpha,\beta)$ a skutečné hodnotě pravděpodobnosti úspěchu p'.

Podívejme se nyní na vývoj $\mathsf{E}^{P'}[\log(V_n)]$. Pro ten bude platit následující věta.

Věta 11. *Uvažujme situaci opakovaných iid her prezentovanou výše. Buď $q \in (0,1)$ cena hry určená trhem, $p' \in (0,1)$ skutečná pravděpodobnost úspěchu v každém kole hry a $\pi(p) \sim Be(\alpha, \beta)$ apriorní hustota pravděpodobnostního názoru hráče, kde $\alpha,\beta \in \mathbb{R}_+$. Buď V_i kapitál hráče v čase i (po i kolech hry). Nechť hráč sází v každém kole část kapitálu $f_i^* = \frac{\mathsf{E}^P[p|S_{i-1}]-q}{q(1-q)}$ závisející na současné aposteriorní střední hodnotě jeho pravděpodobnostního názoru. Potom platí*

$$
\begin{aligned}
\mathsf{E}^{P'}\left[\log\left(\frac{V_n}{V_0}\right)\right] &= -n(p'\log(q) + (1-p')\log(1-q))\\
&+ \sum_{i=1}^{n} \log(i+\alpha-1)(1 - \sum_{j=0}^{i-1}\binom{n}{j}(p')^j(1-p')^{n-j})\\
&+ \sum_{i=1}^{n} \log(i+\beta-1)(\sum_{j=0}^{n-i}\binom{n}{j}(p')^j(1-p')^{n-j}) - \sum_{i=\alpha+\beta}^{\alpha+\beta+n-1}\log(i).
\end{aligned}
\tag{2.9}
$$

Důkaz. Z (2.6) dostáváme

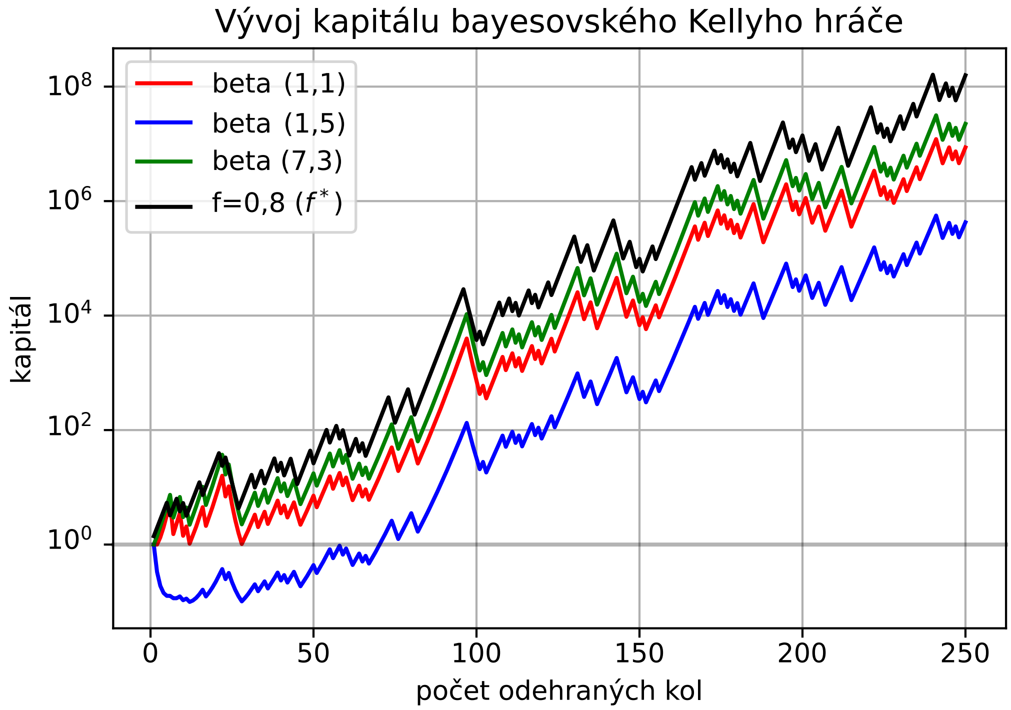
$$
\begin{aligned}
\mathsf{E}^{P'}\left[\log\left(\frac{V_n}{V_0}\right)\right] &= -\log(q)\,\mathsf{E}^{P'}[S_n] - \log(1-q)\,\mathsf{E}^{P'}[n-S_n]\\
&\quad + \mathsf{E}^{P'}\left[\log\left(\frac{B(\alpha+S_n,\beta+n-S_n)}{B(\alpha,\beta)}\right)\right]\\
&= -np'\log(q) - n(1-p')\log(1-q) + \mathsf{E}^{P'}\left[\log\left(\frac{B(\alpha+S_n,\beta+n-S_n)}{B(\alpha,\beta)}\right)\right].
\end{aligned}
$$

Díky lemmatu 7 platí pro libovolné $a,b \in \mathbb{R}_+$

$$
\frac{B(a+1,b)}{B(a,b)} = \frac{a}{a+b}, \qquad \frac{B(a,b+1)}{B(a,b)} = \frac{b}{a+b}.
$$

Bez újmy na obecnosti předpokládejme $\alpha,\beta \in \mathbb{N}$ (jinak bychom museli pro sumy využít jiného značení, výsledek však bude stejný). Potom platí

$$
\log\left(\frac{B(\alpha+S_n,\beta+n-S_n)}{B(\alpha,\beta)}\right) = \sum_{i=\alpha}^{\alpha+S_n-1}\log(i) + \sum_{i=\beta}^{\beta+n-S_n-1}\log(i) - \sum_{i=\alpha+\beta}^{\alpha+\beta+n-1}\log(i).
$$



Obrázek 2.2: Realizace vývoje kapitálu bayesovských hráčů s různými apriorními názory a Kellyho hráče s přesnou znalostí výhry p' pro $p' = 0{,}7$ a $q = 0.5$

$$\mathsf{E}^{P'}[\sum_{i=\alpha}^{\alpha+S_n-1} \log(i)] = \mathsf{E}^{P'}[\sum_{i=1}^{n} \log(i+\alpha-1)\mathbb{1}(S_n \geq i)]$$

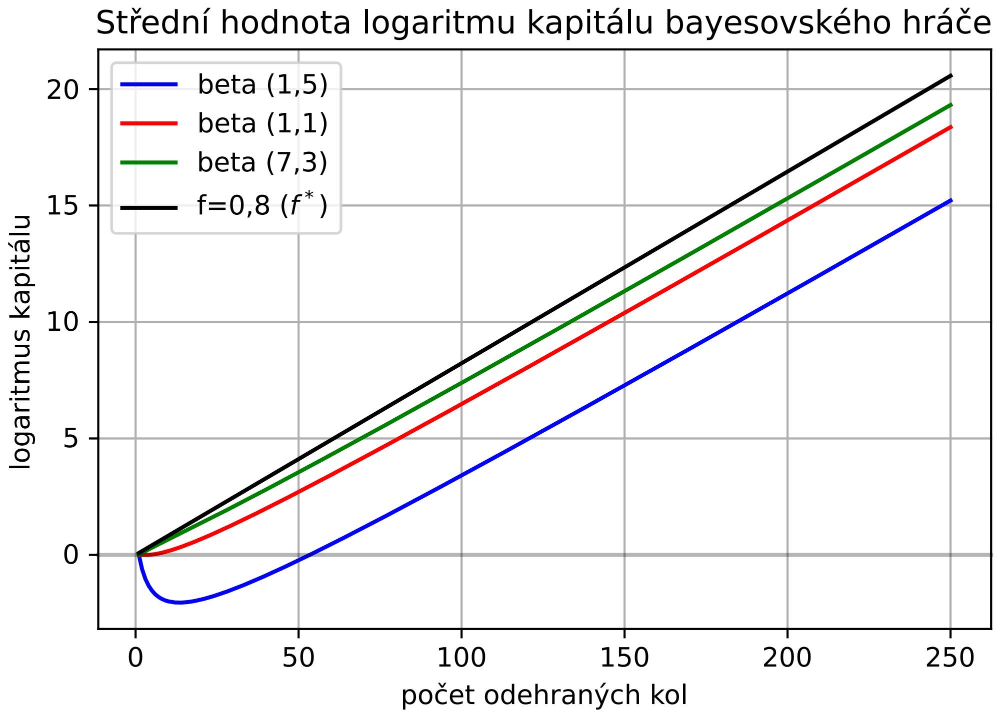
$$= \sum_{i=1}^{n} \log(i+\alpha-1)P'(S_n \geq i) = \sum_{i=1}^{n} \log(i+\alpha-1)(1 - \sum_{j=0}^{i-1} \binom{n}{j} (p')^j (1-p')^{n-j})$$

$$\mathsf{E}^{P'}[\sum_{i=\beta}^{\beta+n-S_n-1} \log(i)] = \mathsf{E}^{P'}[\sum_{i=1}^{n} \log(i+\beta-1)\mathbb{1}(n-S_n \geq i)]$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \log(i+\beta-1)P'(S_n \leq n-i) = \sum_{i=1}^{n} \log(i+\beta-1)(\sum_{j=0}^{n-i} \binom{n}{j} (p')^j (1-p')^{n-j})$$

□

Na obrázku 2.2 vidíme, že vývoj kapitálu bayesovského hráče bude po určité době „paralelní“ s vývojem kapitálu Kellyho hráče se znalostí skutečné pravděpodobnosti výhry, což je v souladu s větou 10. Nižší hladina kapitálu bayesovského hráče reflektuje „cenu za učení“, neboli prvotní neoptimální sázení. Obdobný vývoj lze vidět pro střední hodnotu logaritmu kapitálu $\mathsf{E}^{P'}\left[\log\left(\frac{V_n}{V_0}\right)\right]$ (obrázek 2.3).



Obrázek 2.3: Skutečná střední hodnota logaritmu kapitálu $\mathsf{E}^{P'}\left[\log\left(\frac{V_n}{V_0}\right)\right]$ bayesovských hráčů s různými apriorními názory a Kellyho hráče s přesnou znalostí výhry p' pro $p' = 0{,}7$ a $q = 0.5$

3. Binomický model

V závěrečné kapitole této práce se seznámíme s binomickým modelem vývoje cen. Jedná se o jednoduchý model v diskrétním čase. V každém okamžiku může nastat jeden ze dvou scénářů (nárůst, pokles). Lze tak vidět zjevnou analogii s předchozí situací opakovaných hodů mincí, kterou se pokusíme rozvinout a nahlédnout možnou aplikaci předchozích výsledků.

Poznámka. Většina terminologie byla převzata z Vecer (2011), kam čtenáře odkazujeme v případě potřeby detailnějšího úvodu. Mnohé využité výrazy jsou zaběhlé v anglické literatuře, ale nemají ustálený český překlad. U některých výrazů tak budeme pro přehlednost v závorce psát původní anglické názvy.

3.1 Základní pojmy a značení

V celé kapitole uvažujeme dvě aktiva (*assets*), Z a Y. Z má roli akcie a Y roli peněz. Budeme předpokládat, že obě aktiva nemají časovou hodnotu (*time value*). To znamená, že za kontrakt vyplácející jednotku aktiva Y v nějakém budoucím čase bychom měli být ochotni zaplatit jednotku aktiva Y nyní. Nechť Y_t značí jednotku aktiva Y v čase t. Definujme nejprve koncept ceny.

Definice 7 (cena)**.** *Cena je počet jednotek jednoho aktiva Y potřebný ke koupi jednotky druhého aktiva Z v čase t. Značíme ji Z_t^Y. Aktivum Y v tomto případě označujeme za referenční. Y_t^Z nazýváme inverzní cenou.*

Předpokládáme, že dvě aktiva je možné kdykoliv bezplatně směnit v poměru definovaném cenou. Pro účely zamezení zjevné arbitráže předpokládáme

$$Z_t^Y = \frac{1}{Y_t^Z}.$$

Předpokládejme dále, že ani jedno z aktiv Y,Z nebude nikdy bezcenné, neboli že $Z_t^Y > 0, Y_t^Z > 0\ \forall t$. Předchozí tak dává dobrý smysl.

3.2 Binomický model

Pro vývoj cen aktiv budeme uvažovat binomický model. Jedná se o model v diskrétním čase, umožňující v každém okamžiku dva různé scénáře vývoje cen. Nárůst (1), nebo pokles (0). Náhodné veličiny X_1,$X_2, \ldots$, popisující daný vývoj, považujeme za iid.

$$Z_{t+1}^Y = \begin{cases} uZ_t^Y & \ldots \text{pro } X_{t+1} = 1, \\ dZ_t^Y & \ldots \text{pro } X_{t+1} = 0, \end{cases} \tag{3.1}$$

kde $0 < d < 1 < u$ jsou konstanty, pevné pro každé t.

Obdobně jako v sekci 1.1 definujeme pravděpodobnostní míry P^Y, P^Z pomocí cen digitálních kontraktů. Vezměme t jako libovolný současný čas. Buď $K(i)$ kontrakt vyplácející jednotku aktiva Y v čase $t + 1$ pokud $X_{t+1} = i$, $i \in \{0,1\}$. Jelikož koupí obou kontraktů $K(1)$ a $K(0)$ garantujeme výplatu jednotky aktiva Y

v čase $t+1$, budeme pro zamezení arbitráže předpokládat, že pro ceny kontraktů vzhledem k Y platí

$$K(1)_t^Y + K(0)_t^Y = 1.$$

To umožňuje definovat pravděpodobnostní míru P^Y pomocí vztahu

$$P^Y(X_{t+1} = i) = K(1)_t^Y.$$

Označme $p^Y(i) = P^Y(X_{t+1} = i)$. Obdobně definujeme pravděpodobnostní míru P^Z.

Jelikož obě aktiva Y,Z nemají časovou hodnotu, platí pro libovolné t díky *FTAP* (First Fundamental Theorem of Asset Pricing, viz Vecer (2011)) martingalová vlastnost vývoje cen, neboli

$$Z_t^Y = \mathsf{E}^{P^Y}[Z_{t+1}^Y] = p^Y(1)uZ_t^Y + p^Y(0)dZ_t^Y. \tag{3.2}$$

P^Y lze tak pomocí u,d vyjádřit jako

$$p^Y(1) = p_Y = \frac{1-d}{u-d}, \qquad p^Y(0) = 1 - p_Y = \frac{u-1}{u-d}. \tag{3.3}$$

Za referenční aktivum lze zvolit i Z. Pro inverzní ceny pak pozorujeme vývoj

$$Y_{t+1}^Z = \begin{cases} \frac{1}{u}Y_t^Z & \dots \text{pro } X_{t+1} = 1, \\ \frac{1}{d}Y_t^Z & \dots \text{pro } X_{t+1} = 0. \end{cases}$$

Obdobně pak pro P^Z platí

$$p^Z(1) = p_Z = u\frac{1-d}{u-d}, \qquad p^Z(0) = 1 - p_Z = d\frac{u-1}{u-d}.$$

V jednokrokovém binomickém modelu lze pomocí znalosti u,d odvodit rozdělení P^Y, P^Z. Jelikož jsou u,d konstantní, budou pravděpodobnostní míry P^Y,P^Z neměnné pro libovolnou volbu času t. Naopak z P^Y, P^Z lze u,d vyjádřit jako

$$u = \frac{p^Z(1)}{p^Y(1)} = \frac{p_Z}{p_Y}, \qquad d = \frac{p^Z(0)}{p^Y(0)} = \frac{1-p_Z}{1-p_Y}.$$

Pro vývoj cen platí

$$Z_{t+1}^Y = \frac{p^Z(X_{t+1})}{p^Y(X_{t+1})}Z_t^Y,$$
$$Y_{t+1}^Z = \frac{p^Y(X_{t+1})}{p^Z(X_{t+1})}Y_t^Z.$$

Výsledek lze rozšířit pro vícekrokový binomický model.

$$Z_n^Y = \frac{p^Z(X_n)}{p^Y(X_n)}Z_{n-1}^Y = \dots = \frac{p^Z(X_n)\dots p^Z(X_1)}{p^Y(X_n)\dots p^Y(X_1)}Z_0^Y := \frac{p^Z(\boldsymbol{X}_n)}{p^Y(\boldsymbol{X}_n)}Z_0^Y \tag{3.4}$$

Jelikož jsou P^Y, P^Z pravděpodobnostní míry na stejném prostoru „určující“ $\mathrm{Alt}(p_Y)$ a $\mathrm{Alt}(p_Z)$ rozdělení, lze pro dané $\boldsymbol{X}_n = \boldsymbol{x}_n$ využít značení z definice 1.

$$Z_n^Y = \frac{p_Z^{\sum_{i=1}^n x_i}(1-p_Z)^{n-\sum_{i=1}^n x_i}}{p_Y^{\sum_{i=1}^n x_i}(1-p_Y)^{n-\sum_{i=1}^n x_i}}Z_0^Y = \frac{L_n(p_Z)}{L_n(p_Y)}Z_0^Y$$

Ukázali jsme, že v binomickém modelu je cena proporcionální poměru věrohodností pravděpodobnostních měr indukovaných aktivy Z,Y.

3.3 Kellyho investor

Uvažujme nyní situaci investora na binomickém trhu. Hodnoty u,v jsou známé a tudíž jsou známé i P^Z, P^Y. Nechť má investor vlastní pravděpodobnostní názor P ($p = P(X_t = 1)$, $\forall t$) na vývoj cen. Investor si zvolí aktivum Y (peníze) jako referenční (bezrizikové). Jeho množství se bude snažit maximalizovat. Nechť V_t^Y značí jeho kapitál (vyjádřený v jednotkách Y) v čase t. V každém časovém okamžiku t se investor rozhodne, jakou část f_t kapitálu V_{t-1}^Y vloží do (rizikového) aktiva Z. Předpokládáme, že neexistují transakční náklady ani minimální velikost transakce. Pro vývoj kapitálu investora platí

$$V_t^Y = \begin{cases} ((1-f_t)+f_t u)V_{t-1}^Y = (1+f_t(u-1))V_{t-1}^Y & \dots \text{pro } X_t = 1, \\ ((1-f_t)+f_t d)V_{t-1}^Y = (1+f_t(d-1))V_{t-1}^Y & \dots \text{pro } X_t = 0. \end{cases} \tag{3.5}$$

Omezením se na $f_t \in (-\frac{1}{u-1}, \frac{1}{1-d})$ zajistíme, že kapitál investora bude vždy kladný.

Poznámka. Pro $f_t \notin [0,1]$ nedává interpretace ve smyslu držení aktiva Z smysl. Situaci lze pro ostatní hodnoty zobecnit pomocí finančních kontraktů (viz Vecer (2011)).

Poznámka. Pro $u = 2-q$, $d = 1-q$ se dostáváme k problému z kapitoly 1 a 2. Situace investora na binomickém trhu je zobecněním situace opakovaného hodu mincí z předchozích dvou kapitol.

Cílem Kellyho investora je maximalizovat $\mathsf{E}^P[\log(V_n^Y)]$. Jelikož

$$\begin{aligned} \mathsf{E}^P[\log(V_n^Y)] &= \mathsf{E}^P[\log(V_0^Y) + \sum_{i=1}^n \log(1+f_i((u-d)X_i+d-1))] \\ &= \log(V_0^Y) + \sum_{i=1}^n \mathsf{E}^P[\log(1+f_i((u-d)X_1+d-1))], \end{aligned}$$

bude toho obdobně jako v první kapitole docíleno konstantním zlomkem $f_t = f^*$ $\forall t$. Ten nalezneme jako řešení úlohy

$$\max_f \mathsf{E}^P\left[\log\left(\frac{V_1^Y}{V_0^Y}\right)\right] = p\log(1+f(u-1)) + (1-p)\log(1+f(d-1)) := G(f).$$

Diferenciací $G(f)$ a položením rovno nule dostáváme

$$f^* = \frac{p(u-1)-(1-p)(1-d)}{(u-1)(1-d)}. \tag{3.6}$$

To že se jedná o maximum plyne z

$$\frac{\partial^2 G}{\partial f^2} = -p(u-1)^2\left(\frac{1}{1+f(u-1)}\right)^2 - (1-p)(d-1)^2\left(\frac{1}{1+f(d-1)}\right)^2 < 0.$$

Dosazením f^* zpět do (3.5) dostáváme

$$V_t^Y = \begin{cases} \frac{p(u-d)}{1-d}V_{t-1}^Y = \frac{p}{p_Y}V_{t-1}^Y & \dots \text{pro } X_t = 1, \\ \frac{(1-p)(u-d)}{u-1}V_{t-1}^Y = \frac{1-p}{1-p_Y}V_{t-1}^Y & \dots \text{pro } X_t = 0. \end{cases} \tag{3.7}$$

Kapitál Kellyho investora je opět proporcionální poměru věrohodností (viz definice 1).

$$V_n^Y = \left(\frac{p}{p_Y}\right)^{\sum_{i=1}^n x_i} \left(\frac{1-p}{1-p_Y}\right)^{n-\sum_{i=1}^n x_i} V_0^Y = \frac{L_n(p)}{L_n(p_Y)} V_0^Y \tag{3.8}$$

Poznámka. Za povšimnutí stojí, že věty 3 a 4 jsou (po lehké reformulaci) pomocí $G(f)$ aplikovatelné pro situaci binomického trhu. Závěry ze sekce 1.4 lze tak jednoduše zobecnit pro binomický trh. Například přechodový bod p_0' lze spočíst jako

$$p_0' = \frac{\log(\frac{1-p_Y}{1-p})}{\log(\frac{p}{p_Y}) + \log(\frac{1-p_Y}{1-p})} = \frac{\log(\frac{u-1}{u-d}) - \log(1-p)}{\log(\frac{p}{1-p}) + \log(\frac{u-1}{1-d})}.$$

3.3.1 Bayesovský Kellyho investor

V kapitole 2 jsme rozšířili Kellyho přístup pomocí bayesovské statistiky. Nyní aplikujeme bayesovský přístup pro investora na binomickém trhu. Předpokládáme, že parametr p má apriorní hustotu $\pi(p) = \mathrm{Be}(\alpha,\beta)$ na intervalu $[0,1]$. Aposteriorní hustota $\pi(p|\boldsymbol{X}_k = \boldsymbol{x}_k)$ má opět tvar

$$\pi(p|\boldsymbol{X}_k = \boldsymbol{x}_k) = \mathrm{Be}(\alpha + \sum_{i=1}^k x_i, \beta + k - \sum_{i=1}^k x_i).$$

Cílem investora je zvolit $f_1, \ldots, f_n$ maximalizujících $\mathsf{E}^P[V_n^Y]$ pro libovolný čas n. Obdobným rekurzivním argumentem jako v sekci 2.2 lze ukázat, že je to ekvivalentní volbě f_{i+1} maximalizující jednokrokovou aposteriorní střední hodnotu $\mathsf{E}^P[\log(V_{i+1}^Y)|S_i,V_i^Y]$ v každém okamžiku.

$$\begin{aligned}
\mathsf{E}^P[\log(V_{i+1}^Y)|S_i,V_i^Y] &= \mathsf{E}^P[\log(1 + f_{i+1}((u-d)X_{i+1} + d - 1))|S_i] + \log(V_i^Y) \\
&= \int_0^1 (p\log(1 + f_{i+1}(u-1)) + (1-p)\log(1 + f_{i+1}(d-1)))\pi(p|S_i)dp + \log(V_i^Y) \\
&= \mathsf{E}^P[p|S_i]\log(1 + f_{i+1}(u-1)) + (1 - \mathsf{E}^P[p|S_i])\log(1 + f_{i+1}(d-1)) + \log(V_i^Y)
\end{aligned}$$

Dostáváme zlomky f_i^*, kde fixní p ve vzorci (3.6) nahrazujeme aposteriorní střední hodnotou $\mathsf{E}^P[p|S_i]$

$$f_{i+1}^* = \frac{E^P[p|S_i](u-1) - (1 - E^P[p|S_i])(1-d)}{(u-1)(1-d)}. \tag{3.9}$$

Pro bayesovského investora dostáváme kombinací předchozího, (3.5) a (3.3) deterministický vývoj kapitálu

$$\frac{V_k^Y}{V_{k-1}^Y} = \begin{cases} \mathsf{E}^P[p|S_{k-1}]\frac{u-d}{1-d} = \frac{\mathsf{E}^P[p|S_{k-1}]}{p^Y} & \ldots \text{pro } X_k = 1, \\ (1 - \mathsf{E}^P[p|S_{k-1}])\frac{u-d}{u-1} = \frac{1-\mathsf{E}^P[p|S_{k-1}]}{1-p^Y} & \ldots \text{pro } X_k = 0. \end{cases}$$

Pomocí lemmat 7, 8 a (2.2) lze nahlédnout

$$V_k^Y = \left(\frac{1}{p^Y}\right)^{S_k} \left(\frac{1}{1-p^Y}\right)^{k-S_k} \frac{B(\alpha + S_k, \beta + k - S_k)}{B(\alpha,\beta)} V_0^Y. \tag{3.10}$$

Porovnáním (3.10) s (2.6) vidíme, že vývoj kapitálu bayesovského investora je stejný jako vývoj kapitálu bayesovského hráče z druhé kapitoly (q je nahrazeno p^Y).

3.4 Asymptotika

Uvažujme p' jako skutečnou pravděpodobnost nárůstu cen v každém čase ($X_i \sim \text{Alt}(p'), i = 1, \dots$). Aposteriorní hustoty mají v situaci investora na binomickém trhu stejný tvar jako situaci hráče z kapitoly 2. Lze tak aplikovat lemma 9. Bayesovský investor opět využívá aposteriorní střední hodnotu $\mathsf{E}^P[p|S_i]$ namísto fixní p při volbě investované části f_{i+1}. Platí následující analogie věty 10.

Věta 12. *Uvažujme situaci investora na binomickém trhu prezentovanou výše. Buď $p' \in (0,1)$ skutečná pravděpodobnost nárůstu pevná v čase. Buď dále $\pi(p) \sim Be(\alpha, \beta)$ apriorní hustota pravděpodobnostního názoru hráče, kde $\alpha,\beta \in \mathbb{R}_+$. Potom*

$$\mathsf{E}^P[p|S_n] \xrightarrow{P'} p' \qquad \text{pro } n \to \infty,$$

$$f_n^* = \frac{E^P[p|S_{n-1}](u-1) - (1 - E^P[p|S_{n-1}])(1-d)}{(u-1)(1-d)}$$
$$\xrightarrow{P'} \frac{p'(u-1) - (1-p')(1-d)}{(u-1)(1-d)} = f_{p'}^* \qquad \text{pro } n \to \infty.$$

Důkaz. Důkaz je analogický důkazu věty 10.

□

Věta 12 říká, že nezávisle na volbě konkrétního apriorního Be(α,β) rozdělení bude investovaná část kapitálu f_n bayesovského investora postupem času konvergovat k investované části Kellyho investora s fixním pravděpodobnostním názorem, rovným skutečné pravděpodobnosti p'.

Jelikož je deterministický vývoj kapitálu bayesovského investora stejný jako u bayesovského hráče, platí následující reformulace věty 11.

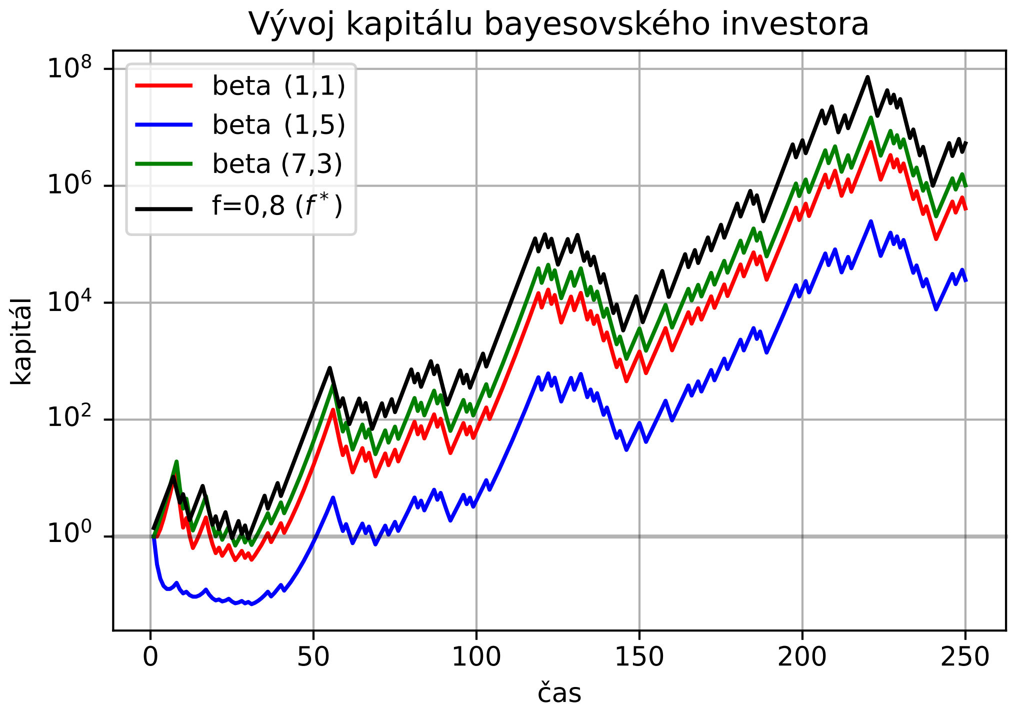
Věta 13. *Uvažujme situaci investora na binomickém trhu. Buď $p' \in (0,1)$ skutečná pravděpodobnost nárůstu pevná v čase. Buď dále $\pi(p) \sim Be(\alpha, \beta)$ apriorní hustota pravděpodobnostního názoru hráče, kde $\alpha,\beta \in \mathbb{R}_+$. Potom pro libovolný čas n platí*

$$\mathsf{E}^{P'}\left[\log\left(\frac{V_n^Y}{V_0^Y}\right)\right] = -n(p'\log(p^Y) + (1-p')\log(1-p^Y))$$
$$+ \sum_{i=1}^{n} \log(i+\alpha-1)(1 - \sum_{j=0}^{i-1}\binom{n}{j}(p')^j(1-p')^{n-j})$$
$$+ \sum_{i=1}^{n} \log(i+\beta-1)(\sum_{j=0}^{n-i}\binom{n}{j}(p')^j(1-p')^{n-j}) - \sum_{i=\alpha+\beta}^{\alpha+\beta+n-1} \log(i).$$

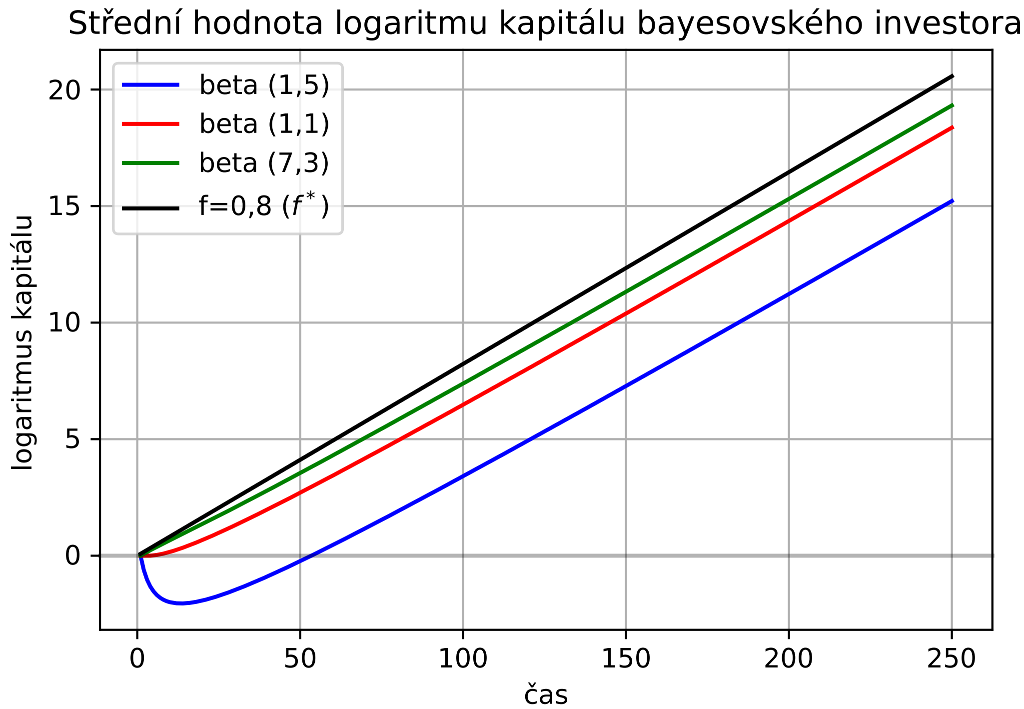
Důkaz. Důkaz je analogický důkazu věty 11.

□

Ukázali jsme, že situace bayesovského investora na binomickém trhu je v jistém smyslu shodná se situací bayesovského hráče. Na obrázku 3.1 vidíme realizaci vývoje kapitálu pro různé volby apriorního rozdělení. Vývoje se postupem času jeví „paralelní“, což je v souladu s větou 12. Skutečná střední hodnota logaritmu kapitálu bayesovského investora je stejná jako pro bayesovského hráče (p_Y nahrazuje q). Vývoj těchto středních hodnot lze vidět na obrázku 3.2. Všimněme si shody s vývojem u bayesovského hráče (obrázek 2.3).



Obrázek 3.1: Realizace vývoje kapitálu bayesovských investorů s různými apriorními názory a Kellyho investora s přesnou znalostí výhry p' pro $p' = 0{,}7$ a $p_Y = 0.5$



Obrázek 3.2: Skutečná střední hodnota logaritmu kapitálu $\mathsf{E}^{P'}\left[\log\left(\frac{V_n^Y}{V_0^Y}\right)\right]$ bayesovských investorů s různými apriorními názory a Kellyho investora s přesnou znalostí výhry p' pro $p' = 0{,}7$ a $p^Y = 0.5$

4. Závěr

V této práci jsme se věnovali hledání optimálních investičních strategií. V první kapitole jsme studovali situaci hráče sázejícího na výsledek hodu mincí a pomocí Kellyho kritéria nalezli strategii, která je z jistého pohledu dlouhodobě optimální. Prezentovali jsme spojitost s Neymanovým-Pearsonovým lemmatem a teorií informace. Na závěr jsme studovali asymptotiku vývoje kapitálu Kellyho hráče.

V druhé kapitole jsme Kellyho přístup „obohatili“ pomocí metod bayesovské statistiky. Namísto pevného pravděpodobnostního názoru jsme umožnili hráči mít o pravděpodobnosti výhry pouze jistou apriorní představu, která se postupně zpřesňovala s pozorovanými výsledky hry. Následně jsme odvodili analogii Kellyho kritéria pro tento případ. Ukázali jsme, že pro libovolnou volbu apriorního beta rozdělení bude vsazená část kapitálu bayesovského hráče konvergovat ke Kellyho zlomku hráče se znalostí reálné pravděpodobnosti výhry, neboli k optimálnímu zlomku v dané situaci.

V závěrečné kapitole jsme se seznámili se situací investora na binomickém trhu. Ukázali jsme, že cena je proporcionální poměru věrohodností pravděpodobnostních měr indukovaných aktivy. Následně jsme ukázali, že je tato situace jednoduchým zobecněním situací z předchozích kapitol a rozšířili pro ni získané výsledky.

V celé práci jsme se omezili pouze na posloupnost nezávislých stejně rozdělených náhodných veličin s alternativním rozdělením pro reprezentaci náhody. To je pro reálný svět příliš nerealistické omezení. Práci je tak třeba chápat jako vstupní úvod do problematiky bayesovského přístupu ke Kellyho kritériu.

Možným pokračováním této práce je se zaměřit na skutečné situace a zobecnit získané výsledky pro složitější rozdělení. Další možností je rozšířit naše poznatky pro investování ve spojitém čase.

Seznam použité literatury

Anděl, J. (1985). *Matematickaé Statistika.* SNTL.

Bellman, R. a Kalaba, R. (1957). On the role of dynamic programming in statistical communication theory. *IEEE Transactions on Information Theory*, **3**(3), 197–203. doi: 10.1109/tit.1957.1057416.

Browne, S. a Whitt, W. (1996). Portfolio choice and the Bayesian Kelly criterion. *Adv. in Appl. Probab.*, **28**(4), 1145–1176. ISSN 0001-8678. doi: 10.2307/1428168. URL https://doi.org/10.2307/1428168.

Kelly, Jr., J. L. (1956). A new interpretation of information rate. *Bell System Tech. J.*, **35**, 917–926. ISSN 0005-8580. doi: 10.1002/j.1538-7305.1956.tb03809.x. URL https://doi.org/10.1002/j.1538-7305.1956.tb03809.x.

Kullback, S. (1978). *Information theory and statistics.* Peter Smith.

Thorp, E. O. (1969). Optimal gambling systems for favorable games. *Revue de l'Institut International de Statistique / Review of the International Statistical Institute*, **37**(3), 273–293. doi: 10.2307/1402118.

Vecer, J. (2011). *Stochastic finance.* Chapman & Hall/CRC Financial Mathematics Series. CRC Press, Boca Raton, FL. ISBN 978-1-4398-1250-1. A numeraire approach.

Wasserman, L. (2004). *All of statistics.* Springer Texts in Statistics. Springer-Verlag, New York. ISBN 0-387-40272-1. doi: 10.1007/978-0-387-21736-9. URL https://doi.org/10.1007/978-0-387-21736-9. A concise course in statistical inference.

Seznam obrázků