MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ FAKULTA
Univerzita Karlova

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Filip Fryš

Charakterizace množin kladného dosahu

Matematický ústav Univerzity Karlovy

Vedoucí bakalářské práce: prof. RNDr. Jan Rataj, CSc.
Studijní program: Obecná matematika

Praha 2023

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval(a) samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů. Tato práce nebyla využita k získání jiného nebo stejného titulu.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V .... dne ....

Podpis autora

Rád bych poděkoval svému vedoucímu práce, prof. RNDr. Janu Ratajovi, CSc., za skvělé vedení práce a nadchnutí pro teorii míry a integrálu a pro geometrii, jež mi již druhým rokem předává. Dále bych chtěl poděkovat své rodině a přítelkyni za bezmeznou podporu během studia.

Název práce: Charakterizace množin kladného dosahu

Autor: Filip Fryš

Katedra: Matematický ústav Univerzity Karlovy

Vedoucí bakalářské práce: prof. RNDr. Jan Rataj, CSc., Matematický ústav Univerzity Karlovy

Abstrakt: Hlavním zdrojem této práce je článek *Sets with positive reach* německého matematika prof. Dr. Victora Bangerta z roku 1982. Victor Bangert se v tomto článku zabývá charakterizací množin kladného dosahu jakožto podmnožin souvislých Riemannových variet pomocí slabě regulární podúrovňových množin funkcí, jejichž třídu zavádí ve svém dřívějším článku *Analytische Eigenschaften konvexer Funtionen auf Riemannschen Mannigfaltigkeiten* z roku 1979. Cílem této práce je nastudování článku výše zmíněného Bangertova článku z roku 1982 a následné detailní sepsání důkazu pro speciální případ Riemannovy variety $\mathbb{R}^n$. Po úvodní kapitole, kde se podrobněji seznámíme se samotným Bangertovým článkem a cílem práce, následuje kapitola první, v níž zavedeme základní značení a dále uvedeme některé potřebné poznatky a definice. V druhé kapitole se již budeme zabývat samotnými množinami kladného dosahu, uvedeme několik příkladů a základní vlastnosti. Ve třetí kapitole se dailněji podíváme na Bangertovu třídu funkcí a ve čtvrté kapitole provedeme charakterizaci množin kladného dosahu pro $\mathbb{R}^n$.

Klíčová slova: množina kladného dosahu, lokálně semikonvexní funkce, subdiferenciál, geometrie

Title: A Characterization of Sets with Positive Reach

Author: Filip Fryš

Department: Mathematical Institute of Charles University

Supervisor: prof. RNDr. Jan Rataj, CSc., Mathematical Institute of Charles University

Abstract: The main source of this thesis is the article *Sets with positive reach* by the German mathematician Prof. Dr. Victor Bangert from 1982. In this paper, Victor Bangert gives a characterization of sets with positive reach as subsets of connected Riemannian manifolds using weakly regular sublevel sets of functions, the class of which he introduces in his earlier article *Analytische Eigenschaften konvexer Funtionen auf Riemannschen Mannigfaltigkeiten* from 1979. The aim of this thesis is to study the above mentioned article from 1982 from Bangert and to give a detailed proof for the special case of the Riemannian manifold $\mathbb{R}^n$.
After the introductory chapter, where we shall get acquainted with Bangert's article and the aim of the thesis, the first chapter follows, in which we will introduce the basic notation and introduce some necessary knowledge and definitions. In the second chapter we shall deal with the sets with positive reach themselves, give some examples and their basic properties. In the third chapter we will take a closer look at the Bangert's class of functions, and in the fourth chapter we will characterize the sets with positive reach in $\mathbb{R}^n$.

Keywords: set with positive reach, locally semiconvex function, subdifferential, geometry

Obsah

Úvod

Množinu kladného dosahu zavádí v n-rozměrném euklidovském prostoru, byť s drobnou odlišností od definice v tomto textu, v roce 1959 americký matematik Herbert Federer ve svém díle *Curvatures Measures* [7]. Následné zobecnění pro Riemannovy variety publikoval v roce 1981 tentokrát německý matematik Norbert Kleinjohann ve svém článku [9] *Nächste Punkte in der Riemannschen Geometrie*. Toto zobecnění množin kladného dosahu nazývá *EFP-množina* (v originále *EFP-Menge*, kde zkratka EFP pochází z německého výrazu *eindeutige Fußpunkte*, v anglicky psané literatuře se též objevuje *UFP-set* z výrazu *unique footpoint*). Ačkoliv Victor Bangert ve svém textu *Sets with positive reach* [2], jenž je hlavním zdrojem této práce, používá tento termín, my se budeme držet označení *množina kladného dosahu*, jelikož budeme pracovat v euklidovském prostoru $\mathbb{R}^n$.

Nyní uvedeme větu z Bangertova článku [2], jejíž obdobu si dokážeme.

Věta (Charakterizace množin kladného dosahu)**.** *Buď M souvislá Riemannova varieta. Množina $A \subseteq M$ je EFP-množina právě tehdy, když A je slabě regulární podúrovňová množina nějaké funkce $f \in \mathfrak{F}(M)$.*

Victor Bangert ve svém článku [2] charakterizoval výše zmíněné *EFP-množiny* jakožto podmnožiny souvislé Riemannovy variety M pomocí slabě regulárních podúrovňových množin funkcí ze třídy funkcí $\mathfrak{F}(M)$, kterou zavedl v článku *Analytische Eigenschaften konvexer Funtionen auf Riemannschen Mannigfaltigkeiten* z roku 1979 [1] (pro více informací o (Riemannových) varietách odkážeme na skripta *Matematická analýzy na varietách* [10], případně na skripta prof. Rataje k předmětu Úvod do analýzy na varietách [15]).

Naším úkolem bude provést tuto charakterizaci ve speciálním případě $\mathbb{R}^n$. K tomuto účelu si v první kapitole zavedeme základní pojmy a značení a uvedeme pomocná tvrzení, ku příkladu opěrnou a oddělovací větu. V druhé kapitole definujeme množiny kladného dosahu, uvedeme jejich vztah s konvexními množinami a množinami s $\mathscr{C}^2$-hranicí a dokážeme některé jejich zajímavé vlastnosti. V kapitole třetí se zaměříme na Bangertovu třídu funkcí, jež bude v našem případě třída lokálně semikonvexních funkcí na $\mathbb{R}^n$, zavedeme pro tuto třídu funkcí pojmy jako subdiferenciál a jednostrannou směrovou derivaci. Posléze definujeme i jejich (slabě) regulární podúrovňové množiny. Ve čtvrté a poslední kapitole již provedeme slíbenou charakterizaci množin kladného dosahu v $\mathbb{R}^n$.

Většina důkazů provedených v tomto textu je provedena pomocí metod matematické analýzy a geometrie, na rozdíl od jejich zdrojů, kde je většinou důkaz založen na riemannovské geometrii.

1. Základní pojmy a značení

1.1 Úplné základy

V této sekci připomeneme pojmy a značení, které budeme hojně využívat v celém textu. Jedná se o látku, jež by měla být čtenáři již známá, nicméně pro zasazení do kontextu celé práce je důležité tyto znalosti shrnout.

Definice 1.1.1. Mějme vektorový prostor $\mathbb{R}^n$. Na $\mathbb{R}^n$ uvažujeme *standardní skalární součin*

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ \langle \boldsymbol{\zeta},\boldsymbol{\xi} \rangle := \sum_{i=1}^{n} \zeta_i \xi_i, \text{ kde } \boldsymbol{\zeta} = (\zeta_1,\dots,\zeta_n),\ \boldsymbol{\xi} = (\xi_1,\dots,\xi_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Dále *normu* vektoru $\boldsymbol{\zeta} \in \mathbb{R}^n$ definujeme jako

$$\| \cdot \| : \mathbb{R}^n \to [0,\infty),\ \|\boldsymbol{\zeta}\| := \sqrt{\langle \boldsymbol{\zeta},\boldsymbol{\zeta} \rangle}.$$

Euklidovskou metriku ϱ_E definujeme jako metriku generovanou normou $\| \cdot \|$, to jest

$$\varrho_E(\boldsymbol{\zeta},\boldsymbol{\xi}) := \|\boldsymbol{\zeta} - \boldsymbol{\xi}\|,\ \boldsymbol{\zeta},\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^n.$$

Vektor transponovaný k vektoru $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^n$ značíme $\boldsymbol{\xi}^\top$.
Úsečku spojující po řadě body $x,y \in \mathbb{R}^n$ značíme $[x,y]$.
Otevřenou, respektive *uzavřenou* koulí o středu $x \in \mathbb{R}^n$ a poloměru $r > 0$ rozumíme množiny

$$B(x,r) := \{z \in \mathbb{R}^n;\ \|z - x\| < r\},\ \overline{B}(x,r) := \{z \in \mathbb{R}^n;\ \|z - x\| \le r\}.$$

Jednotkovou sférou v $\mathbb{R}^n$ rozumíme kompaktní množinu

$$\mathbb{S}^{n-1} := \{x \in \mathbb{R}^n;\ \|x\| = 1\}.$$

Definice 1.1.2. Buď $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Řekneme, že A je

- *konvexní množina*, pokud pro libovolná $x,y \in A$ a $t \in [0,1]$ platí, že

$$tx + (1-t)y \in A,$$

- *konvexní těleso*, je-li konvexní, kompaktní a neprázdná,
- *kužel (se středem v počátku)*, pokud $tA := \{ta;\ a \in A\} = A$, $t > 0$.

Definice 1.1.3. Buď $U \subseteq \mathbb{R}^n$. Dále mějme funkci $f : U \to \mathbb{R}$. Řekneme, že f je

- *konvexní funkce*, je-li U navíc konvexní množina a pokud pro libovolná $x,y \in U$ a $t \in [0,1]$ platí $f(tx + (1-t)y) \le tf(x) + (1-t)f(y)$,
- *konkávní funkce*, je-li $-f$ konvexní.

Poznámka. Nyní uvedeme několik poznámek ke konvexním funkcím.

- Zřejmě je restrikce konvexní funkce na konvexní množinu opět konvexní funkce, stejně tak součet dvou (a více) konvexních funkcí (definovaných na stejné konvexní množině) je rovněž konvexní funkce.

- Je-li $U \subseteq \mathbb{R}^n$ neprázdná, konvexní a otevřená a $f : U \to \mathbb{R}$ konvexní funkce, pak je f spojitá.

  Důkaz. Například v [11], kapitola 7, Theorem 7.1.1. □

Definice 1.1.4. Buď $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funkce. Řekneme, že f je

- *pozitivně homogenní*, pokud pro všechna $x \in \mathbb{R}^n$ a $t \geq 0$ splňuje rovnost $f(tx) = tf(x)$,
- *subaditivní*, pokud pro všechna $x,y \in \mathbb{R}^n$ platí $f(x + y) \leq f(x) + f(y)$,
- *sublineární*, je-li subaditivní a pozitivně homogenní.

Lemma 1.1.5. *Buď $I \subseteq \mathbb{R}$ interval a nechť $x_1, x_2, x_3 \in I$ splňují $x_1 < x_2 < x_3$. Mějme $f : I \to \mathbb{R}$ konvexní. Potom*

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}.$$

Důkaz. K nahlédnutí v předběžné verzi skript *Matematická analýza* [13], strana 272, lemma 5.4.9. □

Definice 1.1.6. Buď $f\colon U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funkce. Jako *graf, epigraf a hypograf funkce* f označujeme množiny

$$\operatorname{graph}(f) := \{(x,y) \in U \times \mathbb{R};\ f(x) = y\},$$

$$\operatorname{epi}(f) := \{(x,y) \in U \times \mathbb{R};\ f(x) \leq y\}, \operatorname{hyp}(f) := \{(x,y) \in U \times \mathbb{R};\ f(x) \geq y\}.$$

Lemma 1.1.7. *Buď $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funkce, pak*
a) je-li f sublineární, pak je i konvexní a pro všechna $x \in \mathbb{R}^n$ platí nerovnost

$$f(x) \geq -f(-x),$$

b) je-li f pozitivně homogenní a konvexní, pak $\operatorname{epi}(f)$ *je konvexní uzavřený kužel.*

Důkaz. a) Buďte $x,y \in \mathbb{R}^n$ a $t \in [0,1]$ libovolné, pak postupně za použití subaditivity a pozitivní homogenity dostaneme

$$f(tx + (1-t)y) \leq f(tx) + f((1-t)y) = tf(x) + (1-t)f(y),$$

tedy je f též konvexní. Pro důkaz druhého tvrzení v bodě a) si uvědomme, že z pozitivní homogenity a subaditivity platí pro všechna $x \in \mathbb{R}^n$ následující vztah:

$$0 = f(0x) = f(x - x) \leq f(x) + f(-x).$$

b) Mějme $\{(x_k,y_k)\}_{k=1}^{\infty} \in \operatorname{epi}(f)^{\mathbb{N}}$, kde $(x_k,y_k) \to (x,y)$, pak ze spojitosti funkce f je

$$y = \lim_{k\to\infty} y_k \geq \lim_{k\to\infty} f(x_k) = f(x),$$

tedy $(x,y) \in \operatorname{epi}(f)$, tudíž je uzavřená. Buďte $(x_1,y_1),(x_2,y_2) \in \operatorname{epi}(f)$ a $t \in [0,1]$ libovolné, potom dle definice je $y_1 \geq f(x_1)$ a $y_2 \geq f(x_2)$. Díky konvexitě f máme

$$ty_1 + (1-t)y_2 \geq tf(x_1) + (1-t)f(x_2) \geq f(tx_1 + (1-t)x_2),$$

z čehož plyne, že bod $t(x_1,y_1) + (1-t)(x_2,y_2)$ leží v $\operatorname{epi}(f)$, tedy se jedná o konvexní množinu. Nechť $t > 0$ a $(x,y) \in \operatorname{epi}(f)$, pak z pozitivní homogenity $ty \geq tf(x) = f(tx)$, tedy $(tx,ty) \in \operatorname{epi}(f)$, což dává $t(\operatorname{epi}(f)) \subseteq \operatorname{epi}(f)$. Naopak je-li $(tx,ty) \in t(\operatorname{epi}(f))$, potom $ty \geq f(tx) = tf(x)$, opět z pozitivní homogenity, z čehož dostaneme po pokrácení $t > 0$ inkluzi $\operatorname{epi}(f) \subseteq t(\operatorname{epi}(f))$, celkem jsme získali $\operatorname{epi}(f) = t(\operatorname{epi}(f))$. □

Lemma 1.1.8. *Buď $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ lineární zobrazení. Pak existuje právě jeden vektor $\boldsymbol{\omega} \in \mathbb{R}^n$ takový, že $L(\cdot) = \langle \boldsymbol{\omega}, \cdot \rangle$.*

Důkaz. Snadný. □

Definice 1.1.9. Buďte $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funkce a $x \in \mathbb{R}^n$. Řekneme, že lineární zobrazení $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je *derivací funkce f v bodě x*, pokud

$$0 = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x) - L(h)}{\|h\|}.$$

Dále značíme $D_x f := L$ a pro $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^n$ $D_x f(\boldsymbol{\xi}) := L(\boldsymbol{\xi})$. Pokud existuje $D_x f$, pak říkáme, že funkce f je v bodě x *diferencovatelná.*

Definice 1.1.10. Buď $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funkce, $x \in \mathbb{R}^n$ a $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^n$. *Diferenciálem funkce f ve směru $\boldsymbol{\xi}$ v bodě x* rozumíme limitu (pokud existuje vlastní)

$$d_x f(\boldsymbol{\xi}) := \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h\boldsymbol{\xi}) - f(x)}{h}.$$

Definice 1.1.11. Buď $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funkce mající v bodě $x \in \mathbb{R}^n$ derivaci. *Gradientem funkce f v bodě $x = (x_1,\dots,x_n)$* rozumíme vektor

$$\nabla f(x) := \left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f(x)}{\partial x_n} \right).$$

Poznámka. Nyní uvedeme několik důležitých poznatků z matematické analýzy k definicím 1.1.9, 1.1.10 a 1.1.11. Pro podrobnosti odkážeme opět na skripta *Matematická analýza* [13], a sice na Kapitolu 11 (Funkce více proměnných), počínaje stranou 637.

- Má-li funkce f v bodě x spojité všechny parciální derivace, pak existuje $D_x f$.
- Existuje-li $D_x f$, pak $d_x f(\boldsymbol{\xi}) = D_x f(\boldsymbol{\xi})$ pro všechna $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^n$.
- Existuje-li $D_x f$, pak $D_x f(\boldsymbol{\xi}) = \langle \nabla f(x), \boldsymbol{\xi} \rangle$ pro všechna $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^n$.

Celkem tedy pro funkci f diferencovatelnou v bodě x je $d_x f$ lineární díky linearitě skalárního součinu.

Definice 1.1.12. Buď $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funkce, $x \in \mathbb{R}^n$ a f třídy $\mathscr{C}^2$ na okolí x. *Hessiánem funkce f v bodě x* rozumíme matici

$$\nabla^2 f(x) := \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x)\right)_{i,j=1}^n.$$

Definice 1.1.13. Buď $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Řekneme, že M je *pozitivně semidefinitní*, pokud všechna $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^n$ splňují $\boldsymbol{\xi} M \boldsymbol{\xi}^\top \geq 0$. Ekvivalentně, $\boldsymbol{\xi} M \boldsymbol{\xi}^\top \geq 0, \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{S}^{n-1}$.

Lemma 1.1.14. *Buď $f\colon U \to \mathbb{R}$ funkce třídy $\mathscr{C}^2(U)$, kde $U \subseteq \mathbb{R}^n$ konvexní otevřená. Nechť pro všechna $x \in U$ je $\nabla^2 f(x)$ positivně semidefinitní, pak je funkce f na U konvexní.*

Důkaz. K nahlédnutí např. zde [18], strana 7, Theorem 9. □

Definice 1.1.15. Buď $I \subseteq \mathbb{R}$ otevřený interval, $\phi : I \to \mathbb{R}^n$, $\phi \in \mathscr{C}^1(I)$. Pak délku křivky ϕ definujeme jako

$$\mathscr{L}(\phi) := \int_I \|\phi'(\tau)\| \,\mathrm{d}\lambda^1(\tau),$$

kde λ^n značí *n-rozměrnou Lebesgueovu míru.*

Definice 1.1.16. Buď (X,ϱ) metrický prostor a $A \subseteq X$.

- *Interior (vnitřek) a exterior (vnějšek) množiny A* definujeme jako

$$\operatorname{int}(A) := \bigcup\{G \subseteq A,\, G\ \varrho - \textit{otevřená } v\ X\},\ \operatorname{ext}(A) := \operatorname{int}(X \setminus A).$$

- *Uzávěr množiny A* definujeme jako

$$\overline{A} := \bigcap\{F \supseteq A,\, F\ \varrho - \textit{uzavřená } v\ X\}.$$

- *Hranici množiny A* definujeme jako

$$\partial A := \overline{A} \cap \overline{X \setminus A}.$$

Poznámka. Mějme (X,ϱ) metrický prostor, $A \subseteq X$, potom

$$\partial A \cap \operatorname{int}(A) = \emptyset,\ \overline{A} = \partial A \cup \operatorname{int}(A).$$

Definice 1.1.17. Buď (X,ϱ) metrický prostor, $\emptyset \subsetneq A, B \subseteq X$ a $x \in X$. *Vzdálenost bodu x od množiny A* definujeme jako

$$\operatorname{dist}(A,x) := \inf_{y\in A}\{\varrho(x,y)\}.$$

Vzdáleností množin A a B rozumíme hodnotu

$$\operatorname{dist}(A,B) := \inf_{a\in A,\, b\in B}\{\varrho(a,b)\}.$$

Lemma 1.1.18. *Buď (X,ϱ) metrický prostor. Potom*
a) je-li $\emptyset \subsetneq A \subseteq B \subseteq X$ a $x \in X$ pevné, potom $\operatorname{dist}(B,x) \leq \operatorname{dist}(A,x)$,
b) je-li $\emptyset \subsetneq A \subseteq X$, pak je zobrazení $x \mapsto \operatorname{dist}(A,x)$ 1-lipschitzovské, a tudíž i spojité.

Důkaz. a) Za použití monotonie infima (infimum přes nadmnožinu může být leda menší) a definice

$$\operatorname{dist}(A,x) = \inf_{y\in A}\{\varrho(x,y)\} \geq \inf_{y\in B}\{\varrho(x,y)\} = \operatorname{dist}(B,x).$$

b) Buď $a \in A$ a $x,y \in X$, pak z klasické trojúhelníkové nerovnosti a definice infima máme

$$\operatorname{dist}(A,x) = \inf_{z\in A}\{\varrho(z,x)\} \leq \varrho(a,x) \leq \varrho(x,y) + \varrho(y,a).$$

Nyní aplikujeme $\inf_{a\in A}$ na obě strany nerovnosti a dostaneme

$$\begin{aligned}\operatorname{dist}(A,x) &\leq \inf_{a\in A}\{\varrho(x,y) + \varrho(y,a)\} \\ &= \varrho(x,y) + \inf_{a\in A}\{\varrho(a,y)\} \\ &= \varrho(x,y) + \operatorname{dist}(A,y).\end{aligned}$$

Ze symetrie dostaneme 1-lipschitzovskost (a tedy i spojitost):

$$|\operatorname{dist}(A,x) - \operatorname{dist}(A,y)| \leq \varrho(x,y).$$

Tímto je lemma dokázáno. $\square$

Definice 1.1.19. Buď (X,ϱ) metrický prostor. Systém množin

$$\mathcal{K}(X) := \{A \subseteq X;\ A \text{ neprázdná kompaktní}\}$$

nazýváme *hyperprostor kompaktních podmnožin X*. Na prostoru $\mathcal{K}(X)$ uvažujeme tzv. *Hausdorffovu metriku* $\varrho_H : \mathcal{K}(X) \times \mathcal{K}(X) \to [0,\infty)$ definovanou předpisem

$$\varrho_H(K,L) := \max\left\{\sup_{k\in K}\{\operatorname{dist}(k,L)\}, \sup_{l\in L}\{\operatorname{dist}(l,K)\}\right\},\ K,L \in \mathcal{K}(X).$$

Pro $X = \mathbb{R}^n$ začíme $\mathcal{K}(\mathbb{R}^n) := \mathcal{K}^n$.

Lemma 1.1.20. *Buď $x \in \mathbb{R}^n$ pevné, pak funkce $\varrho_x(y) := \|y - x\|$ splňuje:*

$$\varrho_x^2 \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^n),\ \varrho_x \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{x\}),$$

$$\nabla(\varrho_x^2(y)) = 2(y - x),\ \nabla(\varrho_x(y)) = \frac{y - x}{\varrho_x(y)},$$

$$\nabla^2(\varrho_x^2(y)) = 2I,\ \nabla^2(\varrho_x(y)) = \frac{1}{\varrho_x(y)}I - \frac{(y - x)^\top(y - x)}{\varrho_x(y)^3},$$

kde poslední rovnosti na druhém a třetím řádku samozřejmě uvažujeme pouze $y \neq x$ a kde I značí jednotkovou matici patřičného rozměru.

Důkaz. Ze vztahu $\varrho_x^2(y) = \|y - x\|^2 = \langle y - x,y - x\rangle = \sum_{k=1}^n (y_k - x_k)^2$, kde uvažujeme $y = (y_1,\ldots,y_n), x = (x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n$, máme, že se jedná o polynom proměnných $y_1,\ldots,y_n$, tedy funkci třídy $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$. Rovnost $\nabla^2\left(\varrho_x^2(y)\right) = 2I$ dostaneme díky

$$\frac{\partial^2}{\partial y_i \partial y_j}\left(\varrho_x^2(y)\right) = \frac{\partial^2}{\partial y_i \partial y_j}\left(\sum_{k=1}^n (y_k - x_k)^2\right) = \frac{\partial}{\partial y_i}(2(y_j - x_j)) = 2\delta_{ij},\ 1 \leq i,j \leq n.$$

Z toho plyne i vztah $\nabla(\varrho_x(y)) = 2(y-x)$. Dále je bez pochyb jasné, že platí $\varrho_x(y) = \sqrt{\varrho_x^2(y)} \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{x\})$ a že $\nabla \varrho_x(y) = \frac{y-x}{\varrho_x(y)}$ pro $y \neq x$. Tím pádem

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial y_i \partial y_j}(\varrho_x(y)) = \frac{\partial}{\partial y_i}\left(\frac{y_j - x_j}{\varrho_x(y)}\right) &= \frac{\delta_{ij}\varrho_x(y) - (y_j - x_j)\frac{y_i - x_i}{\varrho_x(y)}}{\varrho_x(y)^2} \\ &= \frac{\delta_{ij}}{\varrho_x(y)} - \frac{(y_j - x_j)(y_i - x_i)}{\varrho_x(y)^3}, \ 1 \leq i, j \leq n,\end{aligned}$$

což dává přesně to, co jsme chtěli. $\square$

Definice 1.1.21. Buď V vektorový prostor nad tělesem T a $M \subseteq V$. Potom definujeme *lineární obal množiny* M jako

$$\operatorname{span}(M) := \bigcap\{L;\ M \subseteq L,\ L \text{ je vektorový podprostor } V\}.$$

Buď dále A afinní prostor se zaměřením V nad tělesem T a $M \subseteq V$. Potom definujeme *afinní obal množiny* M jako

$$\operatorname{aff}(M) := \bigcap\{L;\ M \subseteq L,\ L \text{ je afinní podprostor } A\}.$$

Mějme množinu $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Definujeme *konvexní obal množiny* A jako

$$\operatorname{conv}(A) := \bigcap\{B;\ A \subseteq B \subseteq \mathbb{R}^n,\ B \text{ je konvexní}\}.$$

Poznámka. Snadno se ověří, že vlastnosti pronikaných množin v předchozích definicích se průnikem zachovají.

Poznámka. Je-li $K \subseteq \mathbb{R}^n$ konvexní těleso neobsahující počátek, pak existuje nejmenší (vůči inkluzi) konvexní uzavřený kužel se středem v počátku $\mathcal{C}(K)$ obsahující K.

Důkaz. Uvažujme množinu

$$\mathcal{C}(K) := \{t\boldsymbol{\xi};\ t \geq 0, \boldsymbol{\xi} \in K\} = \{t\boldsymbol{\xi};\ t \geq 0, \boldsymbol{\xi} \in \operatorname{conv}(\{0\} \cup K)\}.$$

Potom $K \subseteq \operatorname{conv}(\{0\} \cup K) \subseteq \mathcal{C}(K)$. Z definice množiny $\mathcal{C}(K)$ je patrné, že se jedná o uzavřený konvexní kužel se středem v počátku. Co se týče minimality, tak pokud máme uzavřený konvexní kužel se středem v počátku obsahující K, tak nutně obsahuje $\operatorname{conv}(\{0\} \cup K)$ a libovolnou polopřímku vycházejí z počátku a protínající K, tedy i celé $\mathcal{C}(K)$. $\square$

1.2 Opěrná a oddělovací věta

V této krátké podkapitole uvedeme několik vět a definic z knihy D. Huga a W. Weila *Lectures on Convex Geometry* [8] (konkrétně z částí 1.4 Support and Separation, počínaje stranou 23, a 2.3 The Support Function, počínaje stranou 61), jež nám budou nápomocné v důkazu stěžejní věty tohoto textu. Rovněž odkážeme i na skripta prof. Rataje k přednášce *Konvexní tělesa* [14], kapitoly Opěrné a oddělovací věty a Opěrná funkce, z nichž je celá tato sekce přímo převzata.

Definice 1.2.1. *Uzavřeným a otevřeným poloprostorem v* $\mathbb{R}^n$ rozumíme konvexní množiny

$$H := \{\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^n;\ \langle \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\xi} \rangle \leq \gamma\}, G := \{\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^n;\ \langle \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\xi} \rangle < \gamma\},$$

pro nějaká $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{S}^{n-1}$ a $\gamma \in \mathbb{R}^n$ pevná. Příslušnou *hraniční nadrovinou poloprostoru* (ať už otevřeného, nebo uzavřeného) rozumíme konvexní množinu

$$E := \partial H = \partial G = \{\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^n;\ \langle \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\xi} \rangle = \gamma\}.$$

Poznámka. Zřejmě k libovolné nadrovině v $\mathbb{R}^n$ existují právě 2 otevřené (a 2 uzavřené) poloprostory mající tuto nadrovinu jako svou hraniční. V takovém případě o nich hovoříme jako o *poloprostorech opačných.*

Definice 1.2.2. Buď $A \subseteq \mathbb{R}^n$ neprázdná, uzavřená a konvexní. $H \subseteq \mathbb{R}^n$ buď uzavřený poloprostor s hraniční nadrovinou E splňující $A \subseteq H$ a $A \cap E \neq \emptyset$. Řekneme, že

- E je *opěrná nadrovina* množiny A,
- H je *opěrný poloprostor* množiny A,
- $E \cap A$ je *opěrná množina* množiny A.

Definice 1.2.3. Buď $A \subseteq \mathbb{R}^n$ neprázdná a omezená. *Opěrnou funkcí množiny A* rozumíme funkci

$$h(A, \boldsymbol{\xi}) := \sup_{\boldsymbol{\pi} \in A} \langle \boldsymbol{\pi}, \boldsymbol{\xi} \rangle.$$

Z omezenosti a neprázdnosti množiny A dostáváme, že $h(A, \cdot)$ vystupující v předchozí definici splňuje $h(A, \cdot) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Navíc se jedná o sublineární funkci. Z vlastností suprema je pro $t > 0$ (pro $t = 0$ je to jasné) a $\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\zeta} \in \mathbb{R}^n$ jistě

$$h(A, t\boldsymbol{\xi}) = \sup_{\boldsymbol{\pi} \in A} \langle \boldsymbol{\pi}, t\boldsymbol{\xi} \rangle = t \sup_{\boldsymbol{\pi} \in A} \langle \boldsymbol{\pi}, \boldsymbol{\xi} \rangle = th(A, \boldsymbol{\xi}).$$

Z čehož máme pozitivní homogenitu. Dále

$$\begin{aligned} h(A, \boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{\zeta}) &= \sup_{\boldsymbol{\pi} \in A} \langle \boldsymbol{\pi}, \boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{\zeta} \rangle \\ &= \sup_{\boldsymbol{\pi} \in A} (\langle \boldsymbol{\pi}, \boldsymbol{\xi} \rangle + \langle \boldsymbol{\pi}, \boldsymbol{\zeta} \rangle) \\ &\leq \sup_{\boldsymbol{\pi} \in A} \langle \boldsymbol{\pi}, \boldsymbol{\xi} \rangle + \sup_{\boldsymbol{\pi} \in A} \langle \boldsymbol{\pi}, \boldsymbol{\zeta} \rangle \\ &= h(A, \boldsymbol{\xi}) + h(A, \boldsymbol{\zeta}). \end{aligned}$$

Tedy dostáváme i subaditivitu.

Věta 1.2.4. *Ke každé sublineární funkci* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *existuje právě jedno konvexní těleso* $A \subseteq \mathbb{R}^n$ *splňující* $h(A, \cdot) = f(\cdot)$.

Věta 1.2.5. *Buď* $A \subseteq \mathbb{R}^n$ *neprázdná, uzavřená a konvexní. Mějme dále bod* $y \in \operatorname{ext}(A)$. *Pak nadrovina* E *procházející bodem* $\Pi_A(y)$ *kolmá k vektoru* $y - \Pi_A(y)$ *je opěrnou nadrovinou množiny* A *a příslušný opěrný poloprostor* H *s hraniční nadrovinou* E *neobsahující bod* y *je opěrným poloprostorem množiny* A.

Věta 1.2.6 (Opěrná věta)**.** *Buď $A \subseteq \mathbb{R}^n$ neprázdná, uzavřená a konvexní, potom každým bodem $x \in \partial A$ prochází nějaká opěrná nadrovina množiny A.*

Věta 1.2.7 (Oddělovací věta)**.** *Buď $A \subseteq \mathbb{R}^n$ neprázdná, uzavřená a konvexní a dále buď $B \subseteq \mathbb{R}^n$ konvexní těleso. Nechť platí $A \cap B = \emptyset$, pak lze množiny A a B ostře oddělit nějakou nadrovinou $E \subseteq \mathbb{R}^n$, tj. množiny A a B leží v opačných otevřených poloprostorech s hraniční nadrovinou E.*

Poznámka 1.2.8. Nechť $f : U \to \mathbb{R}$ je funkce, kde $U \subseteq \mathbb{R}^n$ je konvexní, otevřená a neprázdná. Pak f je konvexní právě tehdy, když je epigraf $\mathrm{epi}(f)$ konvexní množina v $\mathbb{R}^{n+1}$. Důkaz tohoto tvrzení je k nahlédnutí v knize *Lectures on Convex Geometry* [8] od D. Huga a W. Weila, Chapter 2, strana 42, Theorem 2.1. Dále uzávěr epigrafu této funkce je konvexní množinou právě tehdy, když každým jeho hraničním bodem prochází nějaká opěrná nadrovina (jednu implikaci zaručuje opěrná věta, druhá pak plyne z toho, že průnik konvexních množin je konvexní množina). Z tohoto si snadno rozmyslíme, že funkce f konvexní právě tehdy, když ke každému bodu, v němž je definována, existuje lokálně (uvažujeme zúžení funkce na nějakou kouli okolo tohoto bodu) opěrná nadrovina jejího epigrafu.

1.3 Hahn-Banachova věta

Nyní si uvedeme jednu z nejvýznamnějších vět funkcionální analýzy, a sice Hahn-Banachovu větu (někdy známou též nazývanou algebraická verze Hahn-Banachovy věty). Její použití v tomto textu nebude nevyhnutelné, obešli bychom se i bez ní, nicméně aplikace jejího důsledku (druhé věty této podsekce) ve třetí kapitole je velmi elegantní. Její znění uvedeme ze skript prof. Spurného a doc. Johanise *Funkcionální analýza* [19], Kapitola 2, strana 35, věta 3.

Věta 1.3.1 (Hahn-Banachova věta)**.** *Nechť X je reálný vektorový prostor, Y jeho podprostor. Je-li p sublineární funkcionál na X a $f : Y \to \mathbb{R}$ lineární zobrazení splňující $f(x) \leq p(x)$ pro všechna $x \in Y$, pak existuje takové linární zobrazení $F : X \to \mathbb{R}$, že $F_{\restriction Y} = f$ a $F(x) \leq p(x)$ pro každé $x \in X$.*

Ve znění věty se vyskytují pojmy *lineární zobrazení* a *sublineární funkcionál* na obecném reálném vektorovém prostoru. V našem případě se jedná o reálné funkce. Dodejme, že sublineární funkcionál na obecném reálném vektorovém prostoru se definuje analogicky jako sublineární funkce v tomto textu.

Věta 1.3.2. *Buď $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sublineární funkce, pak*

$$f(x) = \max_{\substack{L \leq f \\ L \text{ lineární}}} \{L(x)\}.$$

Důkaz. Mějme $x \in \mathbb{R}^n$ pevné. K důkazu použijeme Hahn-Banachovu větu. Pro naše x pevné uvažujme zobrazení

$$L_x : \mathrm{span}\{x\} = \{tx;\ t \in \mathbb{R}\} \to \mathbb{R},$$

$$L_x(tx) = tf(x),\ t \in \mathbb{R}.$$

Naše zobrazení L_x je jistě lineání. Ukážeme, že $L_x \leq f$ na podprostoru span$\{x\}$ vektorového prostoru $\mathbb{R}^n$. Pro všechna $t \geq 0$ platí z positivní homogenity funkce f rovnosti $L_x(tx) = tf(x) = f(tx)$. Pro $t < 0$ máme

$$L_x(tx) = tf(x) = -f(-tx) \leq f(tx),$$

a sice díky sublinearitě. Tedy opravdu platí $L_x \leq f$ na prostoru span$\{x\}$. Z Hahn-Banachovy věty existuje $\tilde{L}_x : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ lineární zobrazení takové, že $\tilde{L}_x \leq f$ na celém $\mathbb{R}^n$ a $\tilde{L}_x = L_x$ na span$\{x\}$. Pak ale

$$\tilde{L}_x(x) = L_x(x) = f(x).$$

Tedy na jednu stranu platí nerovnost

$$f(x) = L_x(x) \leq \sup_{\substack{L \leq f \\ L \text{ lineární}}} \{L(x)\}.$$

Na stranu druhou je nadevše jasný vztah

$$f(x) \geq \sup_{\substack{L \leq f \\ L \text{ lineární}}} \{L(x)\}.$$

Celkem máme, že se suprema nabývá, pročež platí pro libovolné $x \in \mathbb{R}^n$ požadovaná rovnost

$$f(x) = \max_{\substack{L \leq f \\ L \text{ lineární}}} \{L(x)\}.$$

A jsme hotovi. $\square$

1.4 Rademacherova věta

Nyní si uvedeme jednu důležitou větu z teorie reálných funkcí, ač ji použijeme pouze v jediném důkazu. Jeden z jejích možných důkazů lze nalézt ve skriptech doc. Zeleného *Real Functions* [20] (strana 22, Theorem 1.23).

Věta 1.4.1 (Rademacherova věta)**.** *Buď $G \subseteq \mathbb{R}^n$ otevřená, neprázdná a funkce $f : G \to \mathbb{R}$ buď lipschitzovská. Potom f je diferencovatelná λ^n-skoro všude na G.*

2. Množiny kladného dosahu v $\mathbb{R}^n$

2.1 Zavedení množin kladného dosahu v $\mathbb{R}^n$ a základní příklady

Nyní konečně zavedeme pojem množiny kladného dosahu, jak jsme avizovali v úvodní části, kde jsme si uvedli i něco z jejich historie. Množiny kladného dosahu v sobě zahrnují konvexní množiny a množiny s $\mathscr{C}^2$-hranicí. V poslední kapitole si potom tyto množiny jistým způsobem charakterizujeme.

Definice 2.1.1. Buď $A \subseteq \mathbb{R}^n$ neprázdná a uzavřená. *Množinu bodů s jedinečnou metrickou projekcí na množinu* A definujeme jako množinu

$$\operatorname{Unp}(A) := \{x \in \mathbb{R}^n; \exists! a \in A : \|x - a\| = \operatorname{dist}(A,x)\}.$$

Metrickou projekcí na množinu A rozumíme zobrazení

$$\Pi_A : \operatorname{Unp}(A) \to A,\ x \mapsto \Pi_A(x) := a, \text{ kde } \|x - a\| = \operatorname{dist}(A,x).$$

Pro libovolný bod $a \in A$ dále zavedeme *dosahovou funkci a dosah množiny* A jako

$$\operatorname{reach}(A,a) := \sup\{\rho \geq 0; B(a,\rho) \subseteq \operatorname{Unp}(A)\},$$
$$\operatorname{reach}(A) := \inf\{\operatorname{reach}(A,a); a \in A\}.$$

Poznámka. Je-li A jako v předchozí definici, pak beze sporu platí $A \subseteq \operatorname{Unp}(A)$.

Příklad 2.1.2. Uvažujme dva různé body x,y v rovině, $A := \{x, y\}$, označme p přímku kolmou na úsečku spojující x a y procházející jejím středem, pak $\operatorname{Unp}(A) = \mathbb{R}^2 \setminus p$. Dosah množiny A je tedy roven $\frac{1}{2}\|x - y\|$.

Příklad 2.1.3. Položme $A := \mathbb{S}^2$. Pro libovolné $x \in \mathbb{R}^3$ takové, že $\|x\| > 0$, zřejmě existuje jedinečná metrická projekce ($\Pi_A(x) = \frac{x}{\|x\|}$). Pro $x = (0,0,0)$ jsou všechny body A vzdáleny 1. Tedy $\operatorname{reach}(A) = 1$ a $\operatorname{Unp}(A) = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$.

Poznámka. Buď $A \subseteq \mathbb{R}^n$ neprázdná a uzavřená, pak
a) zobrazení $\Pi_A : \operatorname{Unp}(A) \to A$ je spojité, v případě A konvexní je pak dokonce 1-lipschitzovské.
b) funkce $\operatorname{reach}(A,\cdot) : A \to [0, \infty]$ je spojitá.

Důkaz. a) Pro spojitost vizme [16], strana 55, Lemma 4.1, pro lipschitzovskost [14], strana 8, lemma 2.4.
b) Toto dokazovat nebudeme, odvoláme se na [7], strana 432, Remark 4.2. $\square$

Příklad 2.1.4. Uvažujme analogicky příkladu 2.1.2 kompatkní množiny

$$A := \{x\}, A_k := \{x,y_k\}, |A_k| = 2, k \in \mathbb{N},$$

kde $\|y_k - x\| \searrow 0$, pak $A_k \xrightarrow{\varrho_H} A$, ale $\operatorname{reach}(A_k) = \frac{1}{2}\|x - y_k\|$ a $\operatorname{reach}(A) = \infty$. Máme-li tedy posloupnost kompaktních množin konvergující v Hausdorffově metrice, není zaručena konvergence $\operatorname{reach}(A_k)$. Nelze tedy hovořit o spojitosti zobrazení $A \mapsto \operatorname{reach}(A)$ vůči ϱ_H v $\mathcal{K}^n$.

Definice 2.1.5. Buď $A \subseteq \mathbb{R}^n$ neprázdná a uzavřená. Řekneme, že A je *množina kladného dosahu*, pokud pro všechna $a \in A$ je $\operatorname{reach}(A,a) > 0$.

Poznámka. Je-li A jako v předchozí definici a chceme-li určit, zdali se jedná o množinu kladného dosahu, stačí zkoumat jen $\operatorname{reach}(A,a)$ pro $a \in \partial A$. Neboť je-li $a \in \operatorname{int}(A)$, což je otevřená množina, pak jistě existuje $r > 0$ takové, že $B(a,r) \subseteq \operatorname{int}(A) \subseteq A \subseteq \operatorname{Unp}(A)$. Dostáváme

$$\operatorname{reach}(A,a) = \sup\{\rho \geq 0; B(a,\rho) \subseteq \operatorname{Unp}(A)\} \geq r > 0.$$

Poznámka. Buď $A \subseteq \mathbb{R}^n$ neprázdná a uzavřená, pak
a) A je konvexní $\iff$ $\operatorname{reach}(A) = \infty$,
b) A je konvexní $\iff$ $\operatorname{Unp}(A) = \mathbb{R}^n$,
c) je-li $\operatorname{reach}(A) > 0$, pak A je množina kladného dosahu.
Speciálně, každá konvexní uzavřená neprázdná množina je již množinou kladného dosahu.

Důkaz. a) Uvedeno bez důkazu v [7], strana 433, Remark 4.2.
b) „ $\Longrightarrow$ “: Dle a) je $\operatorname{reach}(A) = \infty$, tedy musí mít všechny body jedinečnou metrickou projekci.
„ $\Longleftarrow$ “: Nechť $\operatorname{Unp}(A) = \mathbb{R}^n$, pak ale $\operatorname{reach}(A) = \infty$, tedy dle a) je A konvexní.
c) Jelikož je $\operatorname{reach}(A) = \inf\{\operatorname{reach}(A,a); a \in A\} > 0$, tak pro všechna $a \in A$ je $\operatorname{reach}(A,a) > 0$. $\square$

Příklad 2.1.6. Ukážeme, že v bodě c) v předchozí poznámce neplatí obrácená implikace. Označme

$$f(x) := \frac{1}{1 + \mathrm{e}^x},\ g(x) := -f(x),\ A := \operatorname{epi}(f) \cup \operatorname{hyp}(g),$$

pak A je uzavřená jako konečné sjednocení uzavřených množin. Dále A je zřejmě neprázdná a platí rovnost $\operatorname{Unp}(A) = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ y = 0\}$. Uvažujme body typu $(x,0)$. Jelikož je množina $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ y = 0\}$ horizontální asymptota funkcí f i g, poloměry tečných kružnic k A se středem $(x,0)$ konvegují k nule. Všehovšudy dostaneme, že $\operatorname{reach}(A) = 0$, avšak pro všechna $a \in A$ dostaneme $\operatorname{reach}(A,a) > 0$.

Poznámka. Poznamenejme, že množina, která je dle naší definice množinou kladného dosahu, vůbec nemusí mít kladný dosah (ve smyslu, že $\operatorname{reach}(\cdot)$ této množiny je kladný). V článku [7] od Herberta Federera je množina kladného dosahu definována nepatrně odlišně, a sice je-li pro $A \subseteq \mathbb{R}^n$ $\operatorname{reach}(A) > 0$, což intuitivně odpovídá definici množiny kladného dosahu. V případě A kompaktní je naše definice s tou Federerovou bezesporu totožná. Totiž je-li pro všechna $a \in A$ $\operatorname{reach}(A,a) > 0$, tak k libovolnému bodu $a \in A$ existuje číslo $r_a > 0$ takové, že $B_a := B(a,r_a) \subseteq \operatorname{Unp}(A)$. Pak soubor $\{B_a;\ a \in A\}$ tvoří otevřené pokrytí kompaktu A, tedy existuje přirozené číslo n a příslušné koule (konečné podpokrytí) $B_1,\ldots,B_n \in \{B_a;\ a \in A\}$ splňující $A \subseteq B_1 \cup \cdots \cup B_n$. Pak

$$\operatorname{reach}(A) \geq \operatorname{dist}(A, (\mathbb{R}^n \setminus (B_1 \cup \cdots \cup B_n)) > 0.$$

My se ovšem držíme definice ze článku [2]. Předchozí poznámka (bod c)) naopak dokazuje, že každá Federerova množina kladného dosahu (ne nutně kompaktní) má i pro nás kladný dosah. Předchozí příklad pak ukazuje, že pro nekompaktní množiny tento vztah platit nemusí. Můžeme tedy říci, že naše definice množiny kladného dosahu je spíše *množina lokálně kladného dosahu.* Také v literatuře je spíše používána Federerova definice, například v [5].

Příklad 2.1.7. Předchozí příklady ilustrují množiny kladného dosahu. Nyní uvedeme neprázdnou a uzavřenou množinu, která kladný dosah nemá. Označme

$$A := \operatorname{graph}(|x|), \text{ a tedy zřejmě } \operatorname{Unp}(A) = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x = 0,\ y > 0\}.$$

Jelikož má otevřená koule se středem v počátku a libovolně voleným poloměrem neprázdný průnik s množinou $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x = 0,\ y > 0\}$, je $\operatorname{reach}(A,(0,0)) = 0$.

Poznámka. Již jsme si ukázali, že každá neprázdná uzavřená konvexní množina je množinou kladného dosahu. Uvedeme si, že má kladný dosah i každá uzavřená neprázdná množina s $\mathscr{C}^2$-hranicí. Pro podrobnosti odkážeme na článek *Some Characterization of a Uniform Ball Property* [6] od Jérémy Dalphina, ve kterém pracuje s množinami s $\mathscr{C}^{1,1}$-hranicí (definovanými v [6] na straně 439, Definition 1.5). Nadále se zabývá množinami s vlastností $\operatorname{reach}(A) > 0$ a ty následně charakterizuje, a sice pomocí tzv. *ε-ball condition* (Theorems 1.6, 1.8, 1.9, strana 440). Díky právě uvedeným větám lze vyvodit, že kompatkní množina A mající $\mathscr{C}^{1,1}$-hranici splňuje $\operatorname{reach}(A) > 0$. Jelikož nás ale zajímá kladný dosah lokálně a množina s $\mathscr{C}^2$-hranicí má i $\mathscr{C}^{1,1}$-hranici (na omezené množině je gradient zobrazení o regularitě $\mathscr{C}^2$ lipschitzovský), můžeme použít jeho výsledek pro naše účely a vyvodit, že množina s $\mathscr{C}^2$-hranicí má kladný dosah.

2.2 Vlastnosti množin kladného dosahu v $\mathbb{R}^n$

Poznámka. Uvažujme množinu $A \subseteq \mathbb{R}^n$ neprázdnou a uzavřenou a dále také bod $x \in \operatorname{ext}(A) \cap \operatorname{Unp}(A)$. Pak jistě $\operatorname{conv}\{x,\Pi_A(x)\} \subseteq \operatorname{Unp}(A)$ a navíc pro $y \in \operatorname{conv}\{x,\Pi_A(x)\}$ libovolné platí rovnost $\Pi_A(y) = \Pi_A(x)$. Totiž

$$B(x,\|x - \Pi_A(x)\|) \cap A = \emptyset,\ \overline{B}(x,\|x - \Pi_A(x)\|) \cap A = \{\Pi_A(x)\}.$$

Pak pro libovolně volené $y \in (\operatorname{conv}\{x,\Pi_A(x)\} \setminus \{x,\Pi_A(x)\})$ máme bez jakékoliv pochybnosti $B(y,\|y - \Pi_A(x)\|) \cap A = \emptyset$ a následně dostaneme i inkluzi

$$\left(\overline{B}(y,\|y - \Pi_A(x)\|) \cap A\right) \subseteq \left(\overline{B}(x,\|x - \Pi_A(x)\|) \cap A\right) = \{\Pi_A(x)\}.$$

Tedy nutně $y \in \operatorname{Unp}(A)$ a $\Pi_A(y) = \Pi_A(x)$. V lemmatu 2.2.2 si ukážeme mnohem silnější tvrzení. K důkazu tohoto tvrzení si uvedeme pomocné Lemma 4.2 z knihy *Curvature Measures of Singular Sets* [16] (Chapter 4, strana 56):

Lemma 2.2.1. *Je-li funkce $y \mapsto \operatorname{dist}(A,y)$ diferencovatelná v $x \in \operatorname{Unp}(A) \setminus A$, pak pro její gradient platí*

$$\nabla(\operatorname{dist}(A,x)) = \frac{x - \Pi_A(x)}{\|x - \Pi_A(x)\|}.$$

Dále je $y \mapsto \operatorname{dist}(A,y)$ spojitě diferencovatelná na $\operatorname{int}(\operatorname{Unp}(A) \setminus A)$.

Následující dvě lemmata a i jejich důkazy jsou inspirovány textem Norberta Kleinjohanna *Nächste Punkte in der Riemannschen Geometrie* [9], strana 333, Satz 2.1 a Satz 2.3.

Lemma 2.2.2. *Buď $A \subseteq \mathbb{R}^n$ neprázdná a uzavřená a dále mějme nějaký bod $x \in \operatorname{ext}(A) \cap \operatorname{Unp}(A)$. Pro $c > 1$ pevné označme*

$$\theta(s) := \Pi_A(x) + s(x - \Pi_A(x)),\ s \in [0,c].$$

Pokud $\{\theta(s);\ s \in (0,c)\} \subseteq \operatorname{int}(\operatorname{Unp}(A) \setminus A)$, platí

$$\Pi_A(\theta(s)) = \Pi_A(x),\ 0 \leq s < c.$$

Důkaz. Omezme se na případ $s \in (0,c)$, pro $s = 0$ je rovnost zřejmá. Označme

$$\varphi(t) := \Pi_A(x) + t\left(\frac{x - \Pi_A(x)}{\|x - \Pi_A(x)\|}\right),\ t \in (0,c\|x - \Pi_A(x)\|).$$

Nalezněme $B \subseteq \operatorname{int}(\operatorname{Unp}(A) \setminus A)$ otevřenou takovou, že obraz hladkého zobrazení φ je v ní obsažen a $\theta(c) \in \partial B$.

Z předchozího lemmatu dostáváme, že funkce $y \mapsto \operatorname{dist}(A,y)$ je na množině B diferencovatelná a platí

$$\nabla(\operatorname{dist}(A,y)) = \frac{y - \Pi_A(y)}{\|y - \Pi_A(y)\|},\ y \in B.$$

Speciálně pro $t \in (0,c\|x - \Pi_A(x)\|)$ za použití řetízkového pravidla (k nahlédnutí v [13], strana 654, Věta 11.2.18) dostaneme

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\operatorname{dist}(A,\varphi(t))) &= \langle \nabla(\operatorname{dist}(A,\varphi(t))), \varphi'(t)\rangle \\ &= \left\langle \frac{\varphi(t) - \Pi_A(\varphi(t))}{\|\varphi(t) - \Pi_A(\varphi(t))\|}, \frac{x - \Pi_A(x)}{\|x - \Pi_A(x)\|}\right\rangle.\end{aligned}$$

V diskuzi před tímto lemmatem jsme si rozmysleli, že pro $t \in (0,\|x - \Pi_A(x)\|)$ platí $\Pi_A(\varphi(t)) = \Pi_A(x)$, tedy pro tato t máme

$$\left\langle \frac{\varphi(t) - \Pi_A(\varphi(t))}{\|\varphi(t) - \Pi_A(\varphi(t))\|}, \frac{x - \Pi_A(x)}{\|x - \Pi_A(x)\|}\right\rangle =$$

$$= \left\langle \frac{\Pi_A(x) + t\left(\frac{x - \Pi_A(x)}{\|x - \Pi_A(x)\|}\right) - \Pi_A(x)}{\|\Pi_A(x) + t\left(\frac{x - \Pi_A(x)}{\|x - \Pi_A(x)\|}\right) - \Pi_A(x)\|}, \frac{x - \Pi_A(x)}{\|x - \Pi_A(x)\|}\right\rangle = 1.$$

Hledejme nyní klasické řešení (ψ,I) (definice např. v [12], strana 1) diferenciální rovnice

$$\left\langle \frac{\psi - \Pi_A(\psi)}{\|\psi - \Pi_A(\psi)\|}, \psi'\right\rangle = 1,$$

pro funkci $\psi : I \to B$. Přidejme si nyní pro $t_0 \in I$ počáteční podmínku

$$\psi(t_0) = \Pi_A(x) + \frac{1}{2}(x - \Pi_A(x)).$$

Snadno zjistíme, že dvojice $(\varphi,(0,\|x-\Pi_A(x)\|))$ je řešení vyhovující počáteční podmínce v bodě $t_0 = \frac{1}{2}\|x-\Pi_A(x)\|$. Z teorie diferenciálních rovnic víme, že každé řešení (a tedy i to naše) má maximální prodloužení ([12], strana 5, věta 3.1). Označme jej $(\tilde{\varphi},\tilde{I})$. Ovšem naše řešení bylo možné prodloužit pouze za krajní bod $\|x-\Pi_A(x)\|$, jelikož díky spojitosti by hypotetická funkční hodnota v 0 musela být rovna $\Pi_A(x) \notin B$. Víme, že maximální řešení opustí každý kompakt ([12], strana 6, věta 3.2) v množině B, tedy je naše řešení definováno až po hranici množiny B.

Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $\|\tilde{\varphi}'(t)\| = 1$ pro všechna $t \in \tilde{I}$. Potom ale máme

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\operatorname{dist}(A,\tilde{\varphi}(t))\right) = \left\langle \frac{\tilde{\varphi}(t)-\Pi_A(\tilde{\varphi}(t))}{\|\tilde{\varphi}(t)-\Pi_A(\tilde{\varphi}(t))\|},\tilde{\varphi}'(t)\right\rangle = 1,\, t \in \tilde{I}.$$

Integrací obou stran rovnosti dostaneme $\operatorname{dist}(A,\tilde{\varphi}(t)) = t + d$ pro nějaké $d \in \mathbb{R}$. Nyní určíme tuto konstantu d. Z počáteční podmínky máme

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\|x-\Pi_A(x)\| + d &= \operatorname{dist}(A,\tilde{\varphi}(\frac{1}{2}\|x-\Pi_A(x)\|))\\ &= \operatorname{dist}(A,\varphi(\frac{1}{2}\|x-\Pi_A(x)\|))\\ &= \frac{1}{2}\|x-\Pi_A(x)\| \implies d = 0.\end{aligned}$$

Tedy $\operatorname{dist}(A,\tilde{\varphi}(t)) = t$, $t \in \tilde{I}$. Dále pro $t \in \tilde{I}$ máme

$$\mathscr{L}(\tilde{\varphi}_{\restriction(0,t)}) = \int_0^t \|\tilde{\varphi}'(\tau)\|\,\mathrm{d}\lambda^1(\tau) = \int_0^t 1\,\mathrm{d}\lambda^1(\tau) = t.$$

Chceme ukázat rovnost $\tilde{\varphi} = \varphi$ na intervalu $(0,c\|x-\Pi_A(x)\|)$. Nechť pro spor existuje nějaké číslo $t \in (0,c\|x-\Pi_A(x)\|)$ takové, že $\tilde{\varphi}(t) \neq \varphi(t)$, pak bezesporu $\mathscr{L}(\varphi_{\restriction(0,t)}) = t = \mathscr{L}(\tilde{\varphi}_{\restriction(0,t)})$. Nicméně $\varphi = \tilde{\varphi}$ na intervalu $(0,\|x-\Pi_A(x)\|]$ (ze spojitosti zobrazení φ až do krajního bodu intervalu), tudíž potom nutně platí $\varphi(t),\tilde{\varphi}(t) \in \overline{B}(x,\|x-\Pi_A(x)\|-t)$. Avšak potom právě bod $\varphi(t)$ splňuje

$$\|\varphi(t)-\Pi_A(x)\| = \max\{\|z-\Pi_A(x)\|;\ z \in \overline{B}(x,\|x-\Pi_A(x)\|-t)\},$$

tj. je to jednoznačný nejvzdálenější bod. Pak ale

$$t = \operatorname{dist}(A,\tilde{\varphi}(t)) \leq \|\tilde{\varphi}(t)-\Pi_A(x)\| < \|\varphi(t)-\Pi_A(x)\| = t.$$

Což je ovšem spor. Z maximality prodloužení platí $\varphi = \tilde{\varphi}$ na $(0,c\|x-\Pi_A(x)\|)$. Tedy máme pro jakékoliv $t \in (0,c\|x-\Pi_A(x)\|)$

$$\operatorname{dist}(A,\varphi(t)) = t = \mathscr{L}(\varphi_{\restriction(0,t)}) = \|\varphi(t)-\Pi_A(x)\|$$

a dle předpokladu $\varphi(t) \in B \subseteq \operatorname{Unp}(A)$. Tudíž $\Pi_A(\varphi(t)) = \Pi_A(x)$. Samozřejmě můžeme zvolit vhodnou reparametrizaci φ a získat pro $s \in (0,c)$ libovolné

$$\Pi_A(\theta(s))) = \Pi_A(x).$$

Tímto je lemma dokázáno. $\square$

Nyní naši pozornost zaměříme na množinu $\mathrm{Unp}(A)$ (opět samozřejmě uvažujeme množinu $A \subseteq \mathbb{R}^n$ neprázdnou a uzavřenou). Ukážeme si pro zajímavost platnost rovnosti $\lambda^n(\mathbb{R}^n \setminus \mathrm{Unp}(A)) = 0$. Nejprve ale dokážeme ještě jedno pomocné lemma:

Lemma 2.2.3. *Buď $A \subseteq \mathbb{R}^n$ neprázdná a uzavřená množina. Nechť je dále funkce $\mathrm{dist}(A,\cdot) : (\mathbb{R}^n \setminus A) \to \mathbb{R}^+$ v bodě $x \in \mathbb{R}^n \setminus A$ diferencovatelná, pak $x \in \mathrm{Unp}(A)$.*

Důkaz. Jelikož bod x neleží v uzavřené množině A, platí $\rho := \mathrm{dist}(A,x) > 0$. Pak množina $\overline{B}(x,\rho + 1) \cap A$ je neprázdná a kompaktní. Dále jistě

$$\mathrm{dist}(A,x) = \mathrm{dist}(\overline{B}(x,\rho + 1) \cap A,x) = \inf\{\|x - a\|;\ a \in \overline{B}(x,\rho + 1) \cap A\}.$$

Protože spojitá funkce $y \mapsto \|x-y\|$ nabývá na kompaktu $\overline{B}(x,\rho+1)\cap A$ extrémů, existuje nějaké $a_0 \in \overline{B}(x,\rho + 1) \cap A$ takové, že $\mathrm{dist}(A,x) = \|x - a_0\|$. Potom platí vztah $B(x,\|x - a_0\|) \cap A = \emptyset$. Opět zavedeme

$$\varphi(t) := a_0 + t\left(\frac{x - a_0}{\|x - a_0\|}\right),\ t \in [0,\|x - a_0\|].$$

Následně pro $t \in (0,\|x - a_0\|]$ máme $B(\varphi(t),t) \cap A = \emptyset$, tudíž $\mathrm{dist}(A,\varphi(t)) = t$. Konečně z řetízkového pravidla pro $t_0 = \|x - a_0\|$

$$\begin{aligned} 1 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathrm{dist}(A,\varphi(t)))\bigg|_{t=t_0} &= \langle\nabla(\mathrm{dist}(A,\varphi(t_0))),\varphi'(t_0)\rangle \\ &= \left\langle\nabla(\mathrm{dist}(A,\varphi(t_0))),\frac{x - a_0}{\|x - a_0\|}\right\rangle. \end{aligned}$$

Jelikož je fukce $\mathrm{dist}(A,\cdot)$ na $\mathbb{R}^n$ 1-lipschitzovská, platí $\|\nabla(\mathrm{dist}(A,\varphi(t_0)))\| \leq 1$. Totiž pro všechna $\boldsymbol{\iota} \in \mathbb{S}^{n-1}$ máme

$$|\langle\nabla(\mathrm{dist}(A,\varphi(t_0))),\boldsymbol{\iota}\rangle| = \lim_{h\to 0}\left|\frac{\mathrm{dist}(A,\varphi(t_0) + h\boldsymbol{\iota}) - \mathrm{dist}(A,\varphi(t_0))}{h}\right| \leq 1.$$

Z Cauchy-Schwarzovy nerovnosti (např. v [13], strana 903, Věta 16.5.1)

$$1 = \left\langle\nabla(\mathrm{dist}(A,\varphi(t_0))),\frac{x - a_0}{\|x - a_0\|}\right\rangle \leq \|\nabla(\mathrm{dist}(A,\varphi(t_0)))\|\left\|\frac{x - a_0}{\|x - a_0\|}\right\| \leq 1.$$

Přičemž se snadno rozmyslí, že rovnost nastává právě tehdy, když jsou vektory lineárně závislé. Nutně tedy

$$\nabla(\mathrm{dist}(A,\varphi(t_0))) = \nabla(\mathrm{dist}(A,x)) = \frac{x - a_0}{\|x - a_0\|}.$$

Jelikož $-\nabla(\mathrm{dist}(A,x))$ udává směr nejstrmějšího klesání funkce $\mathrm{dist}(A,\cdot)$, musí být $a_0 = \Pi_A(x)$, tj. jediný neblližší bod. □

Věta 2.2.4. *Buď $A \subseteq \mathbb{R}^n$ neprázdná a uzavřená. Potom $\lambda^n(\mathbb{R}^n \setminus \mathrm{Unp}(A)) = 0$. Jinými slovy, metrická projekce je definována λ^n-skoro všude v $\mathbb{R}^n$.*

Důkaz. Je-li $A = \mathbb{R}^n$, je tvzení jasné. Uvažujme tedy, že A je vlastní podmnožinou $\mathbb{R}^n$. Jak víme, funkce $\mathrm{dist}(A,\cdot)$ je na otevřené množině $\mathbb{R}^n \setminus A$ 1-lipschtizovská. Z Rademacherovy věty (věta 1.4.1) je diferencovatelná λ^n-skoro všude v $\mathbb{R}^n \setminus A$. Dle předchozího lemmatu je v λ^n-skoro všech bodech $\mathbb{R}^n \setminus A$ definována metrická projekce Π_A. A jelikož $A \subseteq \mathrm{Unp}(A)$, dostaneme

$$0 = \lambda^n((\mathbb{R}^n \setminus A) \setminus (\mathrm{Unp}(A) \setminus A)) = \lambda^n((\mathbb{R}^n \setminus \mathrm{Unp}(A)) \setminus A) = \lambda^n(\mathbb{R}^n \setminus \mathrm{Unp}(A)).$$

Tímto je věta dokázána. □

Na závěr této podsekce si ještě uvedeme pro zajímavost jednu poznámku.

Poznámka. Jak plyne z Brouwerovy věty o pevném bodě, má každé konvexní těleso $A \subseteq \mathbb{R}^n$ vlastnost pevného bodu, znamenaje, že pro každé spojité zobrazení $f : A \to A$ existuje $x_0 \in A$ splňující rovnost $f(x_0) = x_0$. Poznamenejme na okraj, že množina kladného dosahu $A \in \mathcal{K}^n$ vlastnost pevného bodu obecně nemá. Stačí uvažovat množinu $A := \mathbb{S}^2 \subseteq \mathbb{R}^3$ (výše jsme ukázali, že $\operatorname{reach}(A) = 1$) a volit antipodální zobrazení $f(x) = -x$. To je jistě spojité, ale pevný bod nemá. Kdyby mělo pevný bod $x_0 \in \mathbb{S}^2$, pak dostaneme spor:

$$x_0 = f(x_0) = -x_0 \implies x_0 = (0,0,0) \notin \mathbb{S}^2.$$

3. Třída funkcí $\mathfrak{F}(U)$

3.1 Zavedení třídy funkcí $\mathfrak{F}(U)$ a jejich základní vlastnosti

Definice 3.1.1. Buď $U \subseteq \mathbb{R}^n$ neprázdná, otevřená a nechť $f : U \to \mathbb{R}$ je funkce. Řekneme, že f je

- *semikonvexní funkce*, pokud U je navíc konvexní a existuje nějaká funkce $g \in \mathscr{C}^\infty(U)$ taková, že funkce $f + g$ je konvexní,
- *lokálně semikonvexní funkce*, jestliže pro $x \in U$ libovolné existuje poloměr $r > 0$ takový, že $B(x,r) \subseteq U$ a navíc $f_{\restriction B(x,r)}$ je semikonvexní, to jest pokud $\forall x \in U \ \exists r > 0$ a $\exists g \in \mathscr{C}^\infty(B(x,r))$ taková, že funkce $f_{\restriction B(x,r)} + g$ je konvexní.
- *semikonkávní funkce*, je-li $-f$ semikonvexní,
- *lokálně semikonkávní funkce*, je-li $-f$ lokálně semikonvexní.

Třídu lokálně semikonvexních funkcí na U začíme $\mathfrak{F}(U)$. Je-li $U = \mathbb{R}^n$, pak $\mathfrak{F}(\mathbb{R}^n) =: \mathfrak{F}_n$.

Poznámka. Téma semikonvexních, respektive semikonkávních funkcí je rozvedeno v knize *Semiconcave Functions, Hamilton-Jacobi Equations, and Optimal Control* [3]. Autoři P. Cannarsa a C. Sinestari uvádí několik ekvivalentních definic (strana 2, Proposition 1.1.3) a také dokazují, že na interioru definičního oboru je semikonkávní funkce lokálně lipschitzovská (strana 33, Theorem 2.1.7), tedy i naše lokálně semikonvexní funkce je lokálně lipschitzovská. Rovněž zmíníme článek *Hessian measures of semi-convex functions and applications to support measures of convex bodies* [5] od D. Huga a A. Colesanti. Pozor, používají termín *semi-convex function* pro naši lokálně semikonvexní funkci. V tomto článku je provedena charakterizace těchto funkcí (zavedeno v Definition 1.1 a ukázáno v Proposition 5.1, strany 5 a 22).

Poznámka. Zřejmě je každá konvexní funkce semikonvexní (volíme $g \equiv 0$) a každá semikonvexní funkce je lokálně semikonvexní. Poměrně neintuitivní však je, že i konkávní funkce $f = -\|x\|^2$ je též semikonvexní (volíme $g = \|x\|^2$). Totiž každá hladká funkce je jistě lokálně semikonvexní.

Poznamenejme, že v následujícím lemmatu vystupuje funkce $\varrho_x^2(y) := \|x - y\|^2$ zavedená v lemmatu 1.1.20.

Lemma 3.1.2. *Buďte $U \subseteq \mathbb{R}^n$ otevřená neprázdná, $f \in \mathfrak{F}(U)$ a $p \in U$. Pak existují $C > 0$, $R > 0$ a $r \in (0,R)$ takové, že funkce $(f + C\varrho_q^2)_{\restriction B(q,r)}$ je konvexní pro všechna $q \in B(p,R)$.*

Důkaz. Z definice lokální semikonvexity existuje k bodu p poloměr $r_p > 0$ a existuje funkce $g \in \mathscr{C}^\infty(B(p,r_p))$, že $f_{\restriction B(p,r_p)} + g$ je konvexní (samozřejmě vyžadujeme $B(p,r_p) \subseteq U$). Položme $R := \frac{r_p}{2}$.

Nejprve ukážeme existenci konstanty $C > 0$ (nezávislé na $q \in B(p,R)$) s tou vlastností, že $C\varrho_q^2 - g$ je konvexní na množině $B(q,r)$ pro $r := \frac{R}{4}$. Jistě pro každé $q \in B(p,R)$ platí

$$B(q,r) \subseteq B(p,r_p),\ K := \overline{\bigcup_{q \in B(p,r)} B(q,r)} \subseteq B(p,r_p).$$

Ze spojitosti zobrazení $(x,\boldsymbol{\xi}) \mapsto \boldsymbol{\xi}(\nabla^2 g(x))\boldsymbol{\xi}^\top$ na kompaktu $K \times \mathbb{S}^{n-1}$ existuje $\gamma > 0$ splňující nerovnost $|\boldsymbol{\xi}(\nabla^2 g(x))\boldsymbol{\xi}^\top| \leq \gamma$. Uvědomme si, že konstanta γ vůbec na q nezávisí. Uvažujme pro $D > 0$ funkci $D\varrho_q^2 - g$. Ukážeme, že pro vhodnou volbu je D je tato funkce konvexní na množině $B(q,r)$. Stačí ukázat, že $\nabla^2(D\varrho_q^2 - g)(x)$ je na $B(q,r)$ positivně semidefinitní. Pro všechna $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{S}^{n-1}$ platí

$$\boldsymbol{\xi}(\nabla^2(D\varrho_q^2 - g))(x)\boldsymbol{\xi}^\top = \boldsymbol{\xi}(\nabla^2(D\varrho_q^2)(x)\boldsymbol{\xi}^\top - \boldsymbol{\xi}(\nabla^2 g)(x)\boldsymbol{\xi}^\top \geq 2D - \gamma.$$

Položme $C := \frac{\gamma}{2}$ (C rovněž nezávisí na q).

Funkce $C\varrho_q^2 - g$ je konvexní na množině $B(q,r)$. Následně můžeme vyjádřit $(f + C\varrho_q^2)_{\restriction B(q,r)} = (f_{\restriction B(q,r)} + g) + ((C\varrho^2_{q \restriction B(q,r)}) - g)$. Tedy funkce $(f + C\varrho_q^2)_{\restriction B(q,r)}$ je konvexní pro všechna $q \in B(p,R)$ jakožto součet dvou konvexních funkcí na téže konvexní množině. $\square$

Definice 3.1.3. Buď $U \subseteq \mathbb{R}^n$ neprázdná a otevřená. Dále ať $f \in \mathfrak{F}(U)$ a $x \in U$. Pro $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^n$ položme

$$\partial_x f(\boldsymbol{\xi}) := \lim_{h \searrow 0} \frac{f(x + h\boldsymbol{\xi}) - f(x)}{h},$$

pokud tato limita existuje vlastní. Funkci $\partial_x f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ nazýváme *jednostranná směrová derivace funkce f v bodě x.*

Lemma 3.1.4. *Buď $f \in \mathfrak{F}(U)$, kde $U \subseteq \mathbb{R}^n$ neprázdná otevřená, $x \in U$ libovolné a $\mathcal{U} \subseteq U$ otevřené okolí bodu x, pak*
a) funkce f je spojitá na množině U,
b) existuje-li $d_x f$, pak $d_x f = \partial_x f$,
c) hodnota $\partial_x f(\boldsymbol{\xi})$ je definována pro všechna $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^n$,
d) pro všechna $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^n$ platí $\partial_x f(\boldsymbol{\xi}) \geq -\partial_x f(-\boldsymbol{\xi})$,
e) ∂_x je lineární funkcionál na $\mathfrak{F}(U)$,
f) funkce $\partial_x f(\cdot) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je sublineární (tedy i konvexní a spojitá).

Důkaz. a) Jelikož $f \in \mathfrak{F}(U)$, existuje podle definice konstanta $r > 0$ a existuje funkce $g \in \mathscr{C}^\infty(B(x,r))$ taková, že funkce $l : B(x,r) \to \mathbb{R}$ daná předpisem $l(t) := g(t) + f(t)$ pro $t \in B(x,r)$ je konvexní. Jak víme, konvexní funkce na otevřené konvexní množině je spojitá, tudíž pro $t \in B(x,r)$ je spojitá i funkce $f(t) = l(t) - g(t)$. Funkce f je tedy lokálně spojitá na U, tedy spojitá.
b) Pro $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^n$ je

$$d_x f(\boldsymbol{\xi}) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h\boldsymbol{\xi}) - f(x)}{h} = \lim_{h \searrow 0} \frac{f(x + h\boldsymbol{\xi}) - f(x)}{h} = \partial_x f(\boldsymbol{\xi}).$$

c) Pro nulové $\boldsymbol{\xi}$ tvrzení zřejmě platí. Nechť tedy $\|\boldsymbol{\xi}\| \neq 0$. Použijeme značení z bodu a). Ze vztahu $f = l - g$ na $B(x,r)$ máme

$$\begin{aligned}\partial_x f(\boldsymbol{\xi}) &= \lim_{h\searrow 0} \frac{f(x+h(\boldsymbol{\xi})) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h\searrow 0} \left(\frac{l(x+h\boldsymbol{\xi}) - l(x)}{h} - \frac{g(x+h\boldsymbol{\xi}) - g(x)}{h} \right) \\ &= \lim_{h\searrow 0} \frac{l(x+h\boldsymbol{\xi}) - l(x)}{h} - d_x g(\boldsymbol{\xi}).\end{aligned}$$

Položme $\Omega_{\boldsymbol{\xi}}(h) := l(x+h\boldsymbol{\xi})$ pro $h \in \mathbb{R}$ taková, že $x+h\boldsymbol{\xi} \in B(x,r)$, tj. z definice otevřené koule snadno dostaneme

$$\|(x+h\boldsymbol{\xi}) - x\| = \|h\boldsymbol{\xi}\| < r \implies h \in I_{\boldsymbol{\xi}} := (-c_{\boldsymbol{\xi}}, c_{\boldsymbol{\xi}}),$$
$$c_{\boldsymbol{\xi}} := \frac{r}{\|\boldsymbol{\xi}\|}.$$

Funkce $\Omega_{\boldsymbol{\xi}} : I_{\boldsymbol{\xi}} \to \mathbb{R}$ je též konvexní, neboť se jedná o restrikci konvexní funkce na konvexní množinu. Za opakovaného použití lemmatu 1.1.5 pro vhodně volená reálná čísla $-c_{\boldsymbol{\xi}} < 0 < h_1 < h_2 < c_{\boldsymbol{\xi}}$ máme

$$\frac{\Omega_{\boldsymbol{\xi}}(0) - \Omega_{\boldsymbol{\xi}}(-c_{\boldsymbol{\xi}})}{0 - (-c_{\boldsymbol{\xi}})} \le \frac{\Omega_{\boldsymbol{\xi}}(h_1) - \Omega_{\boldsymbol{\xi}}(0)}{h_1 - 0} \le \frac{\Omega_{\boldsymbol{\xi}}(h_2) - \Omega_{\boldsymbol{\xi}}(0)}{h_2 - 0} \le \frac{\Omega_{\boldsymbol{\xi}}(c_{\boldsymbol{\xi}}) - \Omega_{\boldsymbol{\xi}}(0)}{c_{\boldsymbol{\xi}} - 0},$$

neboli

$$\frac{l(x) - l(x - c_{\boldsymbol{\xi}}\boldsymbol{\xi})}{c_{\boldsymbol{\xi}}} \le \frac{l(x+h_1\boldsymbol{\xi}) - l(x)}{h_1} \le \frac{l(x+h_2\boldsymbol{\xi}) - l(x)}{h_2} \le \frac{l(x+c_{\boldsymbol{\xi}}\boldsymbol{\xi}) - l(x)}{c_{\boldsymbol{\xi}}}.$$

Z čehož jistě vyplývá, že zobrazení $h \mapsto \frac{l(x+h\boldsymbol{\xi})-l(x)}{h}$ je omezené a nerostoucí pro $h \in (0,c_{\boldsymbol{\xi}})$. Tedy existuje vlastní $\lim_{h\searrow 0} \frac{l(x+h\boldsymbol{\xi})-l(x)}{h}$. Celkem dostaneme rozvnost $\partial_x f(\boldsymbol{\xi}) = \partial_x l(\boldsymbol{\xi}) - d_x g(\boldsymbol{\xi}) \in \mathbb{R}$.
d) Plyne ihned z bodu f).
e) Jsou-li $g, g_1, g_2 \in \mathfrak{F}(U)$, $t \in \mathbb{R}$ a $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^n$, potom

$$\begin{aligned}\partial_x(g_1+g_2)(\boldsymbol{\xi}) &= \lim_{h\searrow 0} \frac{(g_1+g_2)(x+h\boldsymbol{\xi}) - (g_1+g_2)(x)}{h} \\ &= \lim_{h\searrow 0} \left(\frac{g_1(x+h\boldsymbol{\xi}) - g_1(x)}{h} + \frac{g_2(x+h\boldsymbol{\xi}) - g_2(x)}{h} \right) \\ &= \partial_x g_1(\boldsymbol{\xi}) + \partial_x g_2(\boldsymbol{\xi}),\end{aligned}$$

dále

$$\begin{aligned}\partial_x(tg)(\boldsymbol{\xi}) &= \lim_{h\searrow 0} \frac{(tg)(x+h\boldsymbol{\xi}) - (tg)(x)}{h} \\ &= t \lim_{h\searrow 0} \frac{g(x+h\boldsymbol{\xi}) - g(x)}{h} \\ &= t\partial_x g(\boldsymbol{\xi}).\end{aligned}$$

f) Ukážeme pozitivní homogenitu a subaditivitu. Buď $t > 0$ libovolné (jistě pro $t = 0$ homogenita zřejmě platí) a $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^n$, pak

$$\partial_x f(t\boldsymbol{\xi}) = \lim_{h\searrow 0} \frac{f(x+h(t\boldsymbol{\xi})) - f(x)}{h} = t \lim_{k\searrow 0} \frac{f(x+k\boldsymbol{\xi}) - f(x)}{k} = t\partial_x f(\boldsymbol{\xi}),$$

kde prostřední rovnost plyne z věty o limitě složené funkce ([13], strana 219, věta 4.2.21), položíme-li $k := ht$, pak $k \searrow 0$ a k je různé od 0 na libovolném jejím prstencovém okolí. Buďte nyní $\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2 \in \mathbb{R}^n$. Ze vztahu $f = l - g$ na $B(x,r)$ máme

$$\begin{aligned}
\partial_x f(\boldsymbol{\xi}_1 + \boldsymbol{\xi}_2) &= \lim_{h \searrow 0} \frac{f(x + h(\boldsymbol{\xi}_1 + \boldsymbol{\xi}_2)) - f(x)}{h} \\
&= \lim_{h \searrow 0} \left(\frac{l((x + h(\boldsymbol{\xi}_1 + \boldsymbol{\xi}_2)) - l(x)}{h} - \frac{g(x + h(\boldsymbol{\xi}_1 + \boldsymbol{\xi}_2)) - g(x)}{h} \right) \\
&= \lim_{h \searrow 0} \frac{l(\frac{1}{2}(x + 2h\boldsymbol{\xi}_1) + \frac{1}{2}(x + 2h\boldsymbol{\xi}_2)) - \frac{1}{2}l(x) - \frac{1}{2}l(x)}{h} - d_x g(\boldsymbol{\xi}_1 + \boldsymbol{\xi}_2) \\
&\leq \lim_{h \searrow 0} \frac{\frac{1}{2}(l(x + 2h\boldsymbol{\xi}_1) - l(x)) + \frac{1}{2}(l(x + 2h\boldsymbol{\xi}_2)) - l(x))}{h} \\
&- (d_x g(\boldsymbol{\xi}_1) + d_x g(\boldsymbol{\xi}_2)) \\
&= \lim_{h \searrow 0} \frac{(l(x + 2h\boldsymbol{\xi}_1) - l(x)) + (l(x + 2h\boldsymbol{\xi}_2)) - l(x))}{2h} \\
&- (d_x g(\boldsymbol{\xi}_1) + d_x g(\boldsymbol{\xi}_2)) \\
&= \lim_{k \searrow 0} \frac{l(x + k\boldsymbol{\xi}_1) - l(x) + l(x + k\boldsymbol{\xi}_2) - l(x))}{k} - (d_x g(\boldsymbol{\xi}_1) + d_x g(\boldsymbol{\xi}_2)) \\
&= \partial_x l(\boldsymbol{\xi}_1) + \partial_x l(\boldsymbol{\xi}_2) - (d_x g(\boldsymbol{\xi}_1) + d_x g(\boldsymbol{\xi}_2)) \\
&= \partial_x f(\boldsymbol{\xi}_1) + \partial_x f(\boldsymbol{\xi}_2),
\end{aligned}$$

tedy je $\partial_x f(\cdot)$ sublineární. Využili jsme konvexity funkce l, hladkosti g, substituce $k := 2h$ a linearity diferenciálu. Nerovnost ve výpočtu je platná z toho důvodu, že výrazy v limitě splňující tento vztah pro všechna $h > 0$ dosti malá. Dle lemmatu 1.1.7 je funkce $\partial_x f(\cdot)$ i konvexní, v důsledku čehož je i spojitá. □

Definice 3.1.5. Buď $f \in \mathfrak{F}(U)$, kde $U \subseteq \mathbb{R}^n$ otevřená neprázdná. Vektor $\boldsymbol{\zeta} \in \mathbb{R}^n$ nazýváme *subdiferenciál funkce f v bodě* $x \in U$, pokud $\langle \boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{\xi} \rangle \leq \partial_x f(\boldsymbol{\xi})$ pro všechna $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^n$. Dále označme

$$\Pi^*(f,x) := \{\boldsymbol{\zeta} \in \mathbb{R}^n; \boldsymbol{\zeta} \text{ je subdiferenciál funkce } f \text{ v bodě } x\}.$$

Poznámka 3.1.6. Námi zavedený termín *subdiferenciál* je převzat z Bangertova článku [2]. Nicméně v různých zdrojích se názvosloví různí. V knize *Convex Analysis* od R. T. Rockafellera [17] je subdiferenciálem nazýváno konvexní těleso $\Pi^*(f,x)$, jeho prvky pak subgradiety (avšak jen pro konvexní funkce). Nicméně Victor Bangert oproti tomu nazývá subgradientem prvky množiny $\Pi(f,x)$ (k nahlédnutí v [2]). Náš termín *subdiferenciál* definuje Rockafeller pro konvexní funkce následovně: vektor $\boldsymbol{\zeta} \in \mathbb{R}^n$ je *subdiferenciál (konvexní) funkce f v bodě x*, pokud je splněno:

$$\forall z \in \mathbb{R}^n : f(z) \geq f(x) + \langle \boldsymbol{\zeta}, z - x \rangle.$$

Snadno ukážeme, že vektor $\boldsymbol{\zeta}$ splňující tuto definici je i subdiferenciál funkce $f \in \mathfrak{F}(U)$ v našem slova smyslu.

Důkaz. Ať $f \in \mathfrak{F}(U)$ pro nějakou $U \subseteq \mathbb{R}^n$ otevřenou neprázdnou.

Buď $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^n$ čistě libovolné. Je-li $\forall z \in U : f(z) \geq f(x) + \langle \boldsymbol{\zeta}, z - x \rangle$, pak speciálně pro $z := x+h\boldsymbol{\xi}$, kde $h > 0$ dosti malé, platí $z \in U$, a tedy z předpokladu $f(x + h\boldsymbol{\xi}) - f(x) \geq \langle \boldsymbol{\zeta}, h\boldsymbol{\xi} \rangle$. Pak

$$\frac{f(x + h\boldsymbol{\xi}) - f(x)}{h} \geq \langle \boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{\xi} \rangle.$$

Přechodem $h \searrow 0$ dostaneme $\langle \boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{\xi} \rangle \leq \partial_x f(\boldsymbol{\xi})$, přičemž $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^n$ bylo jakékoliv. □

Dále si ukážeme, že je-li $\boldsymbol{\zeta} \in \Pi^*(f,x)$ pro $f \in \mathfrak{F}(U)$ konvexní, pak pro všechna $z \in U$ platí $f(z) \geq f(x) + \langle z - x, \boldsymbol{\zeta} \rangle$.

Důkaz.
Ať $f \in \mathfrak{F}(U)$ pro nějakou $U \subseteq \mathbb{R}^n$ konvexní otevřenou neprázdnou a mějme $\boldsymbol{\zeta} \in \Pi^*(f,x)$, jinými slovy řečeno platí nerovnost $\langle \boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{\xi} \rangle \leq \partial_x f(\boldsymbol{\xi})$ pro všechna $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^n$. Buď $z \in U$ libovolné. Tedy jako v důkazu lemmatu 3.1.4 dostaneme

$$\partial_x f(z - x) = \lim_{h \searrow 0} \frac{f(x + h(z - x)) - f(x)}{h} \geq \langle \boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{\xi} \rangle.$$

A zobrazení $h \mapsto \frac{f(x+h(z-x))-f(x)}{h}$ je pro h dosti malé klesající, tedy existuje $\delta > 0$, že pro $h \in (0,\delta)$ je

$$\frac{f(x + h(z - x)) - f(x)}{h} \geq \lim_{h \searrow 0} \frac{f(x + h(z - x)) - f(x)}{h} \geq \langle \boldsymbol{\zeta}, (z - x) \rangle.$$

Dále z lemmatu 1.1.5 snadno plyne

$$f(z) - f(x) = \frac{f(x + 1(z - x)) - f(x)}{1 - 0} \geq \frac{f(x + h(z - x)) - f(x)}{h}.$$

Celkem vzato pro libovolné $z \in U$ dostáváme

$$f(z) - f(x) \geq \langle \boldsymbol{\zeta}, (z - x) \rangle.$$

Což jsme přesně chtěli dokázat. □

Příklad 3.1.7. Uvažujme semikonvexní funkci $f(x) = x^3 + |x| \in \mathfrak{F}_1$.

- Pro $x > 0$ je zřejmě $\partial_x f = d_x f = 3x^2 + 1$, tedy

  $$\Pi^*(f,x) = \{\boldsymbol{\zeta} \in \mathbb{R}; \boldsymbol{\zeta}\boldsymbol{\xi} \leq 3x^2\boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}\},$$

  případ $\boldsymbol{\xi} = 0$ splňuje libovolné $\boldsymbol{\zeta}$, v případě $\boldsymbol{\xi} > 0$ dostaneme nerovnost $\boldsymbol{\zeta} \leq 3x^2 + 1$, v případě $\boldsymbol{\xi} < 0$ dostaneme nerovnost $\boldsymbol{\zeta} \geq 3x^2 + 1$, tedy jediné $\boldsymbol{\zeta}$ splňující všechny tři podmínky je $\boldsymbol{\zeta} = 3x^2 + 1$, tudíž $\Pi^*(f,x) = \{3x^2 + 1\}$.

- Pro $x < 0$ zcela analogickou úvahou dostaneme, že $\Pi^*(f,x) = \{3x^2 - 1\}$.

- Pro $x = 0$ z linearity funkcionálu ∂_x máme

  $$\partial_0 f(\boldsymbol{\xi}) = \left(3x^2\boldsymbol{\xi} + \lim_{h \searrow 0} \frac{f(x + h\boldsymbol{\xi}) - f(x)}{h} \right)\Bigg|_{x=0} = \lim_{h \searrow 0} \frac{|0 + h\boldsymbol{\xi}| - |0|}{h} = |\boldsymbol{\xi}|,$$

  pak $\Pi^*(f,0) = \{\boldsymbol{\zeta} \in \mathbb{R}; \boldsymbol{\zeta}\boldsymbol{\xi} \leq |\boldsymbol{\xi}|, \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}\}$, případ $\boldsymbol{\xi} = 0$ splňuje libovolné $\boldsymbol{\zeta}$, v případě $\boldsymbol{\xi} > 0$ dostaneme nerovnici $\boldsymbol{\zeta} \leq 1$, v případě $\boldsymbol{\xi} < 0$ dostaneme nerovnici $\boldsymbol{\zeta} \geq -1$, z čehož máme $\boldsymbol{\zeta} \in [-1,1]$, tudíž $\Pi^*(f,0) = [-1,1]$.

Nyní uvedeme pomocné lemma, které budeme hojně používat v důkazech. Způsob, jakým je lemma dokazováno, je převzat z [14] (strana 16, věta 5.2).

Lemma 3.1.8. *Buď $f \in \mathfrak{F}(U)$, kde $U \subseteq \mathbb{R}^n$ neprázdná otevřená, a $x \in U$. Potom $\Pi^*(f,x)$ je konvexní těleso.*

Důkaz. Potřebujeme dokázat konvexitu, kompaktnost (uzavřenost+omezenost) a v neposlední řadě neprázdnost.

Začneme tedy s konvexitou. Je-li $\boldsymbol{\zeta}_1,\boldsymbol{\zeta}_2 \in \Pi^*(f,x)$ a $t \in [0,1]$ libovolné, pak z definice $\forall \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^n$ platí, že $\langle \boldsymbol{\zeta}_1,\boldsymbol{\xi}\rangle \leq \partial_x f(\boldsymbol{\xi})$ a $\langle \boldsymbol{\zeta}_2,\boldsymbol{\xi}\rangle \leq \partial_x f(\boldsymbol{\xi})$, následně ale z linearity skalárního součinu

$$\langle t\boldsymbol{\zeta}_1 + (1-t)\boldsymbol{\zeta}_2,\boldsymbol{\xi}\rangle = t\langle \boldsymbol{\zeta}_1,\boldsymbol{\xi}\rangle + (1-t)\langle \boldsymbol{\zeta}_2,\boldsymbol{\xi}\rangle \leq t\partial_x f(\boldsymbol{\xi}) + (1-t)\partial_x f(\boldsymbol{\xi}) = \partial_x f(\boldsymbol{\xi}),$$

tedy se jedná o konvexní množinu.

Ukážeme nyní kompaktnost. Mějme posloupnost $\{\boldsymbol{\zeta}_k\}_{k=1}^{\infty} \in \Pi^*(f,x)^{\mathbb{N}}$ takovou, že $\boldsymbol{\zeta_k} \to \boldsymbol{\zeta}$. Z definice $\Pi^*(f,x)$ platí $\forall k \in \mathbb{N}$, že $\langle \boldsymbol{\zeta}_k,\boldsymbol{\xi}\rangle \leq \partial_x f(\boldsymbol{\xi})$. Dále ze spojitosti skalárního součinu máme $\langle \boldsymbol{\zeta},\boldsymbol{\xi}\rangle = \lim_{k\to\infty}\langle \boldsymbol{\zeta}_k,\boldsymbol{\xi}\rangle \leq \partial_x f(\boldsymbol{\xi})$, kde $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^n$ je čistě libovolné. Což nám dává $\boldsymbol{\zeta} \in \Pi^*(f,x)$, tedy se jedná o uzavřenou množinu. Je-li nenulové $\boldsymbol{\zeta} \in \Pi^*(f,x)$, potom $\langle \boldsymbol{\zeta},\boldsymbol{\zeta}\rangle = \|\boldsymbol{\zeta}\|^2 \leq \partial_x f(\boldsymbol{\zeta})$. Z pozitivní homogenity a faktu, že spojitá funkce $\partial_x f$ nabývá na kompaktu $\mathbb{S}^{n-1}$ extrémů, máme:

$$\|\boldsymbol{\zeta}\| \leq \frac{\partial_x f(\boldsymbol{\zeta})}{\|\boldsymbol{\zeta}\|} = \partial_x f(\frac{\boldsymbol{\zeta}}{\|\boldsymbol{\zeta}\|}) \leq \max_{\boldsymbol{\sigma}\in\mathbb{S}^{n-1}}\{\partial_x f(\boldsymbol{\sigma})\} < \infty,$$

což implikuje omezenost.

Zbývá ukázat neprázdnost. Dle lemmatu1.1.7 je epigraf funkce $\partial_x f$ konvexní uzavřený kužel se středem v počátku. Pro připomenutí

$$\operatorname{epi}(\partial_x f) = \{(\boldsymbol{\xi}_n,\boldsymbol{\xi}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R};\ \partial_x f(\boldsymbol{\xi}_n) \leq \boldsymbol{\xi}\}.$$

Mějme nyní $\boldsymbol{\nu} \in \mathbb{R}^n$ pevné. Z věty 1.2.6 dostaneme existenci E_0 opěrné nadroviny množiny $\operatorname{epi}(\partial_x f)$ procházející bodem $(\boldsymbol{\nu},\partial_x f(\boldsymbol{\nu})) \in \partial(\operatorname{epi}(\partial_x f))$. Jelikož je $\operatorname{epi}(\partial_x f)$ kužel se středem v počátku, je i $\{t(\boldsymbol{\nu},\partial_x f(\boldsymbol{\nu}));\ t > 0\} \subseteq \operatorname{epi}(\partial_x f)$. Pak ale nutně $\{t(\boldsymbol{\nu},\partial_x f(\boldsymbol{\nu}));\ t > 0\} \subseteq E_0$. V důsledku čehož prochází opěrná nadrovina E_0 počátkem. Tudíž pro nějaké $(\boldsymbol{\zeta}_n,\boldsymbol{\zeta}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ máme

$$E_0 = \{(\boldsymbol{\xi}_n,\boldsymbol{\xi}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R};\ \langle(\boldsymbol{\xi}_n,\boldsymbol{\xi}),(\boldsymbol{\zeta}_n,\boldsymbol{\zeta})\rangle = 0\}.$$

Bez újmy na obecnosti lze předpokládat

$$\Pi^*(f,x) \subseteq \{(\boldsymbol{\xi}_n,\boldsymbol{\xi}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R};\ \langle(\boldsymbol{\xi}_n,\boldsymbol{\xi}),(\boldsymbol{\zeta}_n,\boldsymbol{\zeta})\rangle \leq 0\}.$$

Dále platí $\boldsymbol{\zeta} \neq 0$. Pokud by $\boldsymbol{\zeta} = 0$, pak by $E_0 = \{(\boldsymbol{\xi}_n,\boldsymbol{\xi}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R};\ \langle \boldsymbol{\xi}_n,\boldsymbol{\zeta}_n\rangle = 0\}$, ovšem pro vhodně volené $\boldsymbol{\xi}$ (dosti velké v absolutní hodnotě) a $\boldsymbol{\xi}_n$ libovolně volené je $(\boldsymbol{\xi}_n,\boldsymbol{\xi}) \in \operatorname{int}(\operatorname{epi}(\partial_x f))$, tedy $(\boldsymbol{\xi}_n,\boldsymbol{\xi}) \notin E_0$, protože $E_0 \cap \operatorname{int}(\operatorname{epi}(\partial_x f)) = \emptyset$. Což je ale spor. Z linearity skalárního součinu můžeme volit $\boldsymbol{\zeta} = -1$, následně dostaneme

$$E_0 = \{(\boldsymbol{\xi}_n,\boldsymbol{\xi}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R};\ \langle \boldsymbol{\xi}_n,\boldsymbol{\zeta}_n\rangle = \boldsymbol{\xi}\},\ H_0 = \{(\boldsymbol{\xi}_n,\boldsymbol{\xi}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R};\ \langle \boldsymbol{\xi}_n,\boldsymbol{\zeta}_n\rangle \leq \boldsymbol{\xi}\}.$$

Ukážeme, že $\boldsymbol{\zeta}_n \in \Pi^*(f,x)$. Nechť pro spor $\langle \boldsymbol{\xi}_n,\boldsymbol{\zeta}_n\rangle > \partial_x f(\boldsymbol{\xi}_n)$ pro nějaké $\boldsymbol{\xi}_n \in \mathbb{R}^n$. Zvolme $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}$ tak, že $\langle \boldsymbol{\xi}_n,\boldsymbol{\zeta}_n\rangle > \boldsymbol{\xi} > \partial_x f(\boldsymbol{\xi}_n)$, pak ale $(\boldsymbol{\xi}_n,\boldsymbol{\xi}) \in \operatorname{epi}(\partial_x f) \subseteq H_0$, tedy $\langle \boldsymbol{\xi}_n,\boldsymbol{\zeta}_n\rangle \leq \boldsymbol{\xi} < \langle \boldsymbol{\xi}_n,\boldsymbol{\zeta}_n\rangle$, což je spor. Musí tudíž platit $\langle \boldsymbol{\xi}_n,\boldsymbol{\zeta}_n\rangle \leq \partial_x f(\boldsymbol{\xi}_n)$ pro všechna $\boldsymbol{\xi}_n \in \mathbb{R}^n$, tedy $\boldsymbol{\zeta}_n \in \Pi^*(f,x)$, což dává neprázdnost. $\square$

Lemma 3.1.9. *Buďte $U \subseteq \mathbb{R}^n$ neprázdná otevřená, $f \in \mathfrak{F}(U)$, $x \in U$ a $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^n$. Pak*

$$\partial_x f(\boldsymbol{\xi}) = \max_{\boldsymbol{\pi} \in \Pi^*(f,x)} \{\langle \boldsymbol{\pi}, \boldsymbol{\xi} \rangle\}.$$

Jinými slovy, funkce $\partial_x f$ je opěrnou funkcí konvexního tělesa $\Pi^*(f,x)$.

Důkaz. Z věty 1.3.2 použité na sublineární funkci $\partial_x f$ dostaneme

$$\begin{aligned}\partial_x f(\boldsymbol{\xi}) &= \max_{\substack{L \leq \partial_x f \\ L \text{ lineární}}} \{L(\boldsymbol{\xi})\} = \max_{\substack{L \leq \partial_x f \\ L \text{ lineární}}} \{\langle \boldsymbol{\omega}_L, \boldsymbol{\xi} \rangle\} \\ &= \max\{\langle \boldsymbol{\omega}_L, \boldsymbol{\xi} \rangle, \langle \boldsymbol{\omega}_L, \boldsymbol{\eta} \rangle \leq \partial_x f(\boldsymbol{\eta}) \text{ pro všechna } \boldsymbol{\eta} \in \mathbb{R}^n\},\end{aligned}$$

přičemž jsme použili lemma 1.1.8, dle kterého pro jakékoliv lineární zobrazení $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ existuje právě jedno $\boldsymbol{\omega}_L \in \mathbb{R}^n$ splňující $L(\cdot) = \langle \boldsymbol{\omega}_L, \cdot \rangle$. Zvážíme-li definici subdiferenciálu, můžeme ekvivalentně vyjádřit

$$\begin{aligned}\partial_x f(\boldsymbol{\xi}) &= \max\{\langle \boldsymbol{\omega}_L, \boldsymbol{\xi} \rangle, \langle \boldsymbol{\omega}_L, \boldsymbol{\eta} \rangle \leq \partial_x f(\boldsymbol{\eta}) \text{ pro všechna } \boldsymbol{\eta} \in \mathbb{R}^n\} \\ &= \max\{\langle \boldsymbol{\omega}_L, \boldsymbol{\xi} \rangle, \boldsymbol{\omega}_L \in \Pi^*(f,x)\}.\end{aligned}$$

Celkem dostaneme

$$\partial_x f(\boldsymbol{\xi}) = \max_{\boldsymbol{\pi} \in \Pi^*(f,x)} \{\langle \boldsymbol{\pi}, \boldsymbol{\xi} \rangle\},$$

což jsme přesně chtěli. □

Poznámka. Z důkazu předchozího lemmatu dokonce plyne samotná neprázdnost množiny $\Pi^*(f,x)$.

Poznámka. Uvedeme pro zajímavost ještě jeden, poněkud geometričtější, důkaz lemmatu 3.1.9.

Důkaz. Uvažujme epigraf funkce $\partial_x f$, tedy konvexní, nepráznou a uzavřenou množinu

$$\operatorname{epi}(\partial_x f) = \{(\boldsymbol{\kappa}_n, \boldsymbol{\kappa}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R};\ \partial_x f(\boldsymbol{\kappa}_n) \leq \boldsymbol{\kappa}\}.$$

Bodem $(\boldsymbol{\xi}, \partial_x f(\boldsymbol{\xi})) \in \partial(\operatorname{epi}(\partial_x f))$ tedy dle věty 1.2.6 prochází opěrná nadrovina E_0. Stejně jako v důkazu lemmatu 3.1.8 pro vhodné $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^n$ lze E_0 vyjádřit jako

$$E_0 = \{(\boldsymbol{\kappa}_n, \boldsymbol{\kappa}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R};\ \langle \boldsymbol{\kappa}_n, \boldsymbol{\mu} \rangle = \boldsymbol{\kappa}\},$$

přičemž platí $\boldsymbol{\mu} \in \Pi^*(f,x)$. Dále bod $(\boldsymbol{\xi}, \partial_x f(\boldsymbol{\xi}))$ leží v opěrné množině množiny $\operatorname{epi}(\partial_x f)$, tedy jednak $(\boldsymbol{\xi}, \partial_x f(\boldsymbol{\xi})) \in E_0$, jednak

$$(\boldsymbol{\xi}, \partial_x f(\boldsymbol{\xi})) \in \partial(\operatorname{epi}(\partial_x f)) = \operatorname{graph}(\partial_x f) = \{(\boldsymbol{\kappa}_n, \boldsymbol{\kappa}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R};\ \partial_x f(\boldsymbol{\kappa}_n) = \boldsymbol{\kappa}\}.$$

V důsledku čehož $\langle \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\mu} \rangle = \boldsymbol{\kappa}$ a také $\partial_x f(\boldsymbol{\xi}) = \boldsymbol{\kappa}$. Celkem $\partial_x f(\boldsymbol{\xi}) = \langle \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\mu} \rangle$. Za použití definice je $\langle \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\mu} \rangle = \partial_x f(\boldsymbol{\xi}) \geq \langle \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\pi} \rangle$ pro všechna $\boldsymbol{\pi} \in \Pi^*(f,x)$, pročež

$$\partial_x f(\boldsymbol{\xi}) = \max_{\boldsymbol{\pi} \in \Pi^*(f,x)} \{\langle \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\pi} \rangle\}.$$

Tím je důkaz ukončen. □

Poznámka. Tedy není zapotřebí použít k důkazu lemmatu 3.1.9 tak silný nástroj jako Hahn-Banachovu větu, avšak její použití je pěkné propojení s funkcionální analýzou. Dále z věty 1.2.4 dokonce plyne, že $\Pi^*(f,x)$ je jediné konvexní těleso, jehož opěrná funkce je $\partial_x f(\cdot)$.

Zbytek této sekce pojednává o charakterizaci diferencovatelnosti funkcí třídy lokálně semikonvexních funkcí. Nejprve si ale uvedeme jedno tvrzení obecnějšího charakteru.

Tvrzení 3.1.10. *Buď $U \subseteq \mathbb{R}^n$ neprázdná a otevřená, $x \in U$ a $f : U \to \mathbb{R}$ funkce lipschitzovská na okolí bodu x. Nechť dále existuje $d_x f$ a je lineární, potom je již f v bodě x diferencovatelná.*

Důkaz. Nalezněme z lipschitzovskosti funkce f na okolí bodu x poloměr $r_x > 0$ a $\beta > 0$, že f je β-lipschitzovské na množině $B(x,r_x)$. Je jasné, že pokud $D_x f$ existuje, pak jedině $D_x f(\cdot) = d_x f(\cdot)$. Jistě platí $d_x f(\cdot) = \langle \nabla f(x), \cdot \rangle$. Stačí dle definice ukázat

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x) - d_x f(h)}{\|h\|} = 0.$$

Položme

$$g(y) := f(y) - f(x) - d_x f(y - x).$$

Pak pro $y,z \in B(x,r_x)$ máme za použití Cauchy-Schwarzovy nerovnosti

$$\begin{aligned}
|g(y) - g(z)| &= |f(y) - f(x) - d_x f(y - x) - (f(z) - f(x) - d_x f(z - x))| \\
&\le |f(y) - f(z)| + |d_x f(y - z)| \\
&= |f(y) - f(z)| + |\langle \nabla f(x), y - z \rangle| \\
&\le \beta\|y - z\| + \|\nabla f(x)\|\|y - z\| \\
&= \tilde{\beta}\|y - z\|,
\end{aligned}$$

kde $\tilde{\beta} := \beta + \|\nabla f(x)\| > 0$. Tudíž g je $\tilde{\beta}$-lipschitzovská na $B(x,r_x)$. Potom

$$g(x) = f(x) - f(x) - d_x f(x - x) = 0,$$

$$d_x g(\boldsymbol{\xi}) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h\boldsymbol{\xi}) - f(x) - d_x f(x + h\boldsymbol{\xi} - x)}{h} = d_x f(\boldsymbol{\xi}) - d_x f(\boldsymbol{\xi}) = 0.$$

Ukážeme, že g je diferencovatelná v bodě x. Tím pádem pak nutně $D_x g = \mathbf{0}$. Tedy

$$0 = \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h)}{\|h\|} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x) - d_x f(h)}{\|h\|},$$

což přesně požadujeme.

Ať $\varepsilon > 0$. Kompaktní množinu $\mathbb{S}^{n-1}$ pokryjeme souborem otevřených množin $\{B(x,\varepsilon); x \in \mathbb{S}^{n-1}\}$ a nalezneme konečně mnoho koulí $B_1, \ldots, B_k$ se středy po řadě $x_1, \ldots, x_k$ z tohoto souboru pokrývající $\mathbb{S}^{n-1}$. Víme, že $d_x g = 0$, tedy z definice $d_x g$ k našemu ε existuje $\delta \in (0,r_x)$, že pro všechna $1 \le i \le k$ a pro libovolné $t \in (-\delta,\delta)$ platí $|g(x + tx_i)| \le \varepsilon|t|$.

Zvolme libovolné $h \in B(0,\delta)$ nenulové, tj. $\|h\| \in (0,\delta)$, potom existuje index $1 \leq i \leq k$ takové, že $\left\| x_i - \frac{h}{\|h\|} \right\| < \varepsilon$, tedy $\| \|h\| x_i - h\| < \varepsilon \|h\|$. Následně

$$\begin{aligned} |g(x+h)| &\leq |g(x+h) - g(x + \|h\| x_i)| + |g(x + \|h\| x_i)| \\ &\leq \tilde{\beta} \|(x+h) - (x + \|h\| x_i)\| + \varepsilon \|h\| \\ &\leq \tilde{\beta} \|h - \|h\| x_i\| + \varepsilon \|h\| \\ &\leq \tilde{\beta} \varepsilon \|h\| + \varepsilon \|h\| \\ &= \varepsilon (\tilde{\beta} + 1) \|h\|. \end{aligned}$$

Pročež g je diferencovatelná v bodě x. $\square$

Lemma 3.1.11. *Buďte $f \in \mathfrak{F}(U)$, kde $U \subseteq \mathbb{R}^n$ je neprázdná a otevřená, a $x \in U$. Pak funkce f je diferencovatelná v bodě x právě tehdy, když je množina $\Pi^*(f,x)$ jednoprvková. Což je právě tehdy, když platí $\Pi^*(f,x) = \{\nabla f(x)\}$.*

Důkaz. Nejprve ukážeme první ekvivalenci.
„ $\Longrightarrow$ “: Nechť f je diferencovatelná v bodě x. Existuje tedy $d_x f$. Dle lemmatu 3.1.4 pro $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^n$ libovolné platí $\partial_x f(\boldsymbol{\xi}) = d_x f(\boldsymbol{\xi})$. Mějme $\boldsymbol{\zeta} \in \Pi^*(f,x)$, což je dle lemmatu 3.1.8 konvexní těleso. Potom z definice $\Pi^*(f,x)$ pro všechna $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^n$ platí $\langle \boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{\xi} \rangle \leq d_x f(\boldsymbol{\xi})$. Speciálně i pro $-\boldsymbol{\xi}$, tedy $\langle \boldsymbol{\zeta}, -\boldsymbol{\xi} \rangle \leq d_x f(-\boldsymbol{\xi})$. Použijeme-li linearitu skalárního součinu a diferenciálu, dostaneme $\langle \boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{\xi} \rangle = d_x f(\boldsymbol{\xi})$. Celkem

$$\boldsymbol{\pi} \in \Pi^*(f,x) \iff \forall \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^n : \langle \boldsymbol{\pi}, \boldsymbol{\xi} \rangle \leq \langle \boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{\xi} \rangle \iff \forall \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^n : \langle \boldsymbol{\pi} - \boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{\xi} \rangle \leq 0.$$

Nechť pro spor $\boldsymbol{\pi} - \boldsymbol{\zeta} \neq 0$, pak ale pro $\boldsymbol{\xi} := \boldsymbol{\pi} - \boldsymbol{\zeta}$ je

$$0 \neq \|\boldsymbol{\pi} - \boldsymbol{\zeta}\|^2 = \langle \boldsymbol{\pi} - \boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{\pi} - \boldsymbol{\zeta} \rangle \leq 0,$$

což protiřečí předpokladu. Ukázali jsme, že $\boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{\zeta}$, a tedy $\Pi^*(f,x) = \{\boldsymbol{\zeta}\}$.
„ $\Longleftarrow$ “: Nechť $\Pi^*(f,x) = \{\boldsymbol{\zeta}\}$. Dle lemmatu 3.1.9 platí pro libovolné $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^n$

$$\partial_x f(\boldsymbol{\xi}) = \max_{\boldsymbol{\pi} \in \Pi^*(f,x)} \{\langle \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\pi} \rangle\} = \langle \boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{\xi} \rangle.$$

Následně

$$\langle \boldsymbol{\zeta}, -\boldsymbol{\xi} \rangle = \lim_{h \searrow 0} \frac{f(x + h(-\boldsymbol{\xi})) - f(x)}{h} = -\lim_{k \nearrow 0} \frac{f(x + k\boldsymbol{\xi}) - f(x)}{k},$$

kde po substituci $k := -h$ platí $k \nearrow 0$. Tedy celkem

$$\lim_{h \searrow 0} \frac{f(x + h\boldsymbol{\xi}) - f(x)}{h} = \langle \boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{\xi} \rangle = \lim_{h \nearrow 0} \frac{f(x + h\boldsymbol{\xi}) - f(x)}{h},$$

$$\text{nutně } \langle \boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{\xi} \rangle = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h\boldsymbol{\xi}) - f(x)}{h} = d_x f(\boldsymbol{\xi}),$$

tedy existuje $d_x f$ a je lineární. Dle předešlého tvrzení 3.1.10 je f diferencovatelná v bodě x.

Co se týče druhé ekvivalence, tak implikace „ $\Longleftarrow$ “ je jasná. Pro implikaci „ $\Longrightarrow$ “ si stačí uvědomit, že v důkazu prvé ekvivalence v kroku „ $\Longleftarrow$ “ dostáváme, že je-li $\Pi^*(f,x) = \{\boldsymbol{\zeta}\}$, pak pro $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^n$ libovolné

$$\langle \boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{\xi} \rangle = d_x f(\boldsymbol{\xi}) = \langle \nabla f(x), \boldsymbol{\xi} \rangle,$$

kde používáme fakt, že je funkce f v bodě x diferencovatelná. Lemma 1.1.8 zaručuje jednoznačnost tohoto vyjádření, z čehož máme $\boldsymbol{\zeta} = \nabla f(x)$. $\square$

Poznámka. Uvedeme pro zajímavost ještě jednu charakterizaci diferencovatelnosti pro $f \in \mathfrak{F}(U)$ v bodě $x \in U$, a sice f je diferencovatelná v bodě x právě tehdy, když je $\partial_x f$ lineární.

Důkaz. „ $\Longrightarrow$ “: Je-li f diferencovatelná v bodě x, pak z lemmatu 3.1.4 $d_x f = \partial_x f$ a $d_x f$ je lineární.
„ $\Longleftarrow$ “: Je-li $\partial_x f$ lineární, pak z lemmatu 1.1.8 existuje právě jedno $\boldsymbol{\zeta} \in \mathbb{R}^n$ splňující $\partial_x f(\cdot) = \langle \boldsymbol{\zeta}, \cdot \rangle$. Zbytek důkazu lze snadno nahlédnout z lemmatu 3.1.11. $\square$

3.2 Slabě regulární podúrovňové množiny funkcí třídy $\mathfrak{F}(U)$

Definice 3.2.1. Buďte $U \subseteq \mathbb{R}^n$ neprázdná, otevřená a $f \in \mathfrak{F}(U)$, potom
a) bod $x \in U$ nazýváme *regulární bod funkce f*, pokud $\mathbf{0} \notin \Pi^*(f,x)$,
b) bod $x \in U$ nazýváme *slabě regulární bod funkce f*, pokud pro libovolnou posloupnost $\{\boldsymbol{\pi}_k\}_{k=1}^{\infty} \in \{\Pi^*(f,x_k)\}_{k=1}^{\infty}$, kde $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \in U^{\mathbb{N}}$, $x_k \to x$ a $f(x_k) > f(x)$, platí, že $\mathbf{0}$ není hromadným bodem posloupnosti $\{\boldsymbol{\pi}_k\}_{k=1}^{\infty}$.

Definice 3.2.2. Buď $f \in \mathfrak{F}(U)$, kde $U \subseteq \mathbb{R}^n$ je neprázdná a otevřená. Množinu $A := f^{-1}((-\infty, a])$, kde $a \in \mathbb{R}$, nazýváme *regulární,* respektive *slabě regulární podúrovňová množina funkce f*, je-li $\emptyset \subsetneq A \subsetneq \mathbb{R}^n$ a $\forall x \in f^{-1}(\{a\})$ platí, že x je regulární, respektivě slabě regulární bod f.

Poznamenejme, že množina A v předchozí definici je vždy uzavřená (relativně vůči U) jakožto vzor uzavřené množiny při spojitém zobrazení. Dále si všimněme, že požadujeme vlastní podmnožinu $\mathbb{R}^n$.

Příklad 3.2.3. Pro ilustraci definic 3.2.1 a 3.2.2 uvedeme několik triviálních příkladů.

- Pro hladkou konvexní funkci $f(x) = e^x \in \mathfrak{F}_1$ je $\Pi^*(f,x) = \{e^x\}$, pročež platí $\mathbf{0} \notin \Pi^*(f,x)$, to vše pro všechna $x \in \mathbb{R}$, což nám dává, že každý bod je bodem regulárním, v důsledku čehož je i libovolná neprázdná mnnožina $A := f^{-1}((-\infty, a])$, kde $a > 0$, regulární podúrovňová množina funkce f.

- Pro hladkou konvexní funkci $f(x) = x^2 \in \mathfrak{F}_1$ je $\Pi^*(f,x) = \{2x\}$ pro $x \in \mathbb{R}$. Pro nenulová x platí $\mathbf{0} \notin \Pi^*(f,x)$, jedná se tedy o regulární body. Pro $x = 0$ je $\Pi^*(f,0) = \{\mathbf{0}\}$, pročež není regulárním bodem. Pro a záporné dostáváme $f^{-1}((-\infty, a]) = \emptyset$. Pro $a = 0$ je $f^{-1}((-\infty, 0]) = f^{-1}(\{0\}) = \{0\}$. Mějme posloupnost $\{\boldsymbol{\pi}_k\}_{k=1}^{\infty}$ splňující $\boldsymbol{\pi}_k \in \Pi^*(f,x_k) = \{2x_k\}$, kde $x_k \to 0$ a $f(x_k) > f(0) = 0$, tudíž $\boldsymbol{\pi_k} \to \mathbf{0}$, z čehož máme, že $f^{-1}((-\infty, 0])$ není slabě regulární podúrovňová množina. Pro $a > 0$ jsou jistě $f^{-1}((-\infty, a])$ regulární.

- Pro semikonvexní funkci $f(x) = -\cosh(x) \in \mathfrak{F}_1$ je $\Pi^*(f,x) = \{-\sinh(x)\}$, $x \in \mathbb{R}$. Každý bod $x \neq 0$ je regulární. Prouze pro x nulové platí vztah $\mathbf{0} \in \Pi^*(f,0) = \{0\}$. Bod $x = 0$ není tedy regulární bod. Žádná posloupnost $\{\boldsymbol{\pi_k}\}_{k=1}^{\infty}$ splňující vztah $\boldsymbol{\pi_k} \in \Pi^*(f,x_k) = \{\sinh(x_k)\}$, kde $x_k \to 0$ a kde také

$f(x_k) > f(0) = -1$ bohužel neexistuje, neboť v 0 je globální maximum. Tudíž je $x = 0$ slabě regulární bod. Nicméně $f^{-1}((-\infty, 0]) = \mathbb{R}^n$, tudíž se nejedná o slabě regulární podúrovňovou množinu. A dále je pro každé $a < 0$ množina $f^{-1}((-\infty, a])$ regulární.

- Pro konvexní funkci $f(x) = |x| \in \mathfrak{F}_1$ je $\Pi^*(f,x) = \{\operatorname{sgn}(x)\}$ pro x nenulové a $\Pi^*(f,0) = [-1,1]$. Pro $a < 0$ je $f^{-1}((-\infty, a]) = \emptyset$. Pro $a = 0$ je $f^{-1}((-\infty, 0]) = f^{-1}(\{0\}) = \{0\}$. Pro $x = 0$ platí $\mathbf{0} \in \Pi^*(f,0) = [-1,1]$. Bod $x = 0$ není tedy regulární bod. Uvažujme posloupnost vektorů $\{\boldsymbol{\pi_k}\}_{k=1}^{\infty}$ splňující vztahy $\boldsymbol{\pi_k} \in \Pi^*(f,x_k) = \{\operatorname{sgn}(x_k)\}$, dále $x_k \to 0$ a k tomu ještě $f(x_k) > f(0) = 0$. Avšak limita naší posloupnosti buď neexistuje, nebo je rovna ± 1. Potvrdili jsme slabou regularitu $f^{-1}((-\infty, 0])$. Pro $a > 0$ je bez pochyb $f^{-1}((-\infty, a])$ množina regulární.

Poznámka 3.2.4. Buď $f \in \mathfrak{F}(U)$, kde $U \subseteq \mathbb{R}^n$ je neprázdná otevřená. Je-li $x \in U$ regulární bod funkce f, pak je i slabě regulární. Analogicky je-li A regulární podúrovňová množina funkce f, pak je i slabě regulární. Opačné implikace nicméně obecně neplatí, více v předchozích příkladech.

Než si ale slabou regularitu regulární podúrovňové množiny budeme moci dokázat, uvedeme si pomocnou větu (Proposition 2.1.5 b), strana 29) z knihy *Optimalization and Nonsmooth Analysis* [4], jejíž autorem je F. H. Clarke. Upozorňujeme, že v této knize se pracuje s lipschitzovskými funkcemi a definují se pro ně obdobné pojmy jako pro lokálně semikonvexní funkce. Pro terminologii použitou ve formulaci věty pro jistotu odkážeme do [19].

Věta 3.2.5. *Buď X Banachův prostor a f buď lipschitzovská na okolí x. Nechť x_i a $\boldsymbol{\zeta}_i$ jsou posloupnosti v X a duálu X^* takové, že $\boldsymbol{\zeta}_i \in \Pi^*(f,x_i)$. Předpokládejme, že $x_i \to x$ a $\boldsymbol{\zeta}$ je hromadným bodem $\boldsymbol{\zeta}_i$ vzhledem ke slabé* topologii. Potom platí $\boldsymbol{\zeta} \in \Pi^*(f,x)$.*

Důkaz. V [4], jak výše zmíněno. □

Naším cílem je ukázat obdobu této věty pro lokálně semikonvexní funkce. To je ale jednoduché. Uvedeme a dokážeme tedy modifikaci předchozí věty.

Věta 3.2.6. *Buď $f \in \mathfrak{F}(U)$ pro $U \subseteq \mathbb{R}^n$ otevřenou neprázdnou. Nechť posloupnosti $\{x_i\}_{i=1}^{\infty} \in U^{\mathbb{N}}$ a $\{\boldsymbol{\zeta}_i\}_{i=1}^{\infty} \in \{\Pi^*(f,x_i)\}_{i=1}^{\infty}$ splňují, že $x_i \to x \in U$ a $\boldsymbol{\zeta}_i \to \boldsymbol{\zeta}$, pak $\boldsymbol{\zeta}$ je subdiferenciál funkce f v bodě x.*

Důkaz. Jak víme, lokálně semikonvexní funkce je lokálně lipschitzovská. Tedy speciálně existuje $r_x > 0$, že f je lipschitzovská na $B(x,r_x)$, což sice není Banachův prostor, nicméně jsou v předchozí větě použity pouze lokální pojmy. Dále duál standardně ztotožňujeme s $\mathbb{R}^n$. Z předchozí věty plyne $\boldsymbol{\zeta} \in \Pi^*(f,x)$. □

Důkaz (Poznámky 3.2.4). Mějme tedy funkci $f \in \mathfrak{F}(U)$ libovolnou, $a \in \mathbb{R}$ a buď $A := f^{-1}((-\infty,a])$ regulární podúrovňová množina. Dále nechť $x \in f^{-1}(\{a\})$, $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \in (\mathbb{R}^n)^{\mathbb{N}}$, kde $f(x_k) > f(x)$ pro všechna $k \in \mathbb{N}$, $x_k \to x$ pro $k \to \infty$ a $\{\boldsymbol{\pi}_k\}_{k=1}^{\infty} \in \{\Pi^*(f,x_k)\}_{k=1}^{\infty}$. Pro spor ať existuje vybraná posloupnost $\{\boldsymbol{\pi}_{k_l}\}_{l=1}^{\infty}$ z posloupnosti $\{\boldsymbol{\pi}_k\}_{k=1}^{\infty}$ splňující $\boldsymbol{\pi}_{k_l} \to \mathbf{0}$ pro $l \to \infty$ (tj. A není slabě regulární). Pak ale z předchozí věty je $\mathbf{0}$ subdiferenciál funkce f v bodě x, což je spor s regularitou množiny A. □

Ovšem za jistého předpokladu na funkci $f \in \mathfrak{F}(U)$ platí i obrácená implikace, jak dokazuje následující lemma:

Lemma 3.2.7. *Buď $f \in \mathfrak{F}(U) \cap \mathscr{C}^1(U)$, kde $U \subseteq \mathbb{R}^n$ je neprázdná, otevřená. Pak je každá slabě reguální podúrovňová množina funkce f i regulární.*

Důkaz. Nechť $A := f^{-1}((-\infty,a])$ je slabě regulární podúrovňová množina funkce f. Pro spor ať $x \in f^{-1}(\{a\})$ není regulární, tedy nechť $\mathbf{0} \in \Pi^*(f,x)$. Uvažujme nyní posloupnost $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \in U^{\mathbb{N}}$ splňující $x_k \to x$ a $f(x_k) > f(x)$, $k \in \mathbb{N}$. Dále mějme $\{\boldsymbol{\pi}_k\}_{k=1}^{\infty} \in \{\Pi^*(f,x_k)\}_{k=1}^{\infty}$. Funkce f je dle předpokladu diferencovatelná na U, tedy dle lemmatu 3.1.11 máme $\boldsymbol{\pi}_k = \nabla f(x_k)$ pro k přirozené. Zobrazení $x \mapsto \nabla f(x)$ je spojité, tedy $\nabla f(x_k) \to \nabla f(x)$. Ovšem opět z lemmatu 3.1.11 je $\Pi^*(f,x) = \{\nabla f(x)\}$ a předpokládáme $\mathbf{0} \in \Pi^*(f,x)$, v důsledku čehož $\mathbf{0} = \nabla f(x)$, což je spor se slabou regularitou bodu x. $\square$

Nyní si uvedeme jednu poměrně zajímavou vlastnost regulárních podúrovňových množin. Příklad za následujícím lemmatem pak ilustruje, že bez předpokladu regularity nemá následující lemma smysl.

Lemma 3.2.8. *Ať $f \in \mathfrak{F}(U)$, kde $U \subseteq \mathbb{R}^n$ je neprázdná otevřená, $a \in \mathbb{R}$ a $A := f^{-1}((-\infty,a])$ regulární podúrovňová množina funkce f. Potom platí*

$$\partial A = \partial\left(f^{-1}\left((-\infty,a]\right)\right) = f^{-1}(\{a\}).$$

Ekvivalentně,

$$\partial A = \partial\left(\{z \in U;\ f(z) \leq a\}\right) = \{z \in U;\ f(z) = a\}.$$

Poznamenejme, že vše je uvážováno relativně vůči U.

Důkaz. Postupně rozebereme obě inkluze.

Nechť nejprve $z_0 \in \partial A$. Chceme ukázat, že pak nutně platí rovnost $f(z_0) = a$. Nechť tomu tak pro spor není. Množina A je uzavřená podmnožina množiny U, $U \setminus A = \{z \in U;\ f(z) > a\}$ a $\partial A \subseteq A$, tedy musí platit $f(z_0) < a$. Jak víme, funkce f je spojitá, tedy existuje $\varepsilon > 0$ splňující

$$\forall z \in B(z_0,\varepsilon) :\ f(z) < a,$$

tedy speciálně je bod z_0 vnitřním bodem množiny A. Celkem dostáváme

$$(z_0 \in \operatorname{int}(A)\ \ \&\ \ z_0 \in \partial A) \implies z_0 \in \operatorname{int}(A) \cap \partial A = \emptyset.$$

Což je nicméně jasný spor, tudíž platí inkluze $\partial A \subseteq f^{-1}(\{a\})$.

Naopak mějme nyní bod $z_0 \in f^{-1}(\{a\}) \subseteq A$, tedy $f(z_0) = a$. Chceme ukázat, že bod z_0 je hraničním bodem množiny A. Budeme postupovat opět sporem. Ať $z_0 \in \operatorname{int}(A)$, potom existuje $\varepsilon > 0$ takové, že $B(z_0,\varepsilon) \subseteq A$. Pro $z \in B(z_0,\varepsilon)$ máme nerovnost $f(z) \leq a$. Víme, že A je regulární podúrovňová množina funkce f, tedy pro naše $z_0 \in f^{-1}(\{a\})$ platí podmínka $\mathbf{0} \notin \Pi^*(f,z_0)$. Z definice množiny $\Pi^*(f,z_0)$ dostaneme existenci vektoru $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^n$ splňujícího

$$0 = \langle \mathbf{0},\boldsymbol{\xi} \rangle > \partial_{z_0} f(\boldsymbol{\xi}).$$

Z bodu d) lemmatu 3.1.4 máme dále

$$0 > \partial_{z_0} f(\boldsymbol{\xi}) \geq -\partial_{z_0} f(-\boldsymbol{\xi}) = -\lim_{h \searrow 0} \frac{f(z_0 - h\boldsymbol{\xi}) - f(z_0)}{h} = \lim_{k \nearrow 0} \frac{f(z_0 + k\boldsymbol{\xi}) - f(z_0)}{k}.$$

(Tedy nutně $\boldsymbol{\xi} \neq \mathbf{0}$.) Z definice limity existuje $\delta > 0$, že pro všechna $k \in (-\delta,0)$ platí nerovnosti

$$0 > \frac{f(z_0 + k\boldsymbol{\xi}) - f(z_0)}{k} \implies 0 < f(z_0 + k\boldsymbol{\xi}) - f(z_0).$$

Buď nyní $l \in (-\min\{\delta, \varepsilon\|\boldsymbol{\xi}\|^{-1}\},0)$, potom $z_0 + l\boldsymbol{\xi} \in B(z_0,\varepsilon)$ a nepochybně platí $0 > f(z_0) - f(z_0 + l\boldsymbol{\xi})$. Dohromady

$$0 > f(z_0) - f(z_0 + l\boldsymbol{\xi}) \geq a - a = 0.$$

Opět se jedná o spor. Platí tedy i inkluze $\partial A \supseteq f^{-1}(\{a\})$. Celkem máme rovnost obou množin. □

Příklad 3.2.9. Mějme $f \in \mathfrak{F}_n$ pouze spojitou, $a \in \mathbb{R}$ a $A := f^{-1}((-\infty,a])$ vlastní podmnožina $\mathbb{R}^n$. Všimněme si, že inkluze $\partial A \subseteq f^{-1}(\{a\})$ platí pro naši f (stačí spojitost). Naopak pro obrácenou inkluzi $\partial A \supseteq f^{-1}(\{a\})$ pouhopouhá spojitost f nestačí. Stačí volit

$$f = \begin{cases} -\mathrm{e}^{-\frac{1}{(t+2)^2}} & x \in (-\infty, -2), \\ 0 & x \in [-2, -1], \\ -\mathrm{e}^{-\frac{1}{(t+1)^2}} & x \in (-1,0], \\ -\mathrm{e}^{-\frac{1}{(t-1)^2}} & x \in [0,1), \\ 0 & x \in [1,2], \\ -\mathrm{e}^{-\frac{1}{(t-2)^2}} & x \in (2,\infty). \end{cases}$$

Jistě je f lokálně semikonvexní ($f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R} \setminus \{0\})$ a na okolí 0 je konvexní). Položme $a = 0$, pak $f^{-1}(\{0\}) = [-2, -1] \cup [1,2]$ a $f^{-1}((-\infty,0]) = \mathbb{R}$, tedy

$$\partial A = \emptyset \not\supseteq [-2, -1] \cup [1,2] = f^{-1}(\{0\}).$$

4. Charakterizace množin kladného dosahu

V této kapitole se již dostáváme k důkazu naší verze samotné věty z Bangertova článku [2]. Jeho důkazy jsou v této sekci podrobně rozpracovány, převedeny do euklidovské geometrie a doplněny komentářem. Nejprve ale větu opět zformulujeme pomocí námi zavedené terminologie.

Věta 4.0.1. *Buď $A \subseteq \mathbb{R}^n$ vlastní uzavřená podmnožina. Pak A je množina kladného dosahu právě tehdy, když existuje $U \subseteq \mathbb{R}^n$ neprázdná otevřená a funkce $f \in \mathfrak{F}(U)$ taková, že A je slabě regulární podúrovňová množina funkce f.*

Všimněme si, že ve znění věty vynecháváme případ $A = \mathbb{R}^n$, což je jistě množina kladného dosahu. Nicméně sám Victor Bangert v definici (slabě) regulární podúrovňové množiny ve svém článku [2] nevlastní podmnožiny neuvažuje, a tak se toho budeme držet i my.

Příklad 4.0.2. Předchozí větu si ilustrujeme na příkladech.

- Snadno si rozmyslíme, že pro $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{R}$ platí $\operatorname{reach}(\mathbb{Z}) = \frac{1}{2}$. A tedy je to množina kladného dosahu. Nalezneme onu lokálně semikonvexní funkci, jež dosvědčuje tuto skutečnost. Stačí uvažovat

  $$f(x) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{1-3(x+\frac{1}{2}-k)^2}} - \mathrm{e}^{-4}, x \in [k-1,k], k \in \mathbb{Z}$$

  Potom $f \in \mathfrak{F}_1$, neboť $f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z})$ a na okolí bodů z $f^{-1}(\{0\}) = \mathbb{Z}$ je naše funkce konvexní. Postačuje ukázat, že

  $$f^{-1}((-\infty,0]) = f^{-1}(\{0\}) = \mathbb{Z}$$

  je její slabě regulární podúrovňová množina.
  Zvolme libovolně $k \in \mathbb{Z}$. Tento bod jistě není regulární. Bez újmy na obecnosti $k = 0$. Uvažujme libovolné posloupnost $x_m \to 0$, $f(x_m) > 0$ a můžeme předpokládat, že je tato posloupnost obsažena v intervalu $(-1,1)$. Platí

  $$\Pi^*(f,x_m) = \begin{cases} \left\{ \dfrac{-6(x_m+\frac{1}{2})\mathrm{e}^{-\frac{1}{1-3(x_m+\frac{1}{2})^2}}}{\left(1-3\left(x_m+\frac{1}{2}\right)^2\right)^2} \right\} & x_m < 0, \\ \left\{ \dfrac{-6(x_m-\frac{1}{2})\mathrm{e}^{-\frac{1}{1-3(x_m-\frac{1}{2})^2}}}{\left(1-3\left(x_m-\frac{1}{2}\right)^2\right)^2} \right\} & x_m > 0, \end{cases}$$

  Vidíme, že libovolná posloupnost $\{\boldsymbol{\pi}_m\}_{m=1}^\infty \in \{\Pi^*(f,x_m)\}_{m=1}^\infty$ nemá hromadný bod $\mathbf{0}$, tudíž máme slabě regulární bod.

- Uvažujme nyní funkci

  $$f(x,y) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-\frac{1}{1-3(x^2+y^2)}} - \mathrm{e}^{-4} & \sqrt{x^2+y^2} \leq 1, \\ -1 + \sqrt{x^2+y^2} & \sqrt{x^2+y^2} \geq 1. \end{cases}$$

Pak $f \in \mathfrak{F}_2$. Totiž uvnitř otevřeného jednotkové kruhu se jedná o hladkou funkci, vně o konvexní hladkou funkci a na okolí jednotkového kruhu je tato funkce konvexní. Analogickým rozborem případů jako v předchozím příkladu dostaneme, že

$$f^{-1}((-\infty,0]) = f^{-1}(\{0\}) = \mathbb{S}^1$$

je slabě regulární podúrovňová množina funkce f. Dostali jsme (avšak poněkud krkolomným způsobem), že množina $\mathbb{S}^1$ je množinou kladného dosahu.

Následuje několik lemmat, jejichž spojením dostaneme celý důkaz předchozí věty. Rovněž budeme hojně používat poznatky z předchozích kapitol.

Lemma 4.0.3. *Buď $f \in \mathfrak{F}(U)$, kde $U \subseteq \mathbb{R}^n$, a $x \in U$ regulární bod funkce f. Nechť dále existuje nenulové $\boldsymbol{\zeta} \in \mathbb{R}^n$ takové, že kdykoliv $\langle \boldsymbol{\zeta},\boldsymbol{\xi} \rangle > 0$ pro nějaké $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^n$, potom $\partial_x f(\boldsymbol{\xi}) \geq 0$. Pak existuje $t > 0$, že $t\boldsymbol{\zeta}$ je subdiferenciál funkce f v bodě x.*

Důkaz. Nechť pro spor t$\boldsymbol{\zeta} \notin \Pi^*(f,x)$ pro všechna $t > 0$, ekvivalentně zformulováno $\{t\boldsymbol{\zeta};\ t > 0\} \cap \Pi^*(f,x) = \emptyset$. Z definice regulárního bodu platí $\mathbf{0} \notin \Pi^*(f,x)$, celkem

$$\Pi^*(f,x) \cap (\{\mathbf{0}\} \cup \{t\boldsymbol{\zeta};\ t > 0\}) = \Pi^*(f,x) \cap \overline{\{t\boldsymbol{\zeta};\ t > 0\}} = \emptyset.$$

Jelikož je dle lemmatu 3.1.8 množina $\Pi^*(f,x)$ konvexní těleso, lze s odvoláním na větu 1.2.7 ostře oddělit konvexní uzavřenou množinu $\overline{\{t\boldsymbol{\zeta};\ t > 0\}}$ od množiny $\Pi^*(f,x)$ nějakou nadrovinou $E := \partial H$, kde H má tvar

$$H := \{\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^n;\ \langle \boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\alpha} \rangle \leq \gamma\},\ \Pi^*(f,x) \subseteq \operatorname{int}(H),\ \overline{\{t\boldsymbol{\zeta};\ t > 0\}} \subseteq \operatorname{ext}(H),$$

pro nějaká $\gamma \in \mathbb{R}$ a $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{S}^{n-1}$ pevná.

Postupně ukážeme existenci nadroviny E_0 procházející počátkem, která ostře odděluje $\Pi^*(f,x)$ a $\{t\boldsymbol{\zeta};\ t > 0\}$. Zřejmě platí $0 = \langle \boldsymbol{\xi},\mathbf{0} \rangle > \gamma$ a $\langle \boldsymbol{\xi},t\boldsymbol{\zeta} \rangle > \gamma$ pro všechna $t > 0$, z čehož dostaneme několik případů.

- Je-li $\langle \boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\zeta} \rangle > 0 > \gamma$, položme

  $$\boldsymbol{\xi}' := \boldsymbol{\xi},\ H_0 := \{\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^n;\ \langle \boldsymbol{\xi}',\boldsymbol{\alpha} \rangle \leq 0\},\ E_0 := \partial H_0.$$

  Díky vztahu $\langle \boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\zeta} \rangle > 0$ platí stále

  $$\Pi^*(f,x) \subseteq \operatorname{int}(H_0),\ \{t\boldsymbol{\zeta};\ t > 0\} \subseteq \operatorname{ext}(H_0).$$

- Je-li $0 > \langle \boldsymbol{\xi},t\boldsymbol{\zeta} \rangle > \gamma$ pro libovolné $t > 0$, pak i $0 \geq \inf\{\langle \boldsymbol{\xi},t\boldsymbol{\zeta} \rangle;\ t > 0\} \geq \gamma$. Ovšem dostaneme spor, neboť

  $$\inf\{\langle \boldsymbol{\xi},t\boldsymbol{\zeta} \rangle;\ t > 0\} = \langle \boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\zeta} \rangle \sup\{t;\ t > 0\} = -\infty.$$

  Čili tato situace vůbec nenastane.

- Je-li $\langle \boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\zeta} \rangle = 0$, je nadrovina E rovnoběžná s množinou $\overline{\{t\boldsymbol{\zeta};\ t > 0\}}$, což je polopřímka vycházející z počátku obsahující i krajní bod. Posuneme-li E do počátku, platí

$$H' = \{\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^n;\ \langle \boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\alpha} \rangle \leq 0\},\ E' := \partial H',\ \mathrm{span}\{\boldsymbol{\zeta}\} \subseteq E',\ \Pi^*(f,x) \subseteq \mathrm{int}(H').$$

Jelikož je $\Pi^*(f,x)$ konvexní těleso neobsahující počátek, bez pochyb existuje $\mathcal{C}\left(\Pi^*(f,x)\right)$ nejmenší uzavřený konvexní kužel se středem v počátku obasuhující množinu $\Pi^*(f,x)$. Potom jistě $\boldsymbol{\zeta} \notin \mathcal{C}\left(\Pi^*(f,x)\right)$. Z věty 1.2.5 dostaneme, že nadrovina $E_{\boldsymbol{\zeta}}$ procházející bodem $\Pi_{\mathcal{C}(\Pi^*(f,x))}(\boldsymbol{\zeta})$ kolmá k vektoru $\boldsymbol{\zeta} - \Pi_{\mathcal{C}(\Pi^*(f,x))}(\boldsymbol{\zeta})$ je opěrná nadrovina uzavřené neprázdné konvexní množiny $\mathcal{C}\left(\Pi^*(f,x)\right)$ a příslušný uzavřený poloprostor $H_{\boldsymbol{\zeta}}$ neobsahující $\boldsymbol{\zeta}$ je opěrný poloprostor množiny $\mathcal{C}\left(\Pi^*(f,x)\right)$. Uvážíme-li fakt, že $\mathcal{C}\left(\Pi^*(f,x)\right)$ je kužel se středem v počátku, dostaneme, obdobně jako ve větě 3.1.8, že nadrovina $E_{\boldsymbol{\zeta}}$ prochází počátkem. Položme

$$\boldsymbol{\xi}' := \boldsymbol{\zeta} - \Pi_{\mathcal{C}(\Pi^*(f,x))}(\boldsymbol{\zeta}).$$

Celkem tedy máme

$$H_0 := \{\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^n;\ \langle \boldsymbol{\xi}',\boldsymbol{\alpha} \rangle \leq 0\},\ E_0 := \partial H_0,$$

$$\Pi^*(f,x) \subseteq \mathrm{int}(H_0),\ \{t\boldsymbol{\zeta};\ t > 0\} \subseteq \mathrm{ext}(H_0).$$

Tedy lze ostře oddělit množiny $\Pi^*(f,x)$ a $\{t\boldsymbol{\zeta};\ t > 0\}$ nadrovinou E_0 procházející počátkem. Z čehož máme $\langle \boldsymbol{\zeta},\boldsymbol{\xi}' \rangle > 0$ a $\langle \boldsymbol{\pi},\boldsymbol{\xi}' \rangle < 0$ pro všechna $\boldsymbol{\pi} \in \Pi^*(f,x)$. Dle lemmatu 3.1.9 platí

$$\partial_x f(\boldsymbol{\xi}') = \max\{\langle \boldsymbol{\xi}',\boldsymbol{\pi} \rangle, \boldsymbol{\pi} \in \Pi^*(f,x)\} < 0,$$

což je ve sporu s předpokladem, neboť $\langle \boldsymbol{\zeta},\boldsymbol{\xi}' \rangle > 0$. $\square$

Lemma 4.0.4. *Buď $f \in \mathfrak{F}(U)$, kde $U \subseteq \mathbb{R}^n$ je neprázná otevřená, a dále nechť $A := f^{-1}((-\infty,a])$, pro nějaké $a \in \mathbb{R}$, je regulární podúrovňová množina funkce f, pak A je množina kladného dosahu.*

Důkaz. Buď $p \in A$ libovolný. Naším cílem je ukázat, že $\mathrm{reach}(A,p) > 0$. Již víme, že se stačí omezit na $p \in \partial A$. Nicméně k důkazu příštího lemmatu nám přijde vhod uvažovat obecně $p \in A$.

Nalezneme za použití lemmatu 3.1.2 $R > 0$, $C > 0$ a $r \in (0,R)$ taková, že funkce $(f + C\varrho_q^2)_{\restriction B(q,r)}$ je konvexní pro všechna $q \in B(p,R) \subseteq U$. Chceme nalézt $b > 0$ splňující

$$\forall x \in Q := f^{-1}(\{a\}) \cap \overline{B}(p,2R):\ b \leq \|\boldsymbol{\zeta}\|,\ \boldsymbol{\zeta} \in \Pi^*(f,x). \tag{4.1}$$

Poznamenejme, že toto je jediné místo v celém důkazu využívající regularitu množiny A. Volba poloměru o velikosti $2R$ je nutná, ostatně uvidíme dále. Nyní ukážeme existenci tohoto b. Mějme libovolné $x \in Q$. Z definice regulárního bodu $\mathbf{0} \notin \Pi^*(f,x)$, a tedy pro všechna $\boldsymbol{\zeta} \in \Pi^*(f,x)$ platí $0 < \|\boldsymbol{\zeta}\|$. Jelikož je $\Pi^*(f,x)$ konvexní těleso, existuje prvek $\boldsymbol{\zeta}(x) \in \Pi^*(f,x)$ s vlastností

$$\|\boldsymbol{\zeta}(x)\| = \min\{\|\boldsymbol{\pi}\|, \boldsymbol{\pi} \in \Pi^*(f,x)\} > 0.$$

Následně ukážeme, že i

$$b := \inf\{\|\boldsymbol{\zeta}(x)\|, \, x \in Q\} > 0.$$

Pro spor přepokládejme $\inf\{\|\boldsymbol{\zeta}(x)\|, \, x \in Q\} = 0$. Z definice infima existuje posloupnost $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \in Q^{\mathbb{N}}$ taková, že $\|\boldsymbol{\zeta}(x_k)\| \to 0$, což neznamená nic jiného než $\boldsymbol{\zeta}(x_k) \to \mathbf{0}$. Jelikož je množina Q kompaktní, lze nalézt vybranou posloupnost $\{x_{k_l}\}_{l=1}^{\infty}$ z naší posloupnosti $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$, která konverguje k nějakému $x \in Q$. Celkem tedy $x_{k_l} \to x$, $\boldsymbol{\xi}(x_{k_l}) \to \mathbf{0}$ a $\boldsymbol{\xi}(x_{k_l}) \in \Pi^*(f,x_{k_l})$, tedy dle věty 3.2.6 je $\mathbf{0} \in \Pi^*(f,x)$, což je spor s regularitou našeho bodu x. Získali jsme tedy $b > 0$ splňující (4.1).

Nyní dokážeme nerovnost

$$\operatorname{reach}(A, p) \geq \eta := \min\{\frac{b}{2C}, r\}. \tag{4.2}$$

Tato poměrně neintuitivní volba se následně ukáže jako volba nanejvýš vhodná. Zvolme (pokud možno) $q \in \operatorname{ext}(A)$ takové, že $\|p-q\| < \eta$. Jestliže ale takový bod neexistuje, pak $B(p,\eta) \subseteq A \subseteq \operatorname{Unp}(A)$ a nerovnost $\operatorname{reach}(A,p) \geq \eta$ platí triviálně. Předpokládejme tedy, že jsme ono q našli. Jelikož platí $\|p - q\| < r < R$ díky volbě bodu q, máme $q \in B(p,R)$ a množina $A \cap \overline{B}(p,2R)$ je neprázdná a navíc kompaktní jako průnik kompaktu a uzavřené množiny.

Beze sporu platí nerovnost $\operatorname{dist}(A,q) \leq \|p - q\| < R$. Uvědomme si dále, že díky vztahu $\|p - q\| < R$ jsou splněny následující inkluze:

$$B(q,R) \subseteq B(p,2R) \implies \overline{B}(q,R) \subseteq \overline{B}(p,2R).$$

Bod p leží v množině $\overline{B}(q,R) \cap A$, tedy speciálně pokud hledáme nejbližší bod z množiny A k bodu q, stačí uvažovat jen její část $A \cap \overline{B}(p,2R)$. Funkce $y \mapsto \|y-q\|$ je spojitá, pročež existuje bod $\tilde{q}$ v kompaktu $A \cap \overline{B}(p,2R)$ splňující

$$\operatorname{dist}(A \cap \overline{B}(p,2R),q) = \inf\{\|a - q\|, \, a \in A \cap \overline{B}(p,2R)\} = \|\tilde{q} - q\|.$$

Mějme nyní libovolný bod $\hat{q} \in \mathbb{R}^n$, $\hat{q} \neq \tilde{q}$, splňující nerovnost $\|\hat{q}-q\| \leq \|\tilde{q}-q\|$. Ukážeme, že $f(\hat{q}) > a$, a tedy $\hat{q} \notin A$. Jelikož $\|q - \tilde{q}\| > 0$, můžeme položit

$$\boldsymbol{\zeta} := \frac{q - \tilde{q}}{\|q - \tilde{q}\|}, \, \boldsymbol{\kappa} := \hat{q} - \tilde{q}.$$

Ukážeme pomocnou nerovnost

(4.3)

Tato poměrně neintuitivní volba se následně ukáže jako volba nanejvýš vhodná. Zvolme (pokud možno) $q \in \operatorname{ext}(A)$ takové, že $\|p-q\| < \eta$. Jestliže ale takový bod neexistuje, pak $B(p,\eta) \subseteq A \subseteq \operatorname{Unp}(A)$ a nerovnost $\operatorname{reach}(A,p) \geq \eta$ platí triviálně. Předpokládejme tedy, že jsme ono q našli. Jelikož platí $\|p - q\| < r < R$ díky volbě bodu q, máme $q \in B(p,R)$ a množina $A \cap \overline{B}(p,2R)$ je neprázdná a navíc kompaktní jako průnik kompaktu a uzavřené množiny.

Beze sporu platí nerovnost $\operatorname{dist}(A,q) \leq \|p - q\| < R$. Uvědomme si dále, že díky vztahu $\|p - q\| < R$ jsou splněny následující inkluze:

$$B(q,R) \subseteq B(p,2R) \implies \overline{B}(q,R) \subseteq \overline{B}(p,2R).$$

Bod p leží v množině $\overline{B}(q,R) \cap A$, tedy speciálně pokud hledáme nejbližší bod z množiny A k bodu q, stačí uvažovat jen její část $A \cap \overline{B}(p,2R)$. Funkce $y \mapsto \|y - q\|$ je spojitá, pročež existuje bod $\tilde{q}$ v kompaktu $A \cap \overline{B}(p,2R)$ splňující

$$\operatorname{dist}(A \cap \overline{B}(p,2R),q) = \inf\{\|a - q\|, \, a \in A \cap \overline{B}(p,2R)\} = \|\tilde{q} - q\|.$$

Mějme nyní libovolný bod $\hat{q} \in \mathbb{R}^n$, $\hat{q} \neq \tilde{q}$, splňující nerovnost $\|\hat{q} - q\| \leq \|\tilde{q} - q\|$. Ukážeme, že $f(\hat{q}) > a$, a tedy $\hat{q} \notin A$. Jelikož $\|q - \tilde{q}\| > 0$, můžeme položit

$$\boldsymbol{\zeta} := \frac{q - \tilde{q}}{\|q - \tilde{q}\|}, \, \boldsymbol{\kappa} := \hat{q} - \tilde{q}.$$

Ukážeme pomocnou nerovnost

$$\partial_{\tilde{q}}(f + C\varrho_q^2)(\boldsymbol{\kappa}) > 0. \tag{4.4}$$

Tvrdíme, že je-li $\langle \boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{\xi} \rangle > 0$ pro nějaké $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^n$, potom $\partial_{\tilde{q}} f(\boldsymbol{\xi}) \geq 0$. Uvažujme kouli $B(q, \|q - \tilde{q}\|)$. Ze skutečnosti, že $\tilde{q}$ je nebližší bod (případně jeden z nejbližších bodů) ke q v A, platí $B(q, \|q - \tilde{q}\|) \cap A = \emptyset$. Z definice

$$A = f^{-1}((-\infty, a]) = \{z \in \mathbb{R}^n : \; f(z) \leq a\},$$

tudíž všechna $z \in B(q, \|q - \tilde{q}\|)$ splňují $f(z) > a$. Označme

$$D := \{d \in \mathbb{R}^n : \; \langle \boldsymbol{\zeta}, d - \tilde{q} \rangle > 0\},$$

což je otevřený poloprostor. Množina D přesně koresponduje s množinou vektorů s vlastností takovou, že jejich skalární součin s $\boldsymbol{\zeta}$ je kladný, a jež navíc vycházejí z bodu $\tilde{q}$. Nyní uvažujme libovolný vektor $\boldsymbol{\xi} := d - \tilde{q}$ pro nějaké $d \in D$. Nechť pro spor $\partial_{\tilde{q}} f(\boldsymbol{\xi}) < 0$. Použijeme-li definici limity, dostaneme existenci nějakého $\delta > 0$ takového, že pro všechna $h \in (0,\delta)$ je $f(\tilde{q} + h\boldsymbol{\xi}) - f(\tilde{q}) < 0$. Volme navíc dosti malé $h > 0$, aby bod $\tilde{q} + h\boldsymbol{\xi}$ náležel do množiny $B(q, \|q - \tilde{q}\|)$. Následně ale díky vztahu $\tilde{q} \in A$ platí nerovnost $f(\tilde{q}) \leq a$, v důsledku čehož

$$0 > f(\tilde{q} + h\boldsymbol{\xi}) - f(\tilde{q}) > a - f(\tilde{q}) \geq a - a = 0.$$

Nicméně se jedná o spor. Ukázali jsme, že kdykoliv $\langle \boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{\xi} \rangle > 0$ pro nějaké $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^n$, potom $\partial_{\tilde{q}} f(\boldsymbol{\xi}) \geq 0$.

Dle předchozího lemmatu existuje $t > 0$ takové, že $t\boldsymbol{\zeta}$ je subdiferenciál funkce f v bodě $\tilde{q}$. Díky volbě konstanty b máme zaručeno $b \leq \|t\boldsymbol{\zeta}\| = t\|\boldsymbol{\zeta}\| = t$, tedy $t \geq b$. Dále z linearity funkcionálu $\partial_{\tilde{q}}$ a vztahu $\partial_{\tilde{q}}$ a $d_{\tilde{q}}$ pro hladkou funkci ϱ_q^2 máme

$$\begin{aligned}
\partial_{\tilde{q}}(f + C\varrho_q^2)(\boldsymbol{\kappa}) &= \partial_{\tilde{q}} f(\boldsymbol{\kappa}) + C d_{\tilde{q}}(\varrho_q^2)(\boldsymbol{\kappa}) \\
&= \partial_{\tilde{q}} f(\boldsymbol{\kappa}) + C \left\langle \nabla(\varrho_q^2(\tilde{q})), \boldsymbol{\kappa} \right\rangle \\
&= \partial_{\tilde{q}} f(\boldsymbol{\kappa}) + 2C \left\langle \tilde{q} - q, \boldsymbol{\kappa} \right\rangle \\
&= \partial_{\tilde{q}} f(\boldsymbol{\kappa}) - 2C\|q - \tilde{q}\| \left\langle \frac{q - \tilde{q}}{\|q - \tilde{q}\|}, \boldsymbol{\kappa} \right\rangle \\
&= \partial_{\tilde{q}} f(\boldsymbol{\kappa}) - 2C\varrho_q(\tilde{q})\langle \boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{\kappa} \rangle \\
&\geq \langle t\boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{\kappa} \rangle - 2C\varrho_q(\tilde{q})\langle \boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{\kappa} \rangle \\
&= (t - 2C\varrho_q(\tilde{q}))\langle \boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{\kappa} \rangle.
\end{aligned}$$

Využili jsme linearity skalárního součinu a diferenciálu, taktéž lemmatu 1.1.20. Nerovnost ve výpočtu plyne z toho, že platí $t\boldsymbol{\zeta} \in \Pi^*(f,\tilde{q})$, což nám implikuje $\partial_{\tilde{q}} f(\boldsymbol{\kappa}) \geq \langle t\boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{\kappa}\rangle$. Navíc díky volbě $\tilde{q}$

$$\varrho_q(\tilde{q}) = \|q - \tilde{q}\| \leq \|q - p\| < \frac{b}{2C} \leq \frac{t}{2C}.$$

Už jsme jen krůček od dokázání nerovnosti (4.4).

Nyní ukážeme nerovnost $\langle \boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{\kappa}\rangle > 0$. Uvažujme trojúhelník s vrcholy $q, \tilde{q}, \hat{q}$ v afinním prostoru $\operatorname{aff}\{q, \tilde{q}, \hat{q}\}$. Označme $\alpha \in [0,\pi)$ úhel u vrcholu $\tilde{q}$ svíraný vektory $\boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\zeta}$. Posléze z definice úhlu, kosinové věty a vztahu $\|q - \tilde{q}\| \geq \|q - \hat{q}\|$ máme

$$\begin{aligned}
\frac{\langle \|q - \tilde{q}\|\boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{\kappa}\rangle}{\|q - \tilde{q}\|\|\hat{q} - \tilde{q}\|} = \cos(\alpha) &= \frac{\|q - \tilde{q}\|^2 + \|\hat{q} - \tilde{q}\|^2 - \|q - \hat{q}\|^2}{2\|q - \tilde{q}\|\|\hat{q} - \tilde{q}\|} \\
&\geq \frac{\|q - \tilde{q}\|^2 + \|\hat{q} - \tilde{q}\|^2 - \|q - \tilde{q}\|^2}{2\|q - \tilde{q}\|\|\hat{q} - \tilde{q}\|} \\
&= \frac{\|\hat{q} - \tilde{q}\|}{2\|q - \tilde{q}\|}.
\end{aligned}$$

Ekvivalentně $\langle \boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{\kappa}\rangle \geq \frac{1}{2}\|\hat{q} - \tilde{q}\| > 0$. Tedy máme, že $\langle \boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{\kappa}\rangle > 0$, což celkem dává

$$\partial_{\tilde{q}}(f + C\varrho_q^2)(\boldsymbol{\kappa}) \geq (t - 2C\varrho_q(\tilde{q}))\langle \boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{\kappa}\rangle > (t - 2C\frac{t}{2C})\langle \boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{\kappa}\rangle = 0.$$

Tímto je nerovnost z (4.4) ověřena.

Nyní ukážeme ostrou nerovnost

$$f(\hat{q}) > f(\tilde{q}). \tag{4.5}$$

Funkce $(f + C\varrho_q^2)_{\restriction B(q,r)}$ je, jak víme, konvexní. Určitě $\|q - \hat{q}\| \leq \|q - \tilde{q}\| < r$, tudíž máme $\hat{q}, \tilde{q} \in B(q,r)$. Množina $B(q,r)$ je jistě konvexní, z čehož plyne

$$[\tilde{q}, \hat{q}] = \operatorname{conv}\{\tilde{q}, \hat{q}\} \subseteq B(q,r).$$

Zvolíme přirozenou parametrizaci úsečky $[\tilde{q}, \hat{q}]$:

$$\varphi(h) := \tilde{q} + h(\hat{q} - \tilde{q}) = \tilde{q} + h\boldsymbol{\kappa},\ h \in [0,1].$$

Zavedeme nyní pomocnou funkci

$$\Lambda : [0,1] \to \mathbb{R},\ \Lambda(h) := (f + C\varrho_q^2)(\tilde{q} + h\boldsymbol{\kappa}).$$

Tato funkce je konvexní jakožto restrikce konvexní funkce na konvexní množinu (obraz parametrizace φ).

Výše jsme ukázali, že

$$\lim_{h \searrow 0} \frac{(f + C\varrho_q^2)(\tilde{q} + h\boldsymbol{\kappa}) - (f + C\varrho_q^2)(\tilde{q})}{h} = \partial_{\tilde{q}}(f + C\varrho_q^2)(\boldsymbol{\kappa}) > 0.$$

Z definice limity tedy existuje $\delta \in (0,1)$ takové, že pro všechna $h \in (0,\delta)$ platí

$$\frac{(f + C\varrho_q^2)(\tilde{q} + h\boldsymbol{\kappa}) - (f + C\varrho_q^2)(\tilde{q})}{h} > 0,$$

ekvivalentně

$$\frac{(f + C\varrho_q^2)(\tilde{q} + h\boldsymbol{\kappa}) - (f + C\varrho_q^2)(\tilde{q} + 0\boldsymbol{\kappa})}{h - 0} > 0.$$

Buď nyní $0 < k < \delta$. Vztah

$$\Lambda(1) = (f + C\varrho_q^2)(\tilde{q} + 1\boldsymbol{\kappa}) = (f + C\varrho_q^2)(\tilde{q} + 1(\hat{q} - \tilde{q})) = (f + C\varrho_q^2)(\hat{q})$$

a konvexita funkce $\Lambda(h)$ dají za pomoci lemmatu 1.1.5:

$$\begin{aligned}(f + C\varrho_q^2)(\hat{q}) - (f + C\varrho_q^2)(\tilde{q}) &= \frac{\Lambda(1) - \Lambda(0)}{1 - 0} \geq \frac{\Lambda(k) - \Lambda(0)}{k - 0} \\ &= \frac{(f + C\varrho_q^2)(\tilde{q} + k\boldsymbol{\kappa}) - (f + C\varrho_q^2)(\tilde{q})}{k} > 0.\end{aligned}$$

Celkem získáme $(f + C\varrho_q^2)(\hat{q}) > (f + C\varrho_q^2)(\tilde{q})$, po rozepsání obdržíme nerovnost $f(\hat{q}) + C\|\hat{q} - q\|^2 > f(\tilde{q}) + C\|\tilde{q} - q\|^2$. Po úpravě dostaneme výraz

$$\begin{aligned}f(\hat{q}) &> f(\tilde{q}) + C(\|\tilde{q} - q\|^2 - \|\hat{q} - q\|^2) \\ &\geq f(\tilde{q}) + C(\|\hat{q} - q\|^2 - \|\hat{q} - q\|^2) \\ &= f(\tilde{q}),\end{aligned}$$

přičemž jsme využili předpokladu $\|\tilde{q} - q\| \geq \|\hat{q} - q\|$. Dokázali jsme ostrou nerovnost $f(\hat{q}) > f(\tilde{q})$ (4.5).

Vezměme v potaz, že bod $\tilde{q}$ je elementem množiny ∂A. Dle lemmatu 3.2.8 máme $\partial A = f^{-1}(\{a\})$, nicméně nám stačí pouze inkluze $\subseteq$, jež je splněna i bez přepokladu regularity. Nutně tedy platí $f(\tilde{q}) = a$ a následně $f(\hat{q}) > a$, pročež bod $\hat{q}$ neleží v množině $A = f^{-1}((-\infty,a])$. Z toho máme, že pro libovolné $p \in A$ a libovolné $q \in \operatorname{ext}(A)$ splňující nerovnost $\|p - q\| < \eta$ existuje právě jedno $\tilde{q} \in A$ s minimální vzdáleností, tudíž $B(p,\eta) \subseteq \operatorname{Unp}(A)$, a tedy

$$\operatorname{reach}(A,p) = \sup\{\rho \geq 0;\ B(p,\rho) \subseteq \operatorname{Unp}(A)\} \geq \eta > 0.$$

Tím jsme dokázali, co jsme si předsevzali v (4.2). Vyvodili jsme, že množina A je množinou kladného dosahu. □

Lemma 4.0.5. *Buď $f \in \mathfrak{F}(U)$, kde $U \subseteq \mathbb{R}^n$ je neprázdná a otevřená, a dále nechť je $A := f^{-1}((-\infty,a])$, pro nějaké $a \in \mathbb{R}$, slabě regulární podúrovňová množina funkce f, pak A je množina kladného dosahu.*

Důkaz. Mějme konstaty C, r, R z důkazu předchozího lemmatu. Opět je jasné, že stačí zkoumat pouze dosah bodů $p \in \partial A$. Zvolme tedy $p \in \partial A$.

Nyní ukážeme existenci konstant $\varepsilon > 0$ a $b > 0$ splňujících

$$\forall x \in Q(\varepsilon) := f^{-1}((a,a + \varepsilon)) \cap \overline{B}(p,2R) : \boldsymbol{\xi} \in \Pi^*(f,x) \implies \|\boldsymbol{\xi}\| \geq b. \qquad (4.6)$$

Důkaz existence b a ε provedeme sporem. Nechť tedy pro spor pro libovolná $b > 0$ a $\varepsilon > 0$ existuje $x \in Q$ a existuje $\boldsymbol{\xi} \in \Pi^*(f,x)$ takové, že $\|\boldsymbol{\xi}\| < b$. Tedy speciálně $\forall m,l \in \mathbb{N}$ existuje $x_{m,l} \in Q\left(\frac{1}{m}\right)$ a existuje $\boldsymbol{\xi}_{m,l} \in \Pi^*(f,x_{m,l})$ takové, že $\|\boldsymbol{\xi}_{m,l}\| < \frac{1}{l}$. Pro $m = l$ položme $x_m := x_{m,m}$, $\boldsymbol{\xi}_m := \boldsymbol{\xi}_{m,m}$. Z toho dostáváme posloupnost bodů $\{x_m\}_{m=1}^{\infty} \in \left(\overline{B}(p,2R)\right)^{\mathbb{N}}$, což je kompakt. Tedy bez újmy na obecnosti předpokládejme, že x_m konverguje k nějakému $x \in \overline{B}(p,2R)$ pro $m \to \infty$. Dále

$f(x_m) \in \left(a,a+\frac{1}{m}\right), n \in \mathbb{N}$, tedy ze spojitosti funkce f musí být $f(x) = a \implies x \in f^{-1}(\{a\})$. Navíc $\|\boldsymbol{\xi}_m\| < \frac{1}{m}$, tudíž $\|\boldsymbol{\xi}_m\| \to 0$, z čehož již plyne $\boldsymbol{\xi}_m \to \mathbf{0}$. Celkem máme $f(x_m) > a = f(x), m \in \mathbb{N}, x_m \to x, \{\boldsymbol{\xi}_m\}_{m=1}^{\infty} \in \{\Pi^*(f,x_m)\}_{m=1}^{\infty}$ a navíc $\boldsymbol{\xi}_m \to \mathbf{0}$. Našli jsme tedy bod $x \in f^{-1}(\{a\})$, který není slabě regulární, což odporuje předpokladu slabé regularity množiny A. Tudíž existují konstanty $\varepsilon > 0$ a $b > 0$ vyhovující (4.6).

Dokážeme nerovnost

$$\operatorname{reach}(A,p) \geq \frac{1}{2}\min\{\frac{b}{2C},r\} := \frac{1}{2}\eta > 0. \tag{4.7}$$

Buď $q \in \operatorname{ext}(A)$ libovolné splňující vztah $\|p-q\| < \frac{1}{2}\eta$. Ukážeme, že $q \in \operatorname{Unp}(A)$. Nalezněme posloupnost $\{a_i\}_{i=1}^{\infty} \in (a,a+\varepsilon)^{\mathbb{N}}$ s vlastností $a_i \searrow a$. Položme

$$A_i := f^{-1}((-\infty,a_i]),\ i \in \mathbb{N}.$$

Pro tyto množiny se budeme snažit použít výsledek předchozího lemmatu. Zvolme pevně jakékoliv $i \in \mathbb{N}$. Buď $x \in f^{-1}(\{a_i\}) \cap \overline{B}(p,2R)$. Víme, že všechny vektory $\boldsymbol{\xi} \in \Pi^*(f,x)$ splňují $\|\boldsymbol{\xi}\| \geq b > 0$, tedy z předchozího lemmatu máme zaručenu nerovnost

$$\operatorname{reach}(A_i,p) \geq \min\{\frac{b}{2C},r\} = \eta > 0.$$

Pozor, netvrdíme přímo, že množina A_i je regulární, pouze využíváme toho, že máme analogický vztah jako v (4.1), z něhož již nerovnost $\operatorname{reach}(A_i,p) \geq \eta$ plyne (aniž bychom požadovali nějakou regularitu). Tedy $B(p,\eta) \subseteq \operatorname{Unp}(A_i)$.

Označme $\tilde{q}_i := \Pi_{Ai}(q) \in A_i$. Takto zadefinovaný bod je zadefinován korektně, neboť dle předchozího lemmatu je $q \in \operatorname{Unp}(A_i)$. Tudíž $\|q-\tilde{q}_i\| = \operatorname{dist}(A_i,q)$ a bod $\tilde{q}_i$ je jediným bodem s touto vlastností. Dále zřejmě z vlastnosti množinového vzoru platí $A_i \searrow A$. Ze vztahu $A \subseteq A_{i+1} \subseteq A_i$ a z lemmatu 1.1.18 plyne

$$\|q-\tilde{q}_i\| = \operatorname{dist}(A_i,q) \leq \operatorname{dist}(A_{i+1},q) = \|q-\tilde{q}_{i+1}\| \leq \operatorname{dist}(A,q) \leq \|p-q\| < \frac{\eta}{2}.$$

Předposlední nerovnost je opodstatněna tím, že $p \in A$ a dále z definice vzdálenosti od množiny $\operatorname{dist}(A,q) = \inf\{\|x-q\|,\ x \in A\}$. Z výše uvedených nerovností dostaneme vztah $\{\tilde{q}_i\}_{i=1}^{\infty} \in \overline{B}(q,\|p-q\|)^{\mathbb{N}}$. Množina $\overline{B}(q,\|p-q\|)$ je kompaktní, můžeme tedy bez újmy na obecnosti předpokládat konvergenci posloupnosti $\{\tilde{q}_i\}_{i=1}^{\infty}$, jinak bychom pracovali s konvergentní podposloupností. Nechť tedy platí $\tilde{q}_i \to \tilde{q}$ pro nějaký bod $\tilde{q} \in \overline{B}(q,\|p-q\|)$. Potom jistě ze spojitosti normy $\|q-\tilde{q}_i\| \to \|q-\tilde{q}\|$.

Nyní si přidáme jeden nepatrný technický předpoklad. Máme

$$\|q-\tilde{q}_i\| \nearrow \|q-\tilde{q}\| \implies \frac{\|q-\tilde{q}\|}{\|q-\tilde{q}_i\|} \searrow 1,$$

tedy z definice limity pro všechna $\nu > 0$ existuje $i_\nu \in \mathbb{N}$ takové, že pro všechna přirozená $i \geq i_\nu : \frac{\|q-\tilde{q}\|}{\|q-\tilde{q}_i\|} \leq 1+\nu$. Speciálně můžeme volit $\nu = 1$ a opět bez újmy na obecnosti předpokládejme $i_1 = 1$. Nechť tedy

$$\forall i \in \mathbb{N} : \frac{\|q-\tilde{q}\|}{\|q-\tilde{q}_i\|} \leq 2. \tag{4.8}$$

Opět se vrátíme k naší posloupnosti $\{\tilde{q}_i\}_{i=1}^{\infty}$. Protože pro všechna $i \in \mathbb{N}$ platí $\tilde{q}_i \in A_i$, je splněna nerovnost $f(\tilde{q}_i) \leq a_i$. Ze spojitosti funkce f potom

$$f(\tilde{q}) = \lim_{i\to\infty} f(\tilde{q}_i) \leq \lim_{i\to\infty} a_i = a.$$

Tedy $f(\tilde{q}) \leq a$, tudíž $\tilde{q} \in A$. Díky právě dokázanému vztahu $\tilde{q} \in A$ nutně musí být $\|q - \tilde{q}\| \geq \operatorname{dist}(A,q)$. Na druhou stranu ale pro všechna $i \in \mathbb{N}$ máme $\|q - \tilde{q}_i\| \leq \operatorname{dist}(A,q)$, a tedy $\|q - \tilde{q}\| \leq \operatorname{dist}(A,q)$. Po následném složení obou nerovností dostaneme platnost vztahu $\|q - \tilde{q}\| = \operatorname{dist}(A,q) \leq \|p - q\| < \frac{\eta}{2}$.

Dále pozorujme

$$\|p - \tilde{q}_i\| \leq \|q - \tilde{q}_i\| + \|p - q\| \leq 2\|p - q\| < \eta.$$

Z čehož pro všechna i přirozená $\tilde{q}_i \in B(p,\eta)$. Položme

$$\boldsymbol{\zeta}_i := \frac{q - \tilde{q}_i}{\|q - \tilde{q}_i\|},\ \hat{q}_i := \tilde{q}_i + 2\,\|q - \tilde{q}\|\boldsymbol{\zeta}_i.$$

Uvážíme-li fakt, že $\tilde{q}_i \to \tilde{q}$, musí i $\hat{q}_i \to \hat{q} := \tilde{q} + 2(q - \tilde{q})$. Nicméně potom z trojúhelníkové nerovnosti

$$\begin{aligned}\|p - \hat{q}\| &\leq \|q - \hat{q}\| + \|p - q\| = \|\tilde{q} + 2(q - \tilde{q}) - q\| + \|p - q\| \\ &= \|q - \tilde{q}\| + \|p - q\| \leq 2\|p - q\| \\ &< \eta.\end{aligned}$$

Což implikuje $\hat{q} \in B(p,\eta)$. Z otevřenosti množiny $B(p,\eta)$ existuje $i_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro všechna $i \geq i_0$ platí $\hat{q}_i \in B(p,\eta) \subseteq \operatorname{Unp}(A_i)$. Můžeme opětovně bez újmy na obecnosti předpokládat, že tomu tak je pro všechna $i \in \mathbb{N}$. Zafixujme nyní $i \in \mathbb{N}$. Rádi bychom ukázali rovnost $\Pi_A(\hat{q}_i) = \tilde{q}_i$. Již víme, že ona metrická projekce bodu $\hat{q}_i$ na množinu A_i existuje.

Nesporně platí $\tilde{q}_i,\hat{q}_i \in B(p,\eta)$, což je konvexní množina, a tedy máme i $\operatorname{conv}\{\tilde{q}_i,\hat{q}_i\} \subseteq B(p,\eta)$. Z definice bodu $\hat{q}_i$ plyne $q \in (\operatorname{conv}\{\tilde{q}_i,\hat{q}_i\} \setminus \{\tilde{q}_i,\hat{q}_i\})$, totiž $q = t\hat{q}_i + (1-t)\tilde{q}_i$ pro $0 \neq t = \frac{\|q-\tilde{q}_i\|}{2\|q-\tilde{q}\|} \leq \frac{\|q-\tilde{q}\|}{2\|q-\tilde{q}\|} = \frac{1}{2}$. Dále víme, že $\Pi_{A_i}(q) = \tilde{q}_i$. Hodilo by se použít lemma 2.2.2, bohužel ale nevíme, jestli bod $\hat{q}_i$ již náhodou neleží v množině A_i.

Pomůžeme si drobným trikem. Zaveďme pro jednoduchost

$$\vartheta_i(t) := \tilde{q}_i + t\,\|q - \tilde{q}_i\|\boldsymbol{\zeta}_i,\ t \in \mathbb{R},$$

$$\vartheta_i\left(\frac{2\|q - \tilde{q}\|}{\|q - \tilde{q}_i\|}\right) = \hat{q}_i,\ \vartheta_i\left(\frac{\|q - \tilde{q}_i\|}{2\|q - \tilde{q}\|}\right) = q.$$

Máme $\overline{B}(q,\|q-\tilde{q}_i\|) \cap A_i = \{\tilde{q}_i\} \implies \forall s \in (0,2] : \vartheta_i(s) \notin A_i$, pročež z uzavřenosti množiny A_i lze nalézt $\delta > 0$ splňující:

$$\forall s \in (0,2+\delta) : \vartheta_i(s) \notin A_i \ \ \&\ \ \vartheta_i(s) \in B(p,\eta).$$

V důsledku čehož získáme

$$\{\vartheta_i(s);\ s \in (0,(2+\delta))\} \subseteq (B(p,\eta) \setminus A_i) \subseteq \operatorname{int}(\operatorname{Unp}(A_i) \setminus A_i).$$

Z lemmatu 2.2.2 dostaneme pro všechna $s \in (0,2+\delta)$ rovnost $\Pi_{A_i}(\vartheta_i(s)) = \tilde{q}_i$, speciálně

$$\overline{B}\left(\vartheta_i\left(2 + \frac{\delta}{2}\right), \left(2 + \frac{\delta}{2}\right)\|q - \tilde{q}_i\|\right) \cap A_i = \{\tilde{q}_i\}.$$

Pozor, netvrdíme nic o vztahu uzavřené koule na předchozím řádku a otevřené koule $B(p,\eta)$.
Díky našemu technickému předpokladu (4.8) body $\hat{q}_i, \tilde{q}_i$ bezesporu splňují

$$\|\tilde{q}_i - \hat{q}_i\| = 2\,\|q - \tilde{q}\| \leq 4\|q - \tilde{q}_i\| < 2(2 + \frac{\delta}{2})\|q - \tilde{q}_i\|.$$

Vyvodili jsme vztahy

$$\left\{\vartheta_i(s);\ s \in \left(0, \left(\frac{2\|q - \tilde{q}\|}{\|q - \tilde{q}_i\|}\right)\right]\right\} \cap A_i = \emptyset,$$

$$\left\{\vartheta_i(s);\ s \in \left(0, \left(\frac{2\|q - \tilde{q}\|}{\|q - \tilde{q}_i\|}\right)\right]\right\} \subseteq (B(p,\eta) \setminus A_i) \subseteq \operatorname{int}(\operatorname{Unp}(A_i) \setminus A_i).$$

Užívajíce lemma 2.2.2, dostaneme $\Pi_{A_i}(\hat{q}_i) = \tilde{q}_i$. Jelikož je bod $\tilde{q}_i$ metrická projekce bodu $\hat{q}_i$ na množinu A_i (tj. $\tilde{q}_i$ je jediný nejbližší bod z množiny A_i k bodu $\hat{q}_i$), platí nutně vztah $B(\hat{q}_i, 2\|q - \tilde{q}\|) \cap A_i = \emptyset$. Ovšem

$$\emptyset = (B(\hat{q}_i, 2\|q - \tilde{q}\|) \cap A_i) \supseteq (B(\hat{q}_i, 2\|q - \tilde{q}\|) \cap A)\,.$$

Teď je vhodná chvíle na odfixování i. Pro všechna $i \in \mathbb{N}$ máme

$$B(\hat{q}_i, 2\|q - \tilde{q}\|) \cap A = \emptyset \implies \left(\bigcup_{i=1}^{\infty}(B(\hat{q}_i, 2\|q - \tilde{q}\|)\right) \cap A = \emptyset.$$

Ukážeme

$$B(\hat{q}, 2\|q - \tilde{q}\|) \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty}(B(\hat{q}_i, 2\|q - \tilde{q}\|),$$

potom už nutně platí $B(\hat{q}, 2\|q - \tilde{q}\|) \cap A = \emptyset$. Ať $y \in B(\hat{q}, 2\|q - \tilde{q}\|)$, tedy máme $\|y - \hat{q}\| < 2\|q - \tilde{q}\|$. Potřebujeme nalézt nějaký index $j \in \mathbb{N}$ takový, že $\|y - \hat{q}_j\| < 2\|q - \tilde{q}\|$. Jelikož máme neostrou nerovnost, existuje γ kladné vyhovující nerovnosti $\|y - \hat{q}\| < 2\|q - \tilde{q}\| - \gamma$. K tomuto $\gamma > 0$ existuje z definice limity $j \in \mathbb{N}$ takové, že pro všechna $i \geq j$ platí $|\|y - \hat{q}\| - \|y - \hat{q}_i\|| < \gamma$. Následně $\|y - \hat{q}_j\| < \gamma + \|y - \hat{q}\| < 2\|q - \tilde{q}\|$, a víme tedy $y \in B(\hat{q}_j, 2\|q - \tilde{q}\|)$. Získali jsme platnost (4.0.5), z čehož plyne $B(\hat{q}, 2\|q - \tilde{q}\|) \cap A = \emptyset$.

Velmi snadno z trojúhelníkové nerovnosti dostaneme, že je-li $z \in B(q,\|q-\tilde{q}\|)$, a tudíž $\|z - q\| < \|q - \tilde{q}\|$, pak platí vztah

$$\|z - \hat{q}\| \leq \|z - q\| + \|q - \hat{q}\| < \|q - \tilde{q}\| + \|\tilde{q} + 2(q - \tilde{q}) - q\| = 2\|q - \tilde{q}\|.$$

Z tohoto plyne $z \in B(\hat{q}, 2\|\tilde{q} - q\|)$, tudíž platí $B(q,\|q-\tilde{q}\|) \subseteq B(\hat{q}, 2\|q-\tilde{q}\|)$. Jistě $\overline{B}(q,\|q - \tilde{q}\|) \cap \overline{B}(\hat{q}, 2\|q - \tilde{q}\|) = \{\tilde{q}\}$, v důsledku čehož získáme platnost:

$$\left(\overline{B}(q,\|q - \tilde{q}\|) \setminus \{\tilde{q}\}\right) \subseteq B(\hat{q}, 2\|q - \tilde{q}\|) \implies \left(\overline{B}(q,\|q - \tilde{q}\|) \setminus \{\tilde{q}\}\right) \cap A = \emptyset.$$

Celkově dostáváme, že náš bod $\tilde{q}$ je jediným bodem z uzavřené množiny A s vlastností $\operatorname{dist}(A,q) = \|q - \tilde{q}\|$. Ukázali jsme, že pro všechna $q \in \operatorname{ext}(A)$ splňující $\|p - q\| < \frac{\eta}{2}$ existuje právě jeden nejbližší bod z množiny A, tedy bez pochyb $B(p,\frac{\eta}{2}) \subseteq \operatorname{Unp}(A)$, díky čemuž obdržíme správnost (4.7), tj. $\operatorname{reach}(A,p) \geq \frac{\eta}{2}$. Množina A je tedy množinou kladného dosahu. □

Tímto jsme dokázali jednu implikaci z věty 4.0.1. Opačnou implikaci ukážeme v následujícím lemmatu, jehož důkaz je založen na článku *Hessian measures of semi-convex functions and applications to support measures of convex bodies* [5] od autorů A. Colesanti a D. Huga (strana 230, Propostion 5.2). Zde je důkaz proveden pro případ, kdy $\operatorname{reach}(A) > 0$. V našem případě by se tedy dal tento výsledek přímo aplikovat pouze na A kompaktní, nicméně potřebujeme dokázat následující lemma pro A obecnou.

Lemma 4.0.6. *Buď $A \subsetneq \mathbb{R}^n$ množina kladného dosahu, pak existuje $U \subseteq \mathbb{R}^n$ neprázdná, otevřená a funkce $f \in \mathfrak{F}(U)$ taková, že A je slabě regulární podúrovňová množina funkce f.*

Důkaz. V prvním kroku ukážeme vztah $\operatorname{dist}(A,\cdot) \in \mathfrak{F}(U)$, pro nějakou $U \supseteq A$ otevřenou, a v druhém kroku dokážeme, že $A = (\operatorname{dist}(A,\cdot))^{-1}((-\infty,0])$ je její slabě regulární podúrovňová množina.

Ukážeme tedy nejprve lokální semikonvexitu. Zvolme pevně $a \in A$. Jelikož předpokládáme, že A je množinou kladného dosahu, tak pro naše a existuje reálné číslo $r_a > 0$ takové, že $B(a,2r_a) \subseteq \operatorname{Unp}(A)$. Potom jistě $\overline{B}(a,r_a) \subseteq B(a,2r_a)$. Ukážeme, že funkce $\operatorname{dist}(A,\cdot)$ je lokálně semikonvexní na nějakém (otevřeném) okolí a, poté budeme uvažovat sjednocení těchto okolí a naše funkce bude lokálně semikonvexní na tomto sjednocení.

Víme, že zobrazení $x \mapsto \operatorname{reach}(A,x)$ je spojité. Speciálně musí na kompaktu $A \cap \overline{B}(a,r_a)$ nabývat svého minima. A poněvadž $\forall x \in A \cap \overline{B}(a,r_a)$ platí díky předpokladu $\operatorname{reach}(A,x) > 0$, je i

$$\beta_a := \frac{1}{4} \min_{x \in A \cap \overline{B}(a,r_a)} \{\operatorname{reach}(A,x)\} > 0.$$

Ověříme, že je funkce $\operatorname{dist}(A,\cdot)$ lokálně semikonvexní na $B(a,\beta_a)$. K tomu postačuje dle poznámky 1.2.8 dokázat, že funkce

$$k(x) := \operatorname{dist}(A,x) + \frac{1}{2\beta_a}\|x\|^2$$

splňuje, že pro libovolný $x_0 \in B(a,\beta_a)$ existuje $R_0 > 0$ takové, že epigraf funkce $k_{\restriction B(x_0,R_0)}$ má v bodě $(x_0,k(x_0))$ opěrnou nadrovinu.

Je-li $x_0 \in A$, potom pro $R_0 > 0$ dosti malé

$$k(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\beta_a}\|x\|^2 & x \in B(x_0,R_0) \cap A, \\ \operatorname{dist}(A,x) + \frac{1}{2\beta_a}\|x\|^2 & x \in B(x_0,R_0) \setminus A. \end{cases}$$

Funkce $x \mapsto \frac{1}{2\beta_a}\|x\|^2$ je konvexní a $k(x_0) = \frac{1}{2\beta_a}\|x_0\|^2$, tedy existuje na okolí bodu $(x_0,\frac{1}{2\beta_a}\|x_0\|^2)$ opěrná nadrovina epigrafu funkce $x \mapsto \frac{1}{2\beta_a}\|x\|^2$. A jelikož na množině $B(x_0,R_0) \setminus A$ platí $k(x) = \operatorname{dist}(A,x) + \frac{1}{2\beta_a}\|x\|^2 > \frac{1}{2\beta_a}\|x\|^2$, dostáváme inkluzi $\operatorname{epi}(k_{\restriction B(x_0,R_0)}) \subseteq \operatorname{epi}(\frac{1}{2\beta_a}\|\cdot\|^2)$. Tedy opěrná nadrovina funkce $\frac{1}{2\beta_a}\|\cdot\|^2$ je opěrná nadrovina (lokálně na okolí bodu $(x_0,k(x_0))$) funkce k, což jsme přesně chtěli.

Naopak ať $x_0 \in B(a,\beta_a) \setminus A$. Označme

$$R_0 := \frac{1}{2}\min\{\operatorname{dist}(A,x_0),\beta_a - \operatorname{dist}(A,x_0)\},\ \boldsymbol{v} := \frac{x_0 - \Pi_A(x_0)}{\|x_0 - \Pi_A(x_0)\|}.$$

Ověříme platnost inkluze

$$\overline{B}(x_0,R_0) \subseteq \left(\overline{B}\left(\Pi_A(x_0) + 2\beta_a \boldsymbol{v}, 2\beta_a\right) \setminus \overline{B}\left(\Pi_A(x_0) + 2\beta_a \boldsymbol{v}, \beta_a\right)\right). \tag{4.9}$$

Nechť $y \in \overline{B}(x_0,R_0)$, tedy $\|y - x_0\| \leq R_0$. Potom

$$\begin{aligned}
\|y - (\Pi_A(x_0) + 2\beta_a \boldsymbol{v})\| &\leq \|y - x_0\| + \|x_0 - \Pi_A(x_0) - 2\beta_a \boldsymbol{v}\| \\
&\leq R_0 + |2\beta_a - \operatorname{dist}(A,x_0)| \\
&\leq \frac{1}{2}\operatorname{dist}(A,x_0) + 2\beta_a - \operatorname{dist}(A,x_0) \\
&= 2\beta_a - \frac{1}{2}\operatorname{dist}(A,x_0) \\
&\leq 2\beta_a.
\end{aligned}$$

Využili jsme toho, že $\|x_0 - \Pi_A(x_0) - 2\beta_a \boldsymbol{v}\| = 2\beta_a - \operatorname{dist}(A,x_0)$, jelikož x_0 leží na úsečce spojující bod $\Pi_A(x_0)$ s bodem $\Pi_A(x_0) + 2\beta_a \boldsymbol{v}$, a posléze také toho, že $\beta_a > \|a - x_0\| \geq \operatorname{dist}(A,x_0)$. Naopak čistě analogicky

$$\begin{aligned}
\|y - (\Pi_A(x_0) + 2\beta_a \boldsymbol{v})\| &\geq |\|y - x_0\| - \|x_0 - \Pi_A(x_0) - 2\beta_a \boldsymbol{v}\|| \\
&\geq 2\beta_a - \operatorname{dist}(A,x_0) - R_0 \\
&\geq 2\beta_a - \operatorname{dist}(A,x_0) - \frac{1}{2}(\beta_a - \operatorname{dist}(A,x_0)) \\
&= \frac{3}{2}\beta_a - \frac{1}{2}\operatorname{dist}(A,x_0) \\
&> \beta_a.
\end{aligned}$$

Tímto jsme získlali správnost (4.9).

Zavedeme uzavřenou množinu

$$Q := \mathbb{R}^n \setminus B(\Pi_A(x_0) + 2\beta_a \boldsymbol{v}, 2\beta_a).$$

Potom funkce $q(x) := \operatorname{dist}(Q,x) + \frac{1}{2\beta_a}\|x\|^2$ je konvexní na množině $B(x_0,R_0)$. Tuto skutečnost samozřejmě dokážeme. Snadno se totiž rozmyslí platnost rovnosti $\operatorname{dist}(Q,x) = 2\beta_a - \|x - (\Pi_A(x_0) + 2\beta_a \boldsymbol{v})\|$. Následně z lemmatu 1.1.20 dostáváme

$$\begin{aligned}
\nabla^2 q(x) &= \nabla^2 \left(2\beta_a - \|x - (\Pi_A(x_0) + 2\beta_a \boldsymbol{v})\| + \frac{1}{2\beta_a}\|x\|^2\right) \\
&= -\frac{1}{\|x - (\Pi_A(x_0) + 2\beta_a \boldsymbol{v})\|} I \\
&\quad + \frac{(x - (\Pi_A(x_0) + 2\beta_a \boldsymbol{v}))^\top (x - (\Pi_A(x_0) + 2\beta_a \boldsymbol{v}))}{\|x - (\Pi_A(x_0) + 2\beta_a \boldsymbol{v})\|^3} + \frac{1}{\beta_a} I.
\end{aligned}$$

Pro $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{S}^{n-1}$ libovolné pak

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\xi}\nabla^2 q(x)\boldsymbol{\xi}^\top &= \boldsymbol{\xi}\frac{(x-(\Pi_A(x_0)+2\beta_a\boldsymbol{v}))^\top(x-(\Pi_A(x_0)+2\beta_a\boldsymbol{v}))}{\|x-(\Pi_A(x_0)+2\beta_a\boldsymbol{v})\|^3}\boldsymbol{\xi}^\top \\
&\quad+\boldsymbol{\xi}\left(\frac{1}{\beta_a}-\frac{1}{\|x-(\Pi_A(x_0)+2\beta_a\boldsymbol{v})\|}\right)I\boldsymbol{\xi}^\top \\
&\geq \boldsymbol{\xi}\frac{(x-(\Pi_A(x_0)+2\beta_a\boldsymbol{v}))^\top(x-(\Pi_A(x_0)+2\beta_a\boldsymbol{v}))}{\|x-(\Pi_A(x_0)+2\beta_a\boldsymbol{v})\|^3}\boldsymbol{\xi}^\top \\
&= \frac{\boldsymbol{\xi}(x-(\Pi_A(x_0)+2\beta_a\boldsymbol{v}))^\top(x-(\Pi_A(x_0)+2\beta_a\boldsymbol{v}))\boldsymbol{\xi}^\top}{\|x-(\Pi_A(x_0)+2\beta_a\boldsymbol{v})\|^3} \\
&= \frac{\Big((x-(\Pi_A(x_0)+2\beta_a\boldsymbol{v}))\boldsymbol{\xi}^\top\Big)^\top(x-(\Pi_A(x_0)+2\beta_a\boldsymbol{v}))\boldsymbol{\xi}^\top}{\|x-(\Pi_A(x_0)+2\beta_a\boldsymbol{v})\|^3} \\
&= \frac{\Big((x-(\Pi_A(x_0)+2\beta_a\boldsymbol{v}))\boldsymbol{\xi}^\top\Big)^2}{\|x-(\Pi_A(x_0)+2\beta_a\boldsymbol{v})\|^3} \\
&\geq 0.
\end{aligned}$$

Tedy dle lemmatu 1.1.14 je q konvexní na $B(x_0,R_0)$. Prvá nerovnost ve výpočtu plyne z toho, že $x \in B(x_0,R_0)$, a tedy z (4.9) vyplývá $\|x-(\Pi_A(x_0)+2\beta_a\boldsymbol{v})\| > \beta_a$.

Díky právě dokázané konvexitě víme, že $\Pi^*(q,x_0) \neq \emptyset$ (dokonce díky hladkosti $\Pi^*(q,x_0) = \{\nabla q(x_0)\}$). Z poznámky 3.1.6 máme pro všechna $z \in B(x_0,R_0)$ zaručen vztah $q(z) \geq q(x_0) + \langle z - x_0, \nabla q(x_0)\rangle$.

Uvědomme si, že $A \subseteq Q$ a $\overline{B}(x_0,\|x_0-\Pi_A(x_0)\|) \cap Q = \{\Pi_A(x_0)\}$, tedy $\operatorname{dist}(A,x_0) = \operatorname{dist}(Q,x_0)$ a $\operatorname{dist}(A,z) \geq \operatorname{dist}(Q,z)$ dle lemmatu 1.1.18. Následně pro libovolné $z \in B(x_0,R_0)$ máme

$$\begin{aligned}
k(z)-k(x_0) &= \operatorname{dist}(A,z)+\frac{1}{2\beta_a}\|z\|^2-\operatorname{dist}(A,x_0)-\frac{1}{2\beta_a}\|x_0\|^2 \\
&\geq \operatorname{dist}(Q,z)+\frac{1}{2\beta_a}\|z\|^2-\operatorname{dist}(Q,x_0)-\frac{1}{2\beta_a}\|x_0\|^2 \\
&= q(z)-q(x_0) \\
&\geq \langle z-x_0,\nabla q(x_0)\rangle.
\end{aligned}$$

Připomeňme

$$\operatorname{epi}(k_{\restriction B(x_0,R_0)}) = \{(z,t) \in B(x_0,R_0)\times\mathbb{R};\, t \geq k(z)\}.$$

Tím pádem pro bod $(z,t) \in \operatorname{epi}(k_{\restriction B(x_0,R_0)})$ platí

$$\begin{aligned}
&t-k(x_0) \geq k(z)-k(x_0) \geq \langle z-x_0,\nabla q(x_0)\rangle \\
&\implies \langle x_0,\nabla q(x_0)\rangle - k(x_0) \geq \langle z,\nabla q(x_0)\rangle - t \\
&\iff \langle x_0,\nabla q(x_0)\rangle - k(x_0) \geq \langle (z,t),(\nabla q(x_0),-1)\rangle\,.
\end{aligned}$$

Za opěrný poloprostor stačí volit

$$H := \{(z,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R};\, \langle x_0,\nabla q(x_0)\rangle - k(x_0) \geq \langle (z,t),(\nabla q(x_0),-1)\rangle\}.$$

Potom $(x_0,k(x_0)) \in \partial H$ a $\operatorname{epi}(k_{\restriction B(x_0,R_0)}) \subseteq H$. Celkově jsme ukázali existenci opěrné nadroviny epigrafu funkce $k_{\restriction B(x_0,R_0)}$, tedy i konvexitu k na $B(x_0,R_0)$.

Za otevřenou množinu U volme

$$U := \bigcup_{a \in A} B(a,\beta_a) \subseteq \bigcup_{a \in A} B\left(a,\text{reach}(A,a)\right).$$

Celkem máme, že $\text{dist}(A,\cdot) \in \mathfrak{F}(U)$.

Lokální semikonvexita $\text{dist}(A,\cdot)$ na otevřené nadmnožině $U \supseteq A$ je tedy ukázána. Chceme vyvodit, že A je slabě regulární podúrovňová množina funkce $\text{dist}(A,\cdot) : U \to [0,\infty)$. Jelikož je množina A uzavřená, platí

$$\text{dist}(A,x) = 0 \iff x \in A,$$

$$\text{dist}(A,x) > 0 \iff x \notin A.$$

Tudíž $A = (\text{dist}(A,\cdot))^{-1}((-\infty,0]) = (\text{dist}(A,\cdot))^{-1}(\{0\})$. Zvolme nyní libovolně bod $x \in (\text{dist}(A,\cdot))^{-1}(\{0\})$. Potřebujeme ukázat, že x je slabě regulárním bodem funkce $\text{dist}(A,\cdot)$. Nechť $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \in (\mathbb{R}^n)^{\mathbb{N}}$, $\{\boldsymbol{\pi}_k\}_{k=1}^{\infty} \in \{\Pi^*(\text{dist}(A,\cdot),x_k)\}_{k=1}^{\infty}$, dále $x_k \to x$ a $\forall k \in \mathbb{N} : \text{dist}(A,x_k) > \text{dist}(A,x)$. Z čehož bez pochyb pro všechna $k \in \mathbb{N}$ plyne $x_k \notin A$. Je-li $x \in \text{int}(A)$, pak x je nutně slabě regulární. Bez újmy na obecnosti předpokládejme $x \in \partial A$. Množina A je množinou kladného dosahu (díky čemuž $\text{reach}(A,x) > 0$), pročež existuje poloměr $r_x > 0$ takový, že $B(x,r_x) \subseteq \text{Unp}(A)$. Protože $x_k \to x$, dostáváme existenci k_0 přirozeného, že

$$\forall k \geq k_0 : x_k \in (B(x,r_x) \setminus A) \subseteq \text{int}(\text{Unp}(A) \setminus A).$$

Opět můžeme předpokládat, že tomu tak je pro všechna $k \in \mathbb{N}$. Dle lemmatu 2.2.1 je funkce $\text{dist}(A,\cdot)$ v bodě x_k diferencovatelná a platí

$$\nabla(\text{dist}(A,x_k)) = \frac{x_k - \Pi_A(x_k)}{\|x_k - \Pi_A(x_k)\|}.$$

Díky lemmatu 3.1.11 máme rovnost $\Pi^*(\text{dist}(A,\cdot),x_k) = \{\nabla(\text{dist}(A,x_k))\}$, proto platí $\boldsymbol{\pi}_k = \nabla(\text{dist}(A,x_k))$. Dále $\|\boldsymbol{\pi}_k\| = 1$ pro všechna k, tedy neexistuje žádná podposloupnost konvergující k $\mathbf{0}$.

Ukázali jsme, že bod x je slabě regulárním bodem funkce $\text{dist}(A,\cdot)$. Množina A je tudíž slabě regulární podúrovňová množina funkce $\text{dist}(A,\cdot) \in \mathfrak{F}(U)$. $\square$

Tímto jsme dokázali větu 4.0.1.

Seznam použité literatury

[1] Victor Bangert. Analytische Eigenschaften konvexer Funktionen auf Riemannschen Mannigfaltigkeiten. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, pages 309–324, 1979.

[2] Victor Bangert. Sets with positive reach. *Archiv der Mathematik*, 38(1):54–57, 1982.

[3] Piermarco Cannarsa and Carlo Sinestari. *Semiconcave functions, Hamilton-Jacobi equations, and optimal control.* Progress in nonlinear differential equations and their applications ; volume 58. Birkhäuser, Boston, 2004.

[4] Frank H. Clarke. *Optimization and Nonsmooth Analysis.* Society for Industrial and Applied Mathematics, 1990.

[5] Andrea Colesanti and Daniel Hug. Hessian measures of semi-convex functions and applications to support measures of convex bodies. *Manuscripta mathematica*, 101(2):209–238, 2000.

[6] Jean-Stéphane Dhersin and Jérémy Dalphin. Some characterizations of a uniform ball property. *ESAIM. Proceedings and surveys*, 45:437–446, 2014.

[7] Herbert Federer. Curvature measures. *Transactions of the American Mathematical Society*, 93(3):418–491, 1959.

[8] Daniel Hug and Woflgang Weil. *Lectures on convex geometry.* Graduate texts in mathematics, 286. Springer, Cham, Switzerland, 2020.

[9] Norbert Kleinjohann. Nächste Punkte in der Riemannschen Geometrie. *Mathematische Zeitschrift*, 176:327–344, 1981.

[10] Lukáš Krump and Jakub A. Těšínský a Vladimír Souček. *Matematická analýza na varietách.* Karolinum, 1998.

[11] Marek Kuczma. *An introduction to the theory of functional equations and inequalities. Cauchy‘s equation and Jensen‘s inequality.* Państwowe wydawnictwo naukowe, Warszawa, 1985.

[12] Martin Křepela. Obyčejné diferenciální rovnice. 2008. `https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~prazak/vyuka/Odr2/Zapisky/KAP1-12.pdf`, navštíveno 1.5.2023.

[13] Luboš Pick, Stanislav Hencl, Jiří Spurný, and Miroslav Zelený. Matematická analýza. 2022. `https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~pick/analyza.pdf`, navštíveno 1.5.2023.

[14] Jan Rataj. Konvexní tělesa. 2021. `https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~rataj/konv_telesa/prednaska_KT_2021.pdf`, navštíveno 1.5.2023.

[15] Jan Rataj. Úvod do analýzy na varietách. 2022. `https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~rataj/UAV/UAV_prednaska_2022.pdf`, nav štíveno 1.5.2023.

[16] Jan Rataj and Martina Zähle. *Curvature Measures of Singular Sets*. Springer Monographs in Mathematics. Springer International Publishing, Cham, 1st ed. 2019. edition, 2019.

[17] Ralph Tyrell Rockafellar. *Convex Analysis*. Princeton Landmarks in Mathematics and Physics. Princeton University Press,, Princeton, NJ, 2015.

[18] Yaron Singer. Advanced optimization. 2016. `https://people.seas.harvard.edu/~yaron/AM221-S16/lecture_notes/AM221_lecture8.pdf`, navštíveno 1.5.2023.

[19] Jiří Spurný and Michal Johanis. Funkcionální analýza. 2022. `https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~spurny/doc/ufa/funkcionalka.pdf`, navštíveno 1.5.2023.

[20] Miroslav Zelený. Real Functions. 2023. `https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~zeleny/mff/RF_2/Realne_funkce.pdf`, navštíveno 1.5.2023.