Oponentský posudek bakalářské práce

Katedra logiky, FF UK

Název: Naive set theory with exclusive interpretation of quantifiers
Autor: Bc. Martin Blahynka
Oponent: Šárka Stejskalová, Ph.D.

Předložená magisterská práce se zabývá použitím exkluzivní interpretace kvantifikátorů k formulaci naivních teorií množin. Zjednodušeně řečeno, exkluzivní interpretace kvantifikátorů požaduje, aby různé proměnné ve formuli byly ohodnoceny různými prvky struktury. Použití exkluzivní interpretace kvantifikátorů k formulaci neomezeného schématu vydělení blokuje známé příklady paradoxů naivní teorie množin.

Práce je dobře strukturovaná, je rozdělena do čtyř hlavních částí. V první části autor motivuje použití exkluzivních kvantifikátorů v teorii množin a věnuje se historickému kontextu. V druhé části zavádí exkluzivní kvantifikátory do klasické prvořádové predikátové logiky a definuje různé verze exkluzivních teorií množin. Třetí část obsahuje vlastní výsledek, že jistá exkluzivní teorie množin je nekonzistentní, a tímto řeší otevřený problém Hintikky z roku 1957. Poslední část je vlastní filozofický příspěvek autora. Z formální stránky bych práci vytkla jen to, že literatura není řazená abecedně, jak bývá zvykem.

Na práci velmi oceňuji to, že autor pokryl komplikované téma z více pohledů: filozofického, historického, a také matematického. Nicméně k matematické stránce mám největší výhrady.

Hlavním problémem práce je, že exkluzivní kvantifikátory nejsou formálně řádně zavedeny. Hintikka formálně přidá nové kvantifikátory do jazyka klasické prvořádové predikátové logiky a následně definuje jistá pravidla pro nové kvantifikátory pomocí inkluzivních kvantifikátorů a identity (pravidla tak definuje na úrovni syntaxe). Autor však tato pravidla používá přímo pro definici sémantiky exkluzivních kvantifikátorů, která má rozšiřovat sémantiku klasické prvořádové predikátové logiky, aniž by argumentoval, že tato změna oproti Hintikkovi je legitimní. A skutečně tento postup vede k problémům, které autor neřeší: například při takto definované sémantice již neplatí Tarského definice platnosti formule ve struktuře pro konjunkci.[1] Pokud by autor chtěl formálně definovat sémantiku exkluzivních kvantifikátorů, měl by odpovídajícím způsobem upravit sémantiku ostatních logických spojek.[2]

Toto nejasné zavedení exkluzivních kvantifikátorů pak samozřejmě způsobuje problémy v důkazech i definicích, například v důkazu Věty 1 na straně 34 a definicích exkluzivních teorií množin v logice bez rovnosti.

Důkaz Věty 1 na straně 34, který ukazuje, že teorie T_0' má model, je problematický, protože využívá sémantiku exkluzivních kvantifikátorů, která nebyla dostatečně zadefinovaná, jak je zmíněno výše. Nicméně myslím, že hlavní idea důkazu je v pořádku. Jsou zde však i drobnější chyby v argumentaci: např. když autor píše „either $S := U$ and $x := \emptyset$, or vice versa. I shall prove by induction on $\varphi(x)$ either $\varphi(x)$ is true in both cases, or $\varphi(x)$ is false in both cases“ a následně o dva řádky dál pokračuje „If φ is true in both cases, $S := U$ will do...“. Takto napsaný důkaz není správně, protože hodnota S už byla fixovaná výše, a nelze ji jen tak podle potřeby změnit (v této části stačilo fixovat jen hodnotu x).[3]

[1] Například můžeme najít jednoprvkovou strukturu $\mathbb{D}$ v jazyce s jedním unárním predikátem P, ohodnocení e a formule φ a ψ takové, že $\mathbb{D} \models \varphi[e]$ a $\mathbb{D} \models \psi[e]$, ale $\mathbb{D} \not\models \varphi \wedge \psi[e]$.

[2] Hintikkova pravidla vyjádření exkluzivních kvantifikátorů pomocí inkluzivních kvantifikátorů a identity autor zmiňuje v textu jako něco druhotného. Nicméně toto je jediné formálně správné zavedení exkluzivních kvantifikátorů, které se v práci vyskytuje, a s kterým by tedy autor měl pracovat, pokud chce něco o teoriích v logice s exkluzivními kvantifikátory formálně dokázat (což nečiní).

[3] Také není úplně zřejmé, co autor míní tvrzením „$\varphi(x)$ is true in both cases“. Formule $\varphi(x)$ sama o sobě může být pravdivá, ale nemusí být pravdivá jako podformule formule $\exists S \forall x(x \in S \leftrightarrow \varphi(x))$; například pokud $\varphi(x)$ je formule $\exists z(z \in x)$, tak v prvním případě pokud formuli vyjaříme pomocí inkluzivního kvantifikátoru, dostaneme formuli $\varphi(x) = \exists z(z \neq x \wedge z \in x)$ a v druhém případě $\varphi(x) = \exists z((z \neq S \wedge z \neq x) \rightarrow z \in x)$.

Důkaz hlavního výsledku v kapitole 3.1.2, totiž že teorie T_0' je nekonzistentní, začíná definicí deseti množin, jejichž definici se autor snaží částečně motivovat (ale i tak jsou tyto definice ne příliš přehledné). Následuje několik pomocných lemmat, které ukazují vztahy mezi těmito množinami a nakonec vedou ke sporu, kdy jedna z definovaných množin je i není prvkem jiné. Na tomto důkazu musím především ocenit, že autor je schopen (z větší části) udržet argument v konzistentní podobě, i přes velký počet případů, které musí projít. Argument by nicméně bylo možné učinit přehlednějším: autor např. až příliš často používá důkaz sporem, i když důkaz sporem není vůbec třeba. Například pro důkazy $U \neq \emptyset$, $V \neq U$, $D_1 \neq U$. Myslím, že by odstranění těchto nadbytečných důkazů sporem velmi zlepšilo čitelnost důkazu. Navíc mi přijde, že v důkazu Lemma 3 autor použil nerovnosti, které nebyly ještě dokázány: str. 37, řádek 20: „$U \in M$ (bacause $U \in V$ and $V \in U$)“ toto tvrzení vyžaduje, že $U \neq M$ a $V \neq M$, což je ale dokázáno až o pár řádku níže. Kvůli těmto nedostatkům jsem nebyla schopna důkaz ověřit do všech detailů. Před případným publikováním bych autorovi doporučila důkaz přepracovat, očistit od zbytečných důkazů sporem a pokud možno zpřehlednit.

Několik dalších drobností, které mohou přispět k větší čitelnosti textu:

Matematické značení je občas nejednoznačné, velké písmena jsou použita pro proměnné, formule i množiny. Formule jsou značeny někdy řeckými písmeny, jindy velkými písmeny. Autor značí různé verze kvantifikátorů stejným symbolem. Symbol pro prázdnou množinu $\emptyset$ je v práci použit pro libovolnou množinu, která splňuje schéma vydělení pro spornou formuli (přičemž v exkluzivní teorii množin to splňuje každá množina tvaru $x = \{x\}$). Myslím, že tento symbol má v teorii množin a matematice již tak ustálené místo, že by měl být používán jen pro prázdnou množinu (tedy pro množinu, která neobsahuje žádný prvek). Formule tvaru $\forall y(y \in x)$ jsou psány bez závorek, $\forall yy \in x$, což snižuje čitelnost.

K práci mám dvě konkrétní otázky.

Otázky:

1. Na straně 23 autor píše: „Syntactically, both types of exclusive quantifier obey the same rules as inclusive quantifiers, but their semantics is different“. Mohl by autor toto tvrzení zpřesnit? Jaká syntaktická pravidla má na mysli?

2. Na straně 25 autor tvrdí, že formule $\exists a \exists b(P(a) \wedge P(b))$ a formule $\exists a P(a) \wedge \exists b P(b)$ jsou ekvivalentní, pokud $\exists$ značí silně exkluzivní verzi existenčního kvantifikátoru. Je tomu doopravdy tak? Pokud ne, mohl by autor dát příklad formule, kde silná exkluzivní interpretace kvantifikátoru dává formuli, která není ekvivalentní slabé interpretaci kvantifikátoru?

Přes všechny zmíněné nedostatky práce musím ocenit, že autor zpracoval velmi náročné téma a uchopil ho z několika hledisek, filozofického, historického a matematického. Práce zřejmě obsahuje originální výsledek (avšak jak píši výše, aby bylo možné ověřit detaily důkazu, je třeba důkaz zpřehlednit).

Autor prokázal, že je schopen samostatné vědecké činnosti a práce jistě splňuje podmínky pro udělení titulu Magistr. Navrhuji práci klasifikovat známkou „výborně“ či „velmi dobře“ (1-2) podle průběhu obhajoby.

V Praze dne 11. 6. 2023 Šárka Stejskalová, Ph.D.