



**MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ
FAKULTA**
Univerzita Karlova

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Viktor Vařeka

Geodetická deviace

Ústav teoretické fyziky

Vedoucí bakalářské práce: RNDr. Robert Švarc, Ph.D.

Studijní program: Fyzika

Studijní obor: Fyzika

Praha 2023

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval(a) samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů. Tato práce nebyla využita k získání jiného nebo stejného titulu.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V dne

Podpis autora

Chtěl bych poděkovat RNDr. Robertu Švarcovi, Ph.D., pod jehož vedením jsem se mnohé naučil a s jehož pomocí jsem zdárně dokončil tuto bakalářskou práci.

Název práce: Geodetická deviace

Autor: Viktor Vařeka

ústav: Ústav teoretické fyziky

Vedoucí bakalářské práce: RNDr. Robert Švarc, Ph.D., Ústav teoretické fyziky

Abstrakt: V práci odvodíme dobře známou rovnici geodetické deviace a poté uvolněním jednoho z výchozích předpokladů získáme její zobecněnou podobu. Dále přepíšeme tuto zobecněnou rovnici v invariantní podobě promítnutím Riemannova tenzoru na ortonormální bázi spojenou s referenčním pozorovatelem pohybujícím se po geodetice v D -rozměrném časoprostoru. Následně rozložíme Riemannův tenzor na bezstopý Weylův tenzor, Ricciho tenzor a skalární křivost a vyjádříme tyto veličiny vzhledem k nulové bázi. Obecně nám takové projekce Weylova tenzoru umožňují studovat vlastnosti časoprostoru na základě jeho algebraického typu. Nakonec použijeme Einsteinovy rovnice pole k propojení Ricciho tenzoru a skalární křivosti s hmotou. Jako konkrétní příklad diskutujeme Kundtův prostoročas algebraického typu II reprezentující gravitační vlny šířící se na pozadí typu D v D -rozměrné Einsteinově gravitaci.

Klíčová slova: rovnice geodetické deviace, zobecněná rovnice geodetické deviace, obecná teorie relativity, algebraická klasifikace prostoročasů, Kundtovy geometrie

Title: Geodesic deviation

Author: Viktor Vařeka

institute: Institute of Theoretical Physics

Supervisor: RNDr. Robert Švarc, Ph.D., Institute of Theoretical Physics

Abstract: In the thesis, we derive the well-known equation of geodesic deviation, and then by relaxing one of the initial assumptions we obtain its generalized form. Next, we rewrite the generalized equation in an invariant form projecting the Riemann tensor onto an orthonormal frame associated with the fiducial observer moving along the geodesic in D -dimensional spacetime. We decompose the Riemann tensor into the traceless Weyl tensor, Ricci tensor, and scalar curvature and express these quantities with respect to the null frame. In general, the projections of the Weyl tensor enable us to study the spacetime properties based on its algebraic type. Finally, we employ the Einstein field equations to relate the Ricci tensor and scalar curvature, respectively, with the matter content of the spacetime. As an explicit example, we discuss the Kundt spacetime of algebraic type II representing gravitational waves propagating on the type D background in D -dimensional Einstein's gravity.

Keywords: equation of geodesic deviation, generalized equation of geodesic deviation, general relativity, algebraic classification of spacetimes, Kundt geometries

Obsah

Úvod	2
1 Geodetická deviace	6
1.1 Výchozí předpoklady	6
1.2 Klasická rovnice geodetické deviace	8
1.3 Zobecněná rovnice geodetické deviace	10
2 Invariantní tvar rovnice geodetické deviace	13
2.1 Projekce rovnice geodetické deviace	13
2.2 Rozklad tenzoru křivosti	14
2.3 Algebraická klasifikace Weylova tenzoru	22
3 Geodetická deviace v Einsteinově teorii	25
3.1 Einsteinova teorie gravitace ve více dimenzích	25
3.2 Příklad: geodetická deviace pro algebraicky speciální Kundtovy prostoročasy	26
Závěr	30
Seznam použité literatury	31

Úvod

Nejslabší, ale z makroskopického pohledu nejvýznamnější, fyzikální interakcí je gravitace. Její působení bezprostředně ovlivňuje náš každodenní život a to počínaje chůzí po zemském povrchu a konče podobou a vývojem celého vesmíru, který existenci života v této podobě umožnil. Dle současného stavu poznání je gravitace výborně popsána Einsteinovou obecnou teorií relativity a jejím geometrickým jazykem. I když se v této bakalářské práci chceme primárně zabývat právě studiem gravitačních efektů v klasické obecné relativitě a případně v jejích rozšířeních, je přirozené se nejprve alespoň krátce zmínit o přecházející a pro naprostou většinu běžných situací zcela postačující Newtonově teorii gravitace. V Newtonově díle *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica*, jejichž první díl vyšel v roce 1686, je formulován gravitační zákon v řeči silového působení. Gravitační síla mezi dvěma tělesy je přímo úměrná součinu jejich hmotností m_1 a m_2 a nepřímo úměrná čtverci vzdálenosti mezi nimi označenou r . Dnes ho tedy přirozeně formulujeme v podobě vzorce, který připomíná Coulombův zákon a ve kterém jako konstanta úměrnosti vystupuje Newtonova gravitační konstanta G ,

$$\mathbf{F}_g = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r}.$$

Právě velikost této konstanty $G = 6,674 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg} \cdot \text{s}^2}$ nese informaci o mizivé síle gravitačního působení mezi objekty malých hmotností.

Jak již bylo řečeno, Newtonův gravitační zákon nám v mnoha ohledech stačí. S použitím tužky a papíru lze vyřešit trajektorie těles v homogenním gravitačním poli, problém dvou těles, či nalézt a dosadit gravitační potenciál do Eulerových–Lagrangeových rovnic a nalézt Lagrangeovy body soustavy dvou těles. Přibližnými metodami lze pak za pomoci výpočetní techniky vyřešit i složitější problémy týkající se nebeské mechaniky. Za zmínku stojí rozhodně mise Apollo 11, během které se v roce 1969 lidé poprvé dotkli povrchu Měsíce. Při výpočtu dráhy letu se počítalo s obyčejnou Newtonovou gravitací, i když lidé již více než padesát let věděli o Einsteinově speciální a obecné teorii relativity. Jde tedy nepochybně o velice úspěšnou teorii gravitace, která funguje na mnoha škálách a lze ji využít téměř ve všech praktických situacích. Proč tedy vznikla obecná teorie relativity?

Newtonova gravitace společně s klasickou mechanikou stojí na předpokladech neslučitelných s experimentálními pozorováními. Nejznámějším takovým experimentem je pokus o detekci éteru v Michelsonově–Morleyho experimentu v roce 1887, který vedl k principu konstantní rychlosti světla. Mechanika se pak dá opravit docela jednoduše. Uvážením inerciálních vztažných soustav, požadavkem rovnocennosti těchto soustav pro popis fyzikálních dějů a zahrnutím principu konečné maximální rychlosti šíření informace (světla) dostáváme speciální teorii relativity. Tyto principy zní velice jednoduše, ale jejich složitost a hloubka se následně zjevuje ve studiu jejich důsledků. Gravitace však nemá v takovém popisu místo, jelikož volně padající předměty se mohou vůči sobě pohybovat s nenulovým zrychlením a měly by se pak nacházet v různých navzájem neinerciálních soustavách. Pěkným příkladem jsou slapové jevy v nehomogenním gravitačním poli. Konkrétněji, v homogenním gravitačním poli působí na každý bod volně padajícího tělesa stejná přitažlivá síla stejným směrem. Takové působení můžeme

tedy úplně odtransformovat přechodem do neinerciální soustavy našeho tělesa. Situace pak vypadá, jako by na těleso nepůsobila žádná síla. Pokud však těleso padá například v centrálním gravitačním poli, kde na každý bod tělesa působí jiná síla, jejíž velikost a směr závisí na vzdálenosti a poloze od centra, je možné gravitační působení odtransformovat pouze lokálně, přičemž relativní (slapové) síly přetrvají. Přírozeně se tak můžeme přetransformovat do soustavy, kde je naše těleso natahováno ve směru pohybu a naopak stlačováno v kolmých směrech. V přírodě lze tento jev vidět například v soustavě Země–Měsíc, kde se v závislosti na poloze Měsíce vůči Zemi zvedá či klesá mořská hladina.

Právě popis gravitace řeší obecná teorie relativity. Od roku 1905, tedy od publikování práce *Zur Elektrodynamik bewegter Körper* o speciální relativitě, trvalo Albertu Einsteinovi dalších deset let rozšíření principu relativity i na neinerciální vztažné systémy. Roku 1915 představil a následně publikoval konečnou verzi jeho obecné teorie relativity. Odpovědí na zdánlivý nesoulad gravitace a speciální teorie relativity je radikální změna v chápání prostoru a času, kde tyto dva pojmy splývají v jedno — čtyřrozměrný prostoročas. Gravitace pak tento prostoročas ohýbá. Její efekty nevidíme na lokální úrovni, kde se nám vždy zdá prostoročas plochý. Tedy v lokální inerciální soustavě můžeme popisovat fyziku stejně jako dříve ve speciální relativitě, ale nelokálně se nám projeví nehomogenita gravitačního pole jako zakřivení okolního prostoročasu. Ten pak popisujeme v řeči diferenciální geometrie jakožto Lorentzovskou varietu. Veškerá informace o tomto zakřivení je uložena v Riemannově tenzoru křivosti R_{abcd} . Ten je v popisu obecné relativity konstruován s užitím metrického tenzoru g_{ab} a jeho derivací. Právě metrický tenzor je neznámou v Einsteinových rovnicích gravitačního pole

$$R_{ab} - \frac{1}{2}Rg_{ab} + \Lambda g_{ab} = \kappa T_{ab} ,$$

kde R_{ab} je Ricciho tenzor, R je skalární křivost, g_{ab} metrika, Λ kosmologická konstanta, T_{ab} tenzor energie-hybnosti a κ konstantní parametr, který lze vyjádřit pomocí dalších fyzikálních konstant jako $\kappa = \frac{8\pi G}{c^4}$.

Kromě teoretické krásy konzistentního popisu gravitačního pole nám Einsteina obecná relativita přinesla celou řadu experimentálně ověřitelných předpovědí. Mezi klasické testy a úspěchy obecné teorie relativity patří vysvětlení anomální precese Merkuru. Dle klasické keplerovské nebeské mechaniky obíhají planety kolem Slunce po uzavřených eliptických drahách. Ve skutečnosti tomu tak není, neboť především vlivem vzájemného gravitačního působení všech ostatních těles sluneční soustavy a nesféricností samotného Slunce se eliptické dráhy planet přesně neuzavírají. Tento efekt lze stále popsat Newtonovou teorií. V případě Merkuru, tedy planety nejsilněji pociťující gravitační působení Slunce, se ale předpověď Newtonovy teorie rozcházela s pozorováním o 43 úhlových vteřin za století. Právě tento nepatrný rozdíl přesně dovysvětlila obecná teorie relativity, přičemž Einstein publikoval tyto výpočty společně se svou teorií již v roce 1915. Dalším krokem k všeobecnému přijetí Einsteinovy teorie byl popis ohybu světla v gravitačním poli Slunce a jeho následné úspěšné pozorování Eddingtonovou expedicí v roce 1919 při zatmění Slunce nad Afrikou a Jižní Amerikou. Na fotografických snímcích hvězd v blízkém nebeském okolí Slunce byla identifikována poloha lišící se od jejich běžné polohy na noční obloze. Došlo tedy k ohybu světla ze vzdálených hvězd při průchodu gravitačním polem Slunce. Na tomto místě uvedme ještě frekvenční posuv světla při průchodu gravitačním polem. Tento jev se podařilo

naměřit až v roce 1960, neboť je v gravitačním poli Země velmi slabý. Relativní změna frekvence byla změřena na $|\frac{\Delta\nu}{\nu}| \doteq 2,46 \cdot 10^{-15}$.

Na předchozí tři jevy se můžeme dívat jako na drobné opravy předpovědí předchozích teorií. Obecná teorie relativity však přinesla předpovědi dalších jevů a situací v Newtonovské fyzice zcela neuchopitelných. Nesporným úspěchem Einsteinovy teorie je možnost konstrukce kosmologických modelů poskytujících možné scénáře vesmírného vývoje. Pozorováním vzdálených galaxií se potvrdilo, že se vesmír rozpíná a tedy že by mohl mít někdy počátek. To potvrdilo pozorování reliktního záření kosmického pozadí, které představuje „snímek“ velmi dávného vesmíru. Překvapivě jedním z nejjednodušších řešení Einsteinových polních rovnic je sférický prostoročas statické černé díry. Ačkoli je dnes již tento objekt, respektive jeho astrofyzikálně realističtější rotující zobecnění, přijímán jako zcela běžný, nebylo tomu tak vždy. Trvalo řadu let porozumět geometrické podstatě takových prostoročasů. Současně po mnoha astronomických pozorováních byla vědecká komunita přesvědčena o jejich skutečné existenci. Z pohledu prvních průkopníků obecné relativity se zdá neuvěřitelné, že dnes máme k dispozici přímé snímky černých děr. Úplně první byl pořízen v rámci projektu Event Horizon Telescope (EHT) v roce 2019 a představuje supermasivní černou díru v centru galaxie Messier 87 [1]. Následně v roce 2022 byl EHT zveřejněn i snímek černé díry uvnitř naší galaxie, tedy objektu Sagittarius A* [2]. V neposlední řadě jsou zde gravitační vlny jako další z milníků v experimentálním testování Einsteinovy teorie. Jako důsledek linearizovaných vakuových polních rovnic k jejich předpovědi došel samotný Einstein v roce 1916. Jejich existence však nebyla potvrzena až do roku 2015, tedy s prodlevou bezmála sto let. První přímé pozorování gravitačních vln bylo provedeno laserovými pozemními interferometry LIGO ve Spojených státech amerických [3]. Detekován byl signál způsobený kolizí a spojením dvou černých děr. V následující letech byla síť interferometrů rozšířena o italské VIRGO a znamená celá řada obdobných událostí včetně kolizí neutronových hvězd. Po roce 2030 je plánovaný start mise LISA. Ta bude tvořena třemi satelity, jejichž střed bude putovat po oběžné dráze kolem Slunce těsně za Zemí, a které budou tvořit vrcholy laserového interferometru. Cílem této mise je odstranění seismického šumu a úspěšné detekování zdrojů gravitačních vln o nižších frekvencích než generují finální fáze srážek černoděrových objektů.

Obecná teorie relativity je bezesporu jedna z nejúspěšnějších fyzikálních teorií. Dokonalý soulad jejích teoretických předpovědí s experimentálními testy doposud neposkytl žádné přímé vodítko k hledání nové vylepšené teorie, i když pro takové úvahy existují relevantní teoretické důvody spojené zejména s fyzikou mikrosvěta a jejím popisem dle kvantové teorie. Subjektivně je možné říci, že elegance obecné teorie relativity spočívá v užití geometrického jazyka.

V této bakalářské práci se budeme věnovat studiu efektů odpovídacích působení gravitačního pole na relativní pohyb volných testovacích částic. Právě tyto efekty přímo odrážejí geometrickou podstatu teorie relativity a poskytují informaci o křivosti daného prostoročasu. V první kapitole podrobně odvodíme rovnici geodetické deviace a její zobecnění při uvolnění jedné z podmínek, za kterých klasická rovnice platí. V následující kapitole zobecněnou geodetickou deviaci promítneme na ortonormální bázi spojenou s referenčním pozorovatelem. Cílem tohoto kroku je opustit souřadnicově závislý popis a přejít k invariantním skalárním veličinám. Z praktických důvodů tuto projekci dále vyjádříme v jazyce Weylových

skalárů. Takto bude možné přímo studovat různé algebraické typy prostoročasů. Tato konstrukce se nám následně hodí v poslední kapitole, kde konečně pracujeme s konkrétní teorií gravitace, s Einsteinovými rovnicemi gravitačního pole v D dimenzích, čímž přímo zahrneme efekt hmoty do popisu geodetické deviace. Jako ilustraci pak rovnici zobecněné geodetické deviace aplikujeme na speciální případ Kundtova prostoročasu algebraického typu II. Fyzikálně se bude jednat o vakuové řešení Einsteinových rovnic představující gravitační vlnu šířící se na pozadí Kundtova prostoročasu typu D. Cílem tohoto příkladu je ukázat očekávanou přítomnost komponent tenzoru křivosti v zobecněné rovnici geodetické deviace, které by pro její klasickou verzi nebyly dostupné.

1. Geodetická deviace

Jako motivaci jsme v úvodní kapitole zmínili význam studia relativních pohybů v případě nehomogenních gravitačních polí pro přechod od Newtonovy teorie gravitace k Einsteinově obecné relativitě. Právě relativní pohyby testovacích částic nesou informaci o křivosti daného prostoročasu. Formálně je popisuje rovnice geodetické deviace, které se nyní budeme věnovat na obecné geometrické úrovni, tj. bez uvážení konkrétní gravitační teorie.

1.1 Výchozí předpoklady

Uvažujme obecně D -rozměrnou Lorentzovskou varietu (prostoročas) se souřadnicemi x^a , kde $a = 0, \dots, D - 1$. Naším cílem bude zkoumat relativní pohyby mezi dvojicí geodetik. K popisu pohybu v křivém prostoru je naprosto zásadní mít dobrý způsob, jak identifikovat změnu veličin, tedy jejich derivaci. Přírozenou ingrediencí proto bude kovariantní derivace, jelikož kovariantní derivace tenzorové veličiny zůstává tenzorovou veličinou i po změně souřadnic. Pro obecné vektorové pole V^a pak můžeme zavést absolutní derivaci jako

$$\frac{D V^a}{d\tau} = V^a ;_b \frac{d x^b}{d\tau} = \frac{d V^a}{d\tau} + \Gamma_{bc}^a u^b V^c, \quad (1.1)$$

kde Γ_{bc}^a jsou Christoffelovy symboly.

Nyní budeme následovat konstrukci dle článku od Ciufoliniho [4] a zkoumat vzájemné chování dvojice geodetik $\gamma_1(\tau)$ a $\gamma_2(\sigma)$. Předpokládejme, že tyto geodetiky splňují následující podmínky:

- označíme-li tečné vektory dvojice geodetik $\gamma_1(\tau)$ a $\gamma_2(\sigma)$ jako \mathbf{u}_1 , respektive \mathbf{u}_2 , pak pro ně musí platit rovnice geodetiky ve tvaru

$$\frac{D u_1^a}{d\tau} = 0, \quad \frac{D u_2^a}{d\sigma} = 0, \quad (1.2)$$

kde τ a σ jsou afinní parametry.

- tyto afinní parametry splňují

$$\frac{d\tau}{d\sigma} = konst., \quad (1.3)$$

což efektivně umožňuje použít pouze parametr τ , tedy uvažovat synchronizované pozorovatele.

- body x_1 a x_2 , které leží na uvažovaných geodetikách, jsou infinitezimálně blízko na okolí U a my zkoumáme

$$Z^a[\tau] = x_2^a[\tau] - x_1^a[\tau], \quad (1.4)$$

kde \mathbf{Z} je definován jako spojující vektor těchto geodetik.

- rovněž tečné vektory \mathbf{u}_1 a \mathbf{u}_2 jsou infinitezimálně blízko na okolí U , tedy

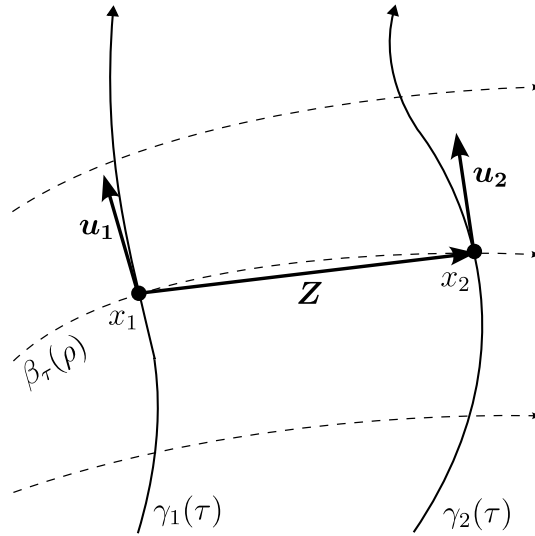
$$\frac{dZ^a}{d\tau}[\tau] = u_2^a[\tau] - u_1^a[\tau]. \quad (1.5)$$

- infinitezimálně malé veličiny druhého a vyššího řádu jsou zanedbatelné.

Předpoklad (1.4) lze také formulovat s pomocnou spojovací geodetikou $\beta_\tau(\rho)$, která protíná geodetiky γ_1 a γ_2 v bodech s hodnotou parametru τ , viz [5]. Její parametrizaci můžeme libovolně určit, pro naše účely je ale nejvýhodnější zavést $x_1 = \gamma_1(\tau) = \beta_\tau(0)$ a $x_2 = \gamma_2(\tau) = \beta_\tau(\Delta Z)$. Pokud potom vezmeme tečný vektor k této geodetice \mathbf{z} , tak ho můžeme identifikovat s naším dříve zavedeným spojovacím vektorem geodetik \mathbf{Z} , tedy

$$Z^a = z^a \Delta Z = \left. \frac{d\beta_\tau^a}{d\rho} \right|_{\rho=0} \Delta Z \quad (1.6)$$

Tato situace je schématicky znázorněna na obrázku 1.1.



Obrázek 1.1: Schématické znázornění geodetik γ_1 a γ_2 s jejich tečnými vektory \mathbf{u}_1 a \mathbf{u}_2 . Tyto geodetiky jsou parametrizované stejným parametrem τ . Tečné vektory jsou uvažované v bodech x_1 a x_2 , které jsou dané stejnou hodnotou parametru τ na svých geodetikách a zároveň tak leží na průsečících spojovací geodetiky $\beta_\tau(\rho)$ s γ_1 respektive γ_2 . Zároveň jsou spojené vektorem \mathbf{Z} .

Právě s užitím takových požadavků lze odvodit vztah pro relativní zrychlení mezi pozorovateli na geodetikách γ_1 a γ_2 , tedy *rovnici geodetické deviace*, ve tvaru

$$\frac{D^2 Z^a}{d\tau^2} = R^a{}_{bcd} u^b u^c Z^d, \quad (1.7)$$

kde $R^a{}_{bcd}$ představuje Riemannův tenzor křivosti zkoumaného prostoročasu. Toto odvození zreprodukujeme v následující podkapitole. V té další pak zobecníme rovnici (1.7) pro případ zanedbatelných vzájemných rychlostí geodetických pozorovatelů, tedy uvolníme podmínku (1.5).

1.2 Klasická rovnice geodetické deviace

Postupujeme stejně jako ve zmíněném článku [5], ale nyní stále za splnění všech podmínek výše formulovaných pro klasickou rovnici geodetické deviace. Mějme dvě infinitezimálně blízké geodetiky γ_1 a γ_2 obecně parametrizované σ a τ . Dále pro tyto parametry platí (1.3), můžeme je tedy obě parametrizovat jediným parametrem τ , jelikož lineární transformace parametru nezmění tvar (1.2). Rovnice určující tyto geodetiky pak vypadají následovně,

$$\frac{D^2 x_1^a}{d\tau^2} = \frac{D u_1^a}{d\tau} = \frac{d u_1^a}{d\tau} + \Gamma_{bc}^a u_1^b u_1^c = 0, \quad (1.8)$$

$$\frac{D^2 x_2^a}{d\tau^2} = \frac{D u_2^a}{d\tau} = \frac{d u_2^a}{d\tau} + \Gamma_{bc}^a u_2^b u_2^c = 0. \quad (1.9)$$

Dále uvažujme vektor \mathbf{Z} definovaný v (1.6) spojující dva body na těchto geodetikách. Tyto body budou přirozeně odpovídat stejné hodnotě parametru τ . Nyní vyjádříme pomocí Taylorova rozvoje v parametru ρ , a tedy v ΔZ , souřadnice bodu na druhé geodetice pomocí souřadnic bodu na první geodetice a spojující geodetiky až do čtvrtého řádu

$$\begin{aligned} x_2^a &= x_1^a + \left. \frac{d\beta_\tau^a}{d\rho} \right|_{\rho=0} \Delta Z + \left. \frac{1}{2} \frac{d^2\beta_\tau^a}{d\rho^2} \right|_{\rho=0} \Delta Z^2 + \left. \frac{1}{6} \frac{d^3\beta_\tau^a}{d\rho^3} \right|_{\rho=0} \Delta Z^3 + \mathcal{O}(\Delta Z^4) \\ &= x_1^a + z^a \Delta Z + \frac{1}{2} \frac{dz^a}{d\rho} \Delta Z^2 + \frac{1}{6} \frac{d^2 z^a}{d\rho^2} \Delta Z^3 + \mathcal{O}(\Delta Z^4). \end{aligned} \quad (1.10)$$

Uvědomme si, že β_τ je dle předpokladu také geodetika a platí pro ní tedy také rovnice geodetiky. Nám se bude vyjádření této podmínky hodit v následujícím tvaru,

$$\frac{dz^a}{d\rho} = -\Gamma_{bc}^a z^b z^c, \quad (1.11)$$

kde jsme využili (1.6). Následně opakovaným dosazením (1.11) do (1.10) a s definicí (1.6) dostaneme

$$\begin{aligned} x_2^a &= x_1^a + Z^a - \frac{1}{2} \Gamma_{bc}^a Z^b Z^c - \frac{1}{6} \Gamma_{bc,d}^a Z^b Z^c Z^d + \frac{1}{3} \Gamma_{be}^a Z^b \Gamma_{cd}^e Z^c Z^d \\ &\quad + \mathcal{O}(\Delta Z^4). \end{aligned} \quad (1.12)$$

Dále rovnici (1.12) zderivujeme podle parametru τ , přičemž chceme v rozvoji zanedbat členy které jsou vyššího než druhého řádu v ΔZ . Takto dosáváme

$$u_2^a = u_1^a + \frac{dZ^a}{d\tau} - \frac{1}{2} \Gamma_{bc,d}^a Z^b Z^c u_1^d - \Gamma_{bc}^a \frac{dZ^b}{d\tau} Z^c + \mathcal{O}(\Delta Z^3). \quad (1.13)$$

Nyní rovnici (1.13) znovu obyčejně zderivujeme podle parametru τ , zde už zanedbáváme členy vyššího než prvního řádu v ΔZ

$$\frac{du_2^a}{d\tau} = \frac{du_1^a}{d\tau} + \frac{d^2 Z^a}{d\tau^2} + \mathcal{O}(\Delta Z^2) \quad (1.14)$$

Nyní bychom mohli naivně (a nesprávně) s užitím (1.13) vyjádřit

$$\Gamma_{bc}^a u_2^b u_2^c = \Gamma_{bc}^a u_1^b u_1^c + 2\Gamma_{bc}^a \frac{dZ^b}{d\tau} u_1^c + \mathcal{O}(\Delta Z^2), \quad (1.15)$$

motivování přičtením takového členu k rovnici (1.14), aby se vynulyvaly některé členy díky rovnicím geodetik (1.8) a (1.9).

Jak ale již bylo naznačeno, tato rovnice není správná, jelikož musí být Christoffelovy symboly spojené se stejnými souřadnicemi jako tečné vektory geodetik γ_1 respektive γ_2 . Správný vztah lze nalézt Taylorovým rozvojem Christoffelových symbolů $\Gamma[x_2]_{bc}^a$ kolem bodu x_1 :

$$\Gamma[x_2]_{bc}^a = \Gamma[x_1 + Z]_{bc}^a = \Gamma[x_1]_{bc}^a + \Gamma[x_1]_{bc,d}^a Z^d + \mathcal{O}(Z^2). \quad (1.16)$$

Tento krok sice není v článku [5] explicitně zmíněn, ale evidentně bez něj nelze dostat správné výsledky. I proto je zde pro názornost zapsána počáteční chybná úvaha, aby byla jasná důležitost tohoto kroku. S tímto rozvojem můžeme zapsat podmínku umožňující použití rovnic geodetiky,

$$\Gamma_{bc}^a u_2^b u_2^c = \Gamma_{bc}^a u_1^b u_1^c + \Gamma_{bc,d}^a u_1^b u_1^c Z^d + 2\Gamma_{bc}^a \frac{dZ^b}{d\tau} u_1^c + \mathcal{O}(\Delta Z^2). \quad (1.17)$$

Rovnice (1.14) a (1.17) tedy sečteme, zanedbáváme výrazy vyššího než prvního řádu v ΔZ , a takto dostáváme

$$0 = \frac{d^2 Z^a}{d\tau^2} + \Gamma_{bc,d}^a u_1^b u_1^c Z^d + 2\Gamma_{bc}^a \frac{dZ^b}{d\tau} u_1^c + \mathcal{O}(\Delta Z^2). \quad (1.18)$$

Jelikož však chceme dojít k obecně kovariantnímu tvaru rovnice, je třeba najít vztah mezi obyčejnou a absolutní derivací,

$$\begin{aligned} \frac{D^2 Z^a}{d\tau^2} &= \frac{D}{d\tau} \left(\frac{dZ^a}{d\tau} + \Gamma_{bc}^a Z^b u_1^c \right) \\ &= \frac{d^2 Z^a}{d\tau^2} + 2\Gamma_{bc}^a \frac{dZ^b}{d\tau} u_1^c + \Gamma_{bc}^a Z^b \frac{d u_1^c}{d\tau} \\ &\quad + \Gamma_{bc,d}^a Z^b u_1^c u_1^d + \Gamma_{be}^a u_1^b \Gamma_{cd}^e Z^d u_1^d \\ &= \frac{d^2 Z^a}{d\tau^2} + 2\Gamma_{bc}^a \frac{dZ^b}{d\tau} u_1^c + \Gamma_{bc,d}^a Z^b u_1^c u_1^d \\ &\quad + \Gamma_{be}^a u_1^b \Gamma_{cd}^e Z^c u_1^d - \Gamma_{be}^a Z^b \Gamma_{cd}^e u_1^c u_1^d. \end{aligned} \quad (1.19)$$

Přeuspořádáním členů, opětovným použitím definice absolutní derivace a dosazením z rovnice (1.8) můžeme předchozí vyjádření přepsat jako

$$\begin{aligned} \frac{d^2 Z^a}{d\tau^2} &= \frac{D^2 Z^a}{d\tau^2} - 2\Gamma_{bc}^a \frac{D Z^b}{d\tau} u_1^c + 2\Gamma_{be}^a u_1^b \Gamma_{cd}^e Z^c u_1^d \\ &\quad - \Gamma_{bc,d}^a Z^b u_1^c u_1^d - \Gamma_{be}^a u_1^b \Gamma_{cd}^e Z^c u_1^d + \Gamma_{be}^a Z^b \Gamma_{cd}^e u_1^c u_1^d \\ &= \frac{D^2 Z^a}{d\tau^2} - 2\Gamma_{bc}^a \frac{D Z^b}{d\tau} u_1^c + \Gamma_{be}^a u_1^b \Gamma_{cd}^e Z^c u_1^d \\ &\quad - \Gamma_{bc,d}^a Z^b u_1^c u_1^d + \Gamma_{be}^a Z^b \Gamma_{cd}^e u_1^c u_1^d \end{aligned} \quad (1.20)$$

Nyní již pouze s užitím definice Riemannova tenzoru, tedy

$$R^a{}_{bcd} = \Gamma_{bd,c}^a - \Gamma_{bc,d}^a + \Gamma_{ce}^a \Gamma_{bd}^e - \Gamma_{de}^a \Gamma_{bc}^e, \quad (1.21)$$

zapišeme rovnici (1.20) jako

$$\begin{aligned} \frac{d^2 Z^a}{d\tau^2} &= \frac{D^2 Z^a}{d\tau^2} - 2\Gamma_{bc}^a \frac{D Z^b}{d\tau} u_1^c + R_{bcd}^a u_1^b Z^c u_1^d \\ &\quad - \Gamma_{bc,d}^a u_1^b u_1^c Z^d + 2\Gamma_{be}^a u_1^b \Gamma_{cd}^e Z^c u_1^d. \end{aligned} \quad (1.22)$$

Na závěr dosadíme tento výsledek a znovu definici absolutní derivace do rovnice (1.18), čímž dostaneme klasickou rovnici geodetické deviace (1.7)

$$\frac{D^2 Z^a}{d\tau^2} = -R_{bcd}^a u_1^b Z^c u_1^d + \mathcal{O}(\Delta Z^2). \quad (1.23)$$

1.3 Zobecněná rovnice geodetické deviace

Opět postupujeme obdobně jako v článku [5], ale nyní již uvolníme podmínku (1.5). To se projeví větším počtem zanedbaných členů. V Taylorových rozvojiích tuto změnu značíme tak, že místo $\mathcal{O}(\Delta Z^n)$ píšeme vystižněji $\mathcal{O}(Z^n)$, protože \mathbf{Z} je stále infinitezimální veličina. Uvolnění podmínky nezmění naše původní odvození až po rovnici (1.12). Pro přehlednost jí uvedeme znovu, tedy

$$\begin{aligned} x_2^a = x_1^a + Z^a - \frac{1}{2}\Gamma_{bc}^a Z^b Z^c - \frac{1}{6}\Gamma_{bc,d}^a Z^b Z^c Z^d + \frac{1}{3}\Gamma_{be}^a Z^b \Gamma_{cd}^e Z^c Z^d \\ + \mathcal{O}(\Delta Z^4). \end{aligned} \quad (1.24)$$

Nyní rovnici (1.24) zderivujeme podle parametru τ a zanedbáme jen infinitezimálně malé členy třetího řádu. Takto dostaneme

$$\begin{aligned} u_2^a = u_1^a + \frac{dZ^a}{d\tau} - \frac{1}{2}\Gamma_{bc,d}^a Z^b Z^c u_1^d - \Gamma_{bc}^a \frac{dZ^b}{d\tau} Z^c \\ - \frac{1}{3}\Gamma_{bc,d}^a \frac{dZ^b}{d\tau} Z^c Z^d - \frac{1}{6}\Gamma_{bc,d}^a Z^b Z^c \frac{dZ^d}{d\tau} \\ + \frac{1}{3}\Gamma_{be}^a \frac{dZ^b}{d\tau} \Gamma_{cd}^e Z^c Z^d + \frac{2}{3}\Gamma_{be}^a Z^b \Gamma_{cd}^e \frac{dZ^c}{d\tau} Z^d + \mathcal{O}(Z^3). \end{aligned} \quad (1.25)$$

Rovnici (1.25) opět zderivujeme podle parametru τ , ale zde už zanedbáme infinitezimálně malé členy vyššího než druhého řádu,

$$\begin{aligned} \frac{du_2^a}{d\tau} = \frac{du_1^a}{d\tau} + \frac{d^2 Z^a}{d\tau^2} - 2\Gamma_{bc,d}^a \frac{dZ^b}{d\tau} Z^c u_1^d - \Gamma_{bc}^a \frac{dZ^b}{d\tau} \frac{dZ^c}{d\tau} - \Gamma_{bc}^a \frac{d^2 Z^b}{d\tau^2} Z^c \\ - \frac{1}{3}\Gamma_{bc,d}^a \frac{dZ^b}{d\tau} \frac{dZ^c}{d\tau} Z^d - \frac{2}{3}\Gamma_{bc,d}^a \frac{dZ^b}{d\tau} Z^c \frac{dZ^d}{d\tau} \\ + \frac{4}{3}\Gamma_{be}^a \frac{dZ^b}{d\tau} \Gamma_{cd}^e \frac{dZ^c}{d\tau} Z^d + \frac{2}{3}\Gamma_{be}^a Z^b \Gamma_{cd}^e \frac{dZ^c}{d\tau} \frac{dZ^d}{d\tau} + \mathcal{O}(Z^2). \end{aligned} \quad (1.26)$$

Již obeznámeni s možným dřívějším problémem při vyčíslení Christoffelových symbolů, napíšeme nyní komplementární rovnici k vynulování členů z (1.26) pomocí rovnic geodetik spolu se znalostí Taylorova rozvoje Christoffelových symbolů v různých bodech spojených vektorem \mathbf{Z} (1.16),

$$\begin{aligned}\Gamma_{bc}^a u_2^b u_2^c &= \Gamma_{bc}^a u_1^b u_1^c + \Gamma_{bc,d}^a u_1^b u_1^c Z^d + 2\Gamma_{bc}^a \frac{dZ^b}{d\tau} u_1^c \\ &+ 2\Gamma_{bc,d}^a \frac{dZ^b}{d\tau} u_1^c Z^d + \Gamma_{bc}^a \frac{dZ^b}{d\tau} \frac{dZ^c}{d\tau} + \Gamma_{bc}^a \frac{dZ^b}{d\tau} \frac{dZ^c}{d\tau} Z^d \\ &- 2\Gamma_{be}^a u_1^b \Gamma_{cd}^e \frac{dZ^c}{d\tau} Z^d - 2\Gamma_{be}^a \frac{dZ^b}{d\tau} \Gamma_{cd}^e \frac{dZ^c}{d\tau} Z^d + \mathcal{O}(Z^2).\end{aligned}\quad (1.27)$$

V tuto chvíli sečteme rovnice (1.26) a (1.27), abychom s využitím rovnic geodetik vynulovali některé členy. Takto dostaneme

$$\begin{aligned}0 &= \frac{d^2 Z^a}{d\tau^2} - 2\Gamma_{bc,d}^a \frac{dZ^b}{d\tau} Z^c u_1^d - \Gamma_{bc}^a \frac{d^2 Z^b}{d\tau^2} Z^c \\ &+ \Gamma_{bc,d}^a u_1^b u_1^c Z^d + 2\Gamma_{bc,d}^a \frac{dZ^b}{d\tau} u_1^c Z^d \\ &+ \frac{2}{3}\Gamma_{bc,d}^a \frac{dZ^b}{d\tau} \frac{dZ^c}{d\tau} Z^d - \frac{2}{3}\Gamma_{bc,d}^a \frac{dZ^b}{d\tau} Z^c \frac{dZ^d}{d\tau} \\ &- \frac{2}{3}\Gamma_{be}^a \frac{dZ^b}{d\tau} \Gamma_{cd}^e \frac{dZ^c}{d\tau} Z^d + \frac{2}{3}\Gamma_{be}^a Z^b \Gamma_{cd}^e \frac{dZ^c}{d\tau} \frac{dZ^d}{d\tau} \\ &+ 2\Gamma_{bc}^a \frac{dZ^b}{d\tau} u_1^c + \mathcal{O}(Z^2).\end{aligned}\quad (1.28)$$

Užitím definice Riemannova tenzoru (1.21), lze přepsat rovnici (1.28) na

$$\begin{aligned}0 &= \frac{d^2 Z^a}{d\tau^2} - 2\Gamma_{bc,d}^a \frac{dZ^b}{d\tau} Z^c u_1^d - \Gamma_{bc}^a \frac{d^2 Z^b}{d\tau^2} Z^c \\ &+ \Gamma_{bc,d}^a u_1^b u_1^c Z^d + 2\Gamma_{bc,d}^a \frac{dZ^b}{d\tau} u_1^c Z^d \\ &+ \frac{2}{3}R_{bcd}^a \frac{dZ^b}{d\tau} Z^c \frac{dZ^d}{d\tau} + 2\Gamma_{bc}^a \frac{dZ^b}{d\tau} u_1^c + \mathcal{O}(Z^2).\end{aligned}\quad (1.29)$$

Nyní stačí jen dosadit z (1.22), z definice absolutní derivace a opětovně využít definici Riemannova tenzoru (1.21), čímž dostáváme zobecněnou rovnici geodetické deviace pro synchronizované pozorovatele ve tvaru

$$\begin{aligned}\frac{D^2 Z^a}{d\tau^2} &= -R_{bcd}^a u_1^b Z^c u_1^d \\ &- 2R_{bcd}^a \frac{DZ^b}{d\tau} Z^c u_1^d - \frac{2}{3}R_{bcd}^a \frac{DZ^b}{d\tau} Z^c \frac{DZ^d}{d\tau} + \Gamma_{bc}^a \frac{D^2 Z^b}{d\tau^2} Z^c + \mathcal{O}(Z^2).\end{aligned}\quad (1.30)$$

Naše rovnice odpovídá výsledku z článku [5] až na znaménko v posledním členu. To ale pro náš další postup nebude vadit, protože tento člen můžeme rovněž

zanedbat. To lze odůvodnit například tak, že podle (1.30) je $\frac{D^2 Z}{d\tau^2}$ úměrné Z . To však znamená, že poslední člen můžeme schovat do $\mathcal{O}(Z^2)$. Takto dostaneme zobecněnou rovnici geodetické deviace, kterou budeme dále používat

$$\frac{D^2 Z^a}{d\tau^2} = -R^a{}_{bcd} u_1^b Z^c u_1^d - 2R^a{}_{bcd} \frac{DZ^b}{d\tau} Z^c u_1^d - \frac{2}{3} R^a{}_{bcd} \frac{DZ^b}{d\tau} Z^c \frac{DZ^d}{d\tau} + \mathcal{O}(Z^2). \quad (1.31)$$

Tato rovnice tedy přináší korekci pro případ nezanedbatelných relativních rychlostí testovacích pozorovatelů. Její podoby byly různými způsoby odvozeny například v [6, 7, 8]. V kontextu naší další analýzy nám tyto dodatečné korekce umožní studovat, a v principu pozorovat, složky tenzoru křivosti v $D > 4$, které jsou skrze klasickou rovnici geodetické deviace nedostupné.

2. Invariantní tvar rovnice geodetické deviace

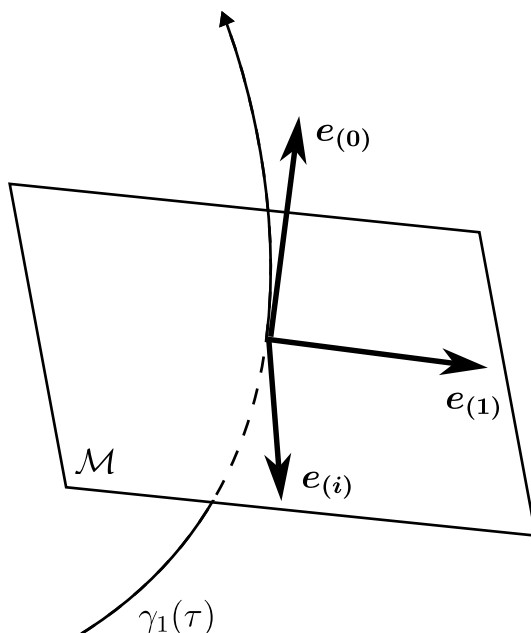
V této kapitole budeme zkoumat invariantní, tedy na souřadnicích nezávislý, tvar zobecněné rovnice geodetické deviace, ve zbytku textu budeme uvažovat už jen zobecněnou rovnici geodetické deviace (1.31). K na souřadnicím nezávislému popisu přejdeme tak, že referenčního pozorovatele vybavíme ortonormální vektorovou bází vůči níž bude provádět a vyjadřovat svá měření relativních pohybů. Technicky to obnáší promítnutí rovnice geodetické deviace na tuto bázi, přičemž je výhodné zavést i Newmanovsko–Penroseovskou nulovou bázi a vůči ní definovat komponenty relevantních tenzorů.

2.1 Projekce rovnice geodetické deviace

Mějme obecně kdekoli na geodetice ortonormální D -tici vektorů $\{e_{(a)}\}$, která splňuje následující normalizační podmínky:

$$\begin{aligned} e_{(0)} \cdot e_{(0)} &= -1, \\ e_{(i)} \cdot e_{(i)} &= 1, \quad \text{pro } i = 1, \dots, D-1, \end{aligned} \quad (2.1)$$

kde speciálně zvolíme $e_{(0)}^a = \frac{dx_1^a}{d\tau}$, tedy jako časový vektor této báze uvažujeme D -rychlost referenčního pozorovatele. Náčrt takové situace je na obrázku 2.1.



Obrázek 2.1: Kdekoli na geodetice si můžeme zvolit ortonormální bázi s časopodobným vektorem tečným k dané geodetice. V podprostoru \mathcal{M} kolmém k tečnému vektoru geodetiky se nachází vektory $e_{(1)}$ a $e_{(i)}$ pro $i = 2, \dots, D-1$.

Jelikož je Riemannův tenzor R_{abcd} antisymetrický v sousedních párech indexů, platí pro složku deviace ve směru $e_{(0)}$ následující:

$$\begin{aligned}
-e_a^{(0)} \frac{d^2 Z^a}{d\tau^2} &= \frac{d^2 Z^{(0)}}{d\tau^2} \\
&= e_a^{(0)} R^a{}_{bcd} \left(u_1^b Z^c u_1^d + 2 \frac{DZ^b}{d\tau} Z^c u_1^d + \frac{2}{3} \frac{DZ^b}{d\tau} Z^c \frac{DZ^d}{d\tau} \right) \\
&= -2R^{(0)}{}_{bc(0)} \frac{DZ^b}{d\tau} Z^c - \frac{2}{3} R^{(0)}{}_{bcd} \frac{DZ^b}{d\tau} Z^c \frac{dZ^d}{d\tau}. \tag{2.2}
\end{aligned}$$

Pro časovou komponentu máme tedy diferenciální rovnici:

$$\ddot{Z}^{(0)} = -2R^{(0)}{}_{(b)(c)(0)} \dot{Z}^{(b)} Z^{(c)} - \frac{2}{3} R^{(0)}{}_{(b)(c)(d)} \dot{Z}^{(b)} Z^{(c)} \dot{Z}^{(d)}, \tag{2.3}$$

kde pro indexy a, b, c, d sčítáme přes všechny dimenze, tedy $a, b, c, d = 0, \dots, D-1$. Na tomto místě uvedme ještě další dvě indexové konvence, a pro indexy i, j, k, l budeme ze sčítání vynechávat časový směr, tedy $i, j, k, l = 1, \dots, D-1$ a pro i, j, k, l budeme vynechávat rovněž privilegovaný směr časový směr $e_{(1)}$ viz konstrukce nulové báze, tedy $i, j, k, l = 2, \dots, D-1$. Narážíme zde na problém, který původně s nezobecněnou geodetickou deviací nenastal, dochází k relativnímu pohybu rovněž v časovém směru.

Nyní vyjádříme vztahy pro zbylé bázové složky separačního vektoru \mathbf{Z} , přičemž se nám bude později hodit zmíněné rozdělení na složku v prvním prostorovém směru $e_{(1)}$ a zbylé složky v $D-2$ prostorových směrech $e_{(i)}$, tedy

$$\ddot{Z}^{(1)} = -R^{(1)}{}_{(0)(c)(0)} Z^{(c)} - 2R^{(1)}{}_{(b)(c)(0)} \dot{Z}^{(b)} Z^{(c)} - \frac{2}{3} R^{(1)}{}_{(b)(c)(d)} \dot{Z}^{(b)} Z^{(c)} \dot{Z}^{(d)}, \tag{2.4}$$

$$\ddot{Z}^{(i)} = -R^{(i)}{}_{(0)(c)(0)} Z^{(c)} - 2R^{(i)}{}_{(b)(c)(0)} \dot{Z}^{(b)} Z^{(c)} - \frac{2}{3} R^{(i)}{}_{(b)(c)(d)} \dot{Z}^{(b)} Z^{(c)} \dot{Z}^{(d)}. \tag{2.5}$$

Pro lepší vzhled do efektů popsaných těmito rovnicemi je výhodné kanonicky rozložit Riemannův tenzor na členy úměrné stopě, tedy Ricciho skaláru a tenzoru, a na bezstopou část, tedy Weylův tenzor, který následně rozepíšeme pomocí Weylových skalárů, jako v článku [9].

2.2 Rozklad tenzoru křivosti

Standardně lze Riemannův tenzor rozložit na bezstopou část, tedy Weylův tenzor, a další části úměrné Ricciho tenzoru a skaláru:

$$\begin{aligned}
R_{abcd} &= C_{abcd} + \frac{2}{D-2} \left(g_{a[c} R_{d]b} - g_{b[c} R_{d]a} \right) \\
&\quad - \frac{2}{(D-1)(D-2)} R g_{a[c} g_{d]b}, \tag{2.6}
\end{aligned}$$

Takto můžeme samozřejmě rozložit i projekce Riemannova tenzoru z (2.3), (2.4) a (2.5). V relevantních výrazech dále sčítáme, bude proto užitečné ve sčítacích indexech rozepsat příslušné projekce na součet několika Riemannových

komponent s indexy procházejícími $D - 1$ hodnot typu¹ i, j, k, l , tedy s oddělenou časovou komponentou:

$$\begin{aligned}
R_{(0)(b)(c)(0)} &\rightarrow R_{(0)(j)(k)(0)} , \\
R_{(0)(b)(c)(d)} &\rightarrow R_{(0)(j)(k)(l)} + R_{(0)(j)(k)(0)} + R_{(0)(j)(0)(l)} , \\
R_{(i)(0)(c)(0)} &\rightarrow R_{(i)(0)(k)(0)} , \\
R_{(i)(b)(c)(0)} &\rightarrow R_{(i)(j)(k)(0)} + R_{(i)(0)(k)(0)} , \\
R_{(i)(b)(c)(d)} &\rightarrow R_{(i)(0)(k)(l)} + R_{(i)(0)(k)(0)} + R_{(i)(0)(0)(l)} \\
&\quad + R_{(i)(j)(k)(l)} + R_{(i)(j)(k)(0)} + R_{(i)(j)(0)(l)} .
\end{aligned}$$

Ze symetrií Riemannova tenzoru vidíme, že stačí rozložit pomocí (2.6) jen několik jeho typických komponent. Máme tedy:

$$\begin{aligned}
R_{(i)(0)(0)(l)} &= C_{(i)(0)(0)(l)} + \frac{1}{D-2} \left(R_{(i)(l)} - \delta_{il} R_{(0)(0)} \right) - \frac{1}{(D-1)(D-2)} R \delta_{il} , \\
R_{(i)(0)(k)(l)} &= C_{(i)(0)(k)(l)} + \frac{1}{D-2} \left(\delta_{ik} R_{(0)(l)} - \delta_{il} R_{(0)(k)} \right) , \\
R_{(i)(j)(k)(0)} &= C_{(i)(j)(k)(0)} + \frac{1}{D-2} \left(\delta_{ik} R_{(0)(j)} - \delta_{jk} R_{(0)(i)} \right) , \\
R_{(i)(j)(k)(l)} &= C_{(i)(j)(k)(l)} + \frac{1}{D-2} \left(\delta_{ik} R_{(l)(j)} - \delta_{il} R_{(k)(j)} - \delta_{jk} R_{(l)(i)} + \delta_{jl} R_{(k)(i)} \right) \\
&\quad - \frac{1}{(D-1)(D-2)} R \left(\delta_{ik} \delta_{lj} - \delta_{il} \delta_{kj} \right) .
\end{aligned}$$

Nyní přepíšeme první člen v (2.3) pomocí předchozích vztahů a dostaneme tak první člen zobecněné rovnice geodetické deviace pro časovou složku:

$$\begin{aligned}
R_{(b)(c)(0)}^{(0)} \dot{Z}^{(b)} Z^{(c)} &= C_{(0)(j)(k)(0)} \dot{Z}^{(j)} Z^{(k)} \\
&\quad + \frac{1}{D-2} R_{(j)(k)} \dot{Z}^{(j)} Z^{(k)} - \frac{1}{D-2} \left(R_{(0)(0)} + \frac{R}{D-1} \right) \dot{Z}^{(j)} Z^{(j)} . \quad (2.7)
\end{aligned}$$

Další složky mají však mnohem větší tendenci nabývat v počtu členů, proto zavedeme novou notaci, tedy uspořádanou dvojici a trojici:

$$Y^{ab} \equiv \dot{Z}^{(a)} Z^{(b)} , \quad X^{abc} \equiv \dot{Z}^{(a)} Z^{(b)} \dot{Z}^{(c)} . \quad (2.8)$$

S tímto novým zápisem budou rozpisy členů z rovnic geodetické deviace více kompaktní a přehledné. Pro zbylé členy z časové komponenty (2.3) takto dostáváme:

$$\begin{aligned}
R_{(b)(c)(d)}^{(0)} \dot{Z}^{(b)} Z^{(c)} \dot{Z}^{(d)} &= C_{(0)(j)(k)(l)} X^{jkl} + C_{(0)(j)(k)(0)} 2X_j^{j[k0]} \\
&\quad - \frac{1}{D-2} R_{(0)(k)} 2X_j^{[jk]} + \frac{1}{D-2} R_{(j)(k)} 2X_j^{j[k0]} \\
&\quad - \frac{1}{D-2} \left(R_{(0)(0)} + \frac{R}{D-1} \right) 2X_j^{j[0]} , \quad (2.9)
\end{aligned}$$

¹Do chvíle, než zavedeme skaláry vzhledem k nulové bázi, tak explicitně neoddělujeme projekce na $e_{(1)}$. Index 1 v následujících výrazech tedy není zafixovaná hodnota jedna, ale prochází $D - 1$ hodnot od 1 do $D - 1$.

$$R^{(0)}_{(b)(c)(0)} \dot{Z}^{(b)} Z^{(c)} = C_{(0)(j)(k)(0)} Y^{jk} + \frac{1}{D-2} R_{(j)(k)} Y^{jk} - \frac{1}{D-2} \left(R_{(0)(0)} + \frac{R}{D-1} \right) Y_j^j. \quad (2.10)$$

Dále nám stačí již pouze rozepsat členy z rovnice (2.5) jelikož zbývající projekce vystupující v rovnici (2.4) dostaneme pouhým nahrazením indexu i zařazeným indexem 1. Obecně tedy dostáváme

$$\begin{aligned} R^{(i)}_{(b)(c)(d)} \dot{Z}^{(b)} Z^{(c)} \dot{Z}^{(d)} &= C_{(i)(j)(k)(l)} X^{jkl} + C_{(i)(j)(k)(0)} 2X^{j[k0]} \\ &+ C_{(i)(0)(k)(l)} X^{0kl} + C_{(i)(0)(k)(0)} 2X^{0[k0]} \\ &- \frac{1}{D-2} R_{(j)(k)} 2X^{j[kj]} - \frac{1}{D-2} R_{(i)(k)} 2X_j^{[jk]} \\ &- \frac{R}{(D-1)(D-2)} 2X_j^{[ij]} - \frac{1}{D-2} R_{(0)(j)} 2X^{j[0j]} \\ &- \frac{1}{D-2} R_{(0)(i)} 2X_j^{[j0]} + \frac{1}{D-2} R_{(0)(k)} 2X^{0[kj]} \\ &- \frac{1}{D-2} R_{(i)(k)} 2X^{0[k0]} + \frac{1}{D-2} \left(R_{(0)(0)} + \frac{R}{D-1} \right) 2X^{0[0i]}, \quad (2.11) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R^{(i)}_{(b)(c)(0)} \dot{Z}^{(b)} Z^{(c)} &= C_{(i)(j)(k)(0)} Y^{jk} + C_{(i)(0)(k)(0)} Y^{0k} \\ &+ \frac{1}{D-2} R_{(0)(j)} Y^{ji} - \frac{1}{D-2} R_{(i)(0)} Y_j^j \\ &- \frac{1}{D-2} R_{(i)(k)} Y^{0k} + \frac{1}{D-2} \left(R_{(0)(0)} + \frac{R}{D-1} \right) Y^{0i}, \quad (2.12) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R^{(i)}_{(0)(c)(0)} Z^{(c)} &= C_{(i)(0)(k)(0)} Z^{(k)} - \frac{1}{D-2} R_{(i)(k)} Z^{(k)} \\ &+ \frac{1}{D-2} \left(R_{(0)(0)} + \frac{R}{D-1} \right) Z^{(i)}. \quad (2.13) \end{aligned}$$

Ještě poznamenejme, že v členu (2.11) lze ještě provést následující netriviální úpravu, kterou použijeme při pozdějším dosazování:

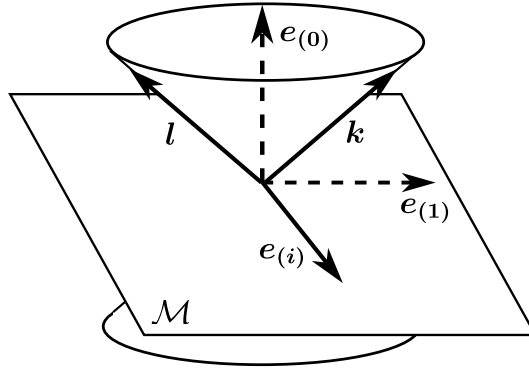
$$\begin{aligned} &\frac{1}{D-2} R_{(0)(k)} 2X^{0[kj]} - \frac{1}{D-2} R_{(0)(k)} 2X^{k[0j]} \\ &= \frac{1}{D-2} R_{(0)(k)} \left(X^{0ki} - X^{0zk} - X^{k0i} + X^{kz0} \right) \\ &= \frac{1}{D-2} R_{(0)(k)} \left(-X^{0zk} + X^{kz0} \right) = \frac{1}{D-2} R_{(0)(k)} 2X^{i[k0]}. \end{aligned}$$

Nyní budeme pokračovat nahrazením projekcí Weylova tenzoru pomocí Wylových skalárů vyjádřenými vůči nulové bázi v prostoru, tedy $\{\mathbf{k}, \mathbf{l}, \mathbf{m}_i\}$, definované téměř totožně jako v kapitole 2 knihy [10]. Rozdíl je ten, že náš popis se odehrává obecné dimenzi D a tedy vektory \mathbf{m}_i nelze kombinovat do podoby komplexních nulových vektorů. Náčrt takové báze prostoru je pak na obrázku (2.2). Uvažujme tedy

$$\begin{aligned} \mathbf{k} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_{(0)} + \mathbf{e}_{(1)}), & \mathbf{l} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_{(0)} - \mathbf{e}_{(1)}), \\ \mathbf{m}_i &= \mathbf{e}_{(i)} & \text{pro } i &= 2, \dots, D-1, \end{aligned} \quad (2.14)$$

přičemž tyto prvky báze pak splňují následující relace:

$$\begin{aligned} \mathbf{k} \cdot \mathbf{l} &= -1, & \mathbf{m}_i \cdot \mathbf{m}_j &= \delta_{ij}, \\ \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} &= 0 = \mathbf{l} \cdot \mathbf{l}, & \mathbf{k} \cdot \mathbf{m}_i &= 0 = \mathbf{l} \cdot \mathbf{m}_i. \end{aligned} \quad (2.15)$$



Obrázek 2.2: Lze vidět, že nová báze podél referenční geodetiky má dva nulové vektory ležící na světelném kuželu. Zbýlých $D - 2$ vektorů se nezměnilo a leží stále na $(D - 2)$ -dimenzionálním podprostoru \mathcal{M} .

Weylovy skaláry jsou pak zúženými Weylova tenzoru s prvky nulové báze. Jsou, jako předchozí volba báze, definované téměř stejně jako v kapitole 7 knihy [10], jen díky vyšší dimenzi prostoru musí mít pseudoskaláry dodatečné prostorové indexy:

$$\begin{aligned} \Psi_{0^{ij}} &= C_{abcd} k^a m_i^b k^c m_j^d, \\ \Psi_{1^{ijk}} &= C_{abcd} k^a m_i^b m_j^c m_k^d, & \Psi_{1T^i} &= C_{abcd} k^a l^b k^c m_i^d, \\ \Psi_{2^{ijkl}} &= C_{abcd} m_i^a m_j^b m_k^c m_l^d, & \Psi_{2S} &= C_{abcd} k^a l^b l^c k^d, \\ \Psi_{2^{ij}} &= C_{abcd} k^a l^b m_i^c m_j^d, & \Psi_{2T^{ij}} &= C_{abcd} k^a m_i^b l^c m_j^d, \\ \Psi_{3^{ijk}} &= C_{abcd} l^a m_i^b m_j^c m_k^d, & \Psi_{3T^i} &= C_{abcd} l^a k^b l^c m_i^d, \\ \Psi_{4^{ij}} &= C_{abcd} l^a m_i^b l^c m_j^d. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Algebraicky lze některé z nich lze dále rozložit na jejich ireducibilní složky viz například [11],

$$\begin{aligned}
\Psi_{1^{ijk}} &= \tilde{\Psi}_{1^{ijk}} + \frac{2}{D-3} \delta_{i[j} \Psi_{1T^{k]}}, \\
\Psi_{2T^{(ij)}} &= \tilde{\Psi}_{2T^{(ij)}} + \frac{1}{D-2} \delta_{ij} \Psi_{2S}, \\
\Psi_{2^{ijkl}} &= \tilde{\Psi}_{2^{ijkl}} + \frac{2}{D-4} \left(\delta_{ik} \tilde{\Psi}_{2T^{(jl)}} + \delta_{jl} \tilde{\Psi}_{2T^{(ik)}} - \delta_{il} \tilde{\Psi}_{2T^{(jk)}} - \delta_{jk} \tilde{\Psi}_{2T^{(il)}} \right) \\
&\quad + \frac{4\delta_{i[k} \delta_{l]j}}{(D-2)(D-3)} \Psi_{2S}, \\
\Psi_{3^{ijk}} &= \tilde{\Psi}_{3^{ijk}} + \frac{2}{D-3} \delta_{i[j} \Psi_{3T^{k]}}.
\end{aligned} \tag{2.17}$$

Pomocí pseudoskalárů a (2.15) můžeme přepsat vzorce (2.9)–(2.13). Zde místo čtyř projekcí Weylova tenzoru, které se uplatnily v klasické verzi rovnice geodetické deviace, jejíž $D \geq 4$ podoba je diskutovaná v článku [9], potřebujeme celkem deset projekcí Weylova tenzoru rozepsat pomocí výše definovaných pseudoskalárů. Původní čtyři komponenty se samozřejmě shodují s našimi. Neuvedené složky jsou buď nulové ze symetrií, nebo se dají zapsat pomocí uvedených. Máme tedy

$$\begin{aligned}
C_{(i)(j)(k)(l)} &= \Psi_{2^{ijkl}}, \\
C_{(1)(j)(k)(l)} &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\Psi_{1^{jkl}} - \Psi_{3^{jkl}}), \\
C_{(1)(j)(k)(1)} &= -\frac{1}{2} (\Psi_{0^{jk}} + 2\Psi_{2T^{[jk]} + \Psi_{4^{jk}}), \\
C_{(0)(j)(k)(l)} &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\Psi_{1^{jkl}} + \Psi_{3^{jkl}}), \\
C_{(0)(j)(1)(l)} &= \frac{1}{2} (\Psi_{0^{jl}} - 2\Psi_{2T^{[jl]} - \Psi_{4^{jl}}), \\
C_{(0)(j)(0)(l)} &= \frac{1}{2} (\Psi_{0^{jl}} + 2\Psi_{2T^{(jl)}} + \Psi_{4^{jl}}), \\
C_{(0)(j)(1)(0)} &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\Psi_{1T^j} - \Psi_{3T^j}), \\
C_{(0)(1)(k)(l)} &= -\Psi_{2^{kl}}, \\
C_{(0)(1)(1)(l)} &= -\frac{1}{\sqrt{2}} (\Psi_{1T^l} + \Psi_{3T^l}), \\
C_{(0)(1)(1)(0)} &= \Psi_{2S}.
\end{aligned} \tag{2.18}$$

Podobně musíme ještě zapsat složky Ricciho tenzoru v nulové bázi pomocí podobných pseudoskalárů jako v případě Weylova tenzoru. Podle [11] je zavedeme jako zúžení bezestopého Ricciho tenzoru $\mathcal{R}_{ab} = R_{ab} - \frac{1}{D} Rg_{ab}$ s prvky báze:

$$\begin{aligned}
\Phi_{00} &= \frac{1}{2} \mathcal{R}_{ab} k^a k^b, \\
\Phi_{01^i} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \mathcal{R}_{ab} k^a m_i^b, \\
\Phi_{11} &= \mathcal{R}_{ab} k^a l^b, \\
\Phi_{02^{ij}} &= \mathcal{R}_{ab} m_i^a m_j^b, \\
\Phi_{12^i} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \mathcal{R}_{ab} l^a m_i^b, \\
\Phi_{22} &= \frac{1}{2} \mathcal{R}_{ab} l^a l^b,
\end{aligned} \tag{2.19}$$

a složky Ricciho tenzoru pak přepíšeme jako

$$\begin{aligned}
R_{(0)(0)} &= \Phi_{00} + \Phi_{11} + \Phi_{22} - \frac{R}{D}, \\
R_{(0)(1)} &= \Phi_{00} - \Phi_{22}, \\
R_{(0)(j)} &= \Phi_{01^j} + \Phi_{12^j}, \\
R_{(1)(1)} &= \Phi_{00} - \Phi_{11} + \Phi_{22} + \frac{R}{D}, \\
R_{(1)(j)} &= \Phi_{01^j} - \Phi_{12^j}, \\
R_{(i)(j)} &= \Phi_{02^{ij}} + \frac{R}{D} \delta_{ij}.
\end{aligned} \tag{2.20}$$

Nyní již můžeme z definic (2.18) a (2.20) dosadit do příslušných členů zobecněné rovnice geodetické deviace (2.9)–(2.13). Pro členy vystupující v časové složce takto dostaneme

$$\begin{aligned}
R^{(0)}{}_{(b)(c)(d)} \dot{Z}^{(b)} Z^{(c)} \dot{Z}^{(d)} &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\Psi_{1^{jkl}} + \Psi_{3^{jkl}}) X^{jkl} - \Psi_{2^{kl}} X^{1kl} \\
&\quad - \frac{1}{2} (\Psi_{0^{jk}} - 2\Psi_{2T^{[jk]}} - \Psi_{4^{jk}}) 2X^{j[k1]} \\
&\quad + \frac{1}{\sqrt{2}} (\Psi_{1T^k} + \Psi_{3T^k}) 2X^{1[k1]} - \frac{1}{2} (\Psi_{0^{jk}} + 2\Psi_{2T^{(jk)}} + \Psi_{4^{jk}}) 2X^{j[k0]} \\
&\quad + \frac{1}{\sqrt{2}} (\Psi_{1T^j} - \Psi_{3T^j}) 2X^{j[10]} + \frac{1}{\sqrt{2}} (\Psi_{1T^k} - \Psi_{3T^k}) 2X^{1[k0]} \\
&\quad - \frac{1}{D-2} (\Phi_{00} - \Phi_{22}) 2X_j^{[j1]} - \frac{1}{D-2} (\Phi_{01^k} + \Phi_{12^k}) 2X_j^{[jk]} \\
&\quad + \frac{1}{D-2} \Phi_{02^{jk}} 2X^{j[k0]} + \frac{1}{D-2} (\Phi_{01^k} + \Phi_{12^k}) 2(X^{1[k0]} + X^{k[10]}) \\
&\quad + \frac{1}{D-2} \left(\Phi_{00} - \Phi_{11} + \Phi_{22} + \frac{R}{D} \right) 2X^{1[10]} \\
&\quad - \frac{1}{D-2} \left(\Phi_{00} + \Phi_{11} + \Phi_{22} - \frac{R(D-2)}{D(D-1)} \right) 2X_j^{[j0]},
\end{aligned} \tag{2.21}$$

$$\begin{aligned}
R^{(0)}_{(b)(c)(0)} \dot{Z}^{(b)} Z^{(c)} &= -\frac{1}{2} (\Psi_{0jk} + 2\Psi_{2T^{(jk)}} + \Psi_{4jk}) Y^{jk} \\
&+ \frac{1}{\sqrt{2}} (\Psi_{1T^j} - \Psi_{3T^j}) 2Y^{(j1)} + \Psi_{2S} Y^{11} \\
&+ \frac{1}{D-2} \Phi_{02jk} Y^{jk} + \frac{1}{D-2} (\Phi_{01j} - \Phi_{12j}) 2Y^{(j1)} \\
&- \frac{1}{D-2} \left(2\Phi_{11} + \frac{R}{D-1} \right) Y^{11} \\
&- \frac{1}{D-2} \left(\Phi_{00} + \Phi_{11} + \Phi_{22} + \frac{R}{D-1} \right) Y_j^j, \quad (2.22)
\end{aligned}$$

pro členy deviance v první prostorové složce platí

$$\begin{aligned}
R^{(1)}_{(b)(c)(d)} \dot{Z}^{(b)} Z^{(c)} \dot{Z}^{(d)} &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\Psi_{1jkl} - \Psi_{3jkl}) X^{jkl} \\
&- \frac{1}{2} (\Psi_{0jk} + 2\Psi_{2T^{[jk]}} + \Psi_{4jk}) 2X^{j[k1]} - \frac{1}{2} (\Psi_{0jk} - 2\Psi_{2T^{[jk]}} - \Psi_{4jk}) 2X^{j[k0]} \\
&+ \frac{1}{\sqrt{2}} (\Psi_{1T^j} + \Psi_{3T^j}) 2X^{j[10]} + \Psi_{2kl} X^{0kl} - \frac{1}{\sqrt{2}} (\Psi_{1T^k} + \Psi_{3T^k}) 2X^{0[k1]} \\
&- \frac{1}{\sqrt{2}} (\Psi_{1T^k} - \Psi_{3T^k}) 2X^{0[k0]} - \Psi_{2S} 2X^{0[10]} \\
&- \frac{1}{D-2} \Phi_{02jk} 2X^{j[k1]} - \frac{1}{D-2} (\Phi_{01k} - \Phi_{12k}) 2X^{1[k1]} \\
&- \frac{1}{D-2} (\Phi_{01k} - \Phi_{12k}) 2X_j^{[jk]} - \frac{1}{D-2} \left(\Phi_{00} - \Phi_{11} + \Phi_{22} + \frac{R(3D-2)}{D(D-1)} \right) 2X_j^{[j1]} \\
&- \frac{1}{D-2} (\Phi_{00} - \Phi_{22}) 2X_j^{[j0]} + \frac{1}{D-2} (\Phi_{00} - \Phi_{22}) 2X^{1[10]} \\
&+ \frac{1}{D-2} (\Phi_{01k} - \Phi_{12k}) 2(X^{1[k0]} - X^{0[k0]}) \\
&+ \frac{1}{D-2} \left(2\Phi_{00} + 2\Phi_{22} + \frac{R}{D-1} \right) 2X^{0[01]}, \quad (2.23)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R^{(1)}_{(b)(c)(0)} \dot{Z}^{(b)} Z^{(c)} &= \frac{1}{2} (\Psi_{0jk} + 2\Psi_{2T^{[jk]}} - \Psi_{4jk}) Y^{jk} - \frac{1}{\sqrt{2}} (\Psi_{1T^j} + \Psi_{3T^j}) Y^{j1} \\
&- \frac{1}{\sqrt{2}} (\Psi_{1T^k} - \Psi_{3T^k}) Y^{0k} - \Psi_{2S} Y^{01} - \frac{1}{\sqrt{2}} (\Psi_{1T^k} - \Psi_{3T^k}) Y^{0k} \\
&+ \frac{1}{D-2} (\Phi_{01j} + \Phi_{12j}) Y^{j1} - \frac{1}{D-2} (\Phi_{00} - \Phi_{22}) Y_j^j \\
&- \frac{1}{D-2} (\Phi_{01k} - \Phi_{12k}) Y^{0k} \\
&+ \frac{1}{D-2} \left(2\Phi_{11} - \frac{R(D-2)}{D(D-1)} \right) Y^{01}, \quad (2.24)
\end{aligned}$$

a

$$\begin{aligned}
R^{(1)}_{(0)(c)(0)} Z^{(c)} &= -\frac{1}{\sqrt{2}} (\Psi_{1T^k} - \Psi_{3T^k}) Z^{(k)} - \Psi_{2S} Z^{(1)} \\
&- \frac{1}{D-2} (\Phi_{01k} - \Phi_{12k}) Z^{(k)} \\
&+ \frac{1}{D-2} \left(2\Phi_{11} - \frac{R(D-2)}{D(D-1)} \right) Z^{(1)}. \quad (2.25)
\end{aligned}$$

Nakonec pro zbylých $D - 2$ členů deviace v prostorových směrech máme :

$$\begin{aligned}
R^{(i)}_{(b)(c)(d)} \dot{Z}^{(b)} Z^{(c)} \dot{Z}^{(d)} &= \Psi_{2^{ijk}} X^{jkl} - \frac{1}{\sqrt{2}} (\Psi_{1^{ikl}} - \Psi_{3^{ikl}}) X^{1kl} \\
&- \frac{1}{\sqrt{2}} (\Psi_{1^{ijk}} - \Psi_{3^{ijk}}) 2X^{j[k1]} + \frac{1}{2} (\Psi_{0^{ik}} + 2\Psi_{2T^{[ik]}} + \Psi_{4^{ik}}) 2X^{1[k1]} \\
&- \frac{1}{\sqrt{2}} (\Psi_{1^{ijk}} + \Psi_{3^{ijk}}) 2X^{j[k0]} + \frac{1}{2} (\Psi_{0^{ik}} + 2\Psi_{2T^{[ik]}} - \Psi_{4^{ik}}) 2X^{1[k0]} \\
&+ \Psi_{2^{ij}} 2X^{j[10]} - \frac{1}{\sqrt{2}} (\Psi_{1T^i} + \Psi_{3T^i}) 2X^{1[10]} \\
&- \frac{1}{\sqrt{2}} (\Psi_{1^{ikl}} + \Psi_{3^{ikl}}) X^{0kl} + \frac{1}{2} (\Psi_{0^{ik}} - 2\Psi_{2T^{[ik]}} - \Psi_{4^{ik}}) 2X^{0[k1]} \\
&+ \frac{1}{2} (\Psi_{0^{ik}} + 2\Psi_{2T^{(ik)}} + \Psi_{4^{ik}}) 2X^{0[k0]} - \frac{1}{\sqrt{2}} (\Psi_{1T^i} - \Psi_{3T^i}) 2X^{0[10]} \\
&- \frac{1}{D-2} \Phi_{02^{jk}} 2X^{j[ki]} - \frac{1}{D-2} (\Phi_{01^k} - \Phi_{12^k}) 2(X^{1[ki]} + X^{k[1i]}) \\
&- \frac{1}{D-2} (\Phi_{00} - \Phi_{11} + \Phi_{22}) 2X^{1[1i]} - \frac{1}{D-2} \Phi_{02^{ik}} 2X_j^{[jk]} \\
&- \frac{1}{D-2} (\Phi_{01^i} - \Phi_{12^i}) 2X_j^{[j1]} - \frac{R(3D-2)}{D(D-1)(D-2)} 2X_j^{[ij]} \\
&- \frac{1}{D-2} (\Phi_{01^i} + \Phi_{12^i}) 2X_j^{[j0]} + \frac{1}{D-2} (\Phi_{01^k} + \Phi_{12^k}) 2X^{i[k0]} \\
&+ \frac{1}{D-2} (\Phi_{00} - \Phi_{22}) 2X^{i[10]} - \frac{1}{D-2} (\Phi_{01^i} - \Phi_{12^i}) 2X^{0[10]} \\
&+ \frac{1}{D-2} \left(\Phi_{00} + \Phi_{11} + \Phi_{22} + \frac{R}{D-1} \right) 2X^{0[0i]}, \tag{2.26}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R^{(i)}_{(b)(c)(0)} \dot{Z}^{(b)} Z^{(c)} &= -\frac{1}{\sqrt{2}} (\Psi_{1^{ijk}} + \Psi_{3^{ijk}}) Y^{jk} + \Psi_{2^{ij}} Y^{j1} \\
&+ \frac{1}{2} (\Psi_{0^{ik}} + 2\Psi_{2T^{[ik]}} - \Psi_{4^{ik}}) Y^{1k} - \frac{1}{\sqrt{2}} (\Psi_{1T^i} + \Psi_{3T^i}) Y^{11} \\
&+ \frac{1}{2} (\Psi_{0^{ik}} + 2\Psi_{2T^{(ik)}} + \Psi_{4^{ik}}) Y^{0k} - \frac{1}{\sqrt{2}} (\Psi_{1T^i} - \Psi_{3T^i}) Y^{01} \\
&+ \frac{1}{D-2} (\Phi_{01^j} + \Phi_{12^j}) Y^{ji} + (\Phi_{00} - \Phi_{22}) Y^{1i} \\
&- \frac{1}{D-2} (\Phi_{01^i} + \Phi_{12^i}) Y_j^j - \frac{1}{D-2} \Phi_{02^{ik}} Y^{0k} - (\Phi_{01^i} - \Phi_{12^i}) Y^{01} \\
&+ \frac{1}{D-2} \left(\Phi_{00} + \Phi_{11} + \Phi_{22} - \frac{R(D-2)}{D(D-1)} \right) Y^{0i}, \tag{2.27}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R^{(i)}_{(0)(c)(0)} Z^{(c)} &= \frac{1}{2} (\Psi_{0^{ik}} + 2\Psi_{2T^{(ik)}} + \Psi_{4^{ik}}) Z^{(k)} - \frac{1}{\sqrt{2}} (\Psi_{1T^i} - \Psi_{3T^i}) Z^{(1)} \\
&- \frac{1}{D-2} \Phi_{02^{ik}} Z^{(k)} - \frac{1}{D-2} (\Phi_{01^i} - \Phi_{12^i}) Z^{(1)} \\
&+ \frac{1}{D-2} \left(\Phi_{00} + \Phi_{11} + \Phi_{22} - \frac{R(D-2)}{D(D-1)} \right) Z^{(i)}. \tag{2.28}
\end{aligned}$$

Odvozené výrazy (2.21)–(2.28) jsou, narozdíl od klasického případu, poměrně složité. Obecná diskuze jednotlivých příspěvků zůstává pro tuto chvíli otevřeným problémem. Z fyzikálního pohledu je užitečné, omezíme-li se na speciální typy prostoročasů a pozorovatelů, kde většina členů vystupujících v rovnicích geodetické deviace bude nulová. K tomu přirozeně využijeme algebraickou klasifikaci prostoročasů.

2.3 Algebraická klasifikace Weylova tenzoru

Vlastnosti Weylova tenzoru, jehož komponenty vstupují do rovnice geodetické deviace a získávají tak fyzikální význam, úzce souvisí s takzvanou algebraickou klasifikací prostoročasů. Právě s vidinou snazšího užití výsledků této klasifikace jsme přešli při předešlých úpravách do nulové báze (2.14). Pokud budeme předpokládat, že pohyb referenčního pozorovatele vystupujícího v geodetické deviaci respektuje strukturu hlavních nulových směrů algebraicky speciálního prostoročasu, jsou některé z pseudoskalárů definovaných v (2.18) nulové a význam nenulových skalárů je zvýrazněn právě skrze relativní pohyby testovacích pozorovatelů.

Pro přehlednost shrneme algebraickou klasifikaci v čtyřrozměrném případě a její rozšíření pro $D > 4$, viz přehledový článek [12], pouze krátce okomentujeme. Hlavní ingrediencí je počet tzv. *principal null directions* – hlavních nulových směrů, dále jen *pnd*, a jejich násobnost. Podle shrnutí v knize [10] je vektor \mathbf{k} takovým *pnd*, pokud splňuje následující vztah:

$$k_{[e}C_{a]bc[d}k_{f]}k^bk^c = 0. \quad (2.29)$$

Tato podmínka se však v případě, že jde o námi definovaný nulový vektor \mathbf{k} v (2.14) zjednoduší na $\Psi_0 = 0$. Dále když uvážíme volnost ve volbě tetrády a provedeme Lorentzovu transformaci odpovídající rotaci kolem fixovaného \mathbf{l} , tak se nám obecně změní vektor \mathbf{k} na \mathbf{k}' . Každopádně se nám změní také Ψ_0 na Ψ'_0 , které bude nově lineární kombinací všech pseudoskalárů a parametrů rotace. Jako podmínku na nulovost takového výsledku máme tedy rovnici čtvrtého řádu pro parametr rotace. Kořeny této rovnice pak určují ostatní *pnd*, které lze transformací zkonstruovat z původního \mathbf{k} . Jak jsme již uvedli, klasický případ $D = 4$ je popsán například v [10], kde je standardní vektory \mathbf{m}_2 a \mathbf{m}_3 nahradit jediným komplexním vektorem \mathbf{m} a jeho komplexním sdružením. Lorentzova transformace je pak charakterizována komplexním parametrem a rovnice $\Psi'_0 = 0$ má tedy čtyři kořeny.² Vzhledem k možné struktuře *pnd* je algebraická klasifikace prostoročasu, viz [10], definována takto:

²Ve vyšších dimenzích nemůžeme použít komplexní formalismus. Především však není zaručena existence kořenů, kde případ bez kořenu je označován jako algebraicky obecný typ G.

- typ I : čtyři odlišné pnd
- typ II : jeden pnd násobnosti 2, ostatní odlišné
- typ D : dva odlišné pnd násobnosti 2
- typ III : jeden pnd násobnosti 3, ostatní odlišné
- typ N : jeden pnd násobnosti 4
- typ O : konformně plochý prostoročas, neboli $C_{abcd} = 0$.

A v každém z těchto typů vymizí různý počet pseudoskalárů, opět viz [10]. Konkrétně pro pnd odpovídající vektoru \mathbf{k} platí:

- typ I : $\Psi_0 = 0$
- typ II : $\Psi_0 = \Psi_1 = 0$
- typ D : $\Psi_0 = \Psi_1 = \Psi_3 = \Psi_4 = 0$
- typ III : $\Psi_0 = \Psi_1 = \Psi_2 = 0$
- typ N : $\Psi_0 = \Psi_1 = \Psi_2 = \Psi_3 = 0$
- typ O : $\Psi_0 = \Psi_1 = \Psi_2 = \Psi_3 = \Psi_4 = 0$.

V obecné dimenzi $D \geq 4$ je algebraická klasifikace (nejen) Weylova tenzoru založená na studiu různých boostových vah v příslušném bázevém rozkladu. Postupujeme od nejvyšší boostové váhy. Jak již bylo zmíněno, je možné, že příslušná komponenta nebude pro žádnou volbu \mathbf{k} nulová a hovoříme pak o algebraicky obecném typu G. Pro další algebraické typy v prostoročasech s vyšší dimenzí jsou nulové složky Ψ_A ve stejném pořadí jako v $D = 4$. Zde indexem A rozumíme „hlavní“ index korespondující s indexem Weylových skalárů v $D = 4$. Ze znalosti významných řešení v obecné relativitě víme, že zajímavými netriviálními případy jsou prostoročasy typu II, D a N. Níže uvedeme jednotlivé příspěvky do zobecněné rovnice geodetické deviace právě pro prostoročasy typu D a N.

Relevantní komponenty v prostoročasech typu D

Uvažujeme-li pozorovatele, jehož nulová báze je zarovnaná s privilegovanými nulovými směry Weylova tenzoru, budou pro prostoročas typu D nulové pouze skaláry $\Psi_{2\bullet}$. Příspěvky do zobecněné rovnice geodetické deviace (2.21)–(2.28) se výrazně zjednoduší. Části časové složky deviace jsou:

$$R^{(0)}_{(b)(c)(d)} \dot{Z}^{(b)} Z^{(c)} \dot{Z}^{(d)} = -\Psi_{2kl} X^{1kl} + \Psi_{2T[jk]} 2X^{j[k1]} - \Psi_{2T^{(jk)}} 2X^{j[k0]} + \dots, \quad (2.30)$$

$$R^{(0)}_{(b)(c)(0)} \dot{Z}^{(b)} Z^{(c)} = -\Psi_{2T^{(jk)}} Y^{jk} + \Psi_{2S} Y^{11} + \dots, \quad (2.31)$$

kde části rovnic za třemi tečkami jsou nezměněné příspěvky úměrné projekcím R_{ab} a R . Dále následují části vstupující do první prostorové složky:

$$R^{(1)}_{(b)(c)(d)} \dot{Z}^{(b)} Z^{(c)} \dot{Z}^{(d)} = -\Psi_{2T^{[jk]}} 2X^{j[k1]} + \Psi_{2T^{[jk]}} 2X^{j[k0]} + \Psi_{2kl} X^{0kl} - \Psi_{2S} 2X^{0[10]} + \dots, \quad (2.32)$$

$$R^{(1)}_{(b)(c)(0)} \dot{Z}^{(b)} Z^{(c)} = \Psi_{2T^{[jk]}} Y^{jk} - \Psi_{2S} Y^{01} + \dots, \quad (2.33)$$

$$R^{(1)}_{(0)(c)(0)} Z^{(c)} = -\Psi_{2S} Z^{(1)} + \dots, \quad (2.34)$$

a části zbylé prostorové složky:

$$R^{(i)}_{(b)(c)(d)} \dot{Z}^{(b)} Z^{(c)} \dot{Z}^{(d)} = \Psi_{2^{ijkl}} X^{jkl} + \Psi_{2T^{[ik]}} 2X^{1[k1]} + \Psi_{2T^{[ik]}} 2X^{1[k0]} + \Psi_{2^{ij}} 2X^{j[10]} - \Psi_{2T^{[ik]}} 2X^{0[k1]} + \Psi_{2T^{(ik)}} 2X^{0[k0]} + \dots, \quad (2.35)$$

$$R^{(i)}_{(b)(c)(0)} \dot{Z}^{(b)} Z^{(c)} = \Psi_{2T^{[ik]}} Y^{1k} + \Psi_{2T^{(ik)}} Y^{0k} + \Psi_{2^{ij}} Y^{j1} + \dots, \quad (2.36)$$

$$R^{(i)}_{(0)(c)(0)} Z^{(c)} = \Psi_{2T^{(ik)}} Z^{(k)} + \dots. \quad (2.37)$$

Relevantní komponenty v prostoročasech typu N

Analogicky v prostoročasech typu N bude nenulové pouze $\Psi_{4^{ij}}$. Pro časovou komponentu dostáváme:

$$R^{(0)}_{(b)(c)(d)} \dot{Z}^{(b)} Z^{(c)} \dot{Z}^{(d)} = \frac{1}{2} \Psi_{4^{jk}} 2X^{j[k1]} - \frac{1}{2} \Psi_{4^{jk}} 2X^{j[k0]} + \dots, \quad (2.38)$$

$$R^{(0)}_{(b)(c)(0)} \dot{Z}^{(b)} Z^{(c)} = -\frac{1}{2} \Psi_{4^{jk}} Y^{jk} + \dots, \quad (2.39)$$

privilegovaná prostorová složka obsahuje:

$$R^{(1)}_{(b)(c)(d)} \dot{Z}^{(b)} Z^{(c)} \dot{Z}^{(d)} = -\frac{1}{2} \Psi_{4^{jk}} 2X^{j[k1]} + \frac{1}{2} \Psi_{4^{jk}} 2X^{j[k0]} + \dots, \quad (2.40)$$

$$R^{(1)}_{(b)(c)(0)} \dot{Z}^{(b)} Z^{(c)} = -\frac{1}{2} \Psi_{4^{jk}} Y^{jk} + \dots, \quad (2.41)$$

$$R^{(1)}_{(0)(c)(0)} Z^{(c)} = 0 + \dots, \quad (2.42)$$

a pro zbylých $D - 2$ prostorových složek máme:

$$R^{(i)}_{(b)(c)(d)} \dot{Z}^{(b)} Z^{(c)} \dot{Z}^{(d)} = +\frac{1}{2} \Psi_{4^{ik}} 2X^{1[k1]} - \frac{1}{2} \Psi_{4^{ik}} 2X^{1[k0]} - \frac{1}{2} \Psi_{4^{ik}} 2X^{0[k1]} + \frac{1}{2} \Psi_{4^{ik}} 2X^{0[k0]} + \dots, \quad (2.43)$$

$$R^{(i)}_{(b)(c)(0)} \dot{Z}^{(b)} Z^{(c)} = -\frac{1}{2} \Psi_{4^{ik}} Y^{1k} + \frac{1}{2} \Psi_{4^{ik}} Y^{0k} + \dots, \quad (2.44)$$

$$R^{(i)}_{(0)(c)(0)} Z^{(c)} = \frac{1}{2} \Psi_{4^{ik}} Z^{(k)} + \dots. \quad (2.45)$$

3. Geodetická deviace v Einsteinově teorii

V této kapitole aplikujeme omezení plynoucí z Einsteinovy teorie gravitace na naše nově odvozené tetřádové složky zobecněné rovnice geodetické deviace. Cílem bude vyjádřit pseudoskaláry Φ , vzniklé z projekcí Ricciho tenzoru, pomocí tenzoru energie hybnosti a kosmologické konstanty.

3.1 Einsteinova teorie gravitace ve více dimenzích

Tvar rovnic gravitačního pole v libovolné dimenzi $D \geq 4$ je shodný se čtyřrozměrným případem, tedy

$$R_{ab} - \frac{1}{2}R g_{ab} + \Lambda g_{ab} = 8\pi T_{ab}, \quad (3.1)$$

kde ale $a, b = 0, \dots, D-1$. Pro explicitní zahrnutí efektů hmoty v geodetické deviaci potřebujeme z této rovnice získat skalární křivost a následně vyjádřit Ricciho tenzor pouze pomocí tenzoru energie hybnosti, jeho stopy a kosmologické konstanty. Skalární křivost najdeme jednoduše jako stopu Einsteinových rovnic, tedy jejich zúžením s g^{ab} ,

$$R = \frac{2}{2-D} (8\pi T - D\Lambda). \quad (3.2)$$

Dále pak dosazením této stopy zpět do Einsteinových rovnic (3.1) a přeuspořádáním členů dostaneme jejich duální tvar, tedy

$$R_{ab} = 8\pi \left(T_{ab} - \frac{T g_{ab}}{D-2} \right) + \frac{2\Lambda g_{ab}}{D-2}. \quad (3.3)$$

Pomocí vztahů (3.2) a (3.3) již snadno vyjádříme všechny projekce definované v (2.19), tedy komponenty Ricciho tenzoru vzhledem k bázi $\{\mathbf{k}, \mathbf{l}, \mathbf{m}_i\}$,

$$\Phi_{00} = 4\pi T_{ab} k^a k^b, \quad (3.4)$$

$$\Phi_{01^i} = 4\sqrt{2}\pi T_{ab} k^a m_i^b, \quad (3.5)$$

$$\Phi_{11} = 8\pi T_{ab} k^a l^b + \frac{8\pi T}{D-2} - \frac{2\Lambda}{D-2} + \frac{R}{D}, \quad (3.6)$$

$$\Phi_{02^{ij}} = 8\pi T_{ab} m_i^a m_j^b - \left(\frac{8\pi T}{D-2} - \frac{2\Lambda}{D-2} + \frac{R}{D} \right) \delta_{ij}, \quad (3.7)$$

$$\Phi_{12^i} = 4\sqrt{2}\pi T_{ab} l^a m_i^b, \quad (3.8)$$

$$\Phi_{22} = 4\pi T_{ab} l^a l^b. \quad (3.9)$$

Nyní už pouze zbývá dosadit tyto výrazy do obecných projekcí zobecněné rovnice geodetické deviace, které jsme našli v předchozí kapitole. Jelikož výsledek nebude nikterak jednodušší a na obecné úrovni nepřinese žádné nové pozorování, nebudeme tyto vztahy uvádět. Jako užitečnější se jeví alespoň stručná explicitní ilustrace.

3.2 Příklad: geodetická deviace pro algebraicky speciální Kundtovy prostoročasy

Kundtova třída geometrií [13, 14, 15, 16, 17] vychází z definice založené na takzvaných optických skalárech viz [10, 12, 18]. Obecně se jedná o prostoročasy připouštějící existenci nulové geodetické (afinně parametrizované) kongruence, která je netwistující, bezshearová a neexpandující, tedy jejíž všechny optické skaláry vymizí. Tato skupina prostoročasů následně obsahuje významná přesná řešení v Einsteinově teorii a jejích rozšířeních, jakými jsou například modely rovinných vln či blízkohorizontové geometrie [10, 18].

V této ukázce se omezíme pouze na speciální případ prostoročasů algebraického typu II klasicky interpretovaný jako gravitační vlny šířící se na pozadí typu D. Vyjdeme zde z výsledků odvozených pro klasickou geodetickou deviaci v práci [19], přičemž naším cílem bude poukázat na křivostní členy obsažené v zobecněné rovnici geodetické deviace, které se nenachází v rovnici klasické.

Uvažujeme-li metriku D -rozměrného Kundtova prostoročasu ve tvaru

$$ds^2 = g_{pq}(x) dx^p dx^q - 2 du dr + (ar^2 + c(u, x)) du^2, \quad (3.10)$$

kde $p, q = 2, \dots, D-1$ a kde a je konstanta, která lze vyjádřit z metriky výše

$$a = \frac{1}{2} g_{uu, rr}.$$

Potom jsou Weylovy skaláry a jejich ireducibilní komponenty (2.17) vyjádřené vzhledem k bázi¹ následovně

$$\mathbf{k} = \partial_r, \quad \mathbf{l} = \frac{1}{2} g_{uu} \partial_r + \partial_u, \quad \mathbf{m}_i = m_i^p \partial_p.$$

Dostáváme pak

$$\Psi_{2S} = \frac{D-3}{D-1} \left[a + \frac{sR}{(D-2)(D-3)} \right], \quad (3.11)$$

$$\Psi_{2T^{(ij)}} = \tilde{\Psi}_{2T^{(ij)}} + \frac{1}{D-2} \delta_{ij} \Psi_{2S}, \quad (3.12)$$

$$\tilde{\Psi}_{2T^{(ij)}} = \frac{m_i^p m_j^q}{D-2} \left[sR_{pq} - \frac{1}{D-2} g_{pq} sR \right], \quad (3.13)$$

$$\begin{aligned} \Psi_{2ijkl} &= \tilde{\Psi}_{2ijkl} - \frac{2}{(D-3)(D-4)} (\delta_{ik} \delta_{jl} - \delta_{il} \delta_{jk}) \Psi_{2S} \\ &\quad + \frac{2}{D-4} (\delta_{ik} \Psi_{2T^{(jl)}} - \delta_{il} \Psi_{2T^{(jk)}} - \delta_{jk} \Psi_{2T^{(il)}} + \delta_{jl} \Psi_{2T^{(ik)}}), \end{aligned} \quad (3.14)$$

$$\tilde{\Psi}_{2ijkl} = m_i^m m_j^p m_k^n m_l^q sC_{mpnq}, \quad (3.15)$$

$$\Psi_{2ij} = 2 \Psi_{2T^{[ij]}} = 0, \quad (3.16)$$

$$\Psi_{3T^j} = \Psi_{3ijk} = \tilde{\Psi}_{3ijk} = 0, \quad (3.17)$$

$$\Psi_{4ij} = -\frac{1}{2} m_i^p m_j^q \left(g_{uu||p||q} - \frac{g_{pq}}{D-2} g^{kl} g_{uu||k||l} \right), \quad (3.18)$$

¹Tato báze vystihuje algebraickou strukturu prostoročasu (3.10). V řeči geodetické deviace s referenčním časopodobným pozorovatelem s D rychlostí $\mathbf{u} = \dot{r} \partial_r + \dot{u} \partial_u + \dot{x}^p \partial_p$, tedy splňující $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = -1$, pak tato volba odpovídá podmínkám $\sqrt{2} \dot{u} = 1$, $\dot{x}^p = 0$ a již nezbytně $\sqrt{2} \dot{r} - 1 = \frac{1}{2} g_{uu}$. K obecnějšímu pozorovateli je možné přejít Lorentzovou transformací, ale pro naše ilustrační účely je tato volba dostatečná.

kde symbol \parallel označuje kovariantní derivaci na $D - 2$ dimenzionálním příčném prostoru s metrikou g_{pq} a horní index S křivostní veličiny počítané z této metriky.

Náš prostor pokládáme za vakuový, tedy tenzor energie-hybnosti, společně s jeho stopou, vymizí. Rovnice (3.2) pak přejde do tvaru

$$R = \frac{2D\Lambda}{D-2}. \quad (3.19)$$

Následným dosazením do projekcí Ricciho skaláru (3.4)–(3.9) pak zjišťujeme, že se všechny tyto pseudoskaláry vynulují a v našich rovnicích pak nebudou vůbec vystupovat, což značně zjednodušuje jejich konečný tvar.

Dále vyjdeme z výsledků článku [20], kde je obdobný speciální případ Kundtova prostoročasu typu II rovněž uveden. Navíc appendix článku pokytuje komponenty Ricciho tenzoru pro Kundtovy prostoročasy typu II. Spojením těchto výsledků dostaneme vztah

$$R = {}^S R + 2a,$$

který po dosazení do Einsteinových gravitačních rovnic (3.1) a opětovném využití výsledků z článku [20] společně se vztahem (3.19) vede na důležité vztahy

$$\begin{aligned} {}^S R_{pq} &= a g_{pq}, \\ {}^S R &= a(D-2), \quad \text{kde} \quad a = \frac{2\Lambda}{D-2}, \\ g^{kl} g_{uu||k||l} &= 0, \end{aligned}$$

provazující parametry metriky s geometrií příčného prostoru.

Tento výsledek můžeme dosadit do dřívějších vyjádření pseudoskalárů (3.11)–(3.18) v Kundtově prostoročase (3.10), tedy

$$\Psi_{2S} = \frac{D-2}{D-1} a, \quad (3.20)$$

$$\tilde{\Psi}_{2T^{(ij)}} = 0, \quad (3.21)$$

$$\Psi_{2T^{(ij)}} = \frac{a\delta_{ij}}{D-1}, \quad (3.22)$$

$$\Psi_{2ijkl} = \tilde{\Psi}_{2ijkl} + \frac{2a}{(D-1)(D-3)} (\delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk}), \quad (3.23)$$

$$\tilde{\Psi}_{2ijkl} = m_i^m m_j^p m_k^n m_l^q {}^S C_{mpnq}, \quad (3.24)$$

$$\Psi_{2ij} = 2\Psi_{2T^{[ij]}} = 0, \quad (3.25)$$

$$\Psi_{3T^j} = \Psi_{3ijk} = \tilde{\Psi}_{3ijk} = 0, \quad (3.26)$$

$$\Psi_{4^{ij}} = -\frac{1}{2} m_i^p m_j^q g_{uu||p||q}. \quad (3.27)$$

Právě komponenta Weylova tenzoru $\tilde{\Psi}_{2ijkl}$ daná netriviální geometrií příčného prostoru není v klasické geodetické deviaci dostupná, ale v zobecněném popisu bude. Kombinací výsledků pro typ D a N z předchozí kapitoly dostaneme zobecněnou geodetickou deviaci v tomto prostoročase. Dosazením členů z (2.30)–(2.37) do rovnic zobecněné geodetické deviace (2.3)–(2.5) za příspěvek typu D , dosazením (2.38)–(2.45) do stejných rovnic za příspěvek typu N , jejich sečtením a dosazením vyjádření komponent Weylova tenzoru (3.20)–(3.27) dostáváme následující soustavu diferenciálních rovnic²

²Připomeňme, že komponenty Ricciho tenzoru (3.4)–(3.9) jsou nulové.

$$\begin{aligned}
\ddot{Z}^{(0)} = & -\frac{4\Lambda(D-4)}{(D-2)^2}\dot{Z}^{(1)}Z^{(1)} + \frac{8\Lambda}{(D-2)^2}\dot{Z}^{(j)}Z^{(j)} \\
& -\frac{1}{2}m_j^p m_k^q g_{uu||p||q}\dot{Z}^{(j)}Z^{(k)} \\
& -\frac{4\Lambda}{3(D-1)(D-2)^2}\dot{Z}^{(1)}\left(Z^{(1)}\dot{Z}^{(0)} - Z^{(0)}\dot{Z}^{(1)}\right) \\
& +\frac{4\Lambda}{3(D-1)(D-2)}\dot{Z}^{(j)}\left(Z^{(j)}\dot{Z}^{(0)} - Z^{(0)}\dot{Z}^{(j)}\right) \\
& -\frac{1}{6}m_j^p m_k^q g_{uu||p||q}\dot{Z}^{(j)}\left(Z^{(k)}\left(\dot{Z}^{(0)} - \dot{Z}^{(1)}\right) - \dot{Z}^{(k)}\left(Z^{(0)} - Z^{(1)}\right)\right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\ddot{Z}^{(1)} = & \frac{2\Lambda}{D-2}Z^{(1)} + \frac{4\Lambda}{D-2}\dot{Z}^{(0)}Z^{(1)} \\
& -\frac{1}{2}m_j^p m_k^q g_{uu||p||q}\dot{Z}^{(j)}Z^{(k)} \\
& +\frac{4\Lambda(D^2-3D+4)}{3(D-1)(D-2)^2}\dot{Z}^{(0)}\left(Z^{(1)}\dot{Z}^{(0)} - Z^{(0)}\dot{Z}^{(1)}\right) \\
& +\frac{4\Lambda(3D-2)}{D(D-2)^2}\dot{Z}^{(j)}\left(Z^{(j)}\dot{Z}^{(1)} - Z^{(1)}\dot{Z}^{(j)}\right) \\
& +\frac{1}{6}m_j^p m_k^q g_{uu||p||q}\dot{Z}^{(j)}\left(Z^{(k)}\left(\dot{Z}^{(0)} - \dot{Z}^{(1)}\right) - \dot{Z}^{(k)}\left(Z^{(0)} - Z^{(1)}\right)\right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\ddot{Z}^{(i)} = & \frac{1}{4}m_i^p m_k^q g_{uu||p||q}Z^{(k)} - \frac{1}{2}m_i^p m_k^q g_{uu||p||q}Z^{(k)}\left(\dot{Z}^{(1)} - \dot{Z}^{(0)}\right) \\
& +\frac{8\Lambda}{3(D-1)(D-2)^2}\dot{Z}^{(0)}\left(Z^{(i)}\dot{Z}^{(0)} - Z^{(0)}\dot{Z}^{(i)}\right) \\
& +\frac{4\Lambda(3D-2)}{3(D-1)(D-2)^2}\dot{Z}^{(1)}\left(Z^{(i)}\dot{Z}^{(1)} - Z^{(1)}\dot{Z}^{(i)}\right) \\
& +\frac{1}{6}m_i^p m_k^q g_{uu||p||q}\left(\dot{Z}^{(1)} - \dot{Z}^{(0)}\right)\left(Z^{(k)}\left(\dot{Z}^{(0)} - \dot{Z}^{(1)}\right) - \dot{Z}^{(k)}\left(Z^{(0)} - Z^{(1)}\right)\right) \\
& -\frac{4\Lambda(D-6)}{3(D-2)^2(D-3)}\dot{Z}^{(j)}\left(Z^{(i)}\dot{Z}^{(j)} - Z^{(j)}\dot{Z}^{(i)}\right) \\
& -\frac{2}{3}m_i^m m_j^p m_k^n m_l^q {}^S C_{mpnq}\dot{Z}^{(j)}Z^{(k)}\dot{Z}^{(l)}.
\end{aligned}$$

Ačkoli jsme uvažovali velmi speciální prostoročas a splnění mnoha omezujících podmínek, které vynulovaly velký počet členů, přesto představují výše uvedené rovnice netriviální systém, který nejspíše nelze exaktně vyřešit. Jeho detailní analýza překračuje naše časové možnosti. Na první pohled je však patrné, že z těchto rovnic je možné získat informaci o geometrii příčného prostoru, která je reprezentovaná jeho Weylovým tenzorem ${}^S C_{mpnq}$.

Pro srovnání uvedme ještě výsledek pro stejný prostoročas z pohledu klasické rovnice geodetické deviace, zanedbejme derivace separačního vektoru v předchozích vztazích. Takto dostaneme

$$\begin{aligned}\ddot{Z}^{(0)} &= 0, \\ \ddot{Z}^{(1)} &= \frac{2\Lambda}{D-2} Z^{(1)}, \\ \ddot{Z}^{(i)} &= \frac{1}{4} m_i^p m_k^q g_{uu|p|q} Z^{(k)},\end{aligned}$$

a vidíme, že jde o podstatně jednodušší soustavu rovnic, které lze navíc řešit nezávisle na sobě. Příímá informace o geometrii příčného $D-2$ rozměrného prostoru však zůstává skrytá.

Závěr

Hlavním předmětem studia této práce byla rovnice geodetické deviace. V první kapitole byla podrobně odvozena jak klasická, tak zobecněná varianta této rovnice. Motivací pro odvození klasické rovnice geodetické deviace je, abychom ukázali, že zde použitý postup je vhodnou alternativou k běžnějším odvozením a dovede nás ke správnému tvaru rovnice. Následně uvolněním jednoho z předpokladů, za kterých platí klasické odvození, jsme byli schopni dojít k rovnici zobecněné geodetické deviace, jež se shoduje s tvarem uváděným v dostupné literatuře. Oba výpočty jsou navíc vysvětleny podrobněji, než v ostatní literatuře, kde se často vynechávají z našeho pohledu důležité detaily.

V následující kapitole jsme rovnici zobecněné geodetické deviace promítli do ortonormální bázi referenčního pozorovatele pohybujícího se na jedné ze studovaných geodetik. Ten je schopný měřit právě projekce spojovacího vektoru geodetik, který vystupuje v našich rovnicích, do své báze. Poté jsme vystupující projekce Riemannova tenzoru rozložili na Weylův tenzor a další členy úměrné metrice a stopám Riemannova tenzoru. To nám prakticky umožnilo studovat tyto části prakticky odděleně. Následně jsme ještě projekce přepsali do nové nulové báze, tedy jsme pozorovatele vybavili dvěma světelnými, neboli nulovými, vektory. Toto nám umožnilo rozložit ortonormální projekce na Weylovy skaláry. Toto vyjádření je výhodné pro následnou diskuzi rovnic ve speciálních algebraických typech prostoročasů, se kterými jsme se následně přehledně seznámili. Jako ukázkou výhodnosti rozpisu do pseudoskalárů jsme napsali tvar zobecněné rovnice geodetické deviace pro obecné prostoročasy typu D a N. Zde bychom chtěli práci v budoucnu doplnit o obecnou diskuzi relativních pohybů popsaných zobecněnou geodetickou deviací čistě na základě algebraických vlastností jejích jednotlivých členů, čemuž jsme se z časových důvodů nevěnovali.

V poslední kapitole jsme si jako příklad aplikace vybrali řešení v klasické Einsteinově teorii, ovšem v obecné dimenzi, ke které jsme pouze přehledně vypsali potřebné vztahy. Užitím rovnic gravitačního pole jsme vyjádřili projekce Ricciho tenzoru pomocí jiných veličin teorie, tedy tenzoru energie-hybnosti a kosmologické konstanty. Později v našem ilustrativním příkladu uvažujeme vakuový prostoročas, kde členy úměrné tenzoru energie a hybnosti vymizí. Konkrétně jsme jako příklad zvolili Kundtův prostoročas algebraického typu II, běžně interpretovaný jako gravitační vlny na pozadí algebraického typu D. Z výsledků prací zabývajících se tímto tématem jsme byli schopni dosadit do našich rovnic nenulové pseudoskaláry z rozkladu projekce Weylova tenzoru a získali jsme tak zobecněné rovnice geodetické deviace pro tento prostoročas v Einsteinově teorii.

Výslednou soustavu diferenciálních rovnic nejspíše nelze řešit exaktně. Dalším námětem studia by tak mohlo být numerické řešení těchto rovnic nebo řešení v jiných algebraicky speciálních typech nejen Kundtových prostoročasů, v nevakuumovém případě, či v jiné teorii gravitace. Přírozeným kandidátem by zde byla Einsteinova–Gaussova–Bonnetova teorie, která se neobejde bez vyšších dimenzí a tedy bohatší struktury Weylova tenzoru.

Seznam použité literatury

- [1] K. Akiyama, K. Bouman a D. Woody. First M87 Event Horizon Telescope Results. I. The Shadow of the Supermassive Black Hole. *Astrophysical Journal Letters*, 875, 2019.
- [2] K. Akiyama et al. First Sagittarius A* Event Horizon Telescope Results. I. The Shadow of the Supermassive Black Hole in the Center of the Milky Way. *Astrophysical Journal Letters*, 930, 2022.
- [3] B. P. Abbott et al. Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Merger. *Phys. Rev. Lett.*, 116:061102, 2016. [10.1103/PhysRevLett.116.061102](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.116.061102).
- [4] I. Ciufolini. Generalized geodesic deviation equation. *Phys. Rev. D*, 34:1014–1017, 1986. [10.1103/PhysRevD.34.1014](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.34.1014).
- [5] T. Mullari a R. Tammelo. An alternative way to derive the geodesic deviation equation for rapidly diverging geodesics. *Acta et Commentationes Universitatis Tartuensis de Mathematica*, 4, 12 2000.
- [6] D. E. Hodgkinson. A modified equation of geodesic deviation. *General Relativity and Gravitation*, 3:351–375, 1972.
- [7] B. Mashhoon. Tidal radiation. *The Astrophysical Journal*, 216:591–609, 1977.
- [8] I. R. Waldstein a J. D. Brown. Generalized geodesic deviation in de sitter spacetime. *Classical and Quantum Gravity*, 39(11):115006, 2022.
- [9] J. Podolský a R. Švarc. Interpreting spacetimes of any dimension using geodesic deviation. *Phys. Rev. D*, 85:044057, 2012. [10.1103/PhysRevD.85.044057](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.85.044057).
- [10] J. B. Griffiths a J. Podolský. *Exact Space-Times in Einstein's General Relativity*. Cambridge Monographs on Mathematical Physics. Cambridge University Press, 2009.
- [11] R. Švarc, J. Podolský a O. Hruška. Kundt spacetimes in the Einstein-Gauss-Bonnet theory. *Physical Review D*, 102(8), 2020. [10.1103/PhysRevD.102.084012](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.102.084012).
- [12] M. Ortaggio, V. Pravda a A. Pravdová. Algebraic classification of higher dimensional spacetimes based on null alignment. *Classical and Quantum Gravity*, 30(1):013001, 2012.
- [13] W. Kundt. The plane-fronted gravitational waves. *Zeitschrift für Physik*, 163(1):77–86, 1961.
- [14] W. Kundt. Exact solutions of the field equations: twist-free pure radiation fields. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences*, 270(1342):328–334, 1962.

- [15] J. Podolský a M. Žofka. General kundt spacetimes in higher dimensions. *Classical and Quantum Gravity*, 26(10):105008, 2009.
- [16] A. Coley, S. Hervik, G. Papadopoulos a N. Pelavas. Kundt spacetimes. *Classical and Quantum Gravity*, 26(10):105016, 2009.
- [17] P. Krtouš, J. Podolský, A. Zelnikov a H. Kadlecová. Higher-dimensional kundt waves and gyratons. *Physical Review D*, 86(4):044039, 2012.
- [18] H. Stephani, D. Kramer, M. MacCallum, C. Hoenselaers a E. Herlt. *Exact solutions of Einstein's field equations*. Cambridge university press, 2009.
- [19] J. Podolský a R. Švarc. Physical interpretation of kundt spacetimes using geodesic deviation. *Classical and Quantum Gravity*, 30(20):205016, 2013.
- [20] J. Podolský a R. Švarc. Explicit algebraic classification of kundt geometries in any dimension. *Classical and Quantum Gravity*, 30(12):125007, 2013.