



**MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ
FAKULTA**
Univerzita Karlova

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Natálie Smolíková

Hlídání galerie

Katedra algebry

Vedoucí bakalářské práce: RNDr. Zuzana Patáková, Ph.D.

Studijní program: Matematika pro informační
technologie

Praha 2023

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval(a) samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů. Tato práce nebyla využita k získání jiného nebo stejného titulu.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V dne

Podpis autora

Především bych chtěla poděkovat své vedoucí práce, paní RNDr. Zuzaně Patákové, Ph.D., za pečlivé vedení, ochotu a trpělivost při tvorbě práce.

Dále bych ráda poděkovala svým spolužákům a rodině za obrovskou podporu a trpělivost.

Název práce: Hlídaní galerie

Autor: Natálie Smolíková

Katedra: Katedra algebry

Vedoucí bakalářské práce: RNDr. Zuzana Patáková, Ph.D., Katedra algebry

Abstrakt: V této práci se budeme zabývat klasickým problémem z výpočetní geometrie, a to problémem hlídání galerie, též známého pod anglickým názvem The Art Gallery Problem. Hlídaní galerie se zabývá otázkou, jaký je nejmenší počet strážců, aby dohromady viděli celý půdorys galerie o n vrcholech. Hlavním cílem práce je nastudovat důkazy, že stačí $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ strážců v případě obecného polygonu a že stačí $\lfloor \frac{n}{4} \rfloor$ strážců v případě ortogonálního polygonu. Náš důkaz ortogonální verze je oprava důkazu od Jorgeho Urrutii. Taktéž se zaměříme na optimalitu výsledků a na umístění strážců.

Klíčová slova: galerie, triangulace, ortogonální polygon, polygon, strážci

Title: Art Gallery Problem

Author: Natálie Smolíková

Department: Department of Algebra

Supervisor: RNDr. Zuzana Patáková, Ph.D., Department of Algebra

Abstract: In this thesis, we study a classical problem in computational geometry, the Art Gallery Problem. The Art Gallery Problem originates from the question of what is the minimum number of guards required to see the entire gallery. The main goal of this paper is to provide proofs that $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ guards are sufficient for a simple polygon, and that $\lfloor \frac{n}{4} \rfloor$ guards are sufficient for an orthogonal polygon. Our proof of the orthogonal version is a correction of Jorge Urrutia's proof. We also study the optimality of the results and the placement of guards.

Keywords: art gallery, triangulation, orthogonal polygon, polygon, guards

Obsah

Úvod	2
1 The Art Gallery problém	3
1.1 Triangulace	4
1.2 The Art Gallery pro obecný polygon	7
1.3 Optimalita pro obecné polygony	7
1.4 Umístění strážců	9
2 Ortogonální verze	12
2.1 Důkaz ortogonální verze	13
2.2 Optimalita pro ortogonální polygony	26
3 Příklady	27
Závěr	31
Seznam použité literatury	32
Seznam obrázků	33

Úvod

Hlídní galerie, též známo pod anglickým názvem The Art Gallery Problem, je klasický problém z výpočetní geometrie. Základní otázkou je, jaký je nejmenší počet strážců, aby dohromady viděli celou galerii.

Poprvé tento problém představil Victor Klee v roce 1973. O dva roky později, tedy v roce 1975, na tuto otázku dal odpověď Václav Chvátal (Chvátal, 1975). Dokázal, že k hlídání polygonální galerie o n vrcholech je dostatečných a někdy potřebných $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ strážců. Tento výsledek je nejlepší možný a tedy ho pro obecný polygon nelze zlepšit. Přestože důkaz Václava Chvátala byl naprosto správný, tak o pár let později Steve Fisk představil elegantnější a jednodušší důkaz. Důkaz S. Fiska se zařadil do knihy nejhezčích důkazů matematiky Proofs from THE BOOK (Aigner a Ziegler, 1999).

Na otázku hlídání galerie navázala celá řada matematiků. Již v roce 1983 J. Kahn, M. Klawe a D. Kleitman (Kahn a kol., 1983) přišli s dalším velkým výsledkem. Omezíme-li se pouze na ortogonální galerie, tj. takové, že všechny jejich hrany jsou rovnoběžné s klasickými souřadnicovými osami, pak je dostatečných a někdy nezbytných $\lfloor \frac{n}{4} \rfloor$ strážců. Tuto větu později dokázalo několik dalších matematiků (O'Rourke, 1983; Lubiw, 1985; Györi, 1986; Sack a Toussaint, 1988; Urrutia, 1997), každý jiným způsobem.

V této práci se zaměříme především na nastudování důkazů pro obecné polygony a pro ortogonální polygony. Dále budeme diskutovat optimalitu výsledků a umístění strážců.

V první kapitole zavedeme základní definice a především se budeme zabývat triangulací polygonu a jejím obarvením, na čemž celý problém hlídání galerie stojí. Dokážeme si, že každý polygon lze triangulovat a následně obarvit pomocí 3 barev. V rámci první kapitoly také představíme důkaz pro obecné polygony od S. Fiska. V další podkapitole poukážeme na problém umístění strážců.

Ve druhé kapitole se budeme zabývat již výhradně ortogonální verzí. Opět zavedeme potřebné pojmy. Nastudujeme pečlivě důkaz od Jorgeho Urrutia (Urrutia, 1997). Nicméně tento důkaz obsahuje několik zásadních chyb a je tedy neúplným důkazem ortogonální verze. V rámci této práce důkaz opravíme a doplníme chybějící pasáže. Zároveň původní důkaz významně upřesníme a dovysvětlíme. Výsledkem by měl být hezký důkaz ortogonální verze pochopitelný pro čtenáře bakalářského studia. Nakonec budeme diskutovat optimalitu výsledku pro ortogonální verzi.

Ve třetí kapitole si ukážeme příklady, které pojednávají o některých zajímavých případech nebo problémech Art Gallery problému. Ukážeme si, kdy je triangulace jednoznačná, kolik existuje obarvení dané triangulace a podíváme se na otázku umístění strážců.

Mým příspěvkem v této práci je především doplnění a oprava důkazu ortogonální verze od J. Urrutia, včetně dokázání a formulace pomocných lemmat. Dalším přínosem je zpracování důkazu od S. Fiska, včetně všech pomocných lemmat zabývajících se triangulací a obarvením, která jsem si dokázala. V neposlední řadě jsem připravila celou řadu příkladů na optimalitu, umístění strážců, jednoznačnou triangulaci, atp.

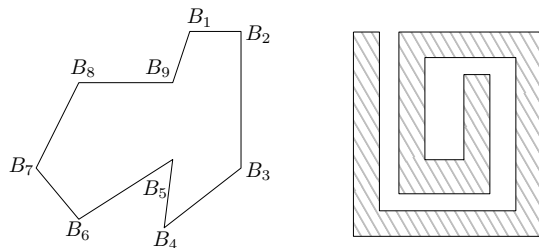
1. The Art Gallery problém

Jak jsme již zmínili v úvodu, The Art Gallery Problem byl poprvé představen v roce 1973 Victorem Kleeem, jenž vznesl otázku, jaký je nejmenší počet hlídačů galerie o n vrcholech tak, aby dohromady viděli celý vnitřní objekt. Neboli jaká je nejmenší možná mohutnost množiny těch bodů, z nichž je vidět celá vnitřní plocha polygonu o n vrcholech.

Definice 1. Necht $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$ a $B_1, B_2, \dots, B_n \in \mathbb{R}^2$ jsou po dvou různé body. Pak uzavřená lomená čára je množina úseček $B_1B_2, B_2B_3, \dots, B_nB_1$. Body B_1, B_2, \dots, B_n nazýváme vrcholy.

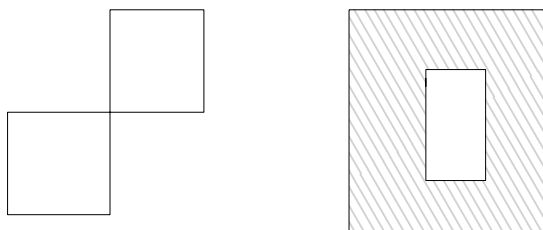
Definice 2. Polygon o n vrcholech je uzavřená část roviny omezená uzavřenou lomenou čarou na n bodech, která se nikde neprotíná a žádné tři po sobě jdoucí vrcholy neleží v jedné přímce. Úsečky tvořící lomenou čáru, jež určuje polygon P , nazýváme hranami P a body B_1, B_2, \dots, B_n , jež určují uzavřenou lomenou čáru, nazýváme vrcholy P .

Definici ilustrujeme na obrázku 1.1.



Obrázek 1.1: Příklady polygonů.

Naopak definici nesplňují polygony na obrázku 1.2.



Obrázek 1.2: Příklady, které nejsou polygony.

V roce 1975 V. Chvátal (Chvátal, 1975) představil důkaz toho, že $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ hlídačů je dostatečných a někdy nezbytných pro každý polygon o n vrcholech. O dva roky později Steve Fisk (Fisk, 1978) dokázal jednoduchým a elegantním způsobem Chvátalův výsledek. Tento důkaz představím v sekci 1.2.

Nejprve uvedeme pro úplnost variaci Chvátalovy definice toho, že bod *vidí* jiný bod.

Definice 3. Řekneme, že bod x vidí bod y v polygonu o n vrcholech, pokud úsečka xy je celá obsažena v polygonu.

1.1 Triangulace

Pro práci s pojmy jako vnitřek a vnějšek polygonu potřebujeme zavést definici Jordanovy křivky a Jordanovu větu, (Matoušek a Nešetřil, 2009, kapitola 5.2).

Definice 4. Jordanova křivka je uzavřená křivka v rovině, která neprotíná sebe sama, tj. je to spojitý obraz intervalu $[0, 1]$ při prostém zobrazení $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$, pro které platí $f(0) = f(1)$.

Věta 5 (Jordanova). Každá Jordanova křivka k rozděluje rovinu na právě dvě souvislé části, přičemž k je jejich společnou hranicí. Jedna část je omezená (vnitřek křivky) a druhá neomezená (vnějšek křivky).

Poznámka. Pro čtenářovo upřesnění definice 2, polygon značí vnitřek z věty 5 včetně jeho hranice.

Prvním krokem důkazu S. Fiska je triangulace polygonu.

Definice 6. Necht P je polygon. Triangulace polygonu P je množina vrcholů tohoto polygonu a úseček v polygonu P je spojující tak, že se žádné dvě úsečky neprotínají a rozdělují P na trojúhelníky tak, že žádná úsečka neprotíná vnitřek žádného trojúhelníku. Všechny vrcholy těchto trojúhelníků jsou zároveň vrcholy P .

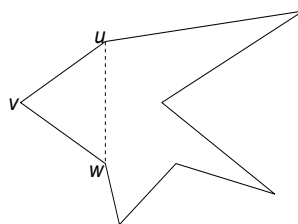
Dokážeme, že triangulace vždy existuje.

Tvrzení 7. Každý polygon s n vrcholy lze triangulovat pomocí $n - 2$ trojúhelníků.

Důkaz. Důkaz provedeme indukcí podle n .

Označme polygon P . Pro $n = 3$ tvrzení zřejmě platí.

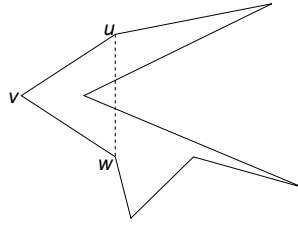
Necht $n > 3$. Uvažujme vrchol v , který je v P nejvíce vlevo (pokud je takových více, vybereme libovolný z nich). Označme sousední vrchol v u a druhý sousední vrchol v w . Mějme úsečku uw .



Obrázek 1.3: Úsečka uw leží celá v P .

Pokud uw leží celá v P (viz obrázek 1.3), pak uw rozdělí P na jeden trojúhelník a polygon s $n - 1$ vrcholy. Ten má podle indukčního předpokladu triangulaci pomocí $(n - 1) - 2$ trojúhelníků. Dohromady získáváme triangulaci celého P pomocí $n - 2$ trojúhelníků.

Pokud celá uw neleží v P (viz obrázek 1.4), tedy protíná vnější oblast P , vybereme vrchol P , který leží ve vnitřku trojúhelníku s vrcholy uvw a který je nejdál od uw . Označme ho x . Pak nutně vx leží v P . Úsečka vx rozdělí P na dva polygony s m a $n - m + 2$ vrcholy pro $3 \leq m \leq n - 1$.



Obrázek 1.4: Úsečka uw neleží celá v P .

Z indukčního předpokladu tyto dva polygony můžeme triangulovat. První pomocí $m - 2$ a druhý pomocí $n - m + 2 - 2 = n - m$ trojúhelníků. Tedy P je triangulováno $m - 2 + n - m = n - 2$ trojúhelníky. □

Triangulace nemusí být jednoznačná, ale jsou příklady, kdy existuje právě jeden způsob, jak daný polygon triangulovat, viz Příklad 1 v kapitole 3.

Lemma 8. *V každé triangulaci polygonu P s n vrcholy existuje trojúhelník vzniklý triangulací takový, že jeho dvě hrany jsou hranami polygonu P .*

Důkaz. Mějme triangulaci P s n vrcholy. Z tvrzení 7 víme, že triangulací vznikne $n - 2$ trojúhelníků.

Diagonálu v triangulaci P definujeme jako úsečku z triangulace, jež není hranou P . (Viz obrázek 1.5.)

Označme D množinu všech trojúhelníků z triangulace, které mají alespoň dvě hrany tvořeny diagonálou. Víme, že $|D| \leq n - 2$.

Chceme dokázat, že $|D| < n - 2$.

Sporem. Necht $|D| = n - 2$. Pak každý trojúhelník v triangulaci má nejvýše jednu hranu tvořenou hranou P . Tedy takových hran je nejvýše $n - 2$. Ale P má n hran. Spor.

Tedy existuje alespoň jeden trojúhelník v triangulaci, který má dvě hrany, jež jsou hranami P . □

Z Kapitol z diskrétní matematiky (Matoušek a Nešetřil, 2009) uvedeme definici *barevnosti grafu*.

Definice 9. *Necht $G = \{V, E\}$ je graf, $k \in \mathbb{N}$. Zobrazení $b : V \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$ nazveme obarvením grafu G pomocí k barev, pokud pro každou hranu $\{x, y\} \in E$ platí $b(x) \neq b(y)$.*

Poznamenáme, že na triangulaci lze nahlížet jako na graf.

Tvrzení 10. *Každou triangulaci polygonu lze obarvit pomocí 3 barev.*

Důkaz. Označme P polygon s n vrcholy a mějme jeho pevnou triangulaci. Zvolme tři barvy r, g, b .

Důkaz uděláme indukcí podle n . Pro $n = 3$ zřejmě tvrzení platí. Každému vrcholu dáme jinou barvu.

Necht tvrzení platí pro $n - 1$.

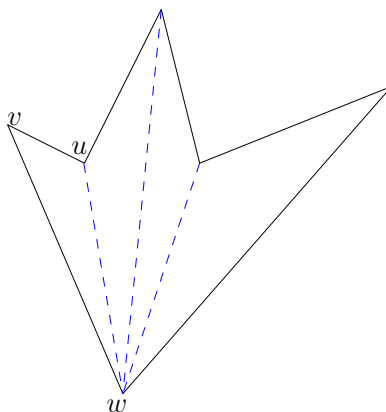
Mějme triangulaci polygonu P s n vrcholy. Vezměme trojúhelník z lemmatu 8,

tedy takový, že jeho dvě hrany jsou hranami P . Vrchol, který spojuje tyto dvě hrany, označme v a jeho dva sousedy u a w (viz obrázek 1.5).

Podívejme se na polygon, který vznikne vynecháním vrcholu v a hran uv a wv . Tento polygon má $n - 1$ vrcholů. Z indukčního předpokladu má jeho triangulace obarvení pomocí 3 barev r, g, b .

Bez újmy na obecnosti, necht u má barvu r a w má barvu g . Uvažme zpět vrchol v , hranu mezi u a v a hranu mezi v a w . Vrcholu v přiřadme barvu b . Získali jsme obarvení triangulace P s n vrcholy pomocí 3 barev.

□



Obrázek 1.5: Modré úsečky značí diagonály vzniklé triangulací.

1.2 The Art Gallery pro obecný polygon

Nyní můžeme předvést důkaz, jenž představil Steve Fisk (Fisk, 1978).

Věta 11. *Nechť P je polygon s n vrcholy. Pak existuje množina vrcholů S taková, že z S je vidět každý bod P a má nejvýše $\frac{n}{3}$ prvků.*

Důkaz. Mějme triangulaci P (z tvrzení 7). Pak existuje obarvení P pomocí tří barev r, b, g (z tvrzení 10). Tedy každý trojúhelník v naší triangulaci má právě jeden vrchol obarven jednou z barev r, b a g .

Označme S_r množinu vrcholů obarvenou barvou r , analogicky S_g, S_b . Bez újmy na obecnosti, nechť $|S_r| \leq |S_g| \leq |S_b|$. Položíme $S = S_r$, pak $|S| \leq \frac{n}{3}$. Kdyby $|S| > \frac{n}{3}$, pak by $|S| + |S_g| + |S_b| > n$, neboť $|S| > \frac{n}{3}$ a zároveň $|S| \leq |S_g| \leq |S_b|$.

Z množiny vrcholů z $S = S_r$ vidíme celé P , neboť každý trojúhelník má právě jeden vrchol obarven r . Neboli z vrcholů S_r vidíme každý trojúhelník triangulace P a tudíž i celé P .

□

1.3 Optimalita pro obecné polygony

Nyní budeme diskutovat optimalitu hranice $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$. Tedy to, že $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ strážců je potřebných. Nejprve definujeme *konvexní úhel*.

Definice 12. *Konvexní úhel je část roviny omezená dvěma polopřímkami se stejným počátkem, tomuto počátku říkáme vrchol.*

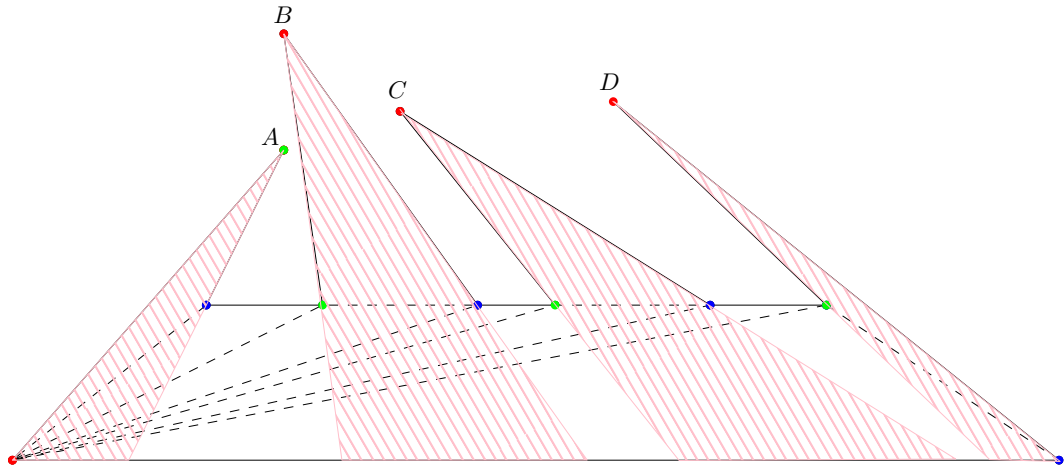
Řekneme-li pouze úhel, myslíme tím konvexní úhel.

Nejprve ilustrujeme optimalitu pro počet vrcholů $n = 12$ (viz obrázek 1.6). Z důkazu věty 11 plyne, že pro každou barvu máme čtyři vrcholy a tedy potřebujeme čtyři hlídače.

Pokud bychom hlídače umísťovali kamkoliv do polygonu (tj. i na hrany nebo do vnitřku polygonu), tak nedosáhneme lepšího výsledku, neboť v tomto polygonu neexistuje bod, ze kterého bychom viděli alespoň dva celé výběžky.

Poznámka. Výběžkem v polygonu na obrázku 1.6 myslíme konvexní úhel určen jedním z vrcholů A, B, C , nebo D a hranami polygonu svírající tento vrchol.

Vysvětlení viz poznámka níže. Z toho plyne, že nelze žádný ze čtyř strážců nahradit jiným, který by viděl zároveň dva celé ostré výběžky.



Obrázek 1.6: Příklad, kdy potřebujeme přesně $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ strážců.

Nyní ukážeme optimalitu Chvátalova výsledku pro obecné n .

Poznámka. Bod, ze kterého vidíme více než jeden celý výběžek, neexistuje právě tehdy, když se v polygonu neprotínají žádné dva konvexní úhly, jejichž vrcholy jsou postupně právě vrcholy výběžků. Viz obrázek 1.6.

Nechť $n \geq 4$.

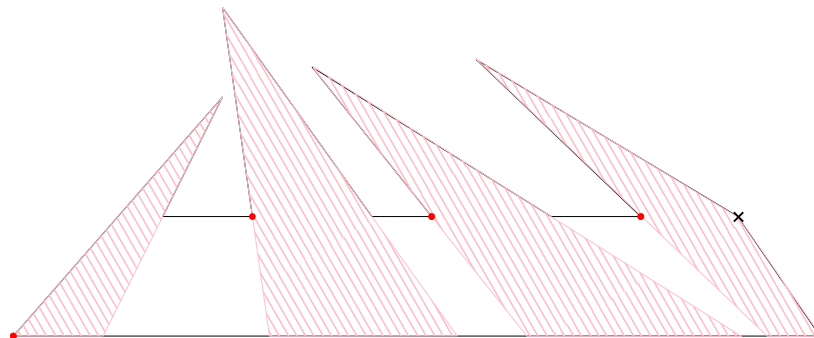
Nechť platí $n = 3k$, $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$. Vždy lze sestavit polygon analogický tomu pro $n = 12$, kde $k =$ počet výběžků. Pro $n > 12$ musíme přidat právě tři vrcholy, abychom zvětšili počet výběžků o jedna. Pro $n < 12$ musíme odebrat právě tři vrcholy, abychom zmenšili počet výběžků o jedna.

Navíc chceme, aby každý výběžek tvořil ostrý úhel a tedy můžeme přidat další výběžek tak, aby se žádné dva úhly výběžků neprotínaly. Polygon konstruujeme tak, aby platilo, že ze žádného bodu není vidět více než jeden celý výběžek.

Pro $n = 3k + 1$ si všimneme, že platí

$$\left\lfloor \frac{3k + 1}{3} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{3k}{3} \right\rfloor.$$

Z toho plyne, že můžeme využít stejný princip jako pro $n = 3k$. Pro $n = 3k$ sestavíme polygon jako výše, k němu přidáme jeden vrchol navíc (viz černý křížek v obrázku 1.7). Tento vrchol přidáme tak, abychom neporušili princip, tedy aby tento vrchol neviděl více než jeden celý výběžek. Viz obrázek 1.7 pro $n = 13$.

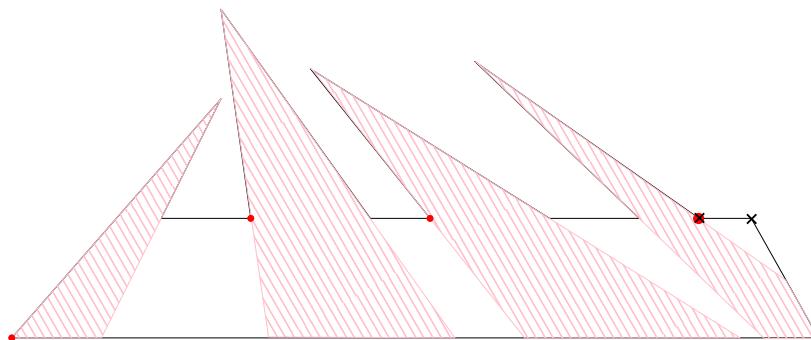


Obrázek 1.7: Potřebujeme přesně $\lfloor \frac{13}{3} \rfloor$ strážců.

Pro $n = 3k + 2$ opět platí, že

$$\left\lfloor \frac{3k + 2}{3} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{3k}{3} \right\rfloor.$$

Opět využijeme stejný princip jako pro $n = 3k$, ale tentokrát přidáme dva vrcholy. Stejně jako výše, tyto dva vrcholy přidáváme tak, aby ani jeden z nich neviděl více než jeden celý výběžek. Viz obrázek 1.8 pro $n = 14$, nové dva body odpovídají křížkům v obrázku.



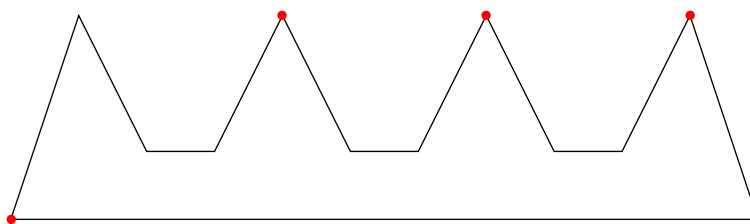
Obrázek 1.8: Potřebujeme přesně $\lfloor \frac{14}{3} \rfloor$ strážců.

Takto lze sestavit polygon pro libovolné n takový, že budeme potřebovat přesně $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ strážců.

1.4 Umístění strážců

V této práci se věnujeme tzv. vrcholové verzi The Art Gallery problému. To znamená, že strážce umísťujeme výhradně do vrcholů daného polygonu. Avšak to není vždy ta nejlepší varianta.

Uvedeme si několik příkladů. Podívejme se na obrázek 1.9.



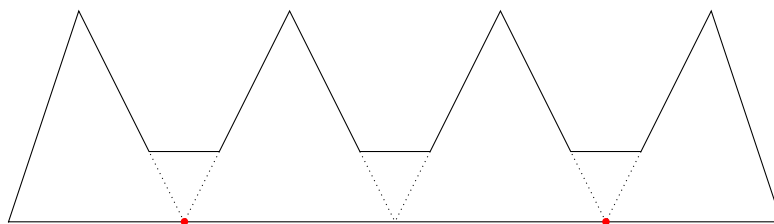
Obrázek 1.9: Příklad, kdy potřebujeme přesně $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ vrcholových strážců.

Chceme-li strážce umísťovat do vrcholů, potřebujeme nutně čtyři strážce. Vždy je třeba jeden strážce na každý ze čtyř výběžků, neboť neexistuje vrchol, ze kterého bychom viděli více než jeden celý výběžek.

Nicméně pokud bychom strážce umísťovali kamkoli do polygonu (včetně jeho hran), pak by stačili pouze dva strážci. Viz obrázek 1.10. To si nyní vysvětlíme.

Prodloužením hran výběžků vzniknou tři průsečíky na dolní hraně polygonu. Bod, který vznikne jako průsečík prodloužení dvou hran různých výběžků, nutně vidí oba celé výběžky. Celkem tedy tyto tři body vidí celý polygon.

Navíc množina bodů, kterou vidí prostřední bod, neobsahuje žádný nový bod oproti množinám bodům, které vidí dva krajní body. A tedy prostřední strážce je nadbytečný. Skutečně tedy stačí dva strážci.



Obrázek 1.10: Nevrcholoví strážci.

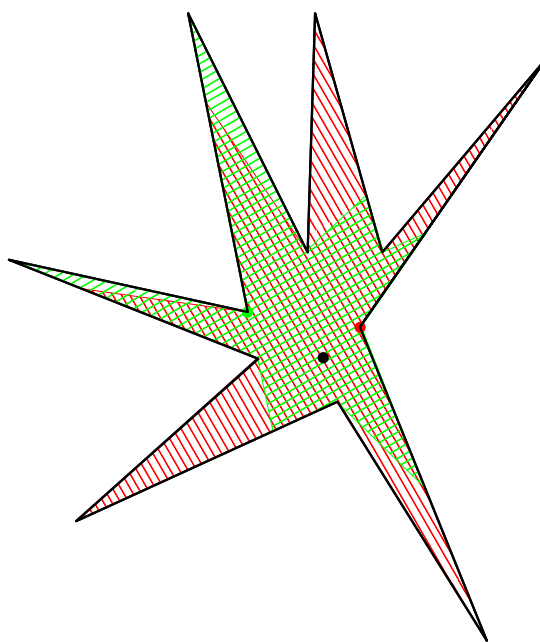
V dalším příkladu 1.11 ukážeme, že nebudeme-li se omezovat ani na hrany a vrcholy, pak v uvedeném případě stačí pouze jeden strážce. Toho umístíme tak, aby ležel v průniku všech úhlů všech paprsků, viz obrázek 1.12.

Chceme-li umisťovat pouze vrcholové strážce, pak zvolme vrchol (červený), který vidí největší počet celých paprsků. Ten vybereme následovně.

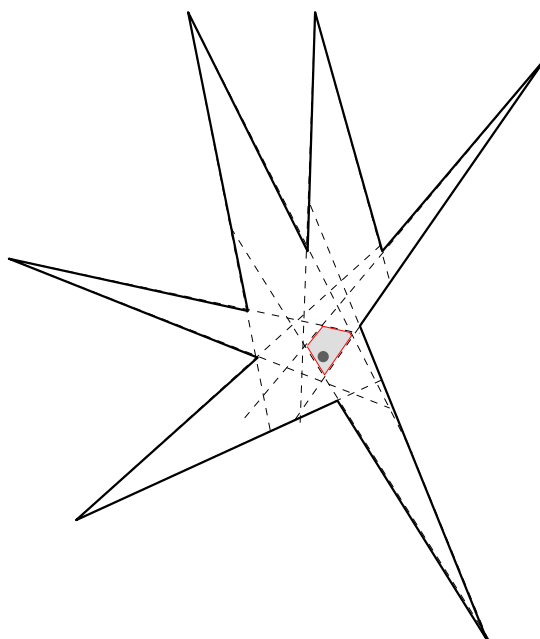
Vyberme jeden nekonvexní vrchol a přidejme do polygonu spojnice tohoto vrcholu s ostatními nekonvexními vrcholy. Vznikne graf složený ze čtyřúhelníků a trojúhelníků. Trojúhelníky jsou zřejmě z vybraného vrcholu vidět celé. Jsou-li čtyřúhelníky nekonvexní, pak vybraný vrchol nevidí celý tento čtyřúhelník. Zapamatujme si počet vzniklých nekonvexních čtyřúhelníků.

Toto provedme postupně se všemi nekonvexními vrcholy tohoto polygonu a vyberme ten vrchol, pro který je počet nekonvexních čtyřúhelníků nejmenší. Takový vrchol vidí největší počet celých paprsků.

Vyznačme množinu bodů, kterou tento bod vidí (červeně vyznačená část polygonu). Poté vyberme takový vrchol (zelený), jenž vidí zbytek polygonu (zeleně vyznačená část polygonu). Tyto dva vrcholy (červený a zelený) vidí dohromady celý polygon.

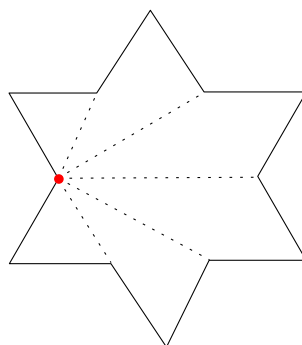


Obrázek 1.11: Jeden (černý) strážce vidí celý polygon o dvanácti vrcholech.



Obrázek 1.12: Černý bod leží v průniku úhlů všech paprsků.

Taktéž lze ale sestavit nekonvexní polygon o stejném počtu vrcholů (tj. $n = 12$), který lze střežit z jednoho vrcholu (obrázek 1.13). Zopakujeme-li postup z předchozího příkladu, tj. přidáme do polygonu spojnice libovolného nekonvexního vrcholu s ostatními nekonvexními vrcholy, pak v uvedeném případě vždy vznikne konvexní čtyřúhelník, nebo trojúhelník. Tedy takový vrchol vidí každý trojúhelník a čtyřúhelník, a tedy vidí celý polygon. Navíc nezáleží na výběru počátečního nekonvexního vrcholu.



Obrázek 1.13: Nekonvexní polygon, který střeží jeden vrcholový strážce.

2. Ortogonální verze

J. Kahn, M. Klawe a D. Kleitman (Kahn a kol., 1983) navazují ortogonální verzi The Art Gallery problému na Chvátalův výsledek pro obecný polygon bez děr.

Definice 13. Řekneme, že polygon je ortogonální, jestliže všechny jeho hrany jsou horizontální nebo vertikální, neboli rovnoběžné s osami x a y .

Použijeme-li v této kapitole pojem polygon, myslíme tím nutně ortogonální polygon.

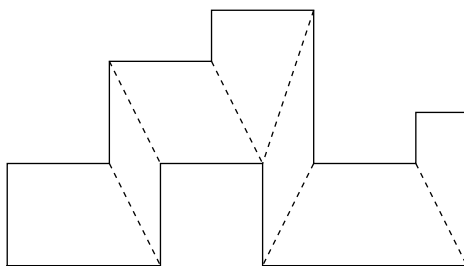
Z definice ortogonálního polygonu plyne, že vnitřní úhly takového polygonu jsou rovny buďto $\frac{\pi}{2}$ (v takovém případě se příslušný vrchol nazývá konvexní), nebo $\frac{3\pi}{2}$ (reflexní).

Pro ortogonální polygony Kahn, Klawe a Kleitman (Kahn a kol., 1983) dokázali v roce 1980, že $\lfloor \frac{n}{4} \rfloor$ strážců je dostatečných a někdy nutných.

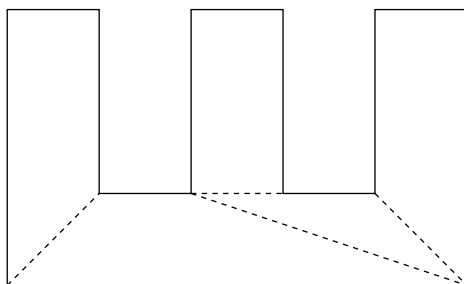
Věta 14. Nejvýše $\lfloor \frac{n}{4} \rfloor$ strážců je potřebných, aby viděli ortogonální polygon P s n vrcholy.

Hlavní myšlenka a zároveň nejobtížnější úkol tohoto důkazu spočívá v dekompozici polygonu na konvexní čtyřúhelníky.

Poznámka. Dekompozicí polygonu P na konvexní čtyřúhelníky rozumíme přidání úseček do P spojující vrcholy polygonu tak, že se žádné dvě přidané úsečky neprotínají a nejmenší vzniklé n -úhelníky jsou konvexní čtyřúhelníky s vnitřními úhly $\leq \pi$, viz obrázky 2.1 a 2.2. Na dekompozici na konvexní čtyřúhelníky se lze dívat jako na graf, stejně jako na triangulaci.



Obrázek 2.1: Dekompozice na čtyřúhelníky.



Obrázek 2.2: Příklad, kdy je vnitřní úhel jednoho ze čtyřúhelníků roven π .

Princip důkazu je analogický jako v důkazu věty 11, ale místo triangulace polygonu se využívá dekompozice na konvexní čtyřúhelníky. Naznačíme myšlenky důkazu.

Poté, co Kahn a kol. (1983) provedou ve svém důkazu dekompozici na konvexní čtyřúhelníky, přidají do každého takového čtyřúhelníku dvě diagonály. Je-li vnitřní úhel nějakého ze čtyřúhelníků roven π , pak přidáváme také dvě diagonály, přestože druhá splývá s jednou z hran (to nám ale v grafu nevadí).

Přidáním diagonál vznikne graf, který lze obarvit pomocí čtyř barev, to lze dokázat indukcí podle n . Navíc jsou čtyři barvy nutné, neboť díky diagonálám musí být všechny čtyři vrcholy čtyřúhelníku různé. Pak je v každém čtyřúhelníku zastoupena každá ze čtyř barev. Poté vezmeme barvu, která byla použita nejméněkrát. Z vrcholů obarvených touto barvou vidíme celý polygon, neboť z těchto vrcholů vidíme každý čtyřúhelník.

2.1 Důkaz ortogonální verze

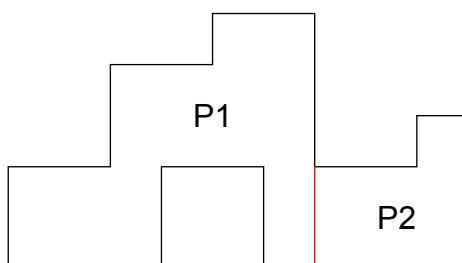
Věta 14 byla dokázána nejméně šesti různými matematiky (příp. skupinou matematiků) (Kahn a kol., 1983; O'Rourke, 1983; Lubiw, 1985; Györi, 1986; Sack a Toussaint, 1988; Urrutia, 1997).

V předchozí sekci jsme představili ideu důkazu, se kterým přišli Kahn a kol. (1983). Nicméně důkaz toho, že každý ortogonální polygon lze rozdělit na konvexní čtyřúhelníky, je technický. A proto jsem se rozhodla nastudovat šestý důkaz od Jorgeho Urrutia (Urrutia, 1997, Theorem 1.1), neboť se jeví jako kratší a méně technický. Nicméně se ukázalo, že tento důkaz není úplný, a proto ho opravíme a doplníme tak, aby úplný byl.

Nejprve zavedeme některé pojmy z článku od Urrutia (1997).

Definice 15. Řez P je horizontální (vertikální), vznikne-li prodloužením horizontální (vertikální) hrany P v reflexním vrcholu směrem do vnitřku P , dokud nenarazí na hranu P .

Definice 16. Horizontální (vertikální) řez P nazveme lichý, pokud rozdělí P s n vrcholy na 2 neprázdné polygony P_1, P_2 s r_1 a r_2 reflexními vrcholy tak, že alespoň jedno z r_1, r_2 je liché.



Obrázek 2.3: Příklad lichého řezu, kde $r_1 = 4$ a $r_2 = 1$.

Lemma 17. Necht P je ortogonální polygon s n vrcholy. Pak $n = 2k$ pro nějaké $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$.

Důkaz. Označme r počet reflexních vrcholů P a c počet konvexních vrcholů P . Pak $n = r + c$. Součet všech vnitřních úhlů v polygonu je $\pi(n - 2)$, neboť triangulací polygonu vznikne $n - 2$ trojúhelníků (viz tvrzení 7). Součet vnitřních úhlů v trojúhelníku je roven π . Z toho plyne, že součet vnitřních úhlů v polygonu je $\pi(n - 2)$. Tedy získáváme rovnost $\pi(n - 2) = \frac{3\pi}{2}r + \frac{\pi}{2}c$. Dosadíme za $c = n - r$.

$$\pi(n - 2) = \frac{3\pi}{2}r + \frac{\pi}{2}(n - r).$$

Upravíme a získáme

$$2r = n - 4.$$

Tedy $2 \mid (n - 4)$ a $2 \mid n$. □

Dále využijeme známého poznatku o počtu reflexních vrcholů v ortogonálním polygonu z článku O'Rourke (1983).

Lemma 18. *Každý ortogonální polygon P s n vrcholy má právě $\frac{n-4}{2}$ reflexních vrcholů.*

Důkaz. Označme r počet reflexních vrcholů P a c počet konvexních vrcholů P . Pak platí $n = r + c$. Z důkazu lemmatu 17 víme, že součet vnitřních úhlů v ortogonálním polygonu je $\pi(n - 2)$. Získáváme rovnost $\pi(n - 2) = \frac{3\pi}{2}r + \frac{\pi}{2}c$. Dosazením za $c = n - r$ dostáváme $r = \frac{n-4}{2}$. □

V další části se nám bude hodit pomocné lemma o dolní celé části.

Lemma 19. *Pro $x, y \in \mathbb{R}$ platí*

$$\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq \lfloor x + y \rfloor.$$

Důkaz. $\lfloor x + y \rfloor$ je největší možné celé číslo, takové, že je $\leq x + y$.

Ale zároveň pro dolní celou část platí $\lfloor x \rfloor \leq x$. Tedy

$$\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq x + y.$$

Z toho, že $\lfloor x + y \rfloor$ je největší možné, už nutně plyne

$$\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq \lfloor x + y \rfloor.$$

□

Pro potřeby následujících tvrzení zavedeme definici toho, že bod *vidí po vertikální (horizontální) přímce* jiný bod.

Definice 20. *Nechť P je polygon a x, y jsou body v P . Řekneme, že bod x vidí bod y po vertikální (horizontální) přímce, pokud x vidí y a zároveň je úsečka spojující tyto dva body vertikální (horizontální).*

Po vzoru O'Rourkeho (O'Rourke, 1983) dokážeme nejprve indukční argument důkazu věty 14.

Poznámka. Následující důkaz indukčního argumentu věty 14 rozdělíme do dvou lemmat. Rozlišujeme dva případy. První případ pro svůj důkaz nepotřebuje předpoklad existence lichého řezu. Nicméně v druhém případě je tento předpoklad nutný.

Lemma 21. *Nechť v polygonu P existuje alespoň jedna dvojice reflexních vrcholů taková, že se vidí po horizontální, příp. vertikální, přímce. Pak stačí $\lfloor \frac{n}{4} \rfloor$ strážců, aby viděli celé P .*

Důkaz.

Mějme polygon P s n vrcholy. Nyní již z lemmatu 18 víme, že $n = 2r + 4$, kde r je počet reflexních vrcholů P . Pak

$$\left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{2r + 4}{4} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{r}{2} \right\rfloor + 1. \quad (2.1)$$

Důkaz lemmatu provedeme indukcí podle r . Z předpokladu plyne, že r je alespoň 2.

Pro $r = 2$ je $n = 8$ (lemma 18). Z věty 11 víme, že stačí $\lfloor \frac{8}{3} \rfloor = 2$ strážci. Pro $n = 8$ zároveň platí, že $\lfloor \frac{8}{4} \rfloor = 2$. Tedy pro $r = 2$ lemma platí.

Nechť $r \geq 3$. Ať tvrzení platí pro $r' < r$.

Z předpokladu lemmatu víme, že existují dva reflexní vrcholy P , které se vidí po horizontální, příp. vertikální, přímce.

Tedy existuje horizontální, příp. vertikální, řez P takový, že rozdělí 2 reflexní vrcholy.

Rozdělme P na 2 polygony pomocí tohoto řezu a označme L a R počet reflexních vrcholů ve vzniklých polygonech. Víme, že $r = L + R + 2$.

Aplikujme indukční předpoklad na každý ze vzniklých polygonů. Tím získáme celkem

$$\left\lfloor \frac{L}{2} \right\rfloor + 1 + \left\lfloor \frac{R}{2} \right\rfloor + 1$$

strážců, kteří vidí celé P .

Z lemmatu 19 platí nerovnost

$$\left\lfloor \frac{L}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{R}{2} \right\rfloor + 2 \leq \left\lfloor \frac{L + R}{2} \right\rfloor + 2 = \left\lfloor \frac{L + R + 2}{2} \right\rfloor + 1.$$

Navíc ale víme, že

$$\left\lfloor \frac{r}{2} \right\rfloor + 1 = \left\lfloor \frac{L + R + 2}{2} \right\rfloor + 1.$$

Tedy získáváme, že počet strážců, kteří vidí celé P , je menší nebo roven $\lfloor \frac{n}{4} \rfloor$, neboli

$$\left\lfloor \frac{L}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{R}{2} \right\rfloor + 2 \leq \left\lfloor \frac{r}{2} \right\rfloor + 1 = \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor,$$

dle rovnosti (2.1).

□

Lemma 22. *Nechť P je polygon s n vrcholy takový, že se žádné dva reflexní vrcholy po horizontální, příp. vertikální, přímce nevidí. Nechť existuje lichý řez P . Pak stačí $\lfloor \frac{n}{4} \rfloor$ strážců, aby viděli celé P .*

Důkaz. Postupujeme obdobně jako v předchozím lemmatu 21. Opět z lemmatu 18 platí, že $n = 2r + 4$, kde r je počet reflexních vrcholů v P .

Postupujme indukcí podle r . Abychom mohli předpokládat lichý řez P , musí být r alespoň 2.

Pro $r = 2$ lemma platí, neboť víme z věty 11, že stačí $\lfloor \frac{8}{3} \rfloor = 2 = \lfloor \frac{8}{4} \rfloor$ strážců.

Nechť $r \geq 3$. Ať tvrzení platí pro $r' < r$.

Z předpokladu mějme lichý řez. Rozdělme P na 2 polygony pomocí tohoto řezu a označme L a R počet reflexních vrcholů ve vzniklých polygonech. Předpokládáme, že alespoň jedno z L a R je liché.

Bez újmy na obecnosti, necht' je liché R . Víme, že $r = R + L + 1$, neboť řez rozděljuje právě jeden reflexní vrchol.

Aplikujeme-li indukční předpoklad na oba vzniklé polygony, získáme tím pokrytí celého P pomocí

$$\left\lfloor \frac{L}{2} \right\rfloor + 1 + \left\lfloor \frac{R}{2} \right\rfloor + 1 = \left\lfloor \frac{L}{2} \right\rfloor + 1 + \left\lfloor \frac{R-1}{2} \right\rfloor + 1$$

strážců, neboť R je liché.

Opět z lemmatu 19 platí

$$\left\lfloor \frac{L}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{R-1}{2} \right\rfloor + 2 \leq \left\lfloor \frac{L+(R-1)}{2} \right\rfloor + 2 = \left\lfloor \frac{L+R+1}{2} \right\rfloor + 1.$$

Navíc máme identitu

$$\left\lfloor \frac{r}{2} \right\rfloor + 1 = \left\lfloor \frac{L+R+1}{2} \right\rfloor + 1.$$

Tedy počet strážců, který je potřebný k hlídání daného polygonu, je menší nebo roven než $\lfloor \frac{r}{2} \rfloor + 1$, což je rovno $\lfloor \frac{n}{4} \rfloor$ dle rovnosti (2.1) z předešlého důkazu lemmatu 21. □

Následuje dokončení důkazu věty 14 po vzoru J. Urrutia (Urrutia, 1997). Nicméně po pečlivém nastudování tohoto důkazu jsem našla několik chyb. Pro označení místa chyby použiji [†] a následuje opravení. Mnou opravená část končí ^{††}.

Poznámka. Kroky, ve kterých si bez újmy na obecnosti volíme jednu z variant, jsou vždy pouze otočením polygonu o π pro variantu druhou.

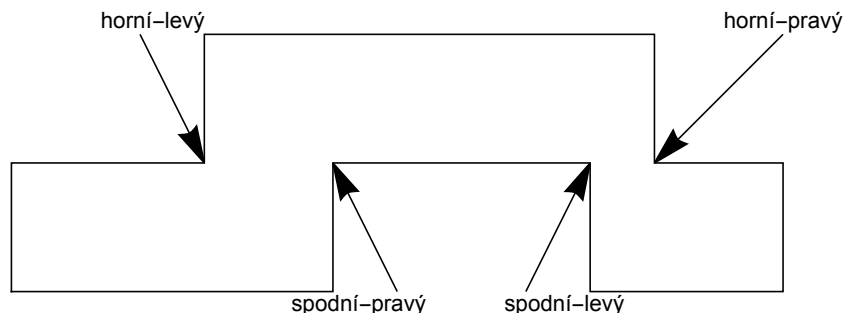
Důkaz. Důkaz provedeme indukcí podle počtu vrcholů n polygonu P . Z lemmatu 17 uvažujme jen sudá n .

Pro $n = 4, 6$ zřejmě věta 14 platí a stačí nám jeden strážce. Pro $n = 4$ z lemmatu 18 nemáme žádný reflexní vrchol a umístíme strážce kamkoliv. Pro $n = 6$ máme jeden reflexní vrchol. Do něj umístíme strážce.

[†]Označení chyby.

^{††}Konec opravené části důkazu.

Na obrázku 2.4 uvedeme označení pro reflexní vrcholy.



Obrázek 2.4: Označení reflexních vrcholů.

Nechť P je polygon s $n \geq 8$. Vezměme množinu všech reflexních vrcholů a rozdělme ji na dvě. Označme je S_1, S_2 . Nechť S_1 obsahuje všechny horní-pravé a spodní-levé vrcholy a S_2 všechny horní-levé a spodní-pravé. Z lemmatu 18 víme, že P má $\frac{n-4}{2}$ reflexních vrcholů.

Lemma 23. *Alespoň jedna z množin S_1, S_2 má nejvýše $\lfloor \frac{n}{4} \rfloor$ prvků.*

Důkaz. To ukážeme sporem. Kdyby měli S_1 i S_2 oba více než $\lfloor \frac{n}{4} \rfloor$ prvků, pak

$$|S_1| + |S_2| > \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor > \frac{n}{4} + \frac{n}{4} - 2 = \frac{n-4}{2}.$$

Spor, protože reflexních vrcholů je právě $\frac{n-4}{2}$.

□

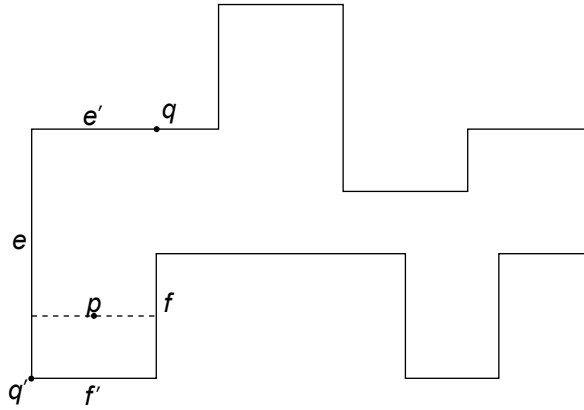
Bez újmy na obecnosti, nechť má S_1 nejvýše $\lfloor \frac{n}{4} \rfloor$ prvků.

Dále rozebereme 2 případy podle mohutnosti S_1 .

Nechť $S_1 \neq \emptyset$. Pokud z S_1 vidíme celé P , pak je důkaz věty 14 hotov, neboť $|S_1| \leq \lfloor \frac{n}{4} \rfloor$.

Předpokládejme, že existuje bod p v polygonu P takový, že není vidět z S_1 . Označme c nejdelší horizontální úsečku obsahující p , která leží celá v P a její koncové body leží na nějakých hranách P .

Nechť e značí hranu P , na níž leží levý konec úsečky c , a f značí hranu P , na níž leží pravý konec úsečky c . Mějme největší možný obdélník R obsahující celou c , který je celý obsažen v P . Označme e' a f' hrany P , které (aspoň částečně) tvoří horní a spodní hranu R . Značení viz obrázek 2.5.



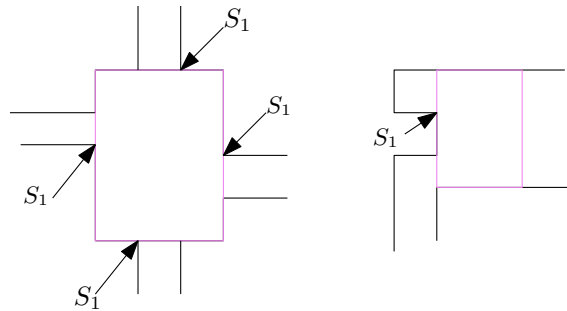
Obrázek 2.5: Značení v důkazu.

Uvedme pomocné lemma.

Lemma 24. *Žádná hrana R neobsahuje vrchol z S_1 .*

Důkaz. Kdyby existovala hrana R taková, že obsahuje vrchol z S_1 , pak by p bylo vidět z S_1 . Spor. Viz obrázek 2.6.

□



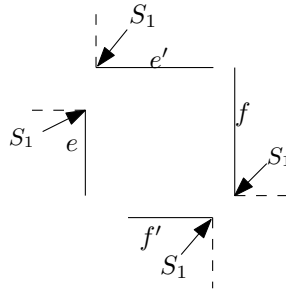
Obrázek 2.6: Zakázané případy.

Lemma 25. *Hrany e a e' se střetávají v horním-levém rohu R a f a f' v dolním-pravém rohu R . Navíc horní-levý a dolní-pravý roh R jsou vrcholy P .*

Důkaz. Plyne z lemmatu 24. Kdyby se e a e' nestřetávaly, pak by horní vrchol e byl vrchol z S_1 nebo levý vrchol e' byl vrcholem z S_1 . Analogicky, dolní vrchol f by byl vrchol z S_1 nebo pravý vrchol f' byl vrcholem z S_1 . To by byl spor s lemmatem 24. Viz obrázek 2.7.

Navíc e a e' jsou hrany P , a tudíž pokud se střetávají, musí se střetnout ve vrcholu P . Stejně tak pro f, f' .

□



Obrázek 2.7: Pokud by se e a e' , f a f' nestřetávaly.

Dále označme q horní-pravý vrchol R a q' dolní-levý vrchol R , viz obrázek 2.5. Máme tři možnosti, kde mohou být q a q' .

1. q i q' jsou oba vrcholy P .
2. q ani q' nejsou vrcholy P .
3. Právě jeden z q, q' je vrchol P .

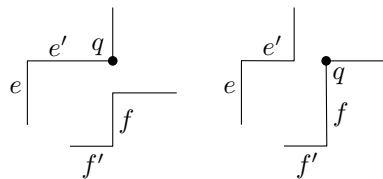
Než rozebereme tyto případy, dokážeme užitečné lemma.

Lemma 26. *Je-li q reflexní vrchol P , pak q vidí po vertikální, příp. horizontální, přímce jiný reflexní vrchol v P . Analogicky pro q' .*

Důkaz. Sporem. Necht q je reflexní vrchol P takový, že nevidí po vertikální, příp. horizontální přímce žádný reflexní vrchol. Pak ale q není horní-pravý roh R .

R je obdélník a q , jakožto horní-pravý roh R , musí ležet v prodloužení hrany e' (nebo přímo na e') a zároveň v prodloužení hrany f (nebo na f). Viz obrázek 2.8.

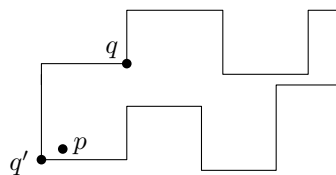
□



Obrázek 2.8: Pokud je q reflexní vrchol, vidí po horizontální/vertikální přímce jiný reflexní vrchol.

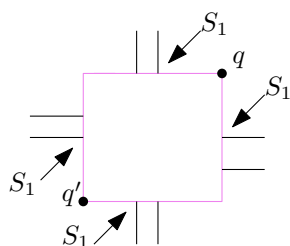
Nyní můžeme rozebrat polohu q, q' .

1. † q i q' jsou vrcholy P . Příklad situace na obrázku 2.9.



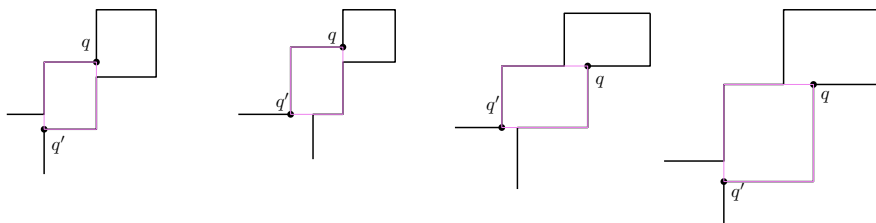
Obrázek 2.9: Příklad 1.

- a. Pokud je q i q' konvexní, pak je nutně $n = 4$. Víme, že q, q' jsou konvexní a platí lemma 25. Kdyby tedy $n > 4$ dostali bychom spor s lemmatem 24. Viz obrázek 2.10.



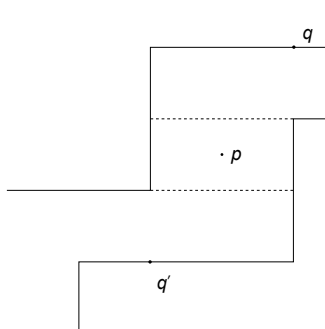
Obrázek 2.10: q, q' nemůžou být zároveň konvexní vrcholy pro $n > 4$.

- b. Pokud je alespoň jeden z vrcholů q, q' reflexní, pak použijeme lemma 26. Víme tedy už, že reflexní vrchol vidí po vertikální, příp. horizontální, přímce jiný reflexní vrchol P . Můžeme použít lemma 21, to nám důkaz dokončí. Situace pro q i q' reflexní je na obrázku 2.11.††



Obrázek 2.11: Pokud jsou q i q' reflexní, máme 4 možnosti.

- 2 Pokud q ani q' nejsou vrcholy P , pak můžeme udělat dva horizontální řezy (horní a spodní), které leží v R , tj. uvnitř nebo i na hranici, a v obdélníku, který vznikne mezi těmito řezy, neleží žádný reflexní vrchol, viz obrázek 2.12.

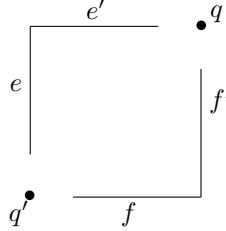


Obrázek 2.12: Horní a spodní horizontální řez.

To lze vždy udělat, neboť víme, že q i q' nejsou vrcholy P a tedy R musí obsahovat alespoň 2 reflexní vrcholy P (konkrétně z S_2).

Lemma 27. Pokud q i q' nejsou vrcholy P , pak R musí obsahovat alespoň dva reflexní vrcholy P .

Důkaz. Kdyby obdélník R obsahoval jen jeden reflexní vrchol, pak by muselo být jedno z q, q' konvexním vrcholem P , to by byl spor s předpokladem, že q i q' nejsou vrcholy P . Kdyby R neobsahoval ani jeden reflexní vrchol, pak by bylo $n = 4$, to je spor s předpokladem, že $n \geq 8$. Viz obrázek 2.13. \square



Obrázek 2.13: q ani q' nejsou vrcholy P .

Lemma 28. *Horní nebo spodní horizontální řez je lichý.*

Důkaz. Necht r_H označuje počet reflexních vrcholů horního polygonu vzniklého horním horizontálním řezem a r_S označuje počet reflexních vrcholů horního polygonu vzniklého spodním horizontálním řezem. Pak z konstrukce horizontálních řezů výše plyne, že $r_H = r_S - 1$.

Pokud je r_S sudé, pak je r_H liché a horní řez je lichý. Pokud je r_S liché, tak je spodní řez lichý. \square

Nyní máme lichý řez a můžeme použít lemma 22 a důkaz je hotový.

Nyní probereme poslední polohu vrcholů q, q' .

- 3 Bez újmy na obecnosti, necht q je vrchol P a q' ne. † Je-li q reflexní vrchol P , pak z lemmatu 26 vidí po horizontální, příp. vertikální, přímce jiný reflexní vrchol P a tedy můžeme použít lemma 21, které nám důkaz dokončí. ††

Rozebereme tedy jen případ, kdy je q konvexní. Rozlišíme dva případy podle umístění hran e a f' , což jsou hrany P , které postupně tvoří levou a spodní hranu R .

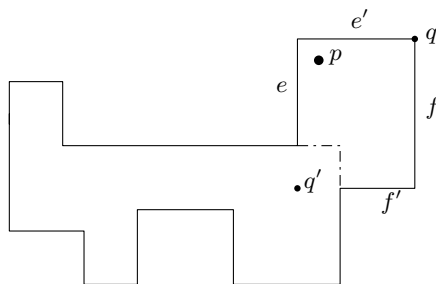
- 3.1 Hrana e je celá obsažena v levé hraně obdélníku R a zároveň hrana f' je celá obsažena ve spodní hraně R .
- 3.2 Hrana e není celá obsažena v levé hraně obdélníku R nebo hrana f' není celá obsažena ve spodní hraně R .

Postupně tyto dva případy rozebereme.

- 3.1 Hrana e je celá obsažena v levé hraně obdélníku R a zároveň hrana f' je celá obsažena ve spodní hraně R .

Předpokládáme, že q je konvexní. Pak prodloužením horizontální hrany polygonu P vycházející ze spodního vrcholu e a prodloužením vertikální hrany P vycházející z levého vrcholu f' , získáme polygon s $n - 4$ vrcholy, v němž leží bod q' (viz obrázek 2.14). Označme ho Q . Polygon

Q má $n - 4$ vrcholů, neboť předpokládáme konvexitu q , z lemmatu 25 se e, e' a f, f' střetávají ve vrcholech P a navíc platí lemma 24.



Obrázek 2.14: Příklad, kdy e a f' jsou obsaženy v levé a spodní hraně R a q je konvexní.

Z indukčního předpokladu věty 14 získáváme, že polygon Q s $n - 4$ vrcholy je střežen nejvýše $\lfloor \frac{n-4}{4} \rfloor = \lfloor \frac{n}{4} \rfloor - 1$ hlídači. R je obdélník a může být střežen jedním hlídačem, a tedy P je vidět nejvýše $\lfloor \frac{n}{4} \rfloor - 1 + 1$ strážci. Máme dokázanou větu 14 bez nutnosti lichého řezu.

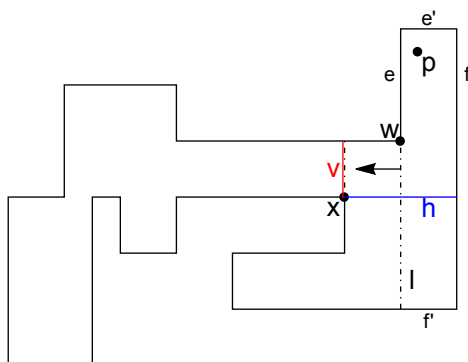
3.2 Hrana e není celá obsažena v levé hraně R nebo hrana f' není celá obsažena ve spodní hraně R (viz obrázek 2.15).

Bez újmy na obecnosti, necht' f' obsahuje spodní hranu R .

Předpokládáme, že q je konvexní. Označme w spodní vrchol e . Mějme vertikální úsečku l spojující w a bod na spodní hraně R . Posunujeme l doleva dokud nenarazí na *:

- vertikální hranu P , nebo
- levý konec f' , nebo
- nejlevější vrchol horizontální hrany g , vycházející z w .

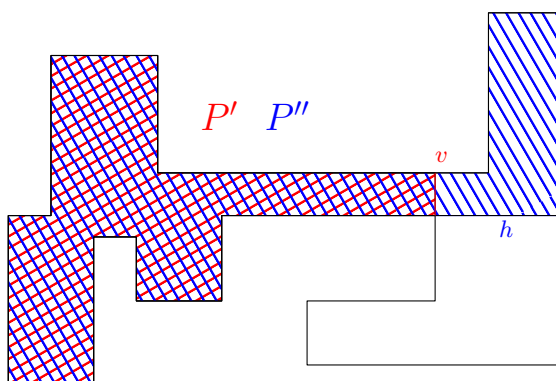
a. Necht' x je nejvýše položený vrchol P obsažený na posunuté úsečce l . Pak vyrobíme dva řezy P v x . Jeden horizontální h a druhý vertikální v (značení viz obrázek 2.15).



Obrázek 2.15: Značení pro 3.a.

*Pokud levý konec f' splývá s vrcholem vertikální hrany P , pak pokračujeme s variantou b. (tj. levý konec f' .)

Nechť P' je vzniklý polygon v P nalevo od v , který získáme vertikálním řezem P podle v . P'' je vzniklý polygon nahoru od h , vzniklý řezem P podél h . Viz obrázek 2.16.



Obrázek 2.16: Rozdělení na dva polygony P', P''

Lemma 29. *Nechť má P' m vrcholů, pak P'' má $m + 2$ vrcholů.*

Důkaz. Víme, že q je konvexní vrchol polygonu P , z lemmatu 25 se e a e' střetávají ve vrcholu P , w je nutně reflexní.

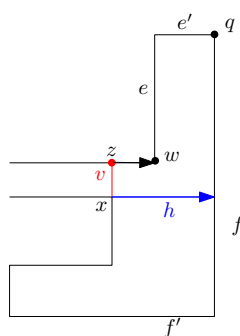
Tvrdím, že P'' má právě o dva vrcholy více než P' . K důkazu máme obrázek 2.17.

Řez v vytvoří nový bod z na horizontální hraně vedoucí z w . Bod z je vrcholem P' , ale ne vrcholem P'' . To platí, protože nalevo od z je w , a tedy z je pouze bod na hraně v P'' a vrcholem je w . Tedy místo vrcholu z máme v P'' vrchol w .

Bod x je vrchol P' , ale ne vrchol P'' . Řez h je horizontální prodloužení v x , a tedy x je pouze bod na horizontální hraně P'' . Řez h vytvoří nový bod na f , to bude vrchol P'' . Tedy místo vrcholu x máme v P'' vrchol, který vytvoří h .

Tedy P'' má pouze o 2 vrcholy více než P' .

□



Obrázek 2.17: P'' má $m + 2$ vrcholů.

Lemma 30. *Řez h nebo v je lichý.*

Důkaz. P' i P'' jsou ortogonální polygony, a tedy z lemmatu 17 platí, že m je sudé.

Označme v_r počet reflexních vrcholů v P' a h_r počet reflexních vrcholů v P'' . Pak

$$v_r = \frac{m-4}{2} = \frac{m}{2} - 2$$

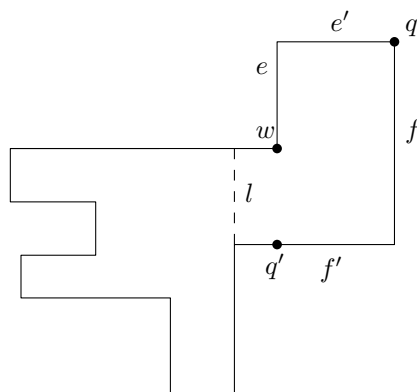
$$h_r = \frac{m+2-4}{2} = \frac{m-2}{2} = \frac{m}{2} - 1.$$

To jsou dvě po sobě jdoucí čísla, tedy jedno z nich je určitě liché. □

Máme lichý řez a použijeme lemma 22, to nám dává výsledek.

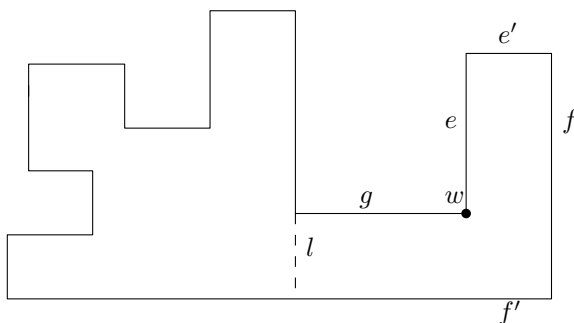
b. Pokud narazíme úsečkou l na levý kraj f' , tak tato úsečka vytvoří vertikální řez, viz obrázek 2.18. Napravo vznikne polygon P' se šesti vrcholy. To plyne z toho, že q je konvexní vrchol, platí lemma 24 a lemma 25, tj. že se e a e' , f a f' střetávají.

Z lemmatu 18 má polygon P' se šesti vrcholy jeden reflexní vrchol, tedy posunutá úsečka l tvoří lichý řez a můžeme použít lemma 22.



Obrázek 2.18: Příklad 3.b.

c. Pokud narazíme úsečkou l na levý konec horizontální hrany g vycházející z w , pak tato úsečka vytvoří vertikální řez, viz obrázek 2.19. Napravo od tohoto vertikálního řezu vznikne polygon se šesti vrcholy, ten má z lemmatu 18 jeden reflexní vrchol. Tedy posunutá úsečka l tvoří lichý řez a můžeme použít lemma 22.



Obrázek 2.19: Příklad 3.c.

Nyní probereme situaci, kdy je množina S_1 , tedy množina všech horních-pravých a spodních-levých reflexních vrcholů, prázdná.

† Pripomeňme čtenáři, že $n \geq 8$ a množina S_2 obsahuje všechny horní-levé a spodní-pravé vrcholy.

Pokud $S_1 = \emptyset$, pak $S_2 \neq \emptyset$, jinak bychom neměli žádný reflexní vrchol, neboť S_1, S_2 obsahují všechny reflexní vrcholy daného polygonu. Pokud by byly obě množiny prázdné, pak by bylo $n = 4$.

Rozlišme dva případy.

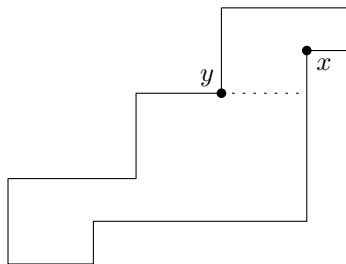
1. Pokud se po vertikální, příp. horizontální, přímce vidí dva reflexní vrcholy, pak použijeme lemma 21 a důkaz je hotov.
2. Pokud se po vertikální ani horizontální přímce žádné dva reflexní vrcholy nevidí, pak vezmeme první reflexní vrchol při pohledu shora a označme ho x . Vrchol x je jednoznačně určený, neboť předpokládáme, že se žádné dva reflexní vrcholy nevidí po horizontální přímce a S_1 je prázdná.

Zadefinujme pomocnou definici výšky bodu vzhledem k jinému bodu.

Definice 31. Výšku bodu y vzhledem k bodu x definujeme jako vzdálenost bodu y od horizontální přímky procházející x .

Vezmeme reflexní vrchol, který má minimální výšku vzhledem k vrcholu x . Označme ho y . Vrchol y je opět jednoznačně určen, protože předpokládáme, že se žádné dva reflexní vrcholy nevidí po horizontální přímce a zároveň x je první reflexní vrchol shora a S_1 je prázdná.

Nyní udělejme vrcholem y horizontální řez. Viz obrázek 2.20.



Obrázek 2.20: Horizontální řez v reflexních vrcholu y s minimální výškou od x .

Lemma 32. Horizontální řez z bodu y je lichý.

Důkaz. Předpokládáme, že se žádné dva reflexní vrcholy nevidí po horizontální/vertikální přímce, a tudíž víme, že každý horizontální řez rozdělí právě jeden reflexní vrchol.

Polygon, který vznikne nahoru od horizontálního řezu z bodu y , obsahuje pouze jeden reflexní vrchol a tím je x . To víme jistě, neboť x je první reflexní vrchol při pohledu shora a z minimality výšky x od y plyne, že mezi vrcholem x a y není jiný reflexní vrchol.

Tedy řez v y vytvoří polygon s jedním reflexním vrcholem, to je liché číslo a řez je tedy lichý. □

Máme lichý řez a lemma 22 dokončí důkaz. ††

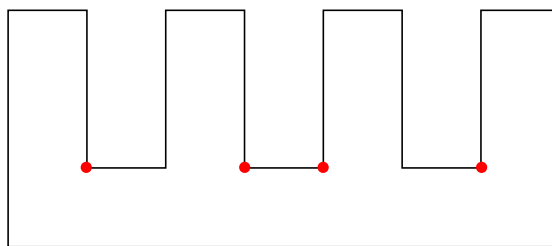
Tím je důkaz věty 14 kompletní.

□

2.2 Optimalita pro ortogonální polygony

Stejně jako v případě pro obecný polygon, i u ortogonálních polygonů není hodnota $\lfloor \frac{n}{4} \rfloor$ pouze hrubá horní hranice.

Začneme s příkladem pro polygon s $n = 16$ vrcholy na obrázku 2.21. Stejně jako pro obecný případ na obrázku 1.6 ani tady neexistuje bod, ze kterého bychom viděli více než jeden celý výběžek.



Obrázek 2.21: Příklad, kdy potřebujeme přesně $\lfloor \frac{n}{4} \rfloor$ hlídačů.

V ortogonálním polygonu je situace jednodušší než v obecném polygonu.

Platí, že bod, který vidí alespoň dva celé výběžky, existuje právě tehdy, když se v polygonu protnou plochy tvořící výběžky.

Ukážeme, že hranice $\lfloor \frac{n}{4} \rfloor$ je optimální pro libovolné n .

Z lemmatu 17 víme, že uvažujeme pouze sudá $n \geq 4$.

Pro $n \leq 6$ je optimalita dosažena triviálně, neboť $\lfloor \frac{4}{4} \rfloor = \lfloor \frac{6}{4} \rfloor = 1$.

Pro $n \geq 8$ si všimněme, že všechna n jsou tvaru $n = 4k$, nebo $n = 4k + 2$, $k \in \mathbb{N}$.

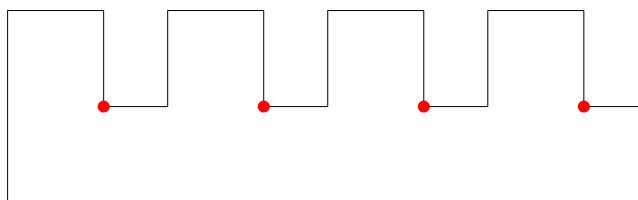
Pro $n = 4k$ vezměme polygon jako na obrázku 2.21, kde k = počet výběžků.

Pro takový polygon již víme, že potřebujeme přesně k , čili $\lfloor \frac{n}{4} \rfloor = \lfloor \frac{4k}{4} \rfloor$ strážců.

Pro $n = 4k + 2$ nelze sestrojít polygon odpovídající tomu na obrázku 2.21. Nicméně platí, že

$$\left\lfloor \frac{4k}{4} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{4k + 2}{4} \right\rfloor,$$

a tedy ke k výběžkům stačí přidat dva vrcholy a stále budeme potřebovat právě k strážců. Tyto dva vrcholy přidáme tak, aby byl polygon stále ortogonální a ani jeden z těchto vrcholů neviděl více než jeden celý výběžek. Příklad pro $n = 18$ je na obrázku 2.22.



Obrázek 2.22: Příklad, kdy potřebujeme přesně $\lfloor \frac{18}{4} \rfloor$ strážců.

3. Příklady

V této kapitole si uvedeme několik příkladů, které poukazují na některé speciální případy, problémy.

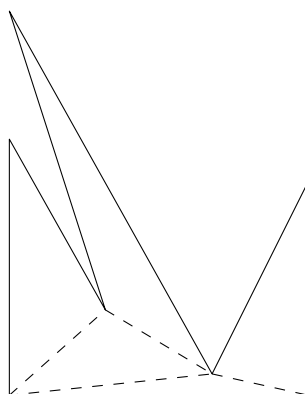
Prvním z nich jsou příklady jednoznačné triangulace pro vybraná n .

Příklad 1. Najděme galerie se 7, 8, 11 a 13 stěnami takové, že mají jednoznačnou triangulaci.

Triangulace je jednoznačná, pokud platí následující. Z každého vrcholu vedeme úsečku do všech ostatních vrcholů a vždy ponecháme jen ty, které neprotínají hranu polygonu (pokud je to přímo samotná hrana polygonu, pak ji také ponecháme). Pokud existuje jediná možnost, jak vrcholy spojit tak, aby se žádné úsečky neprotínaly, pak tyto úsečky tvoří naši jednoznačnou triangulaci.

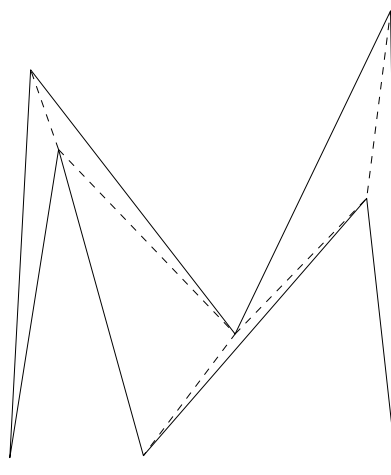
Pak platí, že spojíme-li dva sousední trojúhelníky v triangulaci, vznikne nám výhradně nekonvexní čtyřúhelník. V nekonvexním čtyřúhelníku je pouze jedna úhlopříčka. Tato úhlopříčka určuje jedinečnost dané triangulace.

Pro $n = 7$.



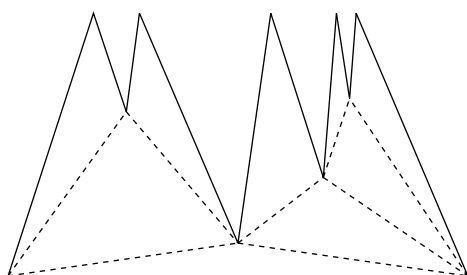
Obrázek 3.1: Příklad jednoznačné triangulace pro $n = 7$.

Pro $n = 8$.

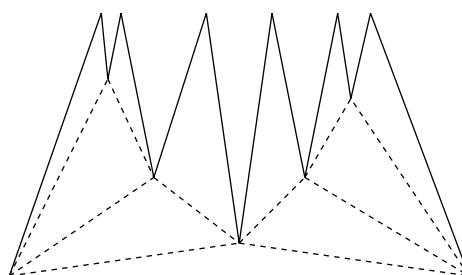


Obrázek 3.2: Jednoznačná triangulace pro $n = 8$.

Pro $n = 11, 13$ si jsou polygony podobné.



Pro $n = 11$.



Pro $n = 13$.

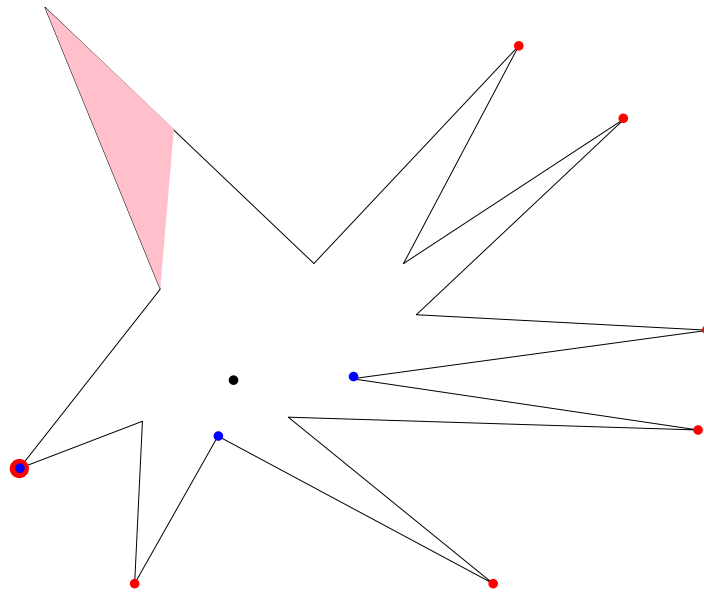
V dalším příkladu poukazujeme na problematiku umístění strážců. Ačkoli věta 11 poskytuje silný výsledek, nedává žádné informace ohledně umístění hlídačů.

Příklad 2. Najděme galerii takovou, že ji lze ohlídat jedním hlídačem a zároveň lze umístit 7 hlídačů do nějakých 7 rohů tak, že dohromady nevidí celou galerii.

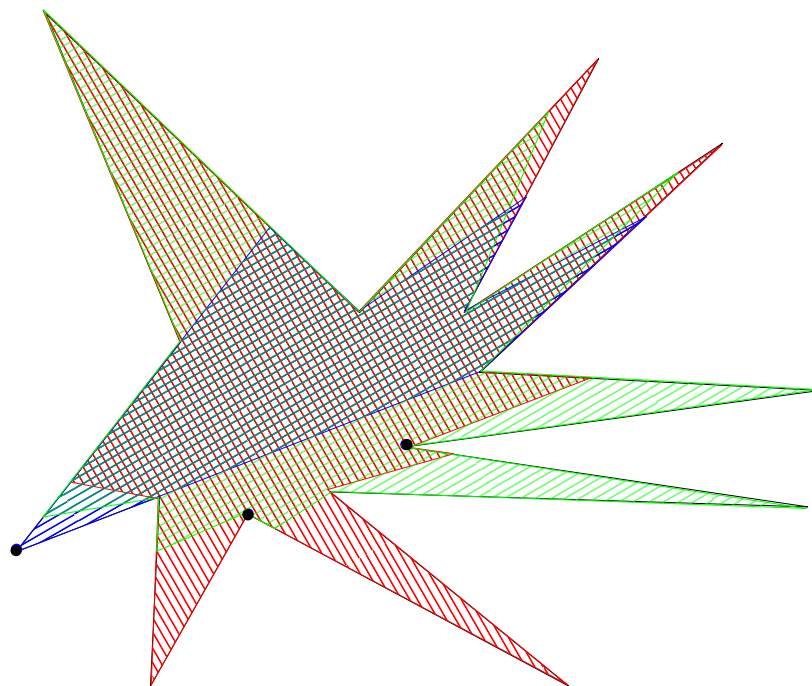
Zvolme galerii se 16 vrcholy. Pro takovou galerii stačí nejvýše $\lfloor \frac{16}{3} \rfloor = 5$ strážců. K hlídání této galerie jsou potřební tři hlídači, jejichž umístění značí modrá barva na obrázku 3.3. Vyznačení částí polygonu, které tyto tři vrcholy vidí je na obrázku 3.4.

Přesto umístíme-li sedm strážců do některých sedmi rohů, neuvidíme v některých případech celou galerii (viz červené body na obrázku 3.3). To nastává, neboť z libovolných sedmi konvexních vrcholů aspoň jeden konvexní vrchol nevidíme. To lze ověřit tak, že vezmeme-li úsečku spojující libovolné dva konvexní vrcholy, nikdy tato úsečka neleží celá ve vnitřku našeho polygonu. Tedy z definice 3 se konvexní vrcholy navzájem nevidí.

Nebudeme-li uvažovat omezení na vrcholové strážce, stačí nám pouze jeden hlídač (viz černý bod uvnitř obrázku 3.3). Z něho vidíme všechny konvexní vrcholy, protože leží v průniku všech úhlů všech paprsků.



Obrázek 3.3: Příklad, ve kterém 7 červených bodů nevidí vyznačenou růžovou část.



Obrázek 3.4: Vyznačení oblastí, které vidí tři hlídači.

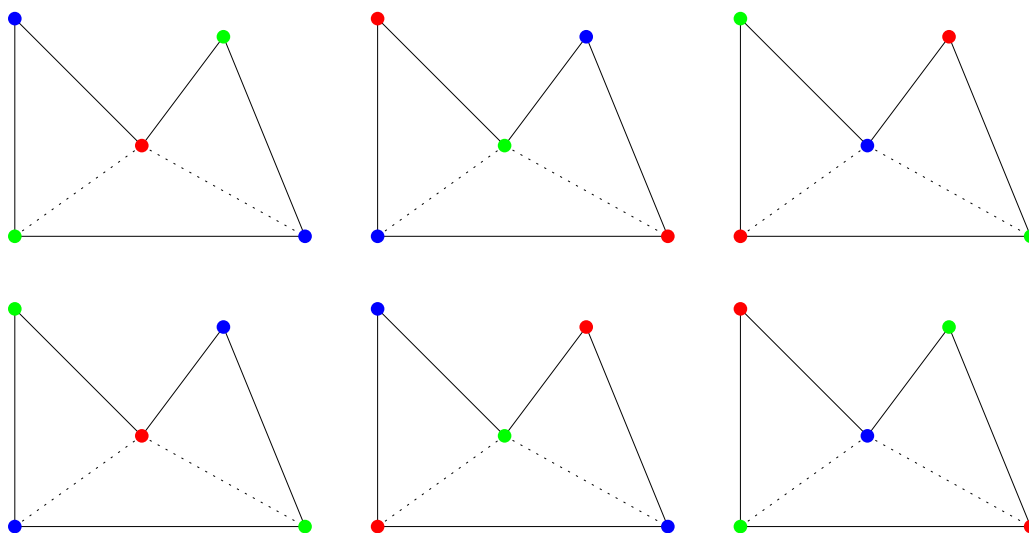
Tento příklad není příliš složitý, ale stojí za to se nad ním zamyslet, protože dobře uzavírá naše téma triangulace v podsekcí 1.1.

Příklad 3. Máme-li danou triangulaci polygonu, kolika způsoby lze tuto triangulaci obarvit pomocí 3 barev?

Mějme pevnou triangulaci polygonu P . Vybereme si jeden ze vzniklých trojúhelníků, označme ho T , a v něm jeden libovolný vrchol. Tomu přiřadíme jednu z barev r, g, b . Máme 3 možnosti, jak to udělat.

V T přiřadíme jednomu ze zbývajících dvou vrcholů další barvu. Máme dvě možnosti (jednu z barev, co jsme nepoužili pro první vrchol). Třetí vrchol T má pak již barvu určenou.

Celkem tedy máme $3 \cdot 2 = 6$ možností, jak obarvit T . Zbytek obarvení triangulace je už určen, neboť T sdílí alespoň jednu hranu s dalším trojúhelníkem triangulace, tato hrana má své koncové body již obarveny, tedy třetí vrchol má již barvu určenou. Takto pokračujeme, dokud neobarvíme celou triangulaci.



Obrázek 3.5: Všechna obarvení daného polygonu.

Závěr

Cílem práce bylo představit Art Gallery problém a předvést důkazy klasické a ortogonální verze. Získali jsme v zásadě elementární důkaz ortogonální verze.

Důležitým tématem souvisejícím s Art Gallery je triangulace. Podrobně jsme toto téma představili a dokázali jsme všechna potřebná tvrzení pro důkaz od pana S. Fiska, že obecný polygon potřebuje nejvýše $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ strážců.

V neposlední řadě jsme si představili pár příkladů a získali jsme lepší intuici při práci s polygony.

Seznam použité literatury

- AIGNER, M. a ZIEGLER, G. M. (1999). Proofs from the book. *Berlin. Germany*, **1**.
- CHVÁTAL, V. (1975). A Combinatorial Theorem in Plane Geometry. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, **18**(1), 39–41.
- FISK, S. (1978). A Short Proof of Chvátal’s Watchman Theorem. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, **24**(3), 374.
- GYÖRI, E. (1986). A short proof of the rectilinear art gallery theorem. *SIAM Journal on Algebraic Discrete Methods*, **7**(3), 452–454.
- KAHN, J., KLAWE, M. a KLEITMAN, D. (1983). Traditional galleries require fewer watchmen. *SIAM Journal on Algebraic Discrete Methods*, **4**(2), 194–206.
- LUBIW, A. (1985). Decomposing polygonal regions into convex quadrilaterals. In *Proceedings of the first annual symposium on Computational geometry*, pages 97–106.
- MATOUŠEK, J. a NEŠETŘIL, J. (2009). *Kapitoly z diskrétní matematiky*. Univerzita Karlova v Praze, Nakladatelství Karolinum.
- O’ROURKE, J. (1983). An alternate proof of the rectilinear art gallery theorem. *Journal of Geometry*, **21**(1), 118–130.
- SACK, J.-R. a TOUSSAINT, G. T. (1988). Guard placement in rectilinear polygons. In *Machine Intelligence and Pattern Recognition*, volume 6, pages 153–175. Elsevier.
- URRUTIA, J. (1997). Sixth proof of the orthogonal art gallery theorem. Technical Report TR-97-03, Department of Computer Science, University of Ottawa. URL <https://citeseerx.ist.psu.edu/document?repid=rep1&type=pdf&doi=196acdbc2b08c9fb3e9a37ee72729406a90b2538>.

Seznam obrázků

1.1	Příklady polygonů.	3
1.2	Příklady, které nejsou polygony.	3
1.3	Úsečka uw leží celá v P	4
1.4	Úsečka uw neleží celá v P	5
1.5	Modré úsečky značí diagonály vzniklé triangulací.	6
1.6	Příklad, kdy potřebujeme přesně $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ strážců.	8
1.7	Potřebujeme přesně $\lfloor \frac{13}{3} \rfloor$ strážců.	8
1.8	Potřebujeme přesně $\lfloor \frac{14}{3} \rfloor$ strážců.	9
1.9	Příklad, kdy potřebujeme přesně $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ vrcholových strážců.	9
1.10	Nevrcholoví strážci.	10
1.11	Jeden (černý) strážce vidí celý polygon o dvanácti vrcholech.	10
1.12	Černý bod leží v průniku úhlů všech paprsků.	11
1.13	Nekonvexní polygon, který střeží jeden vrcholový strážce.	11
2.1	Dekompozice na čtyřúhelníky.	12
2.2	Příklad, kdy je vnitřní úhel jednoho ze čtyřúhelníků roven π	12
2.3	Příklad lichého řezu, kde $r_1 = 4$ a $r_2 = 1$	13
2.4	Označení reflexních vrcholů.	17
2.5	Značení v důkazu.	18
2.6	Zakázané případy.	18
2.7	Pokud by se e a e' , f a f' nestřetávaly.	19
2.8	Pokud je q reflexní vrchol, vidí po horizontální/vertikální přímce jiný reflexní vrchol.	19
2.9	Případ 1.	19
2.10	q, q' nemůžou být zároveň konvexní vrcholy pro $n > 4$	20
2.11	Pokud jsou q i q' reflexní, máme 4 možnosti.	20
2.12	Horní a spodní horizontální řez.	20
2.13	q ani q' nejsou vrcholy P	21
2.14	Příklad, kdy e a f' jsou obsaženy v levé a spodní hraně R a q je konvexní.	22
2.15	Značení pro 3.a.	22
2.16	Rozdělení na dva polygony P', P''	23
2.17	P'' má $m + 2$ vrcholů.	23
2.18	Příklad 3.b.	24
2.19	Příklad 3.c.	24
2.20	Horizontální řez v reflexních vrcholu y s minimální výškou od x	25
2.21	Příklad, kdy potřebujeme přesně $\lfloor \frac{n}{4} \rfloor$ hlídačů.	26
2.22	Příklad, kdy potřebujeme přesně $\lfloor \frac{18}{4} \rfloor$ strážců.	26
3.1	Příklad jednoznačné triangulace pro $n = 7$	27
3.2	Jednoznačná triangulace pro $n = 8$	27
3.3	Příklad, ve kterém 7 červených bodů nevidí vyznačenou růžovou část.	29
3.4	Vyznačení oblastí, které vidí tři hlídači.	29
3.5	Všechna obarvení daného polygonu.	30