MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ FAKULTA
Univerzita Karlova

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Daniel Rubín

Fellerův test pro neexplosi

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí diplomové práce: RNDr. Jan Seidler, CSc.
Studijní program: Matematika
Studijní obor: Pravděpodobnost, matematická statistika a ekonometrie

Praha 2023

Prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci vypracoval samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů. Tato práce nebyla využita k získání jiného nebo stejného titulu.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V .... dne ....

Podpis autora

Upřímně děkuji svému vedoucímu, panu RNDr. Janu Seidlerovi, CSc., za jeho vynikající vedení a veškerý mně věnovaný čas a úsilí. Jeho neustálý přísun cvičení a pravidelná zpětná vazba byly naprosto klíčové pro celý proces tvorby tohoto textu.

Dále bych rád velice poděkoval panu Mgr. Martinu Ondrejátovi, Ph.D., za cenné rady poskytnuté během konsultací s mým vedoucím o některých problémech, které se při řešení práce objevily.

Tuto práci věnuji Tarče. Nic nepřeskočí Tvoji radost.

Název práce: Fellerův test pro neexplosi

Autor: Daniel Rubín

Katedra: Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí diplomové práce: RNDr. Jan Seidler, CSc., Ústav teorie informace a automatizace AV ČR, v. v. i.

Abstrakt: Hlavním výsledkem práce je úplná diskuse řešení stochastické diferenciální rovnice na polopřímce $(0, \infty)$ s polynomiálními koeficienty z hlediska doby jejich života. K tomu je využíván Fellerův test pro neexplosi. Ten je podrobně dokázán, jelikož známé důkazy jsou příliš stručné.

Klíčová slova: stochastické diferenciální rovnice, lokální řešení, polynomiální koeficienty

Title: Feller's test for non-explosions

Author: Daniel Rubín

Department: Department of Probability and Mathematical Statistics

Supervisor: RNDr. Jan Seidler, CSc., The Czech Academy of Sciences, Institute of Information Theory and Automation

Abstract: The main result of the work is a complete discussion of the solutions to stochastic differential equations on the half-line $(0, \infty)$ with polynomial coefficients in terms of their lifetimes. To achieve this, Feller's test for non-explosion is utilized. The theorem is proven in detail, as existing proofs are too concise.

Keywords: stochastic differential equations, local solutions, polynomial coefficients

Obsah

Úvod

Finálním cílem práce je podat úplnou diskusi řešení rovnice

$$\begin{aligned} \mathrm{d}X &= \varrho X^\alpha \mathrm{d}t + \sqrt{\lambda} X^\beta \mathrm{d}W \\ X(0) &= x_0 > 0. \end{aligned} \tag{PSDE}$$

na polopřímce $(0, \infty)$, kde $\varrho \in \{-1, 1\}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\lambda > 0$, z hlediska doby jejich života. To je provedeno v kapitole třetí. Důkazy jsou založeny na Fellerově testu pro neexplosi, vyžadujícím předběžně vybudovat poměrně rozsáhlou teorii.

V první kapitole je uvažována obecná rovnice

$$\mathrm{d}X = b(t, X_t)\mathrm{d}t + \sigma(t, X_t)\mathrm{d}W$$

na otevřeném intervalu $(l, r) \subset \mathbb{R}$. Zavedeme pojem lokálního řešení a času explose ε a vyslovíme větu o existenci a jednoznačnosti lokálního řešení za předpokladu lokálně lipschitzovských koeficientů — tento požadavek koeficienty rovnice (PSDE) splňují. Ukážeme také, že za tohoto předpokladu existuje na množině $\{\varepsilon < \infty\}$ limita $\lim_{t \nearrow \varepsilon(\omega)} X_t$. Náš důkaz je zjednodušenou jednorozměrnou formou důkazu podaného v (Ondreját a Seidler, v přípravě).

V kapitole druhé podrobně dokážeme Fellerův test pro neexplosi řešení skoro jistě. Ten byl předložen Williamem Fellerem v padesátých letech minulého století v rámci analytického přístupu k jednorozměrným difusním procesům. V řeči stochastické analýzy je zformulován a dokázán v učebnicích (Karatzas a Shreve, 1991, oddíl 5.5.C.) a (McKean, 1969, sekce 3.6), jejich výklad je však velmi stručný a pomíjí mnohé důležité detaily.

Naznačme podstatu Fellerova testu. Je dána autonomní rovnice

$$\mathrm{d}X = b(X_t)\mathrm{d}t + \sigma(X_t)\mathrm{d}W, \tag{ASDE}$$

jejíž koeficienty splňují předpoklady

$$\frac{1 + |b|}{\sigma^2} \in L^1_{loc}((l, r)) \tag{KP}$$

a

$$\sigma^2 > 0 \text{ na } (l, r). \tag{P}$$

Rovnice (ASDE) má slabé řešení, viz (Karatzas a Shreve, 1991, věta 5.15), to je však obtížný výsledek, pro Fellerův test nepodstatný: ten o jeho existenci nic nepředpokládá. Jsou sestrojeny jisté funkce $p, v_c, u, M_{a,b}$, kde $a, b, c \in (l, r)$. Jedná se o řešení několika lineárních diferenciálních rovnic spojených s Kolmogorovovým operátorem

$$L = b\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} + \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}$$

odpovídajícím rovnici (ASDE). Fellerův test podává nutné a postačující podmínky pro neexplosi skoro jistě, případně explosi skoro jistě, v řeči chování funkcí p a v_c v krajních bodech intervalu (l, r). Vyslovíme obě kriteria, z důvodu rozsahu práce dokážeme pouze první z nich. Důkaz testu pro explosi skoro jistě je však velmi podobný.

Kapitola 1

Lokální řešení

Mějme v této kapitole pevně zvolenou stochastickou basi $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), \mathbb{P})$ s normální filtrací, na níž je definován definován $\mathcal{F}_t$-Wienerův proces $W = (W_t)_{t\geq 0}$. Vyšetřujeme úlohu

$$\begin{aligned} \mathrm{d}X &= b(t,X)\mathrm{d}t + \sigma(t,X)\mathrm{d}W \\ X(t_0) &= \varphi, \end{aligned} \tag{SDE}$$

kde $t_0 \in \mathbb{R}_+, b, \sigma\colon \mathbb{R}_+ \times (l,r) \to \mathbb{R}$ jsou borelovské funkce definované na otevřeném intervalu $(l,r) \subset \mathbb{R}$ a $\varphi\colon \Omega \to (l,r)$ je náhodná veličina.

1.1 Průpravné výsledky: globální řešení

Definice 1.1. $(\mathcal{F}_t)$-progresivně měřitelný (l,r)-hodnotový náhodný proces $X = (X(t), t \geq 0)$ splňující

(i) $\displaystyle\int_{t_0}^t \Big(|b(s,X(s))| + |\sigma^2(s,X(s))|\Big)\mathrm{d}s < \infty$ skoro jistě pro všechna $t \in [t_0, \infty)$,

(ii) $X(t) \overset{s.j.}{=} \displaystyle\int_{t_0}^t b(s,X(s))\mathrm{d}s + \int_{t_0}^t \sigma(s,X(s))\mathrm{d}W_s$ pro všechna $t \in [t_0,\infty)$,

(iii) $X(t_0) \overset{s.j.}{=} \varphi$,

nazveme *(globálním) řešením rovnice* (SDE) *na intervalu* $[t_0, \infty)$ *s počáteční podmínkou* $X(t_0) = \varphi$.

Připomeňme si větu o existenci a jednoznačnosti řešení (SDE) s lipschitzovskými koeficienty v případě $(l,r) = \mathbb{R}$, kterou budeme v dalším potřebovat (Seidler, 2011, věta 3.1).

Věta 1.1. *Nechť je dán čas* $T > 0$ *a borelovské funkce* $b\colon [0,T]\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}, \sigma\colon [0,T]\times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *vyhovující následujícím předpokladům*

(I) $\exists K_* < \infty\ \forall t \in [0,T]\ \forall x \in \mathbb{R}$

$$|b(t,x)| \vee |\sigma(t,x)| \leq K_*(1+|x|), \tag{1.1}$$

(II) $\exists K < \infty\ \forall t \in [0,T]\ \forall x,y \in \mathbb{R}$

$$|b(t,x) - b(t,y)| \vee |\sigma(t,x) - \sigma(t,y)| \leq K|x-y|. \tag{1.2}$$

Potom pro každé $t_0 \in [0,T)$ a libovolnou $\mathcal{F}_{t_0}$-měřitelnou funkci $\varphi\colon \Omega \to \mathbb{R}$ splňující $\mathbb{E}\varphi^2 < \infty$ existuje jediné řešení X rovnice (SDE) *na intervalu $[t_0, T]$ s počáteční podmínkou $X(t_0) = \varphi$.*

1.2 Pojem lokálního řešení a věta o existenci a jednoznačnosti

Definice 1.2. Buďte ζ, τ markovské časy. Definujme *stochastické intervaly*

$$\begin{aligned} [\![\zeta, \tau]\!] &= \{(t,\omega) \in \mathbb{R}_+ \times \Omega; \zeta(\omega) \le t \le \tau(\omega)\}, \\ [\![\zeta, \tau)\!) &= \{(t,\omega) \in \mathbb{R}_+ \times \Omega; \zeta(\omega) \le t < \tau(\omega)\}. \end{aligned}$$

Nyní zobecníme definici 1.1 tak, abychom mohli uvažovat lokální řešení, definovaného jen do nějakého markovského času.

Definice 1.3. Nechť $\varepsilon\colon \Omega \to (t_0, \infty]$ je markovský čas a $X\colon [\![t_0, \varepsilon)\!) \to (l, r)$ je progresivně měřitelný náhodný proces.

(i) Buď ζ markovský čas splňující $t_0 \le \zeta < \varepsilon$. Řekneme, že proces X *řeší úlohu* (SDE) *na uzavřeném stochastickém intervalu* $[\![t_0, \zeta]\!]$, pokud

$$\int_{t_0}^{\zeta} \Big(|b(s, X(s))| + |\sigma(s, X(s))|^2 \Big) \mathrm{d}s < \infty \quad \mathbb{P}\text{-skoro jistě} \tag{1.3}$$

a

$$X(t \wedge \zeta) \stackrel{s.j.}{=} \varphi + \int_{t_0}^{t\wedge\zeta} b(s, X(s))\mathrm{d}s + \int_{t_0}^{t\wedge\zeta} \sigma(s, X(s))\mathrm{d}W(s) \tag{1.4}$$

platí pro všechna $t \ge 0$.

(ii) Řekneme, že X *řeší úlohu* (SDE) *na polootevřeném stochastickém intervalu* $[\![t_0\ \varepsilon)\!)$, pokud existuje neklesající posloupnost $(\eta_n)_{n=0}^{\infty}$ markovských časů taková, že $t_0 \le \eta_n \nearrow \varepsilon$ na Ω a X řeší (SDE) na $[\![t_0, \eta_n]\!]$ pro každé $n \in \mathbb{N}$.

(iii) Jestliže X řeší úlohu (SDE) na polootevřeném stochastickém intervalu $[\![t_0, \varepsilon)\!)$ a platí

$$\Big(\liminf_{t \nearrow \varepsilon(\omega)} X(t,\omega) = l \Big) \text{ nebo } \Big(\limsup_{t \nearrow \varepsilon(\omega)} X(t,\omega) = r \Big) \tag{1.5}$$

na $\{\omega \in \Omega; \varepsilon(\omega) < \infty\}$, nazveme markovský čas ε *čas explose* X (nebo *čas opuštění intervalu* (l,r)) a o dvojici (X, ε) hovoříme jako o *lokálním řešení* úlohy (SDE) *na intervalu (l, r)*.

Pro lokální řešení máme k disposici následující větu o jednoznačnosti. Její důkaz spočívá v drobné modifikaci důkazu (Seidler, 2011, věta 5.2) (tato modifikace bude podrobně předvedena v důkazu věty 1.4).

Věta 1.2. *Buďte $b, \sigma\colon \mathbb{R}_+ \times (l, r) \to \mathbb{R}$ borelovské funkce vyhovující předpokladu*

(III) Existují posloupnosti $(l_n)_{n\in\mathbb{N}}, (r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ takové, že $l_n \searrow l, r_n \nearrow r$ a pro všechna $N \in \mathbb{N}$ existuje $K_N < \infty$ a pro všechna $t \ge 0$ a $x, y \in (l_N, r_N)$:*

$$|b(t,x) - b(t,y)| \vee |\sigma(t,x) - \sigma(t,y)| \le K_N |x - y|,$$

Nechť $t_0 \in \mathbb{R}_+, \varphi\colon \Omega \to \mathbb{R}$ je $\mathcal{F}_{t_0}$-měřitelná náhodná veličina a $(X, \varepsilon_X), (Y, \varepsilon_Y)$ jsou dvě lokální řešení úlohy (SDE). *Potom $\varepsilon_X = \varepsilon_Y$ $\mathbb{P}$-skoro všude a*

$$X \mathbb{1}_{[t_0, \varepsilon_X]} = Y \mathbb{1}_{[t_0, \varepsilon_Y]} \quad \mathbb{P}\text{-skoro jistě.}$$

K důkazu věty o existenci a jednoznačnosti lokálního řešení potřebujeme ještě následující lemma, které říká, že trajektorie řešení v libovolné otevřené množině jsou určeny hodnotami koeficientů na této množině (viz Seidler (2011), tvrzení 5.3):

Lemma 1.3. *Buďte $b_i, \sigma_i\colon \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ borelovské funkce, $i = 1, 2$, splňující předpoklady (I), (II) věty 1.1. Nechť $t_0 \in \mathbb{R}_+$ a $\varphi\colon \Omega \to \mathbb{R}$ je $\mathcal{F}_{t_0}$-měřitelná funkce, $\mathbb{E}\varphi^2 < \infty$. Buď $D \subseteq \mathbb{R}$ otevřená množina taková, že*

$$\begin{aligned} b_1 \restriction_{[t_0,\infty)\times D} &= b_2 \restriction_{[t_0,\infty)\times D}, \\ \sigma_1 \restriction_{[t_0,\infty)\times D} &= \sigma_2 \restriction_{[t_0,\infty)\times D} . \end{aligned}$$

Pro $i = 1, 2$ označme X_i řešení úlohy

$$\begin{aligned} \mathrm{d}X_i &= b_i(t, X_i)\mathrm{d}t + \sigma(t, X_i)\mathrm{d}W \\ X_i(t_0) &= \varphi \end{aligned}$$

a položme

$$\tau_i = \inf\{t \geq t_0; X_i(t) \notin D\}.$$

Potom $\mathbb{P}\{\tau_1 = \tau_2\} = 1$ a

$$\sup_{t \geq t_0} |X_1(t \wedge \tau_1) - X_2(t \wedge \tau_2)| = 0 \quad \mathbb{P}\text{-skoro jistě.}$$

Věta 1.4 (Existence a jednoznačnost lokálního řešení)**.** *Nechť $-\infty \leq l < r \leq \infty$. Buďte $b, \sigma\colon \mathbb{R}_+ \times (l, r) \to \mathbb{R}$ borelovské funkce splňující následující předpoklady:*

(III) Existují posloupnosti $(l_n)_{n\in\mathbb{N}}, (r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ v (l, r) takové, že $l_n \searrow l, r_n \nearrow r$ a $\forall N \in \mathbb{N}\ \exists K_N < \infty\ \forall t \geq 0\ \forall x, y \in (l_N, r_N)$:*

$$|b(t, x) - b(t, y)| \vee |\sigma(t, x) - \sigma(t, y)| \leq K_N |x - y|.$$

(IV) $\forall C \subseteq (l, r)$ kompaktní množinu $\forall T \geq 0\ \exists K^*(C, T) < \infty\ \forall t \in [0, T]\ \forall x \in C$*

$$|b(t, x)| + |\sigma(t, x)| \leq K^*(C, T)$$

Potom pro každé $t_0 \in R_+$ a libovolnou $\mathcal{F}_{t_0}$-měřitelnou funkci $\varphi\colon \Omega \to (l, r)$ s $\mathbb{E}\varphi^2 < \infty$ existuje jediné lokální řešení (X, ε) úlohy (SDE) *na intervalu (l, r).*

Důkaz. Jednoznačnost řešení plyne z věty 1.2, dokážeme jeho existenci. Bez újmy na obecnosti předpokládejme $t_0 = 0$. Zvolme $(l_n)_{n\in\mathbb{N}}, (r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reálné posloupnosti z (III*). Pro $h \in \{b, \sigma\}$ a $N \in \mathbb{N}$ položme

$$h_N(t, x) = \begin{cases} h(t, x), & t \geq 0, x \in [l_N, r_N], \\ h(t, x)\frac{r_{N+1} - x}{r_{N+1} - r_N}, & t \geq 0, x \in (r_N, r_{N+1}), \\ h(t, x)\frac{x - l_{N+1}}{l_N - l_{N+1}}, & t \geq 0, x \in (l_{N+1}, l_N), \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Potom b_N, σ_N jsou omezené funkce vyhovující předpokladům věty 1.1. Můžeme tedy nalézt $\hat{K}_N$ takové, že pro všechna $t \geq 0, x, y \in \mathbb{R}$:

$$|b_N(t,x) - b_N(t,y)| \vee |\sigma_N(t,x) - \sigma_N(t,y)| \leq \hat{K}_N |x-y|.$$

Existuje proto jednoznačně určené řešení X_N úlohy

$$\begin{aligned} \mathrm{d}X_N &= b_N(t, X_N)\mathrm{d}t + \sigma_N(t, X_N)\mathrm{d}W, \\ X_N(0) &= \varphi. \end{aligned}$$

Definujme pro každé $N \in \mathbb{N}$ markovský čas τ_N předpisem

$$\tau_N := \inf\{t \geq 0, X_N(t) \notin (l_N, r_N)\}.$$

Jelikož $b_N = b_M, \sigma_N = \sigma_M$ na $\mathbb{R}_+ \times (l_N, r_N)$, kdykoliv $M \geq N$, podle věty 1.3 platí, že

$$X_N \mathbb{1}_{[0,\tau_N)} = X_M \mathbb{1}_{[0,\tau_M)} \ \mathbb{P}\text{-skoro jistě}, \ M \geq N. \tag{1.6}$$

Posloupnost $\{\tau_N\}_{N=1}^{\infty}$ je zřejmě neklesající. Položme

$$\varepsilon = \lim_{N\to\infty} \tau_N.$$

Potom ε je (jakožto supremum posloupnosti markovských časů) opět markovský čas. Jelikož φ má hodnoty v (l,r) $\mathbb{P}$-skoro jistě a X_N mají spojité trajektorie, platí $\varepsilon > 0$ $\mathbb{P}$-skoro jistě. Z rovnosti (1.6) plyne, že $\forall M \geq N \geq 1$ $\exists F_{N,M} \in \mathcal{F}, \mathbb{P}(F_{N,M}) = 1$ a

$$X_M \mathbb{1}_{[\![0,\tau_N))} = X_N \mathbb{1}_{[\![0,\tau_N))} \quad \text{na } \mathbb{R}_+ \times F_{N,M}.$$

Položíme-li $\tau_0 = 0$, můžeme definovat

$$X := \sum_{N=1}^{\infty} X_N \mathbb{1}_{[\![\tau_{N-1},\tau_N))}, \quad 0 \leq t < \varepsilon(\omega),$$

kde pro $\tau_{N-1} = \tau_N$ klademe $[\![\tau_{N-1}, \tau_N)) = \emptyset$. Jelikož pro libovolné (t, ω) je nejvýš jeden sčítanec nenulový, suma konverguje a definuje progresivně měřitelný proces na $[\![0, \varepsilon))$. Pro $N \geq 1$ položme

$$G_N = \bigcap_{k=1}^{N} F_{k,N}.$$

Potom $G_N \in \mathcal{F}, \mathbb{P}(G_N) = 1$ a $X\mathbb{1}_{[\![0,\tau_N))} = X_N \mathbb{1}_{[\![0,\tau_N))}$ na $[\![0, \varepsilon)) \cap (\mathbb{R}_+ \times G_N)$, a tedy

$$X(t \wedge \tau_N) = X_N(t \wedge \tau_N) \quad \mathbb{P}\text{-skoro jistě}, \ 0 \leq t < \varepsilon(\omega), \tag{1.7}$$

Fixujme nyní libovolné $N \geq 1$. Pokud $\varepsilon(\omega) < \infty$, pak určitě $\tau_N(\omega) < \infty$ a

$$X(\tau_N(\omega), \omega) = X_N(\tau_N(\omega), \omega) \notin (l_N, r_N).$$

Z definice τ_N a ze spojitosti trajektorií X máme

$$X(\tau_N(\omega), \omega) \in \{l_N, r_N\},$$

tudíž

$$\left(\liminf_{t\nearrow\varepsilon(\omega)} X(t,\omega)=l\right) \text{ nebo } \left(\limsup_{t\nearrow\varepsilon(\omega)} X(t,\omega)=r\right).$$

Zbývá tedy ukázat, že X řeší úlohu (SDE) na $[\![0,\tau_N]\!]$. Díky (1.7) však máme

$$\begin{aligned} X(t\wedge\tau_N) &= X_N(t\wedge\tau_N) \\ &= \varphi + \int_0^{t\wedge\tau_N} b_N(s,X_N(s))\mathrm{d}s + \int_0^{t\wedge\tau_N} \sigma_N(s,X_N(s))\mathrm{d}W(s) \\ &= \varphi + \int_0^{t\wedge\tau_N} b(s,X(s))\mathrm{d}s + \int_0^{t\wedge\tau_N} \sigma(s,X(s))\mathrm{d}W(s). \end{aligned}$$

□

Poznámka 1.1. V případě $(l,r)=\mathbb{R}$ věta 1.4 odpovídá výsledkům (Seidler, 2011, věta 5.2) a (Friedman, 1975, věta 2.2). ▽

1.3 Limity trajektorií lokálního řešení

Nyní si ukážeme, že pokud k explosi řešení v konečném čase dojde, pak daná trajektorie skoro jistě uteče právě do jednoho z krajních bodů. Důkaz je zjednodušenou jednorozměrnou formou důkazu předloženého v práci (Ondreját a Seidler, v přípravě).

Věta 1.5. *Nechť $b,\sigma\colon \mathbb{R}_+\times(l,r)\to\mathbb{R}$ jsou borelovské funkce splňující podmínky (III*), (IV*) z věty 1.4. Buď (X,ε) lokální řešení rovnice* (SDE) *na intervalu (l,r). Potom pro $\mathbb{P}$-skoro všechna $\omega\in\Omega$ taková, že $\varepsilon(\omega)<\infty$, existuje $\lim_{t\nearrow\varepsilon} X(t)$ a*

$$\lim_{t\nearrow\varepsilon} X(t)\in\{l,r\}.$$

Důkaz. Krok 1. Bez újmy na obecnosti opět předpokládejme $t_0=0$. Zvolme $(l_n)_{n\in\mathbb{N}},(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reálné posloupnosti tak, že $l_n\searrow l, r_n\nearrow r$. Pro $j\in\mathbb{N}$ položme

$$\tau_j := \inf\{t\geq 0, X_j(t)\notin(l_j,r_j)\}.$$

Zvolme uzavřený interval $A=[a,a']\subseteq(l,r)$ a nechť $B=(l,b]\cup[b',r)$ pro nějaká $b,b'\in(l,r), b<a, b'>a'$. Položme

$$r=\operatorname{dist}(A,B)=\min(b'-a',a-b),$$

pak $r\in(0,\infty)$. Definujme posloupnosti markovských časů $\{\sigma_n\}_{n\in\mathbb{N}},\{\kappa_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ předpisem

$$\begin{aligned} \sigma_0 &= 0, \\ \kappa_0 &= \inf\{t\in[0,\varepsilon), X(t)\in B\}, \\ \sigma_n &= \inf\{t\in[0,\varepsilon), t\geq\kappa_{n-1}, X(t)\in A\}, \\ \kappa_n &= \inf\{t\in[0,\varepsilon), t\geq\sigma_n, X(t)\in B\} \end{aligned}$$

pro $n\geq 1$. Máme $\sigma_0\leq\kappa_0\leq\sigma_1\leq\kappa_1\leq\sigma_2\leq ...$ a pro $n\geq 1$ platí

$$\begin{aligned} \sigma_n(\omega)<\infty &\implies X(\sigma_n(\omega),\omega)\in\partial A. \\ \kappa_n(\omega)<\infty &\implies X(\kappa_n(\omega),\omega)\in\partial B, \end{aligned} \tag{1.8}$$

Z definice lokálního řešení máme pro všechna $t \geq 0$ a všechna $n, j \in \mathbb{N}$ rovnost

$$\begin{aligned}
&X(t \wedge \tau_j \wedge \kappa_n) - X(t \wedge \tau_j \wedge \sigma_n)\\
&\quad = \int_{t\wedge\tau_j\wedge\sigma_n}^{t\wedge\tau_j\wedge\kappa_n} b(s, X(s))\mathrm{d}s + \int_{t\wedge\tau_j\wedge\sigma_n}^{t\wedge\tau_j\wedge\kappa_n} \sigma(s, X(s))\mathrm{d}W(s)\\
&\quad = \int_0^t \mathbb{1}_{[\tau_j\wedge\sigma_n, \tau_j\wedge\kappa_n)}(s) b(s, X(s))\mathrm{d}s + \int_0^t \mathbb{1}_{[\tau_j\wedge\sigma_n, \tau_j\wedge\kappa_n)}(s)\sigma(s, X(s))\mathrm{d}W(s)
\end{aligned}$$

$\mathbb{P}$-skoro jistě, proces $(X(\cdot\wedge\tau_j\wedge\kappa_n) - X(\cdot\wedge\tau_j\wedge\sigma_n))$ má tedy stochastický diferenciál. Můžeme proto použít Itôovu formuli (věta A.6):

$$\begin{aligned}
&[X(t \wedge \tau_j \wedge \kappa_n) - X(t \wedge \tau_j \wedge \sigma_n)]^2\\
&\quad = 2\int_0^t \mathbb{1}_{[\tau_j\wedge\sigma_n, \tau_j\wedge\kappa_n)}(s)[X(s\wedge\tau_j\wedge\kappa_n) - X(s\wedge\tau_j\wedge\sigma_n)] b(s, X(s))\mathrm{d}s\\
&\qquad + 2\int_0^t \mathbb{1}_{[\tau_j\wedge\sigma_n, \tau_j\wedge\kappa_n)}(s)[X(s\wedge\tau_j\wedge\kappa_n) - X(s\wedge\tau_j\wedge\sigma_n)]\sigma(s, X(s))\mathrm{d}W(s)\\
&\qquad + \int_0^t \mathbb{1}_{[\tau_j\wedge\sigma_n, \tau_j\wedge\kappa_n)}(s)\sigma^2(s, X(s))\mathrm{d}s
\end{aligned}$$

platí $\mathbb{P}$-skoro jistě pro všechna $t \geq 0$. Kdykoliv jest $\sigma_n(\omega) \leq t \leq \kappa_n(\omega)$, tak platí $X(t, \omega) \in C \coloneqq [b, b']$, speciálně

$$|X(t, \omega)| \leq \beta \coloneqq \max\Big\{|b|, |b'|\Big\}.$$

C je kompaktní množina, podle (IV*)

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\int_0^t \mathbb{1}_{[\tau_j\wedge\sigma_n, \tau_j\wedge\kappa_n)}(s)|X(s\wedge\tau_j\wedge\kappa_n) - X(s\wedge\tau_j\wedge\sigma_n)|^2\sigma^2(s, X(s))\mathrm{d}s\\
&\quad \leq 2\beta^2 K^*(C, t)^2 t,
\end{aligned}$$

a proto

$$\mathbb{E}\int_0^t \mathbb{1}_{[\tau_j\wedge\sigma_n, \tau_j\wedge\kappa_n)}(s)[X(s\wedge\tau_j\wedge\kappa_n) - X(s\wedge\tau_j\wedge\sigma_n)]\sigma(s, X(s))\mathrm{d}W(s) = 0.$$

Podobně

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\int_0^t \mathbb{1}_{[\tau_j\wedge\sigma_n, \tau_j\wedge\kappa_n)}(s)|X(s\wedge\tau_j\wedge\kappa_n) - X(s\wedge\tau_j\wedge\sigma_n)| b(s, X(s))\mathrm{d}s\\
&\quad \leq 2\beta K^*(C, t)\int_0^t \mathbb{1}_{[\tau_j\wedge\sigma_n, \tau_j\wedge\kappa_n)}(s)\mathrm{d}s
\end{aligned}$$

a

$$\mathbb{E}\int_0^t \mathbb{1}_{[\tau_j\wedge\sigma_n, \tau_j\wedge\kappa_n)}(s)\sigma^2(s, X(s))\mathrm{d}s \leq \beta K^*(C, t)^2\int_0^t \mathbb{1}_{[\tau_j\wedge\sigma_n, \tau_j\wedge\kappa_n)}(s)\mathrm{d}s.$$

Položme $L \coloneqq \beta K^*(C, t)(2 + K^*(C, t)) < \infty$. Z předchozích výpočtů máme

$$\mathbb{E}\Big[X(t\wedge\tau_j\wedge\kappa_n) - X(t\wedge\tau_j\wedge\sigma_n)\Big]^2 \leq L\int_0^t \mathbb{1}_{[\tau_j\wedge\sigma_n, \tau_j\wedge\kappa_n)}(s)\mathrm{d}s.$$

Užitím Fatouova lemmatu a Leviho věty získáme odhad

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\liminf_{j\to\infty}\sum_{n=1}^{\infty}[X(t\wedge\tau_j\wedge\kappa_n)-X(t\wedge\tau_j\wedge\sigma_n)]^2\\
&\leq \liminf_{j\to\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{E}[X(t\wedge\tau_j\wedge\kappa_n)-X(t\wedge\tau_j\wedge\sigma_n)]^2\\
&\leq \liminf_{j\to\infty} L\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^t \mathbb{1}_{[\tau_j\wedge\sigma_n,\tau_j\wedge\kappa_n)}(s)\mathrm{d}s\\
&\leq Lt.
\end{aligned}\tag{1.9}$$

Poslední nerovnost plyne z faktu, že $\{[\tau_j\wedge\sigma_n,\tau_j\wedge\kappa_n); n\geq 1\}$ je systém disjunktních intervalů. Je-li $\kappa_n(\omega)<\varepsilon(\omega)$, pak $\sigma_n(\omega)\leq\kappa_n(\omega)<\varepsilon(\omega)$. Užitím Fatouova lemmatu pro sumy, spojitosti trajektorií a (1.8) dostáváme

$$\begin{aligned}
&\liminf_{j\to\infty}\sum_{n=1}^{\infty}[X(t\wedge\tau_j\wedge\kappa_n)-X(t\wedge\tau_j\wedge\sigma_n)]^2\\
&\geq \sum_{n=1}^{\infty}\liminf_{j\to\infty}[X(t\wedge\tau_j\wedge\kappa_n)-X(t\wedge\tau_j\wedge\sigma_n)]^2\\
&= \sum_{n=1}^{\infty}[X(t\wedge\varepsilon\wedge\kappa_n)-X(t\wedge\varepsilon\wedge\sigma_n)]^2\\
&\geq \sum_{\substack{n=1\\ \kappa_n<t\wedge\varepsilon}}^{\infty}[X(t\wedge\varepsilon\wedge\kappa_n)-X(t\wedge\varepsilon\wedge\sigma_n)]^2\\
&\geq r^2\mathrm{card}\{n\geq 1;\kappa_n<t\wedge\varepsilon\}.
\end{aligned}$$

Z tohoto a z (1.9) máme

$$\mathbb{E}\Big[\mathrm{card}\{n\geq 1;\kappa_n<t\wedge\varepsilon\}\Big]\leq\frac{Lt}{r^2},$$

a tedy platí

$$\mathrm{card}\{n\geq 1;\kappa_n<t\wedge\varepsilon\}<\infty$$

$\mathbb{P}$-skoro jistě pro všechna $t\geq 0$. Je-li $\varepsilon(\omega)<\infty$, lze vzít $t\in\mathbb{Q}_+, t>\varepsilon(\omega)$:

$$\Big[\mathrm{card}\{n\geq 1;\kappa_n<\varepsilon\}=\infty\Big]=\bigcup_{t\in\mathbb{Q}_+}\Big[t>\varepsilon,\mathrm{card}\{n\geq 1;\kappa_n<t\wedge\varepsilon\}=\infty\Big],$$

což je spočetné sjednocení množin nulové míry, z čehož plyne

$$\mathrm{card}\{n\geq 1;\kappa_n(\omega)<\varepsilon(\omega)\}<\infty$$

pro $\mathbb{P}$-skoro všechna $\omega\in\Omega$ taková, že $\varepsilon(\omega)<\infty$. Pro $\mathbb{P}$-skoro všechna $\omega\in\{\varepsilon<\infty\}$ tedy platí:

$$\exists m\in\mathbb{N}:\kappa_m(\omega)<\varepsilon(\omega)\text{ a }\kappa_{m+1}=\infty.$$

Nyní jsou dvě možnosti: Buď $\sigma_{m+1}(\omega)=\infty$, nebo $\sigma_{m+1}(\omega)<\infty$. Pokud $\sigma_{m+1}=\infty$, pak pro všechna $t\in[\kappa_m(w),\varepsilon(w))$ je $X(t,\omega)\notin A$, tudíž

$$\Big(X(t,\omega)<a\ \forall t\in[\kappa_m(w),\varepsilon(w))\Big),\text{ nebo }\Big(X(t,\omega)>a'\ \forall t\in[\kappa_m(w),\varepsilon(w))\Big).\tag{1.10}$$

(Případ $X(t',\omega) < a, X(t'',\omega) > a'$ pro nějaká t', t'' je vyloučen z věty o nabývání mezihodnot, jelikož $\sigma_{m+1}(\omega) = \infty$.) V případě, že $\sigma_{m+1}(\omega) < \infty$, z $\kappa_{m+1}(\omega) = \infty$ plyne, že $X(t,\omega) \in (b,b')$ pro všechna $t \in [\sigma_{m+1}(\omega), \varepsilon(\omega))$. Zvolme $j \in \mathbb{N}$ tak velké, aby $\tau_j(\omega) > \omega_{m+1}(\omega)$ a $l_j < b < b' < r_j$. Jelikož $\tau_j(\omega) < \varepsilon(\omega) < \infty$, je buď $X(\tau_j(\omega),\omega) < b$, nebo $X(\tau_j(\omega),\omega) > b'$. To je spor, musí tedy platit $\sigma_{m+1}(\omega) = \infty$.

Krok 2. Úvahy z předchozího kroku aplikujeme na posloupnost uzavřených množin $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}, (B_k)_{k\in\mathbb{N}}, A_k = [a_k, a'_k]$, kde $a_k \searrow l, a'_k \nearrow r$. Pro $\mathbb{P}$-skoro všechna $\omega \in \{\varepsilon < \infty\}$ máme z (1.10) buď

$$\forall k \in \mathbb{N}\ \exists \delta_k < \varepsilon(\omega)\ \forall t \in [\delta_k, \varepsilon(\omega)) : X(t,\omega) < a_k,$$

nebo

$$\forall k \in \mathbb{N}\ \exists \delta_k < \varepsilon(\omega)\ \forall t \in [\delta_k, \varepsilon(\omega)) : X(t,\omega) > a'_k,$$

čímž je tvrzení dokázáno.

□

Kapitola 2

Důkaz Fellerova testu

V této kapitole uvažujme autonomní rovnici

$$\begin{aligned} \mathrm{d}X &= b(X)\mathrm{d}t + \sigma(X)\mathrm{d}W \\ X(t_0) &= x_0 \end{aligned} \tag{ASDE}$$

na otevřeném intervalu (l, r), kde $x_0 \in (l, r)$, a $b, \sigma\colon (l, r) \to \mathbb{R}$ jsou borelovské funkce nezávisící na čase $t \in \mathbb{R}_+$. V celé kapitole předpokládejme

$$\frac{1 + |b|}{\sigma^2} \in L^1_{loc}((l, r)). \tag{KP}$$

a

$$\sigma^2 > 0 \text{ na } (l, r). \tag{P}$$

Buď (X, ε) lokální řešení (ASDE) definované na stochastické basi $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), \mathbb{P})$ s $(\mathcal{F}_t)$-Wienerovým procesem W. Buď L *Kolmogorovův operátor odpovídající rovnici* (ASDE), to jest operátor odpovídající integrandu v Lebesgueově integrálu v Itôově formuli v autonomním případě:

$$Lh(x) = b(x)h'(x) + \frac{1}{2}\sigma^2(x)h''(x), \quad x \in (l, r). \tag{2.1}$$

Naším cílem je ukázat, že je-li u nezáporné řešení rovnice

$$\begin{aligned} Lu &= u \text{ na } (l, r), \\ u(c) &= 1, \\ u'(c) &= 0, \end{aligned} \tag{2.2}$$

pro nějaké $c \in (l, r)$, pak „$(e^{-(t\wedge\varepsilon)}u(X(t \wedge \varepsilon)), t \geq 0)$“ je nezáporný supermartingal. Z martingalové konvergenční věty pak vyplyne, že $\mathbb{P}\{\varepsilon = \infty\} = 1$, pokud $\lim_{x\searrow l}(x) = \lim_{x\nearrow r}(x) = \infty$.

Existenci nezáporného řešení úlohy (2.2) je však potřeba dokázat. Proces „$(e^{-(t\wedge\varepsilon)}u(X(t \wedge \varepsilon)), t \geq 0)$“ obecně není dobře definován: pro $\omega \in \{\varepsilon < \infty\}$ nedává pro $t \geq \varepsilon(\omega)$ výraz $u(X(t \wedge \varepsilon(\omega)))$ smysl. Je třeba ho tedy aproximovat procesy, jež dobře definovány jsou.

Řešení u navíc nezískáme explicitně: shora i zdola je budeme aproximovat funkcemi, které (byť možná trochu komplikovanými formulemi) explicitně zadány budou.

2.1 Pomocné funkce

Zvolme libovolně pevně primitivní funkci B k $-\frac{2b}{\sigma^2}$ na (l,r) a p primitivní funkci k e^B na (l,r), pro určitost volme $a \in (l,r)$ a položme

$$p(z) = \int_a^z \exp\Big\{-\int_a^x \frac{2b(y)}{\sigma^2(y)}\mathrm{d}y\Big\}\mathrm{d}x, \quad z \in (l,r).$$

Funkci p nazýváme *škálovací funkce* (anglicky *scale function*).

Díky předpokladu (KP) je $\frac{b}{\sigma^2} \in L^1_{loc}((l,r))$, B je tedy dobře definováno. Podle věty A.1 je $B \in AC_{loc}((l,r))$, tedy i $e^B \in AC_{loc}((l,r))$. Podle věty A.3 existuje $p'(z)$ pro všechna $z \in (l,r)$ a platí rovnost

$$p'(z) = e^{B(z)},\ z \in (l,r).$$

Dohromady dostáváme $p \in AC^1_{loc}((l,r))$, speciálně

$$p, p' \in \mathcal{C}((l,r)) \tag{2.3}$$

a $p''(z)$ je definovaná pro skoro všechna $z \in (l,r)$. Pro $z \in (l,r)$ platí

$$p'(z) = \exp\Big\{-\int_a^z \frac{2b(y)}{\sigma^2(y)}\mathrm{d}y\Big\} > 0, \quad z \in (l,r),$$

p je tedy striktně rostoucí. Počítejme nyní pro skoro všechna $z \in (l,r)$:

$$p''(z) = -\frac{2b(z)}{\sigma^2(z)}\exp\Big\{-\int_a^z \frac{2b(y)}{\sigma^2(y)}\mathrm{d}y\Big\} = -\frac{2b(z)}{\sigma^2(z)}p'(z),$$

to jest

$$Lp = \frac{\sigma^2}{2}p'' + bp' = 0 \tag{2.4}$$

skoro všude na (l,r).

Pro libovolný uzavřený interval $[\alpha,\beta] \subseteq (l,r)$ takový, že $x_0 \in [\alpha,\beta]$, položme

$$M_{\alpha,\beta}(x) = -2\int_\alpha^x \frac{p(x)-p(y)}{p'(y)\sigma^2(y)}\mathrm{d}y + 2\frac{p(x)-p(\alpha)}{p(\beta)-p(\alpha)}\int_\alpha^\beta \frac{p(\beta)-p(y)}{p'(y)\sigma^2(y)}\mathrm{d}y,$$

$x \in (l,r)$. Evidentně

$$M_{\alpha,\beta}(\alpha) = M_{\alpha,\beta}(\beta) = 0. \tag{2.5}$$

Díky (2.3) máme

$$\frac{1}{p'\sigma^2}, \frac{p}{p'\sigma^2} \in L^1_{loc}((l,r)), \tag{2.6}$$

podle věty A.1 jsou funkce

$$\int_c^\cdot \frac{1}{p'(y)\sigma^2(y)}\mathrm{d}y, \quad \int_c^\cdot \frac{p(y)}{p'(y)\sigma^2(y)}\mathrm{d}y \tag{2.7}$$

lokálně absolutně spojité, vzhledem k lokální absolutní spojitosti p jest

$$M_{\alpha,\beta} \in AC_{loc}((l,r))$$

a dle věty A.2 $M'_{\alpha,\beta}(x)$ existuje pro skoro všechna $x \in (l,r)$. Pro skoro všechna $x \in (l,r)$ počítejme:

$$
\begin{aligned}
M'_{\alpha,\beta}(x) &= -2\Big[p(x)\int_\alpha^x \frac{1}{p'(y)\sigma^2(y)}\mathrm{d}y\Big]' \\
&\quad + 2\Big[\int_\alpha^x \frac{p(y)}{p'(y)\sigma^2(y)}\mathrm{d}y\Big]' \\
&\quad + 2\Big[\frac{p(x)-p(\alpha)}{p(\beta)-p(\alpha)}\int_\alpha^\beta \frac{p(\beta)-p(y)}{p'(y)\sigma^2(y)}\mathrm{d}y\Big]' \\
&= -2\Big[p'(x)\int_\alpha^x \frac{1}{p'(y)\sigma^2(y)}\mathrm{d}y + \frac{p(x)}{p'(x)\sigma^2(x)}\Big] \\
&\quad + 2\frac{p(x)}{p'(x)\sigma^2(x)} \\
&\quad + 2\frac{p'(x)}{p(\beta)-p(\alpha)}\int_\alpha^\beta \frac{p(\beta)-p(y)}{p'(y)\sigma^2(y)}\mathrm{d}y \\
&= 2p'(x)\Big[-\int_\alpha^x \frac{1}{p'(y)\sigma^2(y)}\mathrm{d}y + \frac{1}{p(\beta)-p(\alpha)}\int_\alpha^\beta \frac{p(\beta)-p(y)}{p'(y)\sigma^2(y)}\mathrm{d}y\Big].
\end{aligned} \tag{2.8}
$$

Ukážeme, že $M_{\alpha,\beta}$ je nezáporná. Označme

$$\mathrm{d}\nu(x) = \frac{\mathrm{d}x}{p'(x)\sigma^2(x)}.$$

(ν nazýváme *mírou rychlosti*, v angličtině *speed measure*.) Označme dále

$$D_{\alpha,\beta} = \frac{1}{p(\beta)-p(\alpha)}\int_\alpha^\beta (p(\beta)-p(y))\mathrm{d}\nu(x),$$

potom je $D_{\alpha,\beta}$ nezáporná konstanta (díky kladnosti p') a můžeme psát

$$M'_{\alpha,\beta}(x) = 2p'(x)\Big[-\nu([\alpha,x]) + D_{\alpha,\beta}\Big].$$

Potom $M'_{\alpha,\beta}(\alpha) = D_{\alpha,\beta} > 0$ a $-\nu([\alpha,x]) + D_{\alpha,\beta}$ je klesající funkce x na $[\alpha,\beta]$. Díky kladnosti p' a (2.5) musí $M'_{\alpha,\beta}$ změnit znaménko na $[\alpha,\beta]$ právě jednou: existuje $\hat{\alpha} \in (\alpha,\beta)$ takové, že

$$M'_{\alpha,\beta}(x) > 0 \ \forall x \in [\alpha,\hat{\alpha}) \text{ a } M'_{\alpha,\beta}(x) \leq 0 \ \forall x \in [\hat{\alpha},\beta].$$

Opětovným užitím (2.5) již dostáváme

$$M_{\alpha,\beta} \geq 0 \text{ na } [\alpha,\beta].$$

Díky lokální absolutní spojitosti funkcí (2.7) a lokální absolutní spojitosti p' je $M'_{\alpha,\beta} \in AC_{loc}((l,r))$, tudíž $M_{\alpha,\beta} \in AC^1_{loc}((l,r))$. Podle věty A.2 $M''_{\alpha,\beta}(x)$ existuje pro skoro všechna $x \in (l,r)$. Znovu počítejme pro skoro všechna $x \in (l,r)$:

$$
\begin{aligned}
M''_{\alpha,\beta}(x) &= -2\Big[p'(x)\int_\alpha^x \frac{1}{p'(y)\sigma^2(y)}\mathrm{d}y + \frac{p'(x)}{p(\beta)-p(\alpha)}\int_\alpha^\beta \frac{p(\beta)-p(y)}{p'(y)\sigma^2(y)}\mathrm{d}y\Big]' \\
&= -2\Big[p''(x)\int_\alpha^x \frac{1}{p'(y)\sigma^2(y)}\mathrm{d}y + \frac{1}{\sigma^2(x)} \\
&\qquad + \frac{p''(x)}{p(\beta)-p(\alpha)}\int_\alpha^\beta \frac{p(\beta)-p(y)}{p'(y)\sigma^2(y)}\mathrm{d}y\Big].
\end{aligned}
$$

Dosazením (2.4) a (2.8) dostáváme pro skoro všechna $x \in (l, r)$

$$\begin{aligned} M''_{\alpha,\beta}(x) &= -\frac{2}{\sigma^2(x)} + \frac{2b(x)}{\sigma^2(x)} 2p'(x) \Big[-\int_\alpha^x \frac{1}{p'(y)\sigma^2(y)} \mathrm{d}y \\ &\qquad + \frac{1}{p(\beta)-p(\alpha)} \int_\alpha^\beta \frac{p(\beta)-p(y)}{p'(y)\sigma^2(y)} \mathrm{d}y \Big] \\ &= -\frac{2}{\sigma^2(x)} \Big[1 + b(x) M'_{\alpha,\beta}(x) \Big], \end{aligned}$$

čímž získáváme identitu

$$LM = bM'_{\alpha,\beta} + \frac{\sigma^2}{2} M''_{\alpha,\beta} = -1 \tag{2.9}$$

skoro všude na (l, r). Pro $c, x \in (l, r)$ dále definujme

$$v_c(x) = 2 \int_c^x \frac{p(x)-p(y)}{p'(y)\sigma^2(y)} \mathrm{d}y. \tag{2.10}$$

(Pro $b > a$ definujeme $\int_b^a f$ jako $-\int_a^b f$.) Užitím totožné argumentace jako v případě $M_{\alpha,\beta}$ dostáváme $v_c \in AC_{loc}((l, r))$, $v'_c(x)$ existuje pro skoro všechna $x \in (l, r)$ a je rovna

$$\begin{aligned} v'_c(x) &= 2\Big[p(x) \int_c^x \frac{1}{p'(y)\sigma^2(y)} \mathrm{d}y - \int_c^x \frac{p(y)}{p'(y)\sigma^2(y)} \mathrm{d}y \Big]' \\ &= 2\Big[p'(x) \int_c^x \frac{1}{p'(y)\sigma^2(y)} \mathrm{d}y + \frac{p(x)}{p'(x)\sigma^2(x)} - \frac{p(x)}{p'(x)\sigma^2(x)} \Big] \\ &= 2p'(x) \int_c^x \frac{1}{p'(y)\sigma^2(y)} \mathrm{d}y \begin{cases} > 0, & x > c, \\ = 0, & x = c, \\ < 0, & x < c. \end{cases} \end{aligned} \tag{2.11}$$

Platí $v_c(c) = 0, v'_c(c) = 0, v_c$ je nezáporná na (l, r) a je ryze klesající na $(l, c]$ a ryze rostoucí na $[c, r)$. Opět, $v'_c \in AC_{loc}((l, r))$, $v''_c(x)$ existuje pro skoro všechna $x \in (l, r)$ a

$$\begin{aligned} v''_c(x) &= 2\Big[p'(x) \int_c^x \frac{1}{p'(y)\sigma^2(y)} \mathrm{d}y \Big]' \\ &= 2p''(x) \int_c^x \frac{1}{p'(y)\sigma^2(y)} \mathrm{d}y + \frac{2}{\sigma^2(x)}. \end{aligned}$$

Dosazením (2.4) a (2.11) dostáváme pro skoro všechna $x \in (l, r)$

$$\begin{aligned} v''_c(x) &= -\frac{2b(x)}{\sigma^2(x)} 2p'(x) \int_c^x \frac{1}{p'(y)\sigma^2(y)} \mathrm{d}y + \frac{2}{\sigma^2(x)} \\ &= -\frac{2b(x)}{\sigma^2(x)} v'_c(x) + \frac{2}{\sigma^2(x)}, \end{aligned}$$

čímž obdržíme identitu

$$\frac{1}{2}\sigma^2 v''_c + 2bv'_c = 1, \tag{2.12}$$

jež platí skoro všude na (l,r). Označme D primitivní funkci k $\frac{2}{p'\sigma^2}$ na (l,r) s $D(c)=0$, to jest

$$D(x) = \int_c^x \frac{2}{p'(y)\sigma^2(y)}\mathrm{d}y, \quad x \in (l,r).$$

Díky (2.11) je v_c primitivní funkce k $p'D$ s $v_c(c)=0$.

Poznámka 2.1. Pokud jsou navíc b, $\frac{1}{\sigma^2}$ spojité na (l,r), pak funkce

$$\frac{1}{p'(\cdot)\sigma^2(\cdot)}, \quad \frac{p(\cdot)}{p'(\cdot)\sigma^2(\cdot)},$$

vyskytující se v integrandech v definicích $M_{\alpha,\beta}$ a v_c, jsou také spojité na (l,r), tudíž můžeme opakovaně použít větu A.3, ze které postupně plyne existence spojitých $M'_{\alpha,\beta}(x)$, $M''_{\alpha,\beta}(x)$, $v'_c(x)$ a $v''_c(x)$ pro všechna $x \in (l,r)$, tedy

$$p, M_{\alpha,\beta}, v_c \in \mathcal{C}^2((l,r)). \tag{2.13}$$

Vzhledem k tomu, že postup výpočtu derivace zůstává nezměněn (pouze je rozšířen její definiční obor), identity (2.4), (2.9) a (2.12) v tomto případě platí všude na (l,r). ∇

Ukažme si nyní, že podstatné vlastnosti funkce v_c nezávisí na volbě c.

Pozorování 2.1. *Buď v_c definována předpisem* (2.10)*. Potom:*

i) Pokud existuje $c \in (l,r)$ takové že, $v_c(r_-) = \infty$, potom $v_\gamma(r_-) = \infty$ pro všechna $\gamma \in (l,r)$.

ii) Je-li $p(r_-) = \infty$, potom $v_\gamma(r_-) = \infty$ pro všechna $\gamma \in (l,r)$.

iii) Pokud existuje $c \in (l,r)$ takové že, $v_c(l_+) = \infty$, potom $v_\gamma(l_+) = \infty$ pro všechna $\gamma \in (l,r)$.

iv) Je-li $p(l_+) = -\infty$, potom $v_\gamma(l_+) = \infty$ pro všechna $\gamma \in (l,r)$.

Důkaz. Označme opět

$$\mathrm{d}\nu(x) = \frac{\mathrm{d}x}{p'(x)\sigma^2(x)}.$$

Zvolme $\alpha, \gamma \in (l,r), \alpha < \gamma$ libovolně. Potom pro všechna $x \in (l,r), x \geq \gamma$ jest

$$\begin{aligned}
v_\alpha(x) &= 2\int_\alpha^x [p(x)-p(y)]\mathrm{d}\nu(y) \\
&= 2\int_\alpha^\gamma [p(x)-p(y)]\mathrm{d}\nu(y) + 2\int_\gamma^x [p(x)-p(y)]\mathrm{d}\nu(y) \\
&= 2\int_\alpha^\gamma [p(x)-p(y)]\mathrm{d}\nu(y) + v_\gamma(x) \\
&= 2p(x)\int_\alpha^\gamma \mathrm{d}\nu(y) - 2p(\gamma)\int_\alpha^\gamma \mathrm{d}\nu(y) + 2\int_\alpha^\gamma [p(\gamma)-p(y)]\mathrm{d}\nu(y) + v_\gamma(x) \\
&= 2[p(x)-p(\gamma)]\nu([\alpha,\gamma]) + v_\alpha(\gamma) + v_\gamma(x).
\end{aligned}$$

Limitním přechodem pak získáváme

$$v_\alpha(r_-) = 2[p(r_-)-p(\gamma)]\nu([\alpha,\gamma]) + v_\alpha(\gamma) + v_\gamma(r_-). \tag{2.14}$$

Pokud $p(r_-) = \infty$, pak musí platit $v_\alpha(r_-) = \infty$, neboť $\nu([\alpha, \gamma]) > 0$ a $v_\gamma(r_-) > 0$. Jelikož α bylo voleno libovolně, je dokázáno *(ii)*. Pokud $p(r_-) < \infty$, potom $v_\alpha(r_-) = \infty$ platí právě tehdy, když $v_\gamma(r_-) = \infty$. To nám, spolu s předchozím případem, dává *(i)*. Body *(iii)* a *(iv)* se dokáží analogicky, jen je potřeba v případě $x \leq \gamma < \alpha$ dbát na obrácená znaménka v integrálech: rovnost (2.14) totiž přejde na

$$v_\alpha(l_+) = 2[p(\gamma) - p(l_+)]\nu([\gamma, \alpha]) + v_\gamma(l_+) - v_\gamma(\alpha).$$

$\square$

2.2 Konstrukce řešení u

Buď $c \in (l, r)$ pevně zvolené. Definujme induktivně

$$\begin{aligned} u_0(x) &\equiv 1, \\ \Gamma_n(x) &= \int_c^x \frac{2u_{n-1}(y)}{p'(y)\sigma^2(y)} \mathrm{d}y, \\ u_n(x) &= \int_c^x p'(y)\Gamma_n(y)\mathrm{d}y \end{aligned}$$

pro $x \in (l, r), n \geq 1$.

Snadno se nahlédne, že (KP) implikuje $\Gamma_n \in AC_{loc}((l, r)), u_n \in AC^1_{loc}((l, r))$: $u_0 = 1 \in AC^1_{loc}, \Gamma_1 = \int_c^x \frac{2}{p'(y)\sigma^2(y)}\mathrm{d}y \in AC_{loc}$, viz (2.7). Předpokládejme, že pro nějaké $n \geq 1$ platí $\Gamma_{n-1} \in AC_{loc}((l, r)), u_{n-1} \in AC^1_{loc}((l, r))$. Potom $2u_{n-1}\frac{1}{p'\sigma^2} \in L^1_{loc}((l, r))$ díky (2.6), a tedy $\Gamma_n \in AC_{loc}((l, r))$ podle věty A.1. Jelikož $p' \in AC_{loc}((l, r))$, tudíž i $p'\Gamma_n \in AC_{loc}((l, r))$, užitím téže věty v kombinaci s větou A.2 dostáváme $u_n = \int_c^\cdot p'(y)\Gamma_n(y)\mathrm{d}y \in AC^1_{loc}((l, r))$.

Pro další užití pišme

$$\begin{aligned} \Gamma_n' &= \frac{2u_{n-1}}{p'\sigma^2} \quad &&\text{skoro všude na } (l, r), \\ u_n' &= p'\Gamma_n &&\text{na } (l, r). \end{aligned} \tag{2.15}$$

Indukcí ověříme, že pro všechna $n \geq 1$ platí:

1. Γ_n je striktně rostoucí na (l, r),
2. $\Gamma_n < 0$ na $(l, c), \Gamma_n > 0$ na (c, r),
3. $u_n \geq 0$ na $(l, r), u_n(c) = 0$,
4. u_n je striktně klesající na $(l, c]$ a je striktně rostoucí na $[c, r)$.

Máme $\Gamma_1' = \frac{2}{p'\sigma^2} \geq 0$ na (l, r) a $\Gamma_1' > 0$ skoro všude na (l, r) díky lokální integrovatelnosti $\frac{1}{\sigma^2}$, z toho plyne striktní monotonie; $\Gamma_1 < 0$ na (l, c), $\Gamma_1 > 0$ na (c, r) z definice Γ_1; díky kladnosti p' máme $p'\Gamma_1 < 0$ na (l, c) a $p'\Gamma_1 > 0$ na (c, r). Nechť tvrzení bodů 1. – 4. platí pro nějaké $n \geq 1$. Potom je opět $\Gamma_{n+1}' = \frac{2u_n}{p'\sigma^2} \geq 0$ na (l, r) a $\Gamma_{n+1}' > 0$ skoro všude na (l, r); dosazením u_n do definice Γ_{n+1} získáváme $\Gamma_{n+1} < 0$ na (l, c), $\Gamma_{n+1} > 0$ na (c, r); tudíž i $p'\Gamma_{n+1} < 0$ na (l, c), $p'\Gamma_{n+1} > 0$

na (c, r), čímž je dokázána striktní monotonie u_{n+1} na intervalech $(l, c]$ a $[c, r)$; nezápornost u_{n+1} je přímým důsledkem, jelikož $u_{n+1}(c) = 0$.

Dokažme, že na (l, r) platí

$$u_n \leq \frac{v_c^n}{n!} \tag{2.16}$$

a

$$|\Gamma_n| \leq |\Gamma_1| \frac{v_c^{n-1}}{(n-1)!}. \tag{2.17}$$

Integrací per partes dostaneme

$$\begin{aligned} u_1(x) &= \int_c^x p'(y) \int_c^y \frac{2}{p'(z)\sigma^2(z)} \mathrm{d}z \mathrm{d}y \\ &= p(x) \int_c^x \frac{2}{p'(y)\sigma^2(y)} \mathrm{d}y - \int_c^x p(y) \frac{2}{p'(y)\sigma^2(y)} \mathrm{d}y \\ &= v_c(x), \end{aligned}$$

(2.16) i (2.17) proto platí pro $n = 0, 1$. Buď $n \geq 2$, předpokládejme, že (2.16) a (2.17) platí pro $n - 1$. Užitím indukčního předpokladu a identity $(u_1^{n-1})' = (n-1)u_1^{n-2}p'\Gamma_1$ získáme

$$\begin{aligned} \Gamma_n' = \Gamma_1' u_{n-1} &\leq \Gamma_1' \frac{v_c^{n-1}}{(n-1)!} = \Gamma_1' \frac{u_1^{n-1}}{(n-1)!} \\ &\leq \Gamma_1' \frac{u_1^{n-1}}{(n-1)!} + \underbrace{\Gamma_1^2 p' \frac{u_1^{n-2}}{(n-2)!}}_{\geq 0} \\ &= \left[\Gamma_1 \frac{u_1^{n-1}}{(n-1)!} \right]', \end{aligned}$$

tudíž pro $x \in [c, r)$ máme

$$0 \leq \Gamma_n(x) = \int_c^x \Gamma_n'(y) \mathrm{d}y \leq \int_c^x \left[\Gamma_1 \frac{u_1^{n-1}}{(n-1)!} \right]'(y) \mathrm{d}y = \Gamma_1(x) \frac{u_1^{n-1}(x)}{(n-1)!}$$

a analogicky pro $x \in (l, c]$ (integrál obrací znaménko pro $x \leq c$)

$$0 \geq \Gamma_n(x) \geq \Gamma_1(x) \frac{u_1^{n-1}(x)}{(n-1)!}.$$

Máme tedy pro všechna $x \in (l, r)$

$$|\Gamma_n(x)| \leq |\Gamma_1(x)| \frac{u_1^{n-1}(x)}{(n-1)!} = |\Gamma_1(x)| \frac{v_c^{n-1}(x)}{(n-1)!},$$

což je přesně (2.17). Odtud pro $x \in [c, r)$

$$\begin{aligned}
0 \le u_n(x) &= \int_c^x p'(y)\Gamma_n(y)\mathrm{d}y \\
&\le \int_c^x p'(y)\Gamma_1(y)\frac{u_1^{n-1}(y)}{(n-1)!}\mathrm{d}y \\
&= \int_c^x u_1'(y)\frac{u_1^{n-1}(y)}{(n-1)!}\mathrm{d}y \\
&= \int_c^x \left[\frac{u_1^n}{n!}\right]'(y)\mathrm{d}y \\
&= \frac{u_1^n(x)}{n!}
\end{aligned}$$

a podobně pro $x \in (l, c]$ (užitím $\Gamma_n \le 0$ na $(l, c]$)

$$0 \le u_n(x) = \int_c^x p'(y)\Gamma_n(y)\mathrm{d}y = \left|\int_c^x p'(y)\Gamma_n(y)\mathrm{d}y\right| \le \frac{u_1^n(x)}{n!},$$

což nám dohromady dává platnost (2.16).

Dále, užitím (2.15) a (2.17):

$$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n'| = p' \sum_{n=1}^{\infty} |\Gamma_n| \le p'|\Gamma_1| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|v_c|^{n-1}}{(n-1)!}.$$

Je-li $[\alpha, \beta]$ libovolný uzavřený interval, pak $p', \Gamma_n, v_c \in \mathcal{C}([\alpha, \beta])$, a proto

$$\rho = \max_{[\alpha,\beta]}\Big\{|\Gamma_n| + |v_c| + |p'|\Big\} < \infty.$$

Máme tak

$$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n'| \le \rho^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\rho^{n-1}}{(n-1)!} < \infty$$

na kompaktním intervalu $[\alpha, \beta]$, jež byl libovolně zvolen. Řada $\sum_{n=0}^{\infty} u_n'$ tak konverguje lokálně stejnoměrně absolutně na (l, r). Podobně z (2.16)

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n \le \sum_{n=0}^{\infty} \frac{v_c^n}{n!} \le \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\rho^n}{n!} < \infty,$$

tedy i $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ konverguje lokálně stejnoměrně (absolutně, jelikož u_n jsou nezáporné funkce) na (l, r).

Položme

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} u_n, \quad U_1 = \sum_{n=0}^{\infty} u_n'. \tag{2.18}$$

Potom $u \ge 0$, $u, U_1 \in \mathcal{C}((l, r))$, u je striktně klesající na $(l, c]$ a striktně rostoucí na $[c, r)$. Podle věty A.4 je $U_1 = u'$ na (l, r), tedy $u \in \mathcal{C}^1((l, r))$ a $u'(c) = U_1(c) = 0, u(c) = 1$.

Jelikož $u_n \in AC^1_{loc}((l, r))$, druhá derivace podle věty A.2 existuje skoro všude a je integrovatelná, s u_n' jako její primitivní funkcí. Skoro všude na (l, r) platí díky (2.15) a (2.4)

$$\begin{aligned} u_n'' &= \Big[p'\Gamma_n\Big]' \\ &= p''\Gamma_n + p'\Gamma_n' \\ &= -\frac{2b}{\sigma^2}p'\Gamma_n + p'\frac{2u_{n-1}}{p'\sigma^2} \\ &= \frac{2}{\sigma^2}u_{n-1} - \frac{2b}{\sigma^2}u_n'. \end{aligned} \tag{2.19}$$

Buď $[\alpha,\beta] \subseteq (l,r)$ libovolný uzavřený interval, pak z lokálně stejnoměrné absolutní konvergence

$$\kappa = \sup_{[\alpha,\beta]}\Big\{\sum_{n=1}^{\infty}|u_{n-1}| + \sum_{n=1}^{\infty}|u_n'|\Big\} < \infty;$$

odtud podle (2.19), Leviho věty a (KP)

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty}\int_{\alpha}^{\beta}|u_n''(y)|\mathrm{d}y &= \int_{\alpha}^{\beta}\sum_{n=1}^{\infty}\Big|\frac{2}{\sigma^2(y)}u_{n-1}(y) - \frac{2b(y)}{\sigma^2(y)}u_n'(y)\Big|\mathrm{d}y \\ &\le \int_{\alpha}^{\beta}\Big\{\frac{2}{\sigma^2(y)}\sum_{n=1}^{\infty}|u_{n-1}(y)| + \frac{2|b(y)|}{\sigma^2(y)}\sum_{n=1}^{\infty}|u_n'|\Big\}\mathrm{d}y \\ &\le 2\kappa\int_{\alpha}^{\beta}\frac{1+|b(y)|}{\sigma^2(y)}\mathrm{d}y \\ &< \infty. \end{aligned} \tag{2.20}$$

Řada $\sum_{n=1}^{\infty}u_n''$ konverguje z Bolzano-Cauchyho podmínky v $L^1_{loc}((l,r))$: je-li $[\alpha,\beta] \subseteq (l,r)$ a $N \ge M$, pak

$$\Big\|\sum_{n=M} u_n''\Big\|_{L^1([\alpha,\beta])} = \int_{\alpha}^{\beta}\Big|\sum_{n=M}^{N}u_n''(y)\Big|\mathrm{d}y \le \sum_{n=M}^{N}\int_{\alpha}^{\beta}|u_n''(y)|\mathrm{d}y \xrightarrow[M,N\to\infty]{} 0$$

podle (2.20).

Položme

$$U_2 = \sum_{n=1}^{\infty}u_n'' \in L^1_{loc}((l,r)).$$

Buď $x \in (l,r)$ libovolné, pro určitost $x \ge c$. Potom

$$\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}u_n'' = U_2 \text{ v } L^1([c,x])),$$

a proto

$$\begin{aligned} u'(x) &= \lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}u_n'(x) \\ &= \lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}\int_c^x u_n''(y)\mathrm{d}y \\ &= \int_c^x \lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}u_n''(y)\mathrm{d}y \\ &= \int_c^x U_2(y)\mathrm{d}y. \end{aligned}$$

u' je tedy absolutně spojitá primitivní funkce k U_2 na (l, r), tudíž $u'' = U_2$ skoro všude na (l, r), $u \in AC^1_{loc}((l, r))$ a díky (2.19) máme

$$u''(x) = U_2(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n''(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \Big[\frac{2}{\sigma^2(x)} u_{n-1}(x) - \frac{2b}{\sigma^2(x)} u_n'(x) \Big]$$

pro skoro všechna $x \in (l, r)$. Shrnuto:

Pozorování 2.2. *Nechť b, σ splňují předpoklad* (KP)*. Potom existuje $u \in AC^1_{loc}((l, r))$ takové, že $u \geq 0, u(c) = 1, u'(c) = 0$, u je striktně klesající na $(l, c]$ a striktně rostoucí na $[c, r)$ a platí*

$$u = bu' + \frac{1}{2}\sigma^2 u'' \tag{2.21}$$

skoro všude na (l, r).

Pokud jsou navíc b, $\frac{1}{\sigma^2}$ spojité, pak je řešení u třídy $\mathcal{C}^2((l, r))$:

Pozorování 2.3. *Nechť $b, \sigma \in \mathcal{C}((l, r))$ splňují předpoklad* (KP) *a platí $\sigma^2 > 0$ na (l, r). Potom existuje $u \in \mathcal{C}^2((l, r))$ takové, že $u \geq 0, u(c) = 1, u'(c) = 0$, u je striktně klesající na $(l, c]$ a striktně rostoucí na $[c, r)$ a* (2.21) *platí všude na (l, r).*

Důkaz. Nechť jsou splněny předpoklady věty. Ukážeme, že řešení $u \in AC^1_{loc}((l, r))$, jehož existence je garantována předchozí větou, je třídy $\mathcal{C}^2((l, r))$. Užitím (2.19), spojitosti $b, \frac{1}{\sigma^2}, \sum_{n=0}^{\infty} u_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} u_n'$ máme

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n'' = \frac{2}{\sigma^2} \sum_{n=1}^{\infty} u_{n-1} - \frac{2b}{\sigma^2} \sum_{n=1}^{\infty} u_n' \in \mathcal{C}((l, r)),$$

Užitím věty A.4 pak dostáváme

$$u'' = U_1' = \Big(\sum_{n=1}^{\infty} u_n' \Big)' = \sum_{n=1}^{\infty} u_n'' \in \mathcal{C}((l, r)),$$

tudíž $u \in \mathcal{C}^2((l, r))$. □

Máme navíc odhad:

Lemma 2.4. *Nechť funkce b, σ splňují požadavek* (KP)*. Buď $u \in AC^1_{loc}((l, r))$ řešení* (2.2) *a nechť $v_c, c \in (l, r)$, je definována předpisem* (2.10)*. Potom platí $1 + v_c \leq u \leq e^{v_c}$ na (l, r).*

Důkaz. Odhad plyne z definice funkcí u_n, jejich nezápornosti a (2.16):

$$1 + v_c = \sum_{n=0}^{1} u_n \leq \sum_{n=0}^{\infty} u_n \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{v_c^n}{n!} = e^{v_c}$$

□

2.3 Limity řešení v časech explose

Nechť $(\tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$ je posloupnost markovských časů z definice lokálního řešení. Pro všechna $n,k \geq 1$ definujme $\rho_{n,k}$ předpisem

$$\rho_{n,k} = \inf\left\{t \geq 0; \int_0^t \sigma^2(X(s\wedge\tau_n))\mathrm{d}s \geq k\right\} \wedge k, \quad n,k\geq 1. \tag{2.22}$$

Buď $[a,b] \subseteq (l,r)$ libovolný kompaktní interval obsahující x_0 a označme

$$\alpha_{a,b} = \inf\left\{t \in [0,\varepsilon), X_t \notin (a,b)\right\}.$$

Pro přehlednost pišme

$$\beta_{a,b,n,k} = \tau_n \wedge \alpha_{a,b} \wedge \rho_{n,k}.$$

Z definice lokálního řešení máme

$$\begin{aligned} X(t\wedge\beta_{a,b,n,k}) \overset{s.j.}{=}\ & x_0 + \int_0^t \mathbb{1}_{[0,\beta_{a,b,n,k})}(s) b(X(s\wedge\tau_n))\mathrm{d}s \\ & + \int_0^t \mathbb{1}_{[0,\beta_{a,b,n,k})}(s)\sigma(X(s\wedge\tau_n))\mathrm{d}W(s), \end{aligned} \tag{2.23}$$

zastavený proces $X(\cdot\wedge\beta_{a,b,n,k})$ má tedy stochastický diferenciál, můžeme tedy použít Itôovu formuli.

Poznámka 2.2. Použijeme-li kdykoliv dále v textu Itôovu formuli, rozumíme tím její zobecněnou verzi (větu A.7). Uvědomme si ale, že pokud navíc předpokládáme

$$b,\sigma \in \mathcal{C}((l,r)), \quad \sigma^2 > 0 \text{ na } (l,r), \tag{CP}$$

pak jsou podle poznámky 2.1 a pozorování 2.3 funkce p, M, v_c a u třídy $\mathcal{C}^2((l,r))$ a můžeme použít klasickou Itôovu formuli pro stochastický diferenciál (větu A.6). $\triangledown$

Počítejme pro $M_{a,b}$:

$$\begin{aligned} M_{a,b}(X(t\wedge\beta_{a,b,n,k})) \overset{s.j.}{=} & M_{a,b}(x_0) + \int_0^{t\wedge\beta_{a,b,n,k}} LM_{a,b}(X_s)\mathrm{d}s \\ & + \int_0^{t\wedge\beta_{a,b,n,k}} M'_{a,b}(X_s)\sigma(X_s)\mathrm{d}W_s. \end{aligned} \tag{2.24}$$

Aplikací identity (2.9) dostáváme

$$\int_0^{t\wedge\beta_{a,b,n,k}} LM_{a,b}(X_s)\mathrm{d}s = -\int_0^\infty \mathbb{1}_{[0,t\wedge\beta_{a,b,n,k})}(s)\mathrm{d}s = -\mathbb{E}(t\wedge\beta_{a,b,n,k}).$$

Pro $t \leq \alpha_{a,b}$ je $X_t \in [a,b]$. $M'_{a,b}$ je spojitá na kompaktu $[a,b]$, tudíž je na $[a,b]$ omezená. Máme odhad

$$\begin{aligned} & \int_0^t \mathbb{1}_{[0,\beta_{a,b,n,k})}(s)\sigma^2(X(s\wedge\beta_{a,b,n,k}))[M'(X(s\wedge\beta_{a,b,n,k}))]^2\mathrm{d}s \\ & \leq C^2\int_0^t \mathbb{1}_{[0,\beta_{a,b,n,k})}(s)\sigma^2(X(s\wedge\beta_{a,b,n,k}))\mathrm{d}s \\ & \leq C^2 k, \end{aligned} \tag{2.25}$$

stochastický integrál je tedy centrovaný. Odtud máme

$$\mathbb{E}M_{a,b}(X(t \wedge \beta_{a,b,n,k})) = M_{a,b}(x_0) - \mathbb{E}(t \wedge \beta_{a,b,n,k}). \tag{2.26}$$

Jelikož $M_{a,b} \geq 0$ na $[a,b]$, máme

$$\mathbb{E}(t \wedge \beta_{a,b,n,k}) \leq M_{a,b}(x_0). \tag{2.27}$$

Funkce σ je lokálně omezená, tudíž $\lim_{k\to\infty} \rho_{n,k} = \infty$ $\mathbb{P}$-skoro jistě pro všechna $n \geq 0$ a

$$\lim_{k\to\infty} t \wedge \tau_n \wedge \alpha_{a,b} \wedge \rho_{n,k} = t \wedge \tau_n \wedge \alpha_{a,b} \quad \mathbb{P}\text{-skoro jistě.}$$

Z definice markovských časů τ_n máme $\tau_n \nearrow \varepsilon$. Platí $\mathbb{P}(\alpha_{a,b} \leq \varepsilon) = 1$: na $\{\varepsilon = \infty\}$ jest $\alpha_{a,b} \leq \varepsilon$ vždy, na $\{\varepsilon < \infty\}$ máme $\liminf_{t\to\varepsilon-} X_t = l$ skoro jistě nebo $\limsup_{t\to\varepsilon-} X_t = r$ skoro jistě, ze spojitosti trajektorií musí X skoro jistě projít jedním z bodů $\{a,b\}$ před časem ε. Máme tedy $\lim_{n\to\infty} \tau_n = \varepsilon \geq \alpha_{a,b}$, a proto

$$\lim_{n\to\infty} t \wedge \tau_n \wedge \alpha_{a,b} = t \wedge \alpha_{a,b} \quad \mathbb{P}\text{-skoro jistě.}$$

Celkem tedy

$$\lim_{t\to\infty} \lim_{n\to\infty} \lim_{k\to\infty} t \wedge \tau_n \wedge \alpha_{a,b} \wedge \rho_{n,k} = \alpha_{a,b} \quad \mathbb{P}\text{-skoro jistě.} \tag{2.28}$$

Podle (postupně třikrát aplikované) Leviho věty (posloupnosti jsou neklesající) tak máme

$$\lim_{t\to\infty} \lim_{n\to\infty} \lim_{k\to\infty} \mathbb{E}\Big(t \wedge \tau_n \wedge \alpha_{a,b} \wedge \rho_{n,k}\Big) = \mathbb{E}\alpha_{a,b}, \tag{2.29}$$

limitními přechody v (2.27) tedy dostáváme

$$\mathbb{E}\alpha_{a,b} \leq M_{a,b}(x_0) < \infty,$$

tudíž $\alpha_{a,b} < \varepsilon$ platí skoro všude i na $\{\varepsilon = \infty\}$.

Poznámka 2.3. Pokusíme se osvětlit význam předpokladu (P). Právě jsme ukázali, že střední doba opuštění libovolného kompaktního intervalu je v naší situaci vždy konečná, bez ohledu na to, zda je konečná i doba explose. Klíčový je právě požadavek (P): máme-li například rovnici

$$\begin{aligned} \mathrm{d}X &= |X|^{\frac{1}{4}}\mathrm{d}W \\ X(0) &= 0, \end{aligned}$$

(požadavek (P) zjevně nesplňující), pak je zjevně $X \equiv x_0$ (globálním) řešením a kompakt $\{x_0\}$ nikdy neopustí. Problém tkví ve formuli

$$\int_0^{t\wedge\beta_{a,b,n,k}} LM_{a,b}(X_s)\mathrm{d}s = \int_0^{t\wedge\beta_{a,b,n,k}} \Big(b(X_s)M'_{a,b}(X_s) + \frac{\sigma^2(X(s))}{2}M''_{a,b}(X_s)\Big)\mathrm{d}s,$$

kde

$$M''_{\alpha,\beta}(X_s) = -2\frac{1 + b(X_s)M'(X_s)}{\sigma^2(X_s)}, \tag{2.30}$$

to ale může být nedefinovaný výraz na množině kladné míry; identitu (2.9) (která platí pouze $\mathbb{P}$-skoro všude na (l,r)) v takovém případě nelze aplikovat. Úvahy v předchozím odstavci by však s modifikacemi prošly, pokud bychom požadavek (P) nahradili přepokladem slabším:

$$\sigma^2(X_s) > 0 \text{ skoro jistě pro skoro všechna } t \in [0, \varepsilon). \tag{PAE}$$

Pak bychom definovali

$$M''_{a,b}(x) = -2\frac{1 + b(x)M'_{a,b}(x)}{\sigma^2(x)}\mathbb{1}_{\{\sigma^2(x)>0\}}$$

a výraz (2.30) by byl jednoznačně definován pro každé $s \geq 0$. ∇

Pokračujme ve výpočtech. Díky spojitosti $M_{a,b}$ a X platí

$$\lim_{t\to\infty}\lim_{n\to\infty}\lim_{k\to\infty} M_{a,b}\Big(X(t \wedge \tau_n \wedge \alpha_{a,b} \wedge \rho_{n,k})\Big) = M_{a,b}\Big(X(\alpha_{a,b})\Big) \text{ } \mathbb{P}\text{-skoro jistě.}$$

Podle (opět postupně třikrát aplikované) Lebesgueovy věty (s integrovatelnou majorantou $\max_{x\in[a,b]} M_{a,b}(x)$)

$$\lim_{t\to\infty}\lim_{n\to\infty}\lim_{k\to\infty} \mathbb{E}M_{a,b}\Big(X(t \wedge \tau_n \wedge \alpha_{a,b} \wedge \rho_{n,k})\Big) = \mathbb{E}M_{a,b}\Big(X(\alpha_{a,b})\Big).$$

Užitím této rovnosti, (2.29) a limitními přechody v (2.26) získáváme

$$\mathbb{E}M_{a,b}\Big(X(\alpha_{a,b})\Big) = M_{a,b}(x_0) - \mathbb{E}\alpha_{a,b}. \tag{2.31}$$

Z definice $\alpha_{a,b}$ máme $X(\alpha_{a,b}) \in \{a, b\}$ a $M_{a,b}(a) = M_{a,b}(b) = 0$, (2.31) tedy přechází na

$$M_{a,b}(x_0) = \mathbb{E}\alpha_{a,b}. \tag{2.32}$$

Aplikujme nyní analogický postup na funkci p. Itôova formule nám dává

$$p(X(t \wedge \beta_{a,b,n,k})) \overset{s.j.}{=} p(x_0) + \int_0^{t\wedge\beta_{a,b,n,k}} Lp(X_s)\mathrm{d}s + \int_0^{t\wedge\beta_{a,b,n,k}} p'(X_s)\sigma^2(X_s)\mathrm{d}W_s.$$

Stochastický integrál je opět centrovaný (díky spojitosti p'), užitím (2.4) získáme

$$\mathbb{E}p(X(t \wedge \beta_{a,b,n,k})) = p(x_0). \tag{2.33}$$

p je spojitá a rostoucí, stejně jako v případě $M_{a,b}$ tedy můžeme použít Lebesgueovu větu (s integrovatelnou majorantou $p(b)$):

$$\mathbb{E}p(X(\alpha_{a,b})) = \lim_{t\to\infty}\lim_{n\to\infty}\lim_{k\to\infty} \mathbb{E}p(X(t \wedge \beta_{a,b,n,k})) = p(x_0),$$

a tedy

$$p(x_0) = \mathbb{E}p(X(\alpha_{a,b})) = p(a)\mathbb{P}\Big(X(\alpha_{a,b}) = a\Big) + p(b)\mathbb{P}\Big(X(\alpha_{a,b}) = b\Big). \tag{2.34}$$

Shrnuto:

Pozorování 2.5. *Buď $[a, b] \subseteq (l, r)$ libovolný kompaktní interval obsahující x_0. Potom*

$$\mathbb{E}\alpha_{a,b} = M_{a,b}(x_0)$$

a

$$\mathbb{P}\Big(X(\alpha_{a,b}) = a\Big) = \frac{p(b) - p(x_0)}{p(b) - p(a)}, \quad \mathbb{P}\Big(X(\alpha_{a,b}) = b\Big) = \frac{p(x_0) - p(a)}{p(b) - p(a)}.$$

Důkaz. První část tvrzení je rovnost (2.32), druhá část plyne z (2.34):

$$\begin{aligned} p(x_0) &= p(a)\mathbb{P}\Big(X(\alpha_{a,b}) = a\Big) + p(b)\mathbb{P}\Big(X(\alpha_{a,b}) = b\Big) \\ &= p(a)\mathbb{P}\Big(X(\alpha_{a,b}) = a\Big) + p(b)(1 - \mathbb{P}\Big(X(\alpha_{a,b}) = a\Big)) \\ &= \mathbb{P}\Big(X(\alpha_{a,b}) = a\Big)(p(a) - p(b)) + p(b), \end{aligned}$$

a tedy

$$\mathbb{P}\Big(X(\alpha_{a,b}) = a\Big) = \frac{p(b) - p(x_0)}{p(b) - p(a)};$$

stejným způsobem se dokáže i druhá rovnost. □

Pozorování 2.6. *Je-li $p(l_-) = -\infty$ a $p(r_+) = \infty$, pak*

$$\mathbb{P}\Big(\inf_{t<\varepsilon} X(t) = l\Big) = \mathbb{P}\Big(\sup_{t<\varepsilon} X(t) = r\Big) = 1$$

Důkaz. Nechť pro spor platí $p(r_-) = \infty$, ale $\mathbb{P}(\inf_{t<\varepsilon} X(t) > l) > 0$. Potom pro $a \in (l, x_0)$ platí

$$\lim_{b \to r_-} \frac{p(b) - p(x_0)}{p(b) - p(a)} = 1. \tag{2.35}$$

Dále existují $z \in (l, r)$ a $q \in (0, \frac{1}{2}]$ taková, že

$$\mathbb{P}\Big(\inf_{t<\varepsilon} X(t) \geq z\Big) = 2q \tag{2.36}$$

Podle (2.35) můžeme nalézt $[a, b] \subseteq (l, r)$ tak, aby $x_0 \in [a, b], a < z < b$ a

$$\frac{p(b) - p(x_0)}{p(b) - p(a)} > 1 - q.$$

Dle pozorování 2.5 jest

$$\mathbb{P}\Big(X(\alpha_{a,b}) = a\Big) = \frac{p(b) - p(x_0)}{p(b) - p(a)} > 1 - q,$$

to je ale ve sporu s (2.36):

$$\begin{aligned} 2q = \mathbb{P}\Big(\inf_{t<\varepsilon} X(t) \geq z\Big) &\leq \mathbb{P}\Big(X(\alpha_{a,b}) \geq z\Big) \\ &\leq \mathbb{P}\Big(X(\alpha_{a,b}) > a\Big) = 1 - \mathbb{P}\Big(X(\alpha_{a,b}) = a\Big) \\ &< q. \end{aligned}$$

Musí tedy platit $\mathbb{P}(\inf_{t<\varepsilon} X(t) > l) = 0$. □

Abychom si ulehčili práci s trajektoriemi supermartingalů, bude se nám hodit následující lemma:

Lemma 2.7. *Buď $M = (M_t, t \geq 0)$ nezáporný supermartingal. Potom existuje $\Omega_{conv} \in \mathcal{F}$ taková, že $\mathbb{P}(\Omega_{conv}) = 1$ a pro všechna $\omega \in \Omega_{conv}$ a pro každou striktně rostoucí posloupnost $(q_j)_{j \in \mathbb{N}}$, $q_j \in \mathbb{Q}_+$, existuje konečná limita*

$$\lim_{j \to \infty} M_{q_j}(\omega).$$

Důkaz. Podle věty A.5 existuje $\Omega_1 \in \mathcal{F}$ taková, že $\mathbb{P}(\Omega_1) = 1$ a $\lim_{j\to\infty} M_{q_j}(\omega)$ existuje pro každé $\omega \in \Omega_1$ a každou $(q_j)_{j\in\mathbb{N}}$ striktně rostoucí posloupnost v $\mathbb{Q}_+$. Podle maximální nerovnosti pro nezáporné supermartingaly ((Meyer, 1966, věta V.T12)) platí pro každou $Q \subset \mathbb{Q}_+$ konečnou

$$\mathbb{P}\Big(\max_{q\in Q} M_q \geq \lambda\Big) \leq \frac{1}{\lambda}\mathbb{E}M_0 \quad \forall\lambda > 0,$$

z čehož plyne

$$\mathbb{P}\Big(\sup_{q\in\mathbb{Q}_+} M_q \geq \lambda\Big) \leq \frac{1}{\lambda}\mathbb{E}M_0 \quad \forall\lambda > 0.$$

Položíme-li tedy $\Omega_2 = \{\omega \in \Omega; \sup_{q\in\mathbb{Q}_+} M_q < \infty\}$, pak $\mathbb{P}(\Omega_2) = 1$. Položme $\Omega_{\mathrm{conv}} = \Omega_1 \cap \Omega_2 \in \mathcal{F}$. Potom $\mathbb{P}(\Omega_{\mathrm{conv}}) = 1$ a pro všechna $\omega \in \Omega_{\mathrm{conv}}$ existuje limita $\lim_{j\to\infty} M_{q_j}(\omega)$ a je konečná:

$$0 \leq \limsup_{j\to\infty} M_{q_j}(\omega) \leq \sup_{j\in\mathbb{N}} M_{q_j}(\omega) \leq \sup_{q\in\mathbb{Q}_+} M_q(\omega) < \infty.$$

□

Poznámka 2.4. V lemmatu 2.7 nepředpokládáme nutně $\lim_{j\to\infty} q_j = \infty$. ▽

Pozorování 2.8.

1. *Je-li $p(l_+) = -\infty$ a $p(r_-) \in \mathbb{R}$, pak*

$$\mathbb{P}\Big(\lim_{t\nearrow\varepsilon} X(t) = r\Big) = 1.$$

2. *Je-li $p(l_+) \in \mathbb{R}$ a $p(r_-) = \infty$, pak*

$$\mathbb{P}\Big(\lim_{t\nearrow\varepsilon} X(t) = l\Big) = 1.$$

Důkaz. Dokažme nejdříve tvrzení druhého bodu. Buď $[a(n), b(n)]$ rostoucí posloupnost intervalů konvergující k (l, r), $x_0 \in (a(1), b(1))$. Potom je pro každé $n, j, k \in \mathbb{N}$ proces

$$p(X(t \wedge \alpha_{a(n),b(n)} \wedge \rho_{j,k} \wedge \tau_j)) - p(l_+)$$

dobře definovaný a nezáporný (jelikož p je rostoucí funkce). Podobně jako v (2.23) má proces $X(\cdot \wedge \alpha_{a(n),b(n)} \wedge \rho_{j,k} \wedge \tau_j)$ stochastický diferenciál a můžeme použít Itôovu formuli:

$$\begin{aligned}
&p(X(t \wedge \alpha_{a(n),b(n)} \wedge \rho_{j,k} \wedge \tau_j)) - p(x_0)\\
&\quad= \int_0^t Lp(X(s \wedge \alpha_{a(n),b(n)} \wedge \rho_{j,k} \wedge \tau_j))\mathrm{d}s\\
&\qquad+ \int_0^t \sigma(X(s \wedge \alpha_{a(n),b(n)} \wedge \rho_{j,k} \wedge \tau_j))p'(X(s \wedge \alpha_{a(n),b(n)} \wedge \rho_{j,k} \wedge \tau_j))\mathrm{d}W(s)\\
&\quad= \int_0^t \sigma(X(s \wedge \alpha_{a(n),b(n)} \wedge \rho_{j,k} \wedge \tau_j))p'(X(s \wedge \alpha_{a(n),b(n)} \wedge \rho_{j,k} \wedge \tau_j))\mathrm{d}W(s),
\end{aligned}$$

kde v druhé rovnosti jsme užili identitu (2.4). Funkce p' je spojitá na kompaktu $[a(n), b(n)]$, tedy je na $[a(n), b(n)]$ i omezená, můžeme proto učinit odhad analogický odhadu (2.25), pročež je stochastický integrál martingal. Dohromady tedy máme, že proces

$$p(X(\cdot \wedge \alpha_{a(n),b(n)} \wedge \rho_{j,k} \wedge \tau_j)) - p(l_+)$$

je nezáporný martingal. Jelikož σ je dle předpokladu lokálně omezená, platí

$$\mathbb{P}\Big(\lim_{k\to\infty} \rho_{n,k} = \infty\Big) = 1 \ \forall n \geq 1.$$

Z tohoto a ze spojitosti trajektorií X platí

$$\lim_{k\to\infty} p(X(r \wedge \tau_j \wedge \alpha_{a(n),b(n)} \wedge \rho_{j,k})) \overset{s.j.}{=} p(X(r \wedge \tau_j \wedge \alpha_{a(n),b(n)})) \tag{2.37}$$

pro všechna $r \geq 0$. Z definice $\alpha_{a(n),b(n)}$ a spojitosti p na $[a(n), b(n)]$ plyne, že $p(X(\cdot \wedge \tau_j \wedge \alpha_{a(n),b(n)}))$ je omezená. Zvolme $t > s \geq 0$ libovolně. Užitím martingalové vlastnosti, Lebesgueovy věty pro podmíněnou střední hodnotu a (2.37) získáme

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\Big[p(X(t \wedge \tau_j \wedge \alpha_{a(n),b(n)}))|\mathcal{F}_s\Big] &\overset{s.j.}{=} \mathbb{E}\Big[\lim_{k\to\infty} p(X(t \wedge \tau_j \wedge \alpha_{a(n),b(n)} \wedge \rho_{j,k}))|\mathcal{F}_s\Big] \\
&\overset{s.j.}{=} \lim_{k\to\infty} \mathbb{E}\Big[p(X(t \wedge \tau_j \wedge \alpha_{a(n),b(n)} \wedge \rho_{j,k}))|\mathcal{F}_s\Big] \\
&\overset{s.j.}{=} \lim_{k\to\infty} p(X(s \wedge \tau_j \wedge \alpha_{a(n),b(n)} \wedge \rho_{j,k})) \\
&\overset{s.j.}{=} p(X(s \wedge \tau_j \wedge \alpha_{a(n),b(n)})).
\end{aligned}$$

Dále máme $\tau_j \nearrow \varepsilon$. Díky spojitosti X existuje $m_n \in \mathbb{N}$ takové, že $\tau_j \geq \alpha_{a(n),b(n)}$ skoro jistě pro všechna $j \geq m_n$ na $\{\varepsilon < \infty\}$, na $\{\varepsilon = \infty\}$ to platí triviálně. Jelikož p je omezená na $[a(n), b(n)]$, můžeme Lebesgueovu větu pro podmíněnou střední hodnotu použít znovu:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\Big[p(X(t \wedge \wedge \alpha_{a(n),b(n)}))|\mathcal{F}_s\Big] &\overset{s.j.}{=} \mathbb{E}\Big[\lim_{j\to\infty} p(X(t \wedge \tau_j \wedge \alpha_{a(n),b(n)}))|\mathcal{F}_s\Big] \\
&\overset{s.j.}{=} \lim_{j\to\infty} \mathbb{E}\Big[p(X(t \wedge \tau_j \wedge \alpha_{a(n),b(n)}))|\mathcal{F}_s\Big] \\
&\overset{s.j.}{=} \lim_{k\to\infty} p(X(s \wedge \tau_j \wedge \alpha_{a(n),b(n)})) \\
&\overset{s.j.}{=} p(X(s \wedge \alpha_{a(n),b(n)})).
\end{aligned}$$

Dohromady je tedy

$$\Big(p(X(t \wedge \alpha_{a(n),b(n)})) - p(l_+),\ t \geq 0\Big)$$

nezáporný martingal. Definujme

$$Y_t = \liminf_{n\to\infty} p(X(t \wedge \alpha_{a(n),b(n)})) - p(l_+),$$

pak Y je podle Fatouova lemmatu nezáporný supermartingal.

Podle lemmatu 2.7 existuje $\Omega_{\text{conv}} \in \mathcal{F}$ s $\mathbb{P}(\Omega_{\text{conv}}) = 1$ taková, že pro každé $\omega \in \Omega_{\text{conv}}$ a každou (q_j) striktně rostoucí posloupnost z $\mathbb{Q}$ existuje konečná limita $\lim_{j\to\infty} Y_{q_j}(\omega)$. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že $\alpha_{a(n),b(n)} < \infty$

na Ω_{conv} (to můžeme, jelikož $\mathbb{P}(\alpha_{a(n),b(n)} < \infty) = 1$). Buď tedy $\omega \in \Omega_{\mathrm{conv}}$, $q_j \in \mathbb{Q}, q_j \nearrow \varepsilon(\omega)$. Z definice markovských časů $\alpha_{a(n),b(n)}$ plyne $\alpha_{a(n),b(n)}(\omega) \nearrow \varepsilon(\omega)$. Pro každé $j \in \mathbb{N}$ existuje $m_j \in \mathbb{N}$, takové, že pro každé $n \geq m_j$ je $q_j < \alpha_{a(n),b(n)}$, a tedy pro všechna $j \in \mathbb{N}$ platí

$$\begin{aligned}\infty > Y_{q_j}(\omega) &= \liminf_{n\to\infty} p(X(q_j \wedge \alpha_{a(n),b(n)}, \omega)) - p(l_+)\\ &= p(X(q_j, \omega)) - p(l_+).\end{aligned}$$

Toto platí bez ohledu na volbě $(q_j)_{j\in\mathbb{N}}, q_j \nearrow \varepsilon(\omega)$: pokud $(q_j^1)_{j\in\mathbb{N}}$, $(q_j^2)_{j\in\mathbb{N}}$ jsou dvě posloupnosti s $q_j^i \nearrow \varepsilon(\omega)$, $i \in \{1,2\}$, pak stačí zkombinovat $(q_j^1), (q_j^2)$ do nové rostoucí posloupnosti (q_j^{12}) a na ni aplikovat předchozí úvahu. Tak rovnost dostaneme pro všechny členy posloupnosti (q_j^{12}), tedy i pro všechny členy posloupností (q_j^i), $i \in \{1,2\}$. Podle Heineho definice limity existuje konečná limita $\lim_{t\nearrow\varepsilon(\omega)} p(X(t,\omega))$. p je spojitá rostoucí funkce zobrazující (l,r) na $(p(l_+), p(r_-))$, tedy existuje spojitá inverzní funkce p^{-1}. Z toho plyne existence limity

$$\lim_{t\nearrow\varepsilon(\omega)} p^{-1}(p(X(t,\omega))) = \lim_{t\nearrow\varepsilon(\omega)} X(t,\omega).$$

Limita je rovna buď l, nebo r: Na $\{\varepsilon < \infty\}$ to plyne přímo z definice ε; v obecném případě pro spor předpokládejme, že $\lim_{t\nearrow\varepsilon(\omega)} X(t,\omega) = z \in (l,r)$. Množina $\{X(t,\omega); t \geq 0\}$ je kompaktní v případě $\varepsilon(\omega) < \infty$, respektive má kompaktní uzávěr v případě $\varepsilon(\omega) = \infty$. Musí tedy existovat $n \in \mathbb{N}$ takové, že $X(t,\omega) \in [a(n), b(n)]$ pro všechna $t \geq 0$. To je ovšem spor s $\alpha_{a(n+1),b(n+1)} < \infty$. Vzhledem k tomu, že podle předpokladu je $p(r_-) = \infty$, ale $\lim_{t\nearrow\varepsilon(\omega)} p(X(t,\omega))$ je konečná, platí nutně $\lim_{t\nearrow\varepsilon(\omega)} X(t,\omega) = l$.

První část tvrzení se dokáže analogicky: Pro každé $n, j, k \in \mathbb{N}$ je proces

$$p(r_-) - p(X(\cdot \wedge \alpha_{a(n),b(n)} \wedge \rho_{j,k} \wedge \tau_j))$$

nezáporný martingal; opakováním předchozího postupu dostaneme, že i

$$\Big(p(r_-) - p(X(t \wedge \alpha_{a(n),b(n)})),\ t \geq 0\Big)$$

je nezáporný martingal. Označíme-li

$$\begin{aligned}Y_t^{(2)} &= p(r_-) - \limsup_{n\to\infty} p(X(t \wedge \alpha_{a(n),b(n)}))\\ &= p(r_-) + \liminf_{n\to\infty}\Big(-p(X(t \wedge \alpha_{a(n),b(n)}))\Big)\end{aligned}$$

pak $Y^{(2)}$ je z martingalové vlastnosti $p(X(\cdot \wedge \alpha_{a(n),b(n)}))$ a Fatouova lemmatu opět nezáporný supermartingal a zbytek postupu zůstává beze změny. $\square$

Pozorování 2.9. *Je-li $p(l_+) \in \mathbb{R}$ a $p(r_-) \in \mathbb{R}$, pak*

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\Big(\lim_{t\nearrow\varepsilon} X(t) = l\Big) &= \frac{p(r_-) - p(x_0)}{p(r_-) - p(l_+)},\\ \mathbb{P}\Big(\lim_{t\nearrow\varepsilon} X(t) = r\Big) &= \frac{p(x_0) - p(l_+)}{p(r_-) - p(l_+)}.\end{aligned}$$

Důkaz. Připomeňme si nejprve: pokud $B_n, n \geq 1$, jsou libovolné měřitelné množiny, pak

$$\mathbb{P}\Big(\liminf_{n\to\infty} B_n\Big) \leq \liminf_{n\to\infty} \mathbb{P}\Big(B_n\Big). \tag{2.38}$$

Vskutku, $(\bigcap_{m=n}^{\infty} B_n)_{n=1}^{\infty}$ je neklesající posloupnost množin, $\mathbb{P}(\bigcap_{m=n}^{\infty} B_n) \leq \mathbb{P}(B_k)$ pro všechna $k \geq n$, tudíž

$$\mathbb{P}\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{m=n}^{\infty} B_m\Big) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\Big(\bigcap_{m=n}^{\infty} B_m\Big) \leq \lim_{n\to\infty}\inf_{m\geq n} \mathbb{P}\Big(B_m\Big) = \liminf_{n\to\infty} \mathbb{P}\Big(B_n\Big).$$

Rovnost (2.38) tedy platí. Označme

$$Y_t = \liminf_{n\to\infty} p(X(t \wedge \alpha_{a(n),b(n)})).$$

Potom Y je opět omezený (konečnými $p(l_+)$ a $p(r_-)$) supermartingal. Opakováním postupu z důkazu pozorování 2.8 dostáváme pro skoro všechna $\omega \in \Omega$ existenci limity $\lim_{t\nearrow\varepsilon(\omega)} X(t,\omega) \in \{l, r\}$. Předpokládejme nejprve, že pro pevně zvolené $\omega \in \Omega$ platí $\lim_{t\nearrow\varepsilon(\omega)} X(t,\omega) = l$. Nalezněme $\eta > 0$ tak, že $l < l + \eta < a(1)$. Z definice limity plyne existence $u < \varepsilon(\omega)$ takového, že $X_t \in (l, l+\eta)$ pro všechna $t \in [u, \varepsilon(\omega))$. Jelikož $[a(n), b(n)] \nearrow (l, r)$ a $\alpha_{a(n),b(n)} \nearrow \varepsilon(\omega)$, existuje $n_0(\omega) \in \mathbb{N}$ takové, že pro všechna $n \geq n_0(\omega)$ platí $\alpha_{a(n),b(n)}(\omega) \geq u$ a $a(n) \in (l, l+\eta)$ (zatímco $b(n) \notin (l, l+\eta)$). Potom ale pro všechna $n \geq n_0(\omega)$ musí platit $X(\alpha_{a(n),b(n)}(\omega), \omega) = a(n)$. Máme tedy

$$\begin{aligned}\Big\{\lim_{t\nearrow\varepsilon} X_t = l\Big\} &\subseteq \bigcup_{n_0=1}^{\infty}\bigcap_{n\geq n_0}\Big\{X(\alpha_{a(n),b(n)}) = a(n)\Big\}\\ &= \liminf_{n\to\infty}\Big\{X(\alpha_{a(n),b(n)}) = a(n)\Big\}.\end{aligned}$$

Užitím (2.38) a pozorování 2.5 dostaneme

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\Big(\lim_{t\nearrow\varepsilon} X_t = l\Big) &\leq \liminf_{n\to\infty} \mathbb{P}\Big(X(\alpha_{a(n),b(n)}) = a(n)\Big)\\ &= \liminf_{n\to\infty} \frac{p(b(n)) - p(x_0)}{p(b(n)) - p(a(n))}\\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{p(b(n)) - p(x_0)}{p(b(n)) - p(a(n))}\\ &= \frac{p(r_-) - p(x_0)}{p(r_-) - p(l_+)}.\end{aligned} \tag{2.39}$$

Zcela analogicky máme

$$\mathbb{P}\Big(\lim_{t\nearrow\varepsilon} X_t = r\Big) \leq \frac{p(x_0) - p(l_+)}{p(r_-) - p(l_+)}. \tag{2.40}$$

Zkombinováním (2.39) a (2.40) dostaneme

$$1 = \mathbb{P}\Big(\lim_{t\nearrow\varepsilon} X_t = l\Big) + \mathbb{P}\Big(\lim_{t\nearrow\varepsilon} X_t = r\Big) \leq \frac{p(r_-) - p(x_0)}{p(r_-) - p(l_+)} + \frac{p(x_0) - p(l_+)}{p(r_-) - p(l_+)} = 1.$$

Nerovnosti (2.39) a (2.40) tak přecházejí v rovnosti, čímž obdržíme požadovaný výsledek. $\square$

2.4 Postačující podmínka pro neexplosi

V této sekci v několika krocích aproximujeme proces „$(e^{-(t\wedge\varepsilon)}u(X(t\wedge\varepsilon)), t \geq 0)$" a ukážeme, že výsledek takovéto aproximace je nezáporným supermartingalem, podobně jako v sekci 2.3. Z toho již vyplyne kriterium pro neexplosi skoro jistě.

Krok 1. Buď $(\tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$ posloupnost markovských časů z definice lokálního řešení, tedy $t_0 \leq \tau_n \nearrow \varepsilon$ na Ω a X je řešení (ASDE) na $[\![t_0, \tau_n]\!]$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Zvolme interval $[a,b] \subseteq (l,r)$ tak, že $[a,b] \ni x_0$. Položme

$$\alpha_{a,b} = \inf\Big\{t \in [0,\varepsilon), X_t \notin (a,b)\Big\}$$

a definujme $\rho_{n,k}$ opět formulí (2.22). Jelikož σ je dle předpokladu lokálně omezená, platí

$$\mathbb{P}\Big(\lim_{k\to\infty} \rho_{n,k} = \infty\Big) = 1 \ \forall n \geq 1. \tag{2.41}$$

Krok 2. Znovu označme

$$\beta_{a,b,n,k} = \tau_n \wedge \alpha_{a,b} \wedge \rho_{n,k}.$$

Podle (2.23) má proces $X(\cdot \wedge \beta_{a,b,n,k})$ stochastický diferenciál. Položme

$$\begin{aligned} V\colon \mathbb{R}_+ \times (l,r) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (t,y) &\longmapsto e^{-t}u(y). \end{aligned}$$

Užitím Itôovy formule na proces $V(X(\cdot\wedge\beta_{a,b,n,k}))$, definice L a definice u získáme

$$\begin{aligned}
&e^{-(t\wedge\beta_{a,b,n,k})}u(X(t\wedge\beta_{a,b,n,k})) - u(x_0) \\
&\overset{s.j.}{=} \int_0^{t\wedge\beta_{a,b,n,k}} e^{-(s\wedge\beta_{a,b,n,k})}\Big[-u(X(s\wedge\beta_{a,b,n,k})) + u'(X(s\wedge\beta_{a,b,n,k}))b(X(s\wedge\beta_{a,b,n,k})) \\
&\qquad\qquad + \frac{1}{2}u''(X(s\wedge\beta_{a,b,n,k}))\sigma^2(X(s\wedge\beta_{a,b,n,k}))\Big]\mathrm{d}s \\
&\quad + \int_0^{t\wedge\beta_{a,b,n,k}} e^{-(s\wedge\beta_{a,b,n,k})}\sigma(X(s\wedge\beta_{a,b,n,k}))u'(X(s\wedge\beta_{a,b,n,k}))\mathrm{d}W(s) \\
&\overset{s.j.}{=} \int_0^{t\wedge\beta_{a,b,n,k}} e^{-(s\wedge\beta_{a,b,n,k})}[-u(X(s\wedge\beta_{a,b,n,k})) + Lu(X(s\wedge\beta_{a,b,n,k}))]\mathrm{d}s \\
&\quad + \int_0^{t\wedge\beta_{a,b,n,k}} e^{-(s\wedge\beta_{a,b,n,k})}\sigma(X(s\wedge\beta_{a,b,n,k}))u'(X(s\wedge\beta_{a,b,n,k}))\mathrm{d}W(s) \\
&\overset{s.j.}{=} \int_0^{t\wedge\beta_{a,b,n,k}} e^{-(s\wedge\beta_{a,b,n,k})}\sigma(X(s\wedge\beta_{a,b,n,k}))u'(X(s\wedge\beta_{a,b,n,k}))\mathrm{d}W(s).
\end{aligned} \tag{2.42}$$

Pro $s \leq \alpha_{a,b}$ je $X_s \in [a,b]$. u' je spojitá na kompaktu $[a,b]$, tedy je na $[a,b]$ omezená. Existuje proto $C < \infty$ takové, že

$$|u'(X(s\wedge\beta_{a,b,n,k}))| \leq C \quad \forall s \geq 0.$$

Z definice markovského času $\rho_{n,k}$ pak plyne

$$\begin{aligned}
&\int_0^t \mathbb{1}_{[0,\beta_{a,b,n,k})}(s)e^{-(s\wedge\beta_{a,b,n,k})}\sigma^2(X(s\wedge\beta_{a,b,n,k}))[u'(X(s\wedge\beta_{a,b,n,k}))]^2\mathrm{d}s \\
&\leq C^2\int_0^t \mathbb{1}_{[0,\beta_{a,b,n,k})}(s)\sigma^2(X(s\wedge\beta_{a,b,n,k}))\mathrm{d}s \\
&\leq C^2 k,
\end{aligned}$$

a proto

$$\mathbb{E}\int_0^t \Big[\mathbb{1}_{[0,\beta_{a,b,n,k})} e^{-(s\wedge\beta_{a,b,n,k})}\sigma(X(s\wedge\beta_{a,b,n,k}))u'(X(s\wedge\beta_{a,b,n,k}))\Big]^2 \mathrm{d}s < \infty.$$

Stochastický integrál (2.42) je tedy martingal, a jelikož je u nezáporné řešení, proces

$$\Big(e^{-(t\wedge\tau_n\wedge\alpha_{a,b}\wedge\rho_{n,k})}u(X(t\wedge\tau_n\wedge\alpha_{a,b}\wedge\rho_{n,k})),\ t\geq 0\Big)$$

je nezáporný martingal.

Krok 3. Zvolme $0\leq s\leq t$ libovolně. Z předchozího kroku máme, že

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\Big[e^{-(t\wedge\tau_n\wedge\alpha_{a,b}\wedge\rho_{n,k})}u(X(t\wedge\tau_n\wedge\alpha_{a,b}\wedge\rho_{n,k}))|\mathcal{F}_s\Big]\\ &\quad\overset{s.j.}{=} e^{-(s\wedge\tau_n\wedge\alpha_{a,b}\wedge\rho_{n,k})}u(X(s\wedge\tau_n\wedge\alpha_{a,b}\wedge\rho_{n,k})).\end{aligned} \tag{2.43}$$

Díky (2.41) a spojitosti trajektorií X platí

$$\begin{aligned}&\lim_{k\to\infty} e^{-(r\wedge\tau_n\wedge\alpha_{a,b}\wedge\rho_{n,k})}u(X(r\wedge\tau_n\wedge\alpha_{a,b}\wedge\rho_{n,k}))\\ &\quad\overset{s.j.}{=} e^{-(r\wedge\tau_n\wedge\alpha_{a,b})}u(X(r\wedge\tau_n\wedge\alpha_{a,b}))\end{aligned} \tag{2.44}$$

pro všechna $r\geq 0$. Z definice $\alpha_{a,b}$ a spojitosti u na $[a,b]$ plyne, že $u(X(\cdot\wedge\tau_n\wedge\alpha_{a,b}))$ je omezená. Užitím (2.44), Lebesgueovy věty pro podmíněné střední hodnoty a (2.43) dostaneme

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\Big[e^{-(t\wedge\tau_n\wedge\alpha_{a,b})}u(X(t\wedge\tau_n\wedge\alpha_{a,b}))|\mathcal{F}_s\Big]\\ &\overset{s.j.}{=} \mathbb{E}\Big[\lim_{k\to\infty} e^{-(t\wedge\tau_n\wedge\alpha_{a,b}\wedge\rho_{n,k})}u(X(t\wedge\tau_n\wedge\alpha_{a,b}\wedge\rho_{n,k}))|\mathcal{F}_s\Big]\\ &\overset{s.j.}{=} \lim_{k\to\infty}\mathbb{E}\Big[e^{-(t\wedge\tau_n\wedge\alpha\wedge\rho_{n,k})}u(X(t\wedge\tau_n\wedge\alpha_{a,b}\wedge\rho_{n,k}))|\mathcal{F}_s\Big]\\ &\overset{s.j.}{=} \lim_{k\to\infty} e^{-(s\wedge\tau_n\wedge\alpha_{a,b}\wedge\rho_{n,k})}u(X(s\wedge\tau_n\wedge\alpha_{a,b}\wedge\rho_{n,k}))\\ &\overset{s.j.}{=} e^{-(s\wedge\tau_n\wedge\alpha_{a,b})}u(X(s\wedge\tau_n\wedge\alpha_{a,b})).\end{aligned} \tag{2.45}$$

Dále máme $\tau_n\nearrow\varepsilon$. Ze spojitosti X plyne, že $\alpha_{a,b}<\varepsilon$ na $\{\varepsilon<\infty\}$, triviálně pak $\alpha_{a,b}\leq\varepsilon$ na $\{\varepsilon=\infty\}$. Jelikož $u(X(\cdot\wedge\alpha_{a,b}))$ je omezená na $[a,b]$, můžeme opakovat postup (2.45). Celkem tedy pro všechna $t\geq 0$ platí

$$\mathbb{E}\Big[e^{-(t\wedge\alpha_{a,b})}u(X(t\wedge\alpha_{a,b}))|\mathcal{F}_s\Big]\overset{s.j.}{=} e^{-(s\wedge\alpha_{a,b})}u(X(s\wedge\alpha_{a,b})),$$

pročež proces

$$\Big(e^{-(t\wedge\alpha_{a,b})}u(X(t\wedge\alpha_{a,b})),\ t\geq 0\Big)$$

je nezáporný martingal.

Krok 4. Vezměme posloupnost intervalů $[a_j,b_j]\nearrow(l,r), x_0\in[a_1,b_1]$ a označme

$$\alpha(j)=\inf\Big\{t\in[0,\varepsilon); X_t\notin(a_j,b_j)\Big\},\quad j\geq 1.$$

Z předchozího kroku jsou $(e^{-(\cdot\wedge\alpha(j))}u(X(\cdot\wedge\alpha(j)))$ nezáporné martingaly. Definujme

$$M_t=\liminf_{j\to\infty} e^{-(t\wedge\alpha(j))}u(X(t\wedge\alpha(j))),\quad t\geq 0. \tag{2.46}$$

Lemma 2.10. *Pro* $t \geq 0$ *definujme* M_t *formulí* (2.46)*. Potom* $M = (M_t,\ t \geq 0)$ *je nezáporný supermartingal.*

Důkaz. Nezápornost je zřejmá (u je nezáporné řešení). Užitím Fatouova lemmatu a martingalové vlastnosti máme pro libovolné $t \geq 0$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}|M_t| &= \mathbb{E}M_t \\
&= \mathbb{E} \liminf_{j\to\infty} e^{-(t\wedge\alpha(j))} u(X(t\wedge\alpha(j))) \\
&\leq \liminf_{j\to\infty} \mathbb{E} e^{-(t\wedge\alpha(j))} u(X(t\wedge\alpha(j))) \\
&= \liminf_{j\to\infty} \mathbb{E}\Big[\mathbb{E}[e^{-(t\wedge\alpha(j))} u(X(t\wedge\alpha(j)))|\mathcal{F}_0]\Big] \\
&= \liminf_{j\to\infty} \mathbb{E} e^{-(0\wedge\alpha(j))} u(X(0\wedge\alpha(j))) \\
&= u(x_0) \in \mathbb{R},
\end{aligned}$$

ze spojitosti u, tedy $M_t \in L^1(\mathbb{P})$. Zbývá ukázat, že M má supermartingalovou vlastnost. Buďte $0 \leq s \leq t$ libovolná, pak nám Fatouovo lemma pro podmíněnou střední hodnotu dává

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\Big[M_t|\mathcal{F}_s\Big] &= \mathbb{E}\Big[\liminf_{j\to\infty} e^{-(t\wedge\alpha(j))} u(X(t\wedge\alpha(j)))|\mathcal{F}_s\Big] \\
&\leq \liminf_{j\to\infty} \mathbb{E}\Big[e^{-(t\wedge\alpha(j))} u(X(t\wedge\alpha(j)))|\mathcal{F}_s\Big] \\
&= \liminf_{j\to\infty} e^{-(s\wedge\alpha(j))} u(X(s\wedge\alpha(j))) \\
&= M_s
\end{aligned}$$

$\mathbb{P}$-skoro jistě, M je tedy supermartingal. □

KROK 5. Pokud $\varepsilon(\omega) < \infty$, pak $X(\cdot,\omega)$ v konečném čase opustí každý kompaktní subinterval intervalu (l,r). Jelikož $[a_j,b_j] \nearrow (l,r)$, vzhledem k definici markovských časů $\alpha(j)$ platí $\alpha(j,\omega) \nearrow \varepsilon(\omega)$. Tudíž pro $r < \varepsilon(\omega) < \infty$ platí

$$\begin{aligned}
M_r(\omega) &= \liminf_{j\to\infty} e^{-(r\wedge\alpha(j,\omega))} u(X(r\wedge\alpha(j,\omega),\omega)) \\
&= e^{-r} u(X(r,\omega)).
\end{aligned} \tag{2.47}$$

Věta 2.11. *Buď* $u \in AC^1_{loc}((l,r))$ *nezáporné řešení* (2.2)*. Označme*

$$u(l_+) = \lim_{x\searrow l} u(x), \quad u(r_-) = \lim_{x\nearrow r} u(x).$$

Pokud

$$u(l_+) = u(r_-) = \infty, \tag{2.48}$$

pak $\mathbb{P}(\varepsilon = \infty) = 1$.

Důkaz. Nechť je splněno (2.48). Nechť M je supermartingal zavedený v lemmatu 2.10 a Ω_{conv} množina, která existuje podle lemmatu 2.7. Pro spor předpokládejme $\varepsilon(\omega) < \infty$ pro nějaké $\omega \in \Omega_{\mathrm{conv}}$. Je-li $(q_j)_{j\in\mathbb{N}}$ libovolná striktně rostoucí posloupnost v $\mathbb{Q}_+$ taková, že $q_j \nearrow \varepsilon(\omega)$, pak z (2.47) máme

$$M_{q_j}(\omega) = e^{-q_j} u(X(q_j,\omega)) \quad \forall j \in \mathbb{N}.$$

a dle lemmatu 2.7 existuje konečná limita

$$\lim_{j\to\infty} M_{q_j}(\omega) = \lim_{j\to\infty} e^{-q_j} u(X(q_j,\omega)) \in \mathbb{R}.$$

Přitom z $\varepsilon(\omega) < \infty$ plyne

$$\lim_{j\to\infty} e^{-q_j} = e^{-\varepsilon(\omega)} > 0,$$

tedy existuje konečná limita

$$\lim_{j\to\infty} u(X(q_j,\omega)) \in \mathbb{R}. \tag{2.49}$$

Z definice ε máme

$$\Big(\liminf_{t\nearrow\varepsilon(\omega)} X(t,\omega) = l\Big) \text{ nebo } \Big(\limsup_{t\nearrow\varepsilon(\omega)} X(t,\omega) = r\Big).$$

Bez újmy na obecnosti předpokládejme

$$\lim_{t\nearrow\varepsilon(\omega)} X(t,\omega) = l.$$

To podle definice znamená

$$\forall\eta > 0\ \exists\delta > 0\ \forall\Delta \in (0,\delta) : \Big|\sup_{t\in(\varepsilon(\omega)-\Delta,\varepsilon(\omega))} X(t,\omega) - l\Big| < \eta.$$

Díky spojitosti $X(\cdot,\omega)$ můžeme nalézt $z \in (\varepsilon(\omega)-\Delta, \varepsilon(\omega)) \cap \mathbb{Q}_+$ tak, že

$$\Big|X(z,\omega) - l\Big| < \eta$$

Lze tedy nalézt striktně rostoucí posloupnost $(\tilde{q}_j)_{j\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{Q}_+$ tak, že

$$\tilde{q}_j \nearrow \varepsilon(\omega) \text{ a } \lim_{j\to\infty} X(\tilde{q}_j,\omega) = l.$$

Funkce u je spojitá, a proto

$$\lim_{j\to\infty} u(X(\tilde{q}_j,\omega)) = \lim_{x\searrow l} u(x) = u(l_+) = \infty,$$

což je spor s (2.49). Jelikož $\mathbb{P}(\Omega_{\text{conv}}) = 1$, je věta dokázana. □

Návod, jak předchozí kriterium využít v praktických výpočtech, nám dává následující věta.

Věta 2.12 (Fellerovo kriterium pro neexplosi — postačující podmínka)**.** *Nechť b, σ splňují* (KP), (P). *Jestliže existuje $c \in (l,r)$ takové, že*

$$v_c(l_+) = v_c(r_-) = \infty, \tag{2.50}$$

pak $\mathbb{P}(\varepsilon = \infty) = 1$.

Důkaz. Díky větě 2.3 existuje nezáporné řešení rovnice (2.2) $u \in AC^1_{loc}((l,r))$. Podle důsledku 2.11 máme $\mathbb{P}(\varepsilon = \infty) = 1$, pokud $u(l_+) = u(r_-) = \infty$. To ale platí z lemmatu 2.4: $u(l_+) \geq 1 + v(l_+) = \infty, u(r_-) \geq 1 + v(r_-) = \infty$. □

Důsledek 2.13. *Nechť b, σ splňují* (KP), (P). *Pokud*

$$p(l_+) = -\infty \quad a \quad p(r_-) = \infty, \tag{2.51}$$

pak $\mathbb{P}(\varepsilon = \infty) = 1$.

Důkaz. Jedná se o důsledek lemmatu 2.1 a věty 2.12. □

2.5 Nutná podmínka pro neexplosi

Věta 2.14. *Předpokládejme, že koeficienty* b, σ *splňují* (KP), (P)*. Nechť*

$$\mathbb{P}\Big(\varepsilon = \infty\Big) = 1.$$

Potom pro všechna $c \in (l, r)$ *platí*

$$v_c(l_+) = v_c(r_-) = \infty.$$

Důkaz. Nechť pro spor například $v_c(l_+) < \infty$. Podle třetího bodu lemmatu 2.1 lze předpokládat, že $c \in (x_0, r)$. Bez újmy na obecnosti dále předpokládejme, že $\varepsilon = \infty$ na celém Ω. Definujme markovský čas

$$\gamma = \inf\Big\{t \geq 0; X_t = c\Big\}.$$

Buď u řešení rovnice (2.2). Nechť $[a_n, b_n], \alpha_{a(n),b(n)} =: \alpha(n)$ mají význam jako dříve. Dle lemmatu 2.4 máme $u(l_+) < \infty$. Z třetího kroku aproximace v sekci 2.4 víme, že

$$\Big(e^{-(t\wedge\alpha(n))}u(X(t \wedge \alpha(n))),\ t \geq 0\Big)$$

je spojitý nezáporný martingal, tudíž jsou i

$$Z^{(n)} = \Big(e^{-(t\wedge\alpha(n)\wedge\gamma)}u(X(t \wedge \alpha(n) \wedge \gamma)),\ t \geq 0\Big)$$

spojité nezáporné martingaly pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Máme $\alpha(n) \nearrow \varepsilon = \infty$. Pro $t \geq 0$ položme

$$Z_t = \lim_{n\to\infty} e^{-(t\wedge\alpha(n)\wedge\gamma)}u(X(t \wedge \alpha(n) \wedge \gamma)) = e^{-(t\wedge\gamma)}u(X(t \wedge \gamma)).$$

Pro $t \leq \gamma$ je $X_t \in (l, c]$ a $u(l_+) < \infty$, tedy je u omezená na $(l, c]$. Proto

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \sup_{\mathbb{R}_+\times\Omega} |Z_t^{(n)}| \equiv K < \infty$$

a podle Lebesgueovy věty pro podmíněné střední hodnoty (s integrovatelnou majorantou K)

$$\mathbb{E}\Big[Z_t|\mathcal{F}_s\Big] = \mathbb{E}\Big[\lim_{n\to\infty} Z_t^{(n)}|\mathcal{F}_s\Big] \overset{s.j.}{=} \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\Big[Z_t^{(n)}|\mathcal{F}_s\Big] \overset{s.j.}{=} \lim_{n\to\infty} Z_s^{(n)} = Z_s,$$

tedy Z je (spojitý nezáporný) martingal. Platí $\sup_{\mathbb{R}_+\times\Omega} Z \leq K$, tudíž Z je stejnoměrně integrovatelný. Podle martingalové konvergenční věty proto existuje $Z_\infty = \lim_{t\to\infty}$ v $L^1(\mathbb{P})$ a $\mathbb{P}$-skoro jistě a $(Z_t, 0 \leq t \leq \infty)$ je martingal, z čehož plyne $\mathbb{E}Z_\infty = \mathbb{E}Z_0$. Evidentně

$$Z_\infty = \begin{cases} \lim\limits_{t\to\infty} e^{-(t\wedge\gamma)}u(X(t \wedge \gamma)) = e^{-\gamma}u(X(\gamma)) = e^{-\gamma}u(c) = e^{-\gamma}, & \gamma < \infty, \\ 0, & \gamma = 0 \end{cases}$$

a

$$Z_0 = u(X(0)) = u(x_0).$$

Platí ovšem

$$u(x_0) = \mathbb{E}Z_0 = \mathbb{E}Z_\infty = e^{-\gamma}\mathbb{P}(\gamma < \infty) \leq 1 = u(c) < u(x_0),$$

neboť u je striktně klesající na (l, c) a $c \in (x_0, r)$, což je hledaný spor. Pokud $u(r_-) < \infty$, postupujeme analogicky, pouze volíme $c \in (l, x_0)$. $\square$

2.6 Kriterium pro explosi řešení skoro jistě

Pro úplnost vyslovme bez důkazu (ten je založen na podobných postupech jako důkaz kriteria pro neexplosi řešení skoro jistě) nutnou a postačující podmínku pro explosi řešení skoro jistě.

Věta 2.15. *Nechť* b, σ *splňují* (KP), (P). *Platí* $\mathbb{P}(\varepsilon < \infty) = 1$, *právě když je splněna jedna z následujících podmínek:*

(i) Existuje $c \in (l, r)$ *takové, že* $v_c(l_+) \in \mathbb{R}$ *a* $v_c(r_-) \in \mathbb{R}$.

(ii) Existuje $c \in (l, r)$ *takové, že* $v_c(l_+) \in \mathbb{R}$ *a* $p(r_-) = \infty$.

(iii) Existuje $c \in (l, r)$ *takové, že* $p(l_+) = -\infty$ *a* $v_c(r_-) \in \mathbb{R}$.

Je-li splněna podmínka (i), pak $\mathbb{E}\varepsilon < \infty$.

Kapitola 3

Rovnice s polynomiálními koeficienty

V této kapitole popíšeme, jak je to s časem explose rovnice tvaru

$$\begin{aligned} \mathrm{d}X &= \varrho X^{\alpha}\mathrm{d}t + \sqrt{\lambda}X^{\beta}\mathrm{d}W, \\ X(0) &= x_0 > 0. \end{aligned} \tag{PSDE}$$

na intervalu $(0, \infty)$ v závislosti na exponentech $\rho \in \{-1, 1\}, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ a koeficientu $\lambda > 0$.

Funkce

$$b\colon x \mapsto x^{\alpha} \text{ a } \sigma\colon x \mapsto \sqrt{\lambda}x^{\beta}, \quad x \in (0, \infty),$$

zjevně splňují předpoklad (III*): položme $l_N = \frac{1}{N}, r_N = N, N \in \mathbb{N}$; podle Lagrangeovy věty o střední hodnotě pro každé $N \in \mathbb{N}$ a pro všechna $x, y \in [\frac{1}{N}, N]$ existují $c_N, d_N \in [\frac{1}{N}, N]$ taková, že platí

$$|b(x) - b(y)| = |b'(c_N)||x - y| = |\alpha {c_N}^{\alpha-1}||x - y|$$

a

$$|\sigma(x) - \sigma(y)| = |\sigma'(d_N)||x - y| = \sqrt{\lambda}|\beta {d_N}^{\beta-1}||x - y|;$$

hledaná posloupnost lipschitzovských konstant je pak

$$\Big(|\alpha| \max_{c \in [\frac{1}{N}, N]} \{|c^{\alpha-1}|\} + \sqrt{\lambda}|\beta| \max_{d \in [\frac{1}{N}, N]} \{|d^{\beta-1}|\}\Big)_{N \in \mathbb{N}}.$$

Podle věty 1.4 tedy pro všechny hodnoty parametrů $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ a $\lambda > 0$ existuje jednoznačně určené lokální řešení (X, ε) rovnice (PSDE).

Poznámka 3.1. Obecnější rovnici

$$\mathrm{d}X = \rho X^{\alpha}\mathrm{d}t + \sqrt{\mu}X^{\beta}\mathrm{d}W \tag{3.1}$$

není nutno vyšetřovat zvlášť. Máme totiž

$$p(z) = \int_{x_0}^{z} \exp\Big(-\int_{x_0}^{x} \frac{2\rho y^{\alpha}}{(\sqrt{\mu}y^{\beta})^2}\Big) = \int_{x_0}^{z} \exp\Big(-\int_{x_0}^{x} \frac{2y^{\alpha}}{(\sqrt{\frac{\mu}{|\rho|}}y^{\beta})^2}\Big),$$

což odpovídá škálovací funkci rovnice (PSDE) pro $\lambda = \frac{\mu}{|\rho|}$. ∇

3.1 Kladný drift

Uvažujme nejprve rovnici

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}X &= X^\alpha \mathrm{d}t + \sqrt{\lambda} X^\beta \mathrm{d}W, \\
X(0) &= x_0
\end{aligned}
\tag{PSDE+}
$$

na intervalu $(0, \infty)$, kde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ a $\lambda, x_0 > 0$.

Tvrzení 3.1. *Nechť je dána rovnice* (PSDE+) *na intervalu* $(0, \infty)$ *s parametry* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *a* $\lambda > 0$. *Potom platí:*

- $\mathbb{P}(\varepsilon < \infty) = 0$, *právě když je splněna jedna z podmínek:*

  (a) $\alpha + 1 < 2\beta$ *(pak* $\inf_{t\geq 0} X(t) \overset{s.j.}{=} 0$ *a* $\sup_{t\geq 0} X(t) \overset{s.j.}{=} \infty$*),*

  (b) $\alpha + 1 = 2\beta, \alpha \leq 1, 0 < \lambda < 2$ *(pak* $\lim_{t\to\infty} X(t) \overset{s.j.}{=} \infty$*),*

  (c) $\alpha + 1 = 2\beta, \lambda = 2$ *(pak* $\inf_{t\geq 0} X(t) \overset{s.j.}{=} 0$ *a* $\sup_{t\geq 0} X(t) \overset{s.j.}{=} \infty$*),*

  (d) $\alpha + 1 = 2\beta, \alpha \geq 1, \lambda > 2$ *(pak* $\lim_{t\to\infty} X(t) \overset{s.j.}{=} 0$*).*

- $\mathbb{P}(\varepsilon < \infty) \in (0, 1)$, *právě když je splněna jedna z podmínek:*

  (e) $\alpha + 1 > 2\beta, \alpha \leq 1$ *(pak* $\lim_{t\nearrow\varepsilon} X(t) \in \{0, \infty\}$ *skoro jistě),*

  (f) $\alpha + 1 > 2\beta, \beta \geq 1$ *(pak* $\lim_{t\nearrow\varepsilon} X(t) \in \{0, \infty\}$ *skoro jistě).*

- $\mathbb{P}(\varepsilon < \infty) = 1$, *právě když je splněna jedna z podmínek:*

  (g) $\alpha + 1 = 2\beta, \alpha > 1, 0 < \lambda < 2$ *(pak* $\lim_{t\nearrow\varepsilon} X(t) \overset{s.j.}{=} \infty$*),*

  (h) $\alpha + 1 = 2\beta, \alpha < 1, \lambda > 2$ *(pak* $\lim_{t\nearrow\varepsilon} X(t) \overset{s.j.}{=} 0$*),*

  (i) $\alpha > 1, \beta < 1$ *(pak* $\lim_{t\nearrow\varepsilon} X(t) \in \{0, \infty\}$ *skoro jistě a* $\mathbb{E}\varepsilon < \infty$*).*

Poznámka 3.2. Chování časů explose rovnice (PSDE) v závislosti na hodnotách parametrů je znázorněno na obrázku C.1. ▽

Poznámka 3.3. V případě rovnice (PSDE+) má koeficient λ vliv na čas explose pouze pokud $\alpha + 1 = \beta$. ▽

Důkaz provedeme rozborem jednotlivých případů. Položme $c = 2\beta - \alpha - 1$ a pro $z \in (0, \infty)$ pišme

$$
p(z) = \int_1^z \exp\Big(-\int_1^x \frac{2}{\lambda} y^{\alpha - 2\beta} \mathrm{d}y\Big) \mathrm{d}x = \int_1^z \exp\Big(-\int_1^x \frac{2}{\lambda} y^{-(1+c)} \mathrm{d}y\Big) \mathrm{d}x. \tag{3.2}
$$

Případ 3.1 (Podmínka (a)). $\alpha + 1 < 2\beta$. Pak $c > 0$ a

$$
\begin{aligned}
p(z) &= \int_1^z \exp\Big(\frac{2}{\lambda c} \Big[y^{-c}\Big]_{y=1}^x\Big) \mathrm{d}x \\
&= \int_1^z \exp\Big(-\frac{2}{\lambda c}\Big(1 - x^{-c}\Big)\Big) \mathrm{d}x \\
&= \exp\Big(-\frac{2}{\lambda c}\Big) \int_1^z \exp\Big(\frac{2}{\lambda c} \frac{1}{x^c}\Big) \mathrm{d}x.
\end{aligned}
\tag{3.3}
$$

Máme tak

$$\begin{aligned}p(\infty_-) &= \exp\Big(-\frac{2}{\lambda c}\Big)\int_1^\infty \exp\Big(\frac{2}{\lambda c}\frac{1}{x^c}\Big)\mathrm{d}x\\ &\geq \exp\Big(-\frac{2}{\lambda c}\Big)\int_1^\infty e^0\mathrm{d}x = \infty\end{aligned}$$

a

$$\begin{aligned}p(0_+) &= -\exp\Big(-\frac{2}{\lambda c}\Big)\int_0^1 \exp\Big(\frac{2}{\lambda c}\frac{1}{x^c}\Big)\mathrm{d}x\\ &= -\exp\Big(-\frac{2}{\lambda c}\Big)\int_0^1 \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\Big(\frac{2}{\lambda c}\frac{1}{x^c}\Big)^k\mathrm{d}x\\ &\leq -\exp\Big(-\frac{2}{\lambda c}\Big)\sum_{k=0}^{N}\frac{1}{k!}\Big(\frac{2}{\lambda c}\Big)^k\int_0^1\frac{1}{x^{kc}}\mathrm{d}x\end{aligned} \tag{3.4}$$

pro všechna $N \in \mathbb{N}$. Integrál v (3.4) diverguje, jakmile $kc > 1$; vezmeme-li $N > \frac{1}{c}$, vidíme, že $p(0_+) = -\infty$. Užitím důsledku 2.13 dostáváme, že $\mathbb{P}(\varepsilon = \infty) = 1$. Podle pozorování 2.6 navíc máme

$$\mathbb{P}\Big(\inf_{t<\varepsilon} X(t) = 0\Big) = \mathbb{P}\Big(\sup_{t<\varepsilon} X(t) = \infty\Big) = 1. \tag{3.5}$$

△

V několika dalších situacích se budeme zabývat případem, kdy $\alpha + 1 = 2\beta$. Potom $c = 0$ a výraz (3.2) se zjednoduší na

$$\begin{aligned}p(z) &= \int_1^z \exp\Big(-\int_1^x \frac{2}{\lambda}y^{-1}\mathrm{d}y\Big)\mathrm{d}x\\ &= \int_1^z \exp\Big(-\frac{2}{\lambda}\Big[\log y\Big]_{y=1}^{x}\Big)\mathrm{d}x\\ &= \int_1^z \exp\Big(-\frac{2}{\lambda}\log x\Big)\\ &= \int_1^z x^{-\frac{2}{\lambda}}\mathrm{d}x.\end{aligned} \tag{3.6}$$

Případ 3.2 (Podmínka (b)). $\alpha + 1 = 2\beta, \alpha \leq 1, 0 < \lambda < 2$. Potom

$$p(\infty_-) = \int_1^\infty x^{-\frac{2}{\lambda}}\mathrm{d}x = \frac{\lambda}{2-\lambda} \in (0, \infty) \tag{3.7}$$

a

$$p(0_+) = \int_1^0 x^{-\frac{2}{\lambda}}\mathrm{d}x = -\int_0^1 x^{-\frac{2}{\lambda}}\mathrm{d}x = -\infty. \tag{3.8}$$

Pro $z \in [1, \infty)$ pak máme

$$p(z) = \frac{\lambda}{2-\lambda}(1 - z^{\frac{\lambda-2}{\lambda}}) \tag{3.9}$$

a

$$p'(z) = z^{-\frac{2}{\lambda}} \tag{3.10}$$

Dosazením (3.7), (3.9) a (3.10) do vzorce pro $v_1(\infty_-)$ získáváme

$$\begin{aligned}
v_1(\infty_-) &= 2\int_1^\infty \frac{p(\infty_-)-p(y)}{p'(y)\sigma^2(y)}\mathrm{d}y \\
&= 2\int_1^\infty \frac{\frac{\lambda}{2-\lambda}-\frac{\lambda}{2-\lambda}(1-y^{\frac{\lambda-2}{\lambda}})}{y^{-\frac{2}{\lambda}}\lambda y^{2\beta}}\mathrm{d}y \\
&= \frac{2}{2-\lambda}\int_1^\infty y^{1-2\beta}\mathrm{d}y \\
&= \frac{2}{2-\lambda}\int_1^\infty y^{-\alpha}\mathrm{d}y \\
&= \infty.
\end{aligned}$$

Užitím (3.8) a lemmatu 2.1 jest i $v_1(0_+) = \infty$. Podle věty 2.12 tedy opět platí $\mathbb{P}(\varepsilon = \infty) = 1$. Z pozorování 2.8 pak $\lim_{t\nearrow\varepsilon} = \infty$ skoro jistě. △

Případ 3.3 (Podmínka (g)). $\alpha + 1 = 2\beta, \alpha > 1, 0 < \lambda < 2$. Stejně jako v předchozím případě dostáváme $p(\infty_-) = \frac{\lambda}{2-\lambda} \in (0,\infty)$ a $p(0_+) = -\infty$, nyní ale

$$v_1(\infty_-) = \frac{2}{2-\lambda}\int_1^\infty y^{-\alpha}\mathrm{d}y = \frac{2}{2-\lambda}\left[\frac{y^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_1^\infty = \frac{2}{2-\lambda}\frac{1}{\alpha-1} \in (0,\infty).$$

Podle věty 2.15 platí $\mathbb{P}(\varepsilon < \infty) = 1$ a podle pozorování 2.8 jest $\mathbb{P}(\lim_{t\nearrow\varepsilon} X(t) = \infty) = 1$. △

Případ 3.4 (Podmínka (c)). $\alpha + 1 = 2\beta, \lambda = 2$. Potom

$$p(z) = \int_1^z x^{-1}\mathrm{d}x$$

a integrály $p(0_+)$ i $p(\infty_-)$ divergují. Situace je tak stejná jako v případě 3.1, platí tudíž $\mathbb{P}(\varepsilon = \infty) = 1$ a (3.5). △

Případ 3.5 (Podmínka (h)). $\alpha + 1 = 2\beta, \alpha < 1, \lambda > 2$, pak $\frac{2}{\lambda} < 1$ a

$$p(\infty_-) = \int_1^\infty x^{-\frac{2}{\lambda}}\mathrm{d}x = \infty. \tag{3.11}$$

Pro $z \in (0,1]$ platí, podobně jako v (3.9),

$$p(z) = -\int_z^1 x^{-\frac{2}{\lambda}}\mathrm{d}x = \frac{\lambda}{\lambda-2}\Big(z^{\frac{\lambda-2}{\lambda}} - 1\Big), \tag{3.12}$$

tudíž

$$p(0_+) = -\frac{\lambda}{\lambda-2} \tag{3.13}$$

a

$$p'(z) = z^{-\frac{2}{\lambda}}, \quad z \in (0,1]. \tag{3.14}$$

Dosazením (3.12), (3.13) a (3.14) do formule $v_1(0_+)$ získáváme

$$\begin{aligned}
v_1(0_+) &= -2\int_0^1 \frac{p(0_+)-p(y)}{p'(y)\sigma^2(y)}\mathrm{d}y \\
&= -2\int_0^1 \frac{-\frac{\lambda}{\lambda-2}-\frac{\lambda}{\lambda-2}(y^{\frac{\lambda-2}{\lambda}}-1)}{y^{-\frac{2}{\lambda}}\lambda y^{2\beta}} \\
&= \frac{2}{\lambda-2}\int_0^1 \frac{y^{\frac{\lambda-2}{\lambda}}}{y^{-\frac{2}{\lambda}}y^{2\beta}}\mathrm{d}y \\
&= \frac{2}{\lambda-2}\int_0^1 y^{1-2\beta}\mathrm{d}y \\
&= \frac{2}{\lambda-2}\int_0^1 y^{-\alpha}\mathrm{d}y \\
&= \frac{2}{\lambda-2}\frac{1}{1-\alpha} \in (0,\infty).
\end{aligned} \tag{3.15}$$

Dle věty 2.15 máme $\mathbb{P}(\varepsilon < \infty) = 1$; pozorování 2.8 nám dává $\mathbb{P}(\lim_{t\nearrow\varepsilon} X(t) = 0) = 1$. △

Případ 3.6 (Podmínka (d)). $\alpha+1 = 2\beta, \alpha \geq 1, \lambda > 2$. Z (3.11) máme $p(\infty_-) = \infty$, z (3.13) jest $p(0_+) = \frac{\lambda}{\lambda-2}$. Stejným výpočtem jako v (3.15) získáváme

$$v_1(0_+) = \frac{2}{\lambda-2}\int_0^1 y^{-\alpha}\mathrm{d}y = \infty.$$

Dle lemmatu 2.1 máme $v_1(\infty_-) = \infty$, věta 2.12 pak implikuje $\mathbb{P}(\varepsilon = \infty) = 1$. Konečně, z pozorování 2.8 vyplývá $\mathbb{P}(\lim_{t\nearrow\varepsilon} = 0) = 1$. △

V dalších případech se budeme zabývat situací, kdy $\alpha + 1 > 2\beta$. Pro přehlednost označme $\tilde{c} = -c$. Pak $\tilde{c} > 0$ a stejně jako v (3.3) máme

$$\begin{aligned}
p(z) &= \exp\Big(-\frac{2}{\lambda c}\Big)\int_1^z \exp\Big(\frac{2}{\lambda c}x^{-c}\Big)\mathrm{d}x \\
&= \exp\Big(\frac{2}{\lambda\tilde{c}}\Big)\int_1^z \exp\Big(-\frac{2}{\lambda\tilde{c}}x^{\tilde{c}}\Big)\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

a

$$p'(z) = \exp\Big(\frac{2}{\lambda\tilde{c}}(1-z^{\tilde{c}})\Big)$$

Označme $\kappa = \frac{2}{\lambda\tilde{c}} > 0$ a pro $x \in (0,\infty)$ položme

$$h(x) = -\kappa x^{\tilde{c}}.$$

Pak

$$h'(x) = -\tilde{c}\kappa x^{\tilde{c}-1} < 0, \quad h''(x) = -\tilde{c}(\tilde{c}-1)\kappa x^{\tilde{c}-2}.$$

S užitím našeho značení máme

$$p(z) = e^{\kappa}\int_1^z \exp\Big(h(x)\Big)\mathrm{d}x, \quad p'(z) = e^{\kappa}\exp\Big(h(z)\Big).$$

Vzhledem k tomu, že $h \in \mathcal{C}([0,\infty))$, máme

$$p(0_+) = -e^{\kappa}\int_0^1 \exp\Big(h(x)\Big)\mathrm{d}x \in \mathbb{R}. \tag{3.16}$$

Dále

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\exp\Big(h(x)\Big)}{x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{\exp\Big(-\kappa x^{\tilde{c}}\Big)}{\exp\Big(2\log(x)\Big)} = \lim_{x\to\infty} \exp\Big(-\kappa x^{\tilde{c}} - 2\log(x)\Big) = 0;$$

podle definice limity existuje $k \geq 1$ takové, že

$$\exp\Big(h(x)\Big) \leq \frac{1}{x^2}, \quad x \in [k, \infty).$$

Získáváme tak

$$\begin{aligned} p(\infty_-) &= e^{\kappa} \int_1^k \exp\Big(h(x)\Big)\mathrm{d}x + e^{\kappa} \int_k^{\infty} \exp\Big(h(x)\Big)\mathrm{d}x \\ &= C_k + e^{\kappa} \int_k^{\infty} \exp\Big(h(x)\Big)\mathrm{d}x \\ &= C_k + \leq e^{\kappa} \int_k^{\infty} \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x \\ &< \infty, \end{aligned} \tag{3.17}$$

kde $C_k \in \mathbb{R}$, jelikož $h \in \mathcal{C}([0,\infty))$. Dále pro $y > 0$ označme

$$\psi(y) = \int_y^{\infty} \exp\Big(h(x)\Big)\mathrm{d}x.$$

Výpočet zcela analogický (3.17) dává $\psi(y) \in \mathbb{R}$. Počítejme s využitím integrace per partes:

$$\begin{aligned} \psi(y) &= \int_y^{\infty} \exp\Big(h(x)\Big)\mathrm{d}x \\ &= \int_y^{\infty} \frac{1}{h'(x)} \Big[\exp\Big(h(x)\Big)\Big]'\mathrm{d}x \\ &= \left[\frac{1}{h'(x)} \exp\Big(h(x)\Big)\right]_{x=y}^{\infty} - \int_y^{\infty} \frac{h''(x)}{[h'(x)]^2} \exp\Big(h(x)\Big)\mathrm{d}x \\ &= \left[-\frac{1}{\tilde{c}\kappa x^{\tilde{c}-1}} \exp\Big(-\kappa x^{\tilde{c}}\Big)\right]_{x=y}^{\infty} + \int_y^{\infty} \frac{\tilde{c}(\tilde{c}-1)\kappa x^{\tilde{c}-2}}{\tilde{c}^2\kappa^2 x^{2\tilde{c}-2}} \exp\Big(h(x)\Big)\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\tilde{c}\kappa y^{\tilde{c}-1}} \exp\Big(h(y)\Big) + \frac{\tilde{c}-1}{\tilde{c}\kappa} \int_y^{\infty} \frac{1}{x^{\tilde{c}}} \exp\Big(h(x)\Big)\mathrm{d}x. \end{aligned} \tag{3.18}$$

Díky podmínce $\tilde{c} > 0$ je funkce $x \mapsto \frac{1}{x^{\tilde{c}}}$ klesající na $(0, \infty)$, tudíž

$$\left|\int_y^{\infty} \frac{1}{x^{\tilde{c}}} \exp\Big(h(x)\Big)\mathrm{d}x\right| \leq \frac{1}{y^{\tilde{c}}} \int_y^{\infty} \exp\Big(h(x)\Big)\mathrm{d}x = \frac{\psi(y)}{y^{\tilde{c}}}. \tag{3.19}$$

Vydělením rovnosti (3.18) výrazem $\psi(y)$ (ten je zřejmě nenulový) dostaneme

$$1 = \frac{1}{\tilde{c}\kappa y^{\tilde{c}-1}\psi(y)} \exp\Big(h(y)\Big) + \frac{\tilde{c}-1}{\tilde{c}\kappa\psi(y)} \int_y^{\infty} \frac{1}{x^{\tilde{c}}} \exp\Big(h(x)\Big)\mathrm{d}x. \tag{3.20}$$

Z odhadu (3.19) plyne

$$\left|\frac{\tilde{c}-1}{\tilde{c}\kappa\psi(y)} \int_y^{\infty} \frac{1}{x^{\tilde{c}}} \exp\Big(h(x)\Big)\mathrm{d}x\right| \leq \left|\frac{\tilde{c}-1}{\tilde{c}\kappa}\right| \frac{1}{y^{\tilde{c}}} \xrightarrow[y\to\infty]{} 0;$$

limitním přechodem v (3.20) tak získáváme

$$\lim_{y\to\infty} \frac{1}{\tilde{c}\kappa y^{\tilde{c}-1}\psi(y)} \exp\Big(h(y)\Big) = 1.$$

Z definice limity plyne existence $y_0 > 0$ takové, že

$$\frac{1}{2} \le \frac{1}{\tilde{c}\kappa y^{\tilde{c}-1}\psi(y)} \exp\Big(h(y)\Big) \le \frac{3}{2} \quad \forall y > y_0,$$

tedy

$$\frac{1}{2}\exp\Big(-h(y)\Big)\psi(y) \le \frac{1}{\tilde{c}\kappa y^{\tilde{c}-1}} \le \frac{3}{2}\exp\Big(-h(y)\Big)\psi(y) \quad \forall y \ge y_0. \tag{3.21}$$

Nyní můžeme počítat:

$$\begin{aligned}
v_1(\infty_-) &= 2\int_1^\infty \frac{p(\infty_-) - p(y)}{p'(y)\sigma^2(y)}\mathrm{d}y \\
&= 2\int_1^\infty \frac{e^\kappa \int_1^\infty \exp\Big(h(x)\Big)\mathrm{d}x - e^\kappa \int_1^y \exp\Big(h(x)\Big)\mathrm{d}x}{e^\kappa \exp\Big(h(y)\Big)\lambda y^{2\beta}}\mathrm{d}y \\
&= \frac{2}{\lambda}\int_1^\infty \frac{\int_y^\infty \exp\Big(h(x)\Big)\mathrm{d}x}{\exp\Big(h(y)\Big)y^{2\beta}}\mathrm{d}y \\
&= \frac{2}{\lambda}\int_1^\infty \frac{1}{y^{2\beta}}\exp\Big(-h(y)\Big)\psi(y)\mathrm{d}y \\
&= \frac{2}{\lambda}\int_1^{y_0} \frac{1}{y^{2\beta}}\exp\Big(-h(y)\Big)\psi(y)\mathrm{d}y + \frac{2}{\lambda}\int_{y_0}^\infty \frac{1}{y^{2\beta}}\exp\Big(-h(y)\Big)\psi(y)\mathrm{d}y.
\end{aligned}$$

Integrand v prvním integrálu je spojitá funkce na $[1,\infty)$, první integrál je tedy konečný. Platí proto

$$v_1(\infty_-) < \infty \iff \int_{y_0}^\infty \frac{1}{y^{2\beta}}\exp\Big(-h(y)\Big)\psi(y)\mathrm{d}y < \infty. \tag{3.22}$$

Případ 3.7 (Podmínka (e)). $\alpha + 1 > 2\beta, \alpha \le 1$. Platí

$$\begin{aligned}
v_1(0_+) &= 2\int_0^1 \frac{p(y) - p(0_+)}{p'(y)\sigma^2(y)}\mathrm{d}y \\
&= 2\int_0^1 \frac{e^\kappa \displaystyle\int_0^y \exp\Big(-\kappa x^{\tilde{c}}\Big)\mathrm{d}x}{\exp\Big(\kappa(1-y^{\tilde{c}})\Big)\lambda y^{2\beta}}\mathrm{d}y \\
&\le \frac{2}{\lambda}\int_0^1 \frac{y\sup_{x\in[0,1]}\Big\{\exp\Big(-\kappa x^{\tilde{c}}\Big)\Big\}}{\inf_{x\in[0,1]}\Big\{\exp\Big(-\kappa x^{\tilde{c}}\Big)\Big\}y^{2\beta}}\mathrm{d}y \\
&= \frac{2}{\lambda}\frac{\sup_{x\in[0,1]}\Big\{\exp\Big(-\kappa x^{\tilde{c}}\Big)\Big\}}{\inf_{x\in[0,1]}\Big\{\exp\Big(-\kappa x^{\tilde{c}}\Big)\Big\}}\int_0^1 y^{1-2\beta}\mathrm{d}y \\
&< \infty.
\end{aligned} \tag{3.23}$$

jelikož $1-2\beta > -1$. Vynásobením druhé nerovnosti v odhadu (3.21) výrazem $\frac{1}{y^{2\beta}}$ a následným integrováním získáváme

$$\begin{aligned}\int_{y_0}^{\infty} \frac{1}{y^{2\beta}} \exp\Big(-h(y)\Big)\psi(y)\mathrm{d}y &\geq \frac{2}{3\tilde{c}\kappa} \int_{y_0}^{\infty} \frac{1}{y^{2\beta}} \frac{1}{y^{\tilde{c}-1}} \mathrm{d}y \\ &= \frac{2}{3\tilde{c}\kappa} \int_{y_0}^{\infty} \frac{1}{y^{\alpha}} \mathrm{d}y \\ &= \infty,\end{aligned}$$

jelikož $2\beta + \tilde{c} - 1 = \alpha \leq 1$ dle předpokladu. Podle (3.22) je tedy

$$v_1(\infty_-) = \infty.$$

Věty 2.14 a 2.15 dohromady dávají $\mathbb{P}(\varepsilon < \infty) \in (0,1)$, z věty 1.5 pak máme $\mathbb{P}(\lim_{t\nearrow\varepsilon} X(t) \in \{0,\infty\}) = 1$. △

Případ 3.8 (Podmínka (f)). $\alpha+1 > 2\beta, \beta \geq 1$. Podobným výpočtem jako v (3.23) obdržíme

$$v_1(0+) \geq \frac{2}{\lambda} \frac{\inf_{x\in[0,1]}\Big\{\exp\Big(-\kappa x^{\tilde{c}}\Big)\Big\}}{\sup_{x\in[0,1]}\Big\{\exp\Big(-\kappa x^{\tilde{c}}\Big)\Big\}} \int_0^1 y^{1-2\beta}\mathrm{d}y = \infty, \tag{3.24}$$

neboť zde $1 - 2\beta \leq -1$. Nyní v odhadu (3.21) výrazem $\frac{1}{y^{2\beta}}$ vynásobíme první nerovnost a opět integrujeme:

$$\begin{aligned}\int_{y_0}^{\infty} \frac{1}{y^{2\beta}} \exp\Big(-h(y)\Big)\psi(y)\mathrm{d}y &\leq \frac{2}{\tilde{c}\kappa} \int_{y_0}^{\infty} \frac{1}{y^{2\beta}} \frac{1}{y^{\tilde{c}-1}} \mathrm{d}y \\ &= \frac{2}{\tilde{c}\kappa} \int_{y_0}^{\infty} \frac{1}{y^{\alpha}} \mathrm{d}y \\ &< \infty,\end{aligned} \tag{3.25}$$

protože tentokrát $2\beta + \tilde{c} - 1 = \alpha > 1$. Z (3.22) tak máme

$$v_1(\infty_-) < \infty.$$

Podle vět 2.14 a 2.15 opět platí $\mathbb{P}(\varepsilon < \infty) \in (0,1)$. Díky větě 1.5 jest $\mathbb{P}(\lim_{t\nearrow\varepsilon} X(t) \in \{0,\infty\}) = 1$. △

Případ 3.9 (Podmínka (i)). $\alpha > 1, \beta < 1$. Stejně jako v případě 3.8 jest $v_1(\infty_-) < \infty$. Totožným výpočtem jako v (3.23) pak dostáváme $v_1(0_+) < \infty$, jelikož podle předpokladu máme $1 - 2\beta > -1$. Z věty 2.15 plyne $\mathbb{E}\varepsilon < \infty$, věta 1.5 říká $\mathbb{P}(\lim_{t\nearrow\varepsilon} X(t) \in \{0,\infty\}) = 1$ △

3.2 Záporný drift

Nyní uvažujme rovnici

$$\begin{aligned}\mathrm{d}X &= -X^{\alpha}\mathrm{d}t + \sqrt{\lambda}X^{\beta}\mathrm{d}W, \\ X(0) &= x_0\end{aligned} \tag{PSDE-}$$

na intervalu $(0,\infty)$, kde opět $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ a $\lambda, x_0 > 0$. Ponechme si značení ze sekce 3.1.

Tvrzení 3.2. *Nechť je dána rovnice* (PSDE-) *na intervalu* $(0, \infty)$ *s parametry* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *a* $\lambda > 0$.

- *Pokud je splněno*
$$\alpha < 1 \text{ nebo } \beta < 1,$$
pak $\mathbb{P}(\varepsilon < \infty) = 1$ *a* $\lim_{t \nearrow \varepsilon} X(t) \overset{s.j}{=} 0$.

- *Pokud je naopak splněno*
$$\alpha \geq 1 \text{ a } \beta \geq 1,$$
pak $\mathbb{P}(\varepsilon < \infty) = 0$ *a* $\lim_{t \to \infty} X(t) \overset{s.j}{=} 0$.

Poznámka 3.4. Pro rovnici (PSDE-) se záporným driftem tedy explose či neexplose závisí pouze na exponentech α, β; koeficient λ nehraje roli v žádném případě. $\triangledown$

Nyní máme

$$p(z) = \int_1^z \exp\Big(\int_1^x \frac{2}{\lambda} y^{\alpha - 2\beta} \mathrm{d}y\Big) \mathrm{d}x = \int_1^z \exp\Big(\int_1^x \frac{2}{\lambda} y^{-(1+c)} \mathrm{d}y\Big) \mathrm{d}x.$$

Zabývejme se nejprve situací, kdy $c = 0$. Potom platí, podobně jako v (3.6),

$$p(z) = \int_1^z \exp\Big(\frac{2}{\lambda} \log x\Big) \mathrm{d}x = \int_1^z x^{\frac{2}{\lambda}} \mathrm{d}x = \frac{\lambda}{\lambda + 2}\Big(z^{1+\frac{2}{\lambda}} - 1\Big)$$

z čehož okamžitě vidíme, že $p(0_+) = -\frac{\lambda}{\lambda+2} \in \mathbb{R}$ a $p(\infty_-) = \infty$. Dosazením do definice $v_1(0_+)$ získáváme

$$\begin{aligned} v_1(0_+) &= 2 \int_0^1 \frac{\frac{\lambda}{\lambda+2}(y^{1+\frac{2}{\lambda}} - 1) + \frac{\lambda}{\lambda+2}}{y^{\frac{2}{\lambda}} \lambda y^{2\beta}} \mathrm{d}y \\ &= \frac{2}{\lambda + 2} \int_0^1 \frac{y^{1+\frac{2}{\lambda}}}{y^{\frac{2}{\lambda}} y^{2\beta}} \mathrm{d}y \\ &= \frac{2}{\lambda + 2} \int_0^1 y^{1-2\beta} \mathrm{d}y. \end{aligned} \tag{3.26}$$

Věnujme se nyní situaci $c \neq 0$. Opakováním postupu z (3.3) dostaneme

$$p(z) = \exp\Big(\frac{2}{\lambda c}\Big) \int_1^z \exp\Big(-\frac{2}{\lambda c} \frac{1}{x^c}\Big) \mathrm{d}x.$$

Jelikož

$$\lim_{x \to \infty} \exp\Big(-\frac{2}{\lambda c} \frac{1}{x^c}\Big) = \begin{cases} e^0 = 1, & c > 0, \\ \infty, & c < 0, \end{cases}$$

platí $p(\infty_-) = \infty$ i v tomto případě. Dále, $\exp(-\frac{2}{\lambda c} \frac{1}{\cdot^c})$ je omezená funkce na $(0, 1]$ pro všechna $c \neq 0$, tedy opět $p(0_+) \in \mathbb{R}$. Dohromady máme

$$p(0_+) \in \mathbb{R}, \quad p(\infty_-) = \infty, \quad c \in \mathbb{R}. \tag{3.27}$$

Opět pišme

$$h(x) = -\kappa x^{-c}, \ h'(x) = c\kappa x^{-c-1}, \ h''(x) = -c(c+1)\kappa x^{-c-2}$$

a pro $c > 0$ počítejme:

$$\begin{aligned}
&\int_0^y \exp(h(x))\mathrm{d}x \\
&\quad= \int_0^y \frac{1}{h'(x)}\Big[\exp\Big(h(x)\Big)\Big]'\mathrm{d}x \\
&\quad= \left[\frac{1}{h'(x)}\exp\Big(h(x)\Big)\right]_{x=0}^{y} - \int_0^y \frac{h''(x)}{[h'(x)]^2}\exp\Big(h(x)\Big)\mathrm{d}x \\
&\quad= \left[\frac{x^{c+1}}{c\kappa}\exp\Big(-\kappa x^{-c}\Big)\right]_{x=0}^{y} + \int_0^y \frac{c(c+1)\kappa x^{-c-2}}{c^2\kappa^2 x^{-2c-2}}\exp\Big(h(x)\Big)\mathrm{d}x \\
&\quad= \frac{y^{c+1}}{c\kappa}\exp\Big(-\kappa y^{-c}\Big) + \frac{c+1}{c\kappa}\int_0^y x^c\exp\Big(-\kappa x^{-c}\Big)\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Dosaďme výraz do definice v_1:

$$\begin{aligned}
v_1(0_+) &= \frac{2}{\lambda}\int_0^1 \frac{\int_0^y \exp\Big(h(x)\Big)\mathrm{d}x}{\exp\Big(-\kappa y^{-c}\Big)y^{2\beta}}\mathrm{d}y \\
&= \frac{2}{\lambda}\int_0^1 \frac{\frac{y^{c+1}}{c\kappa}\exp\Big(-\kappa y^{-c}\Big) + \frac{c+1}{c\kappa}\int_0^y x^c\exp\Big(-\kappa x^{-c}\Big)\mathrm{d}x}{\exp\Big(-\kappa y^{-c}\Big)y^{2\beta}} \qquad (3.28)\\
&= \frac{2}{\lambda c\kappa}\int_0^1 y^{-\alpha}\mathrm{d}y + \frac{2(c+1)}{\lambda c\kappa}\underbrace{\int_0^1 \frac{\int_0^y x^c\exp\Big(-\kappa x^{-c}\Big)\mathrm{d}x}{\exp\Big(-\kappa y^{-c}\Big)y^{2\beta}}\mathrm{d}y}_{=:I}
\end{aligned}$$

pro všechna $c > 0$.

Případ 3.10. $\alpha < 1$ nebo $\beta < 1$. Pak $\alpha + 1 < 2\beta, \alpha < 1$, nebo $\alpha + 1 \geq 2\beta, \beta < 1$.

(a) $\alpha + 1 = 2\beta, \beta < 1$. Pak $c = 0$ a integrál v (3.26) konverguje, tedy $v_1(0_+) < \infty$.

(b) $\alpha + 1 > 2\beta, \beta < 1$. Funkce $x \mapsto \exp(-\frac{2}{\lambda c}\frac{1}{x^c})$ je neklesající na $(0,1)$, platí proto

$$\begin{aligned}
v_1(0_+) &= 2\int_0^1 \frac{e^\kappa \int_0^y \exp\Big(-\kappa x^{-c}\Big)\mathrm{d}x}{e^\kappa \exp\Big(-\kappa y^{-c}\Big)\lambda y^{2\beta}}\mathrm{d}y \\
&= \frac{2}{\lambda}\int_0^1 \frac{\int_0^y \exp\Big(-\kappa x^{-c}\Big)\mathrm{d}x}{\exp\Big(-\kappa y^{-c}\Big)y^{2\beta}}\mathrm{d}y \\
&\leq \frac{2}{\lambda}\int_0^1 \frac{y\exp\Big(-\kappa y^{-c}\Big)}{\exp\Big(-\kappa y^{-c}\Big)y^{2\beta}}\mathrm{d}y \\
&= \frac{2}{\lambda}\int_0^1 y^{1-2\beta}\mathrm{d}y \\
&< \infty
\end{aligned}$$

(c) $\alpha + 1 < 2\beta, \alpha < 1$. Pak $c > 0$. První integrál v (3.28) zřejmě konverguje; pro druhý máme odhad (funkce $x \mapsto \exp(-\kappa x^{-c})$ je neklesající na $(0,1)$)

$$I \leq \int_0^1 \frac{y \cdot y^c \exp\left(-\kappa y^{-c}\right)}{\exp\left(-\kappa y^{-c}\right) y^{2\beta}} \mathrm{d}y = \int_0^1 y^{1+c-2\beta} \mathrm{d}y = \int_0^1 y^{-\alpha} \mathrm{d}y < \infty.$$

Máme tedy $v_1(0_+) \in \mathbb{R}$. Podle věty 2.15 platí $\mathbb{P}(\varepsilon < \infty) = 1$ a podle pozorování 2.8 jest $\mathbb{P}(\lim_{t \nearrow \varepsilon} X(t) = 0) = 1$. $\triangle$

Případ 3.11. $\alpha \geq 1$ a $\beta \geq 1$. $\alpha + 1 < 2\beta, \alpha \geq 1$, nebo $\alpha + 1 \geq 2\beta, \beta \geq 1$.

(a) $\alpha + 1 = 2\beta, \beta \geq 1$. Integrál v (3.26) diverguje a $v_1(0_+) = \infty$.

(b) $\alpha + 1 > 2\beta, \beta \geq 1$. Pak $\tilde{c} = -c > 0$ a

$$\begin{aligned} v_1(0_+) &= \frac{2}{\lambda} \int_0^1 \frac{\int_0^y \exp\left(\frac{2}{\lambda \tilde{c}} x^{\tilde{c}}\right) \mathrm{d}x}{\exp\left(\frac{2}{\lambda \tilde{c}} y^{\tilde{c}}\right) y^{2\beta}} \mathrm{d}y \\ &\geq \frac{2e^{-\kappa}}{\lambda} \int_0^1 y^{1-2\beta} \mathrm{d}y \\ &= \infty. \end{aligned}$$

(c) $\alpha + 1 < 2\beta, \alpha \geq 1$. První integrál v (3.28) je divergentní, druhý též:

$$I \geq e^{-\kappa} \int_0^1 \frac{y \cdot y^c}{y^{2\beta}} \mathrm{d}y = \int_0^1 y^{-\alpha} \mathrm{d}y = \infty.$$

Platí tak $v_1(0_+) = \infty$. Podle věty 2.12 jest $\mathbb{P}(\varepsilon = \infty) = 1$, dle pozorování 2.8 opět $\mathbb{P}(\lim_{t \nearrow \varepsilon} X(t) = 0) = 1$.

$\triangle$

Příloha A

Apendix

Věta A.1 ((Jarník, 1984b, věta 92))**.** *Nechť* $f \in L^1((a,b)), (a,b) \subset \mathbb{R}$. *Potom* F *je na* $[a,b]$ *absolutně spojitá.*

Věta A.2 ((Jarník, 1984b, věta 93))**.** *Budiž* $f \in L^1((a,b)), (a,b) \subset \mathbb{R}$. *Položme*

$$F(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t.$$

Potom skoro všude na $[a,b]$ *je* $F'(x) = f(x)$.

Věta A.3 ((Jarník, 1984b, věta 95))**.** *Budiž* $f \in L^1((a,b)), (a,b) \subset \mathbb{R}$. *Položme*

$$F(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}x, \quad x \in [a,b].$$

Je-li $x \in [a,b)$ *a je-li* f *spojitá v bodě* x, *je* $F'(x) = f(x)$.

Věta A.4 ((Jarník, 1984a, věta 57))**.** *Funkce* $f_1, f_2, \cdot$ *nechť mají vlastní derivace v omezeném otevřeném intervalu* (a,b). *Posloupnost* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *budiž konvergentní aspoň v jednom bodě* c *intervalu* (a,b). *Potom platí:*

1. *Posloupnost* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *je stejnoměrně konvergentní v* (a,b).
2. *Definujeme-li funkci* f *předpisem*

   $$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n'(x),$$

   má funkce f *v* (a,b) *derivaci*

   $$f'(x) = \lim_{n\to\infty} f_n'(x).$$

Věta A.5 ((Meyer, 2000, Věta I.7.b.0))**.** *Buď* $(X_t)_{t\geq 0}$ *supermartingal a* $S \subset [0,\infty)$ *spočetná hustá podmnožina* $[0,\infty)$. *Potom pro* $\mathbb{P}$*-skoro všechna* $\omega \in \Omega$ *a každou* $(s_j)_{j\in S}$ *striktně rostoucí posloupnost v* S *existuje limita*

$$\lim_{j\to\infty} X_{q_j} \in (-\infty, \infty].$$

Věta A.6 (Itôova formule pro stochastický diferenciál a funkci nezávisící na čase, viz (Seidler, 2011, výklad za větou 0.10))**.** *Buď* $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), \mathbb{P})$ *stochastická base, na níž je definován jednorozměrný* $(\mathcal{F}_t)$*-Wienerův proces* $W = (W_t, t \geq 0)$*. Nechť* $(\mathcal{F})_t$*-adaptovaný jednorozměrný reálný náhodný proces* $X = (X_t, t \geq 0)$ *má stochastický diferenciál, tj. existují* $(\mathcal{F}_t)$*-progresivně měřitelné procesy* $a, b \colon \mathbb{R}_+ \times \Omega \to \mathbb{R}$ *takové, že*

$$\mathbb{P}\Big(\int_0^t (|a(s)| + |b(s)|^2)\mathrm{d}s < \infty\Big) = 1, \quad t \geq 0,$$

a

$$X_t \overset{s.j}{=} X_0 + \int_0^t a(s)\mathrm{d}s + \int_0^t b(s)\mathrm{d}W_s.$$

Buď $\varphi \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$*. Potom proces* $(\varphi(X_t), t \geq 0)$ *má opět stochastický diferenciál a pro všechna* $t \geq 0$ *platí*

$$\varphi(X_t) - \varphi(X_0) = \int_0^t \Big(\varphi'(X_s)b(X_s) + \frac{1}{2}\varphi''(X_s)\sigma^2(X_s)\Big)\mathrm{d}s + \int_0^t \varphi'(X_s)\sigma(X_s)\mathrm{d}W_s \tag{A.1}$$

$\mathbb{P}$*-skoro jistě.*

Věta A.7 (Itôova formule pro semimartingal a funkci třídy AC^1_{loc} nezávisící na čase, viz (Protter, 2005, věta IV.71))**.** *Buď* X *spojitý semimartingal a nechť* $\varphi \in AC^1_{loc}((l, r))$*. Potom*

$$\varphi(X_t) - \varphi(X_0) \overset{s.j.}{=} \int_0^t \varphi'(X_s)\mathrm{d}X_s + \frac{1}{2}\int_0^t \varphi''(X_s)\mathrm{d}\langle X\rangle_s$$

pro všechna $t > 0$*, kde* φ'' *je libovolná funkce z* $L^1_{loc}((l, r))$ *splňující*

$$\varphi'(b) - \varphi'(a) = \int_a^b \varphi''(t)\mathrm{d}t, \quad a, b \in (l, r). \tag{A.2}$$

Poznámka A.1. V případě, že má proces X stochastický diferenciál, formule (A.2) přechází na (A.1). $\triangledown$

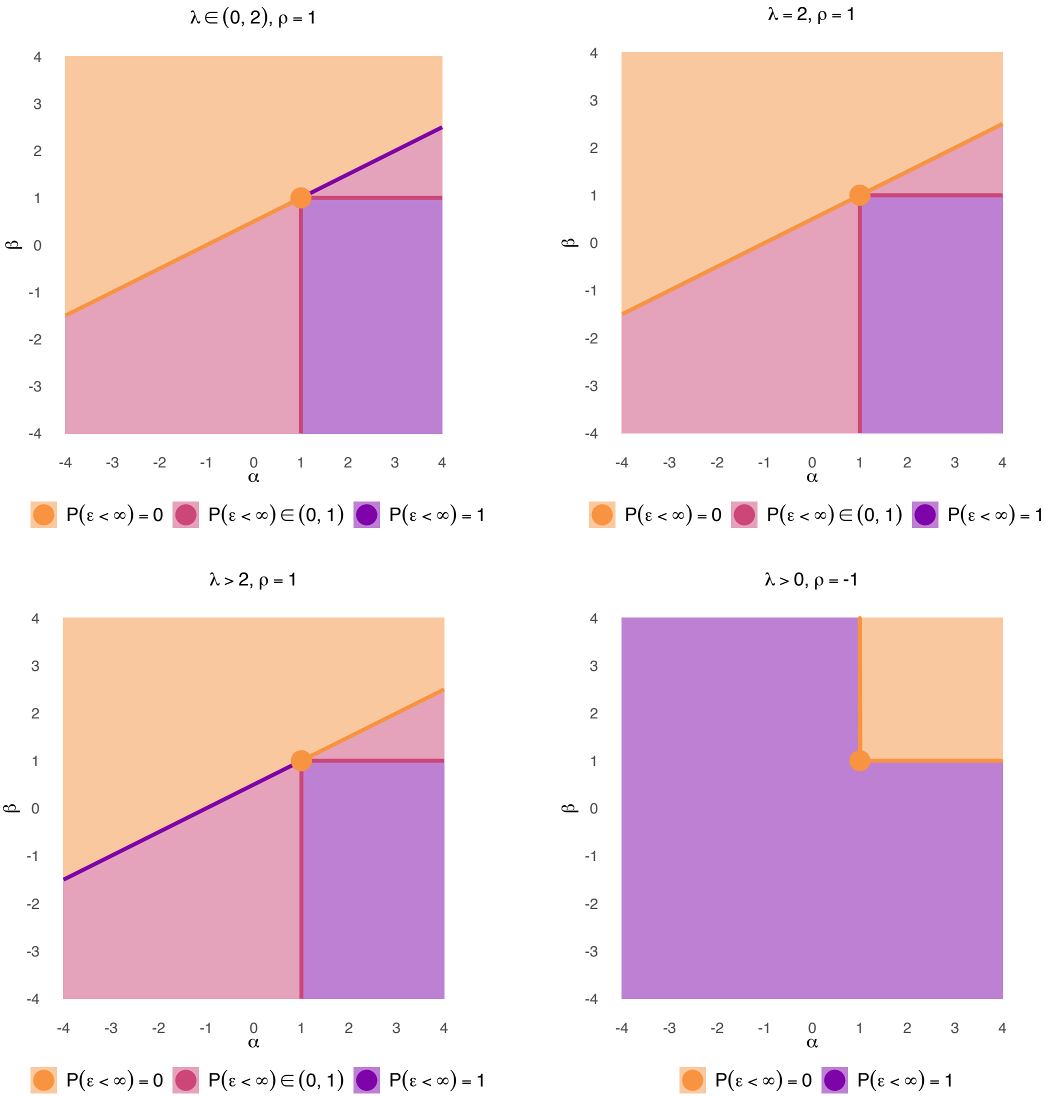
Příloha B

Index značení

$\mathbb{N}$	množina přirozených čísel
$\mathbb{Q}$	těleso racionálních čísel
$\mathbb{R}$	těleso reálných čísel
$\mathbb{R}_+$	množina nezáporných reálných čísel
$\mathbb{Q}_+$	$= \mathbb{R}_+ \cap \mathbb{Q}$, množina nezáporných racionálních čísel
$a \wedge b$	$= \min(a, b)$
$a \vee b$	$= \max(a, b)$
$\mathcal{C}^k((l, r))$	množina spojitých alespoň k-krát spojitě diferencovatelných funkcí na (l, r)
$\mathcal{C}((l, r))$	$= \mathcal{C}^0((l, r))$
$AC_{loc}((l, r))$	prostor lokálně absolutně spojitých funkcí na intervalu (l, r)
$AC^1_{loc}((l, r))$	$= \Big\{ g \in \mathcal{C}^1((l, r)); g' \in AC_{loc}((l, r)) \Big\}$
$\langle X \rangle$	kvadratická variace procesu X
$(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), \mathbb{P})$	stochastická base
$\mathbb{E}X$	střední hodnota náhodné veličiny X
$\mathbb{E}[X \vert \mathcal{F}_t]$	podmíněná střední hodnota
$L^1_{loc}(\mathbb{P})$	prostor lokálně integrovatelných funkcí vzhledem k $\mathbb{P}$
$L^1_{loc}((l, r))$	prostor reálných lokálně integrovatelných funkcí na (a, b)
$X \stackrel{\text{s.j.}}{=} Y$	rovnost $\mathbb{P}$-skoro jistě: $\mathbb{P}\Big(\omega \in \Omega; X(\omega) = Y(\omega)\Big) = 1$
$\mathbb{1}_A$	indikátor množiny A
$f \restriction_A$	restrikce zobrazení f na množinu A
∂A	hranice množiny A
$\mathrm{card} A$	počet prvků množiny A
$\liminf_{n\to\infty} A_n$	$= \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{m=n}^{\infty} A_n$

Příloha C

Obrázky



Obrázek C.1: Grafy pravděpodobnosti explose v závislosti parametrech α a β pro různé hodnoty ρ a λ

Seznam použité literatury

FRIEDMAN, A. (1975). *Stochastic differential equations and applications.* Vol. 1. Academic Press.

JARNÍK, V. (1984a). *Diferenciální počet II.* 4. vydání. Academia.

JARNÍK, V. (1984b). *Integrální počet II.* 3. vydání. Academia.

KARATZAS, I. a SHREVE, S. (1991). *Brownian Motion and Stochastic Calculus.* Graduate Texts in Mathematics (113) (Book 113). Springer. ISBN 9780387976556.

MCKEAN, H. (1969). *Stochastic Integrals.* Academic Press.

MEYER, M. (2000). *Continuous Stochastic Calculus with Applications to Finance.* CRC Press. ISBN 9781420035599.

MEYER, P. (1966). *Probability and Potentials.* Blaisdell Publishing Company.

ONDREJÁT, M. a SEIDLER, J. (v přípravě). *A note on weak solutions to stochastic differential equations II.* Kybernetika.

PROTTER, P. (2005). *Stochastic Integration and Differential Equations.* 2nd edition, 3rd printing (Version 2.1). Springer. ISBN 978-3642055607.

SEIDLER, J. (2011). *Vybrané kapitoly ze stochastické analysy.* MatfyzPress. ISBN 978-80-7378-145-3.