

Posudek vedoucího diplomové práce
Jakuba Cacha

Viskoelastické tekutiny rychlostního typu: studium vlivu napěťové difuze pomocí numerických simulací

Obsah práce

Diplomová práce se zabývá studiem viskoelastických tekutin rychlostního typu s napěťovou difuzí a pomocí numerických simulací zkoumá její vliv na proudění v klasickém benchmarku obtékání válce. Následně s danými viskoelastickými modely řeší úlohy s volným povrchem pomocí ‘arbitrary Lagrangian-Eulerian’ metody a ověřuje, že Oldroyd-B model vykazuje Weissenbergův jev (šplhání po tyči).

Diplomová práce se skládá ze čtyř částí, v první kapitole je shrnuta mechanika kontinua, kde kromě klasické referenční a aktuální konfigurace, student zavede i přirozenou konfiguraci. Na konci kapitoly představí bilanční rovnice v Eulerovském popisu, a ukáže termodynamický přístup pro odvozování modelů splňujících automaticky druhý zákon termodynamiky. V tomto přístupu se předepisují dvě skalární veličiny: Helmholtzova volná energie, která popisuje, jakým způsobem těleso uchovává energii, a disipace popisující, jak těleso energii disipuje.

Tento přístup je využitý ve druhé kapitole nejprve k odvození klasických viskoelastických modelů (typu Oldroyd-B nebo Giesekus) bez napěťové difuze. Následně je obdrženy model (kombinace Oldroydova a Giesekova modelu) s napěťovou difuzí s nezápornou produkcí entropie. V modelu je uvažována volná energie pro stlačitelnou neo-Hookeovskou pevnou látku ve tvaru

$$\psi(\mathbb{B}) = \mu \left((1 - \beta)(\text{tr}\mathbb{B} - 3 - \ln \det \mathbb{B}) + \frac{\beta}{2} |\mathbb{B} - \mathbb{I}|^2 \right),$$

kde parametr β je koeficient lineární kombinace klasické neo-Hookeovské energie a kvadratické energie.

Pro tento model je ve třetí kapitole na základě dřívější práce Bathory, Bulíček, Málek (2022) představena slabá formulace počátečně-okrajové úlohy, jsou odvozené formální apriorní odhady a je zformulována existenční teorie. Slabá formulace je dále upravena pro účely metody konečných prvků (nestlačitelnost $\text{div } \mathbf{v} = 0$ je vynucena slabě) spolu s volbou vhodné prostorové aproximace (Taylor-Hood pro dvojici neznámých tlak / rychlost a P1 pro extra část tenzoru napětí \mathbb{B}). Pro časové schéma jsou využívány jednokroková nepodmíněně stabilní zpětná Eulerova metoda, případně tříkrokové Glowinského schéma.

Nejobsáhlejší, čtvrtá kapitola, se zabývá numerickou implementací pomocí metody konečných prvků v balíku FEniCS a simulacemi konkrétních problémů.

První část se zabývá simulací klasického benchmarku obtékání válce, ve kterém se měří síla působící na válec v závislosti na velikosti Weissenbergova čísla. V případě klasického Oldroyd-B modelu je znám problém vysokého Weissenbergova čísla, kdy úloha přestává konvergovat. Modely s napěťovou difuzí numericky stabilizují proudění a umožňují počítat úlohy s vyšším Weissenbergovým číslem. Student uvažuje čtyři varianty viskoelastických modelů s napěťovou difuzí: Giesekus, Oldroyd, jejich kombinace a Oldroyd s variabilní objektivní derivací. V prvních třech případech pak zkoumá závislost chování proudění na parametru β . Konkrétně se zabývá následujícími: (i) pro jaký nejmenší koeficient napěťové difuze lze problém řešit v závislosti na velikosti parametru β a hodnotě Weissenbergova čísla, (ii) vliv velikosti napěťové difuze na výslednou sílu působící na válec, (iii) vliv parametru β na sílu. V případě Giesekova modelu a jeho kombinace s Oldroydem se ukazuje, že stačí malá napěťová difuze a její vliv na řešení

je malý. V případě Oldroydova modelu je třeba velká napěťová difuze k získání řešení a ta hodně ovlivňuje řešení problému. Pro parametr $\beta \rightarrow 1$ se navíc objevuje silný vír před válcem, který znesnadňuje nalezení řešení problému. Nakonec student zkoumá jak se Oldroydův model chová v závislosti na volbě objektivní derivace. Ukazuje se, že nejsnadnější je řešit problém s Jaumann-Zarembovou derivací, nejhůř s horní konvektivní Oldroydovu derivací.

Druhá část se zabývá simulací problémů pomocí klasického Oldroyd-B modelu. Student nejdříve analyticky ukazuje, že tento model vykazuje neneutonský jev “nenulový rozdíl normálových napětí v jednoduchém smykovém poli”, který způsobuje například invertovaný sekundární tok tekutiny rotující v nádobě nebo Weissenbergův jev (šplhání po tyči). Pro demonstraci prvního jevu student řeší úlohu ve válcové symetrii (tj. přetransformuje slabou formulaci do válcových souřadnic) a ukazuje, že pro nízké Weissenbergovo číslo, kdy je tekutina téměř newtonská, má sekundární tok opačnou orientaci, než pro vyšší Weissenbergova čísla. Následně řeší úlohy s volnou hranicí s využitím “arbitrary Lagrangian-Eulerian” (ALE) metody s využitím nesymetrické Nitscheho metody pro slabé splnění rovnosti rychlostí na volné hranici. Implementaci nejprve testuje na stlačování obdelníku vyplněného viskoelastickou tekutinou. Pro lepší zachování objemu student využívá Glowinského časové schéma vyššího řádu. Nakonec student přetransformuje ALE metodu do válcových souřadnic a zkoumá Weissenbergův jev. Ukazuje, že Oldroyd-B model na rozdíl od Navierova-Stokesova modelu umožňuje tekutině šplhat po tyči.

Hodnocení práce

Věcná kvalita práce. Práce je obsahově velmi zdařilá. Vlastní výsledky studenta jsou následující. Student implementoval v konečněprvkovém kódu FEniCS nové viskoelastické modely s napěťovou difuzí a zkoumal vliv čtyř parametrů na proudění tekutiny okolo válce. Následně si nastudoval ALE metodu, a pomocí ní studoval úlohy s volným povrchem. Implementaci považují za netriviální, zahrnuje využití Nitscheho metody a méně obvyklého implicitního trojkrokového schématu (Glowinski) pro lepší časovou diskretizaci. V případě studia Weissenbergova jevu musela být už dost složitá soustava rovnic navíc transformována do válcových souřadnic. Zdrojový kód je veřejně k dispozici na GitHubu.

Formální kvalita práce. Práce je zdařilá i po formální stránce, dobře se čte. Zvláště oceňuji, jak dobře se student vypořádal s popisem a strukturováním složité první části čtvrté kapitoly. V práci je studován problém proudění viskoelastické tekutiny v závislosti na čtyřech parametrech. Student systematicky uchopil tento komplexní problém a srozumitelně prezentoval výsledky.

Navrhuji předloženou práci uznat jako diplomovou práci a doporučuji ji hodnotit stupněm výborně.

Případné otázky při obhajobě a náměty do diskuze

V případě numerické simulace šplhání po tyči je problém počítaný ve válcové symetrii. Pozoruje se v realitě skutečně symetrické řešení? Bylo by možné pro srovnání počítat plně trojrozměrnou úlohu a co by to vyžadovalo?

V Praze 31. května 2023

Karel Tůma

Matematický ústav Univerzity Karlovy