Posudek oponenta diplomové práce

Název: Inverse limits in module categories
Autor: Bc. Matouš Menčík

Shrnutí obsahu práce

Tématem anglicky psané práce je studium některých vlastností limit (nejen) v kategoriích modulů, přičemž hlavním vodítkem práce bylo pokusit se dualizovat výsledky o direktních kolimitách z nedávno publikovaného článku [8] „Closure properties of $\varinjlim \mathcal{C}$“.

V první kapitole autor rekapituluje potřebnou terminologii a elementární výsledky z teorie kategorií. V druhé kapitole se konkrétně zaměřuje na inverzní limity, přičemž dokazuje v dalším užitečné lemma 2.1 a větu 2.5 (s překvapivě méně triviálním důkazem než by autor tohoto posudku očekával).

Třetí kapitola studuje a porovnává třídy $\varprojlim \operatorname{prod}(M)$ a $\varprojlim \operatorname{Prod}(M)$, analogicky duální situaci pojaté v již zmíněném článku [8]. Bc. Menčík ukázal odpovídající duální charakterizaci třídy $\varprojlim \operatorname{prod}(M)$ i rovnost $\varprojlim \operatorname{prod}(M) = \varprojlim \operatorname{Prod}(M)$ pro případ modulu M, který je *strongly self-slender* (což je duální definice k *self-small*). Přitom si v uvědomil, že výsledky z monografie [3] „Almost free modules“ a článku [4] „On modules which are self-slender“ umožňují v některých případěch překvapivý popis třídy strongly self-slender modulů, který autor uvádí dále v kapitole 4: pokud existuje vlastní třída měřitelných kardinálů, pak je nulový modul jediným strongly self-slender modulem; naproti tomu pokud neexistuje žádný měřitelný kardinál, pak jsou všechny slender moduly strongly self-slender. Například mezi abelovskými grupami jsou slender grupy právě ty, jež neobsahují coby podgrupy izomorfní kopii žádné z grup $\mathbb{Q}, \mathbb{Z}^\omega, \mathbb{Z}_p$ a $\mathbb{J}_p$ (pro p prvočíslo), viz věta 4.8 přejatá z [3].

Celkové hodnocení práce

Téma práce. Téma považuji za přiměřeně náročné pro diplomovou práci. Student se ho zhostil velmi dobře a přišel i s netriviálními vlastními výsledky, čímž vyvažuje poněkud menší rozsah práce, 17 stran. Zadání práce bylo bezesporu naplněno.

Vlastní příspěvek. Za vlastní příspěvek považuji, kromě netriviální rešerše zdrojů [3],[4] a [8], především několik výsledků z druhé kapitoly (2.1, 2.5, 2.10, 2.12), převážnou část 3. kapitoly a důkaz lemmatu 4.11.

Matematická úroveň. Po matematické stránce považuji práci za velmi zdařilou. Text je v naprosté většině rigorózně formulován a (až na občasné překlepy a místa zmíněná v otázkách k obhajobě) bez faktických chyb. Tu a tam by, pro čtenářovo pohodlí, možná stálo za to uvést důkazy v poněkud méně kusé formě; týká se např. věty 3.3 a věty 3.8.

Práce se zdroji. Zdroje jsou v práci pečlivě citovány. Je znát, že míra studentem provedené rešerše je nadprůměrná. Snad jen v seznamu literatury bych coby autora u [7] očekával jméno S. Mac Lane, a nikoliv jen S. Lane.

Formální úprava. Práce je přirozeně strukturována a relativně dobře se čte. Počet překlepů je přiměřený rozsahu textu. Občas mírně pokulhává grafická úprava/formátování, např. definice 3.1, znění věty 3.2 či odstavec předcházející větě 4.9, který je na ni nepěkně nalepen. Jako lepší volbu v matematickém modu bych určitě viděl *nesázet* Prod, Hom, Add apod. *kurzívou.*

Výjimečně se vyskytují i nezamýšleně kostrbaté formulace v anglickém jazyce, kupř. druhá půlka odstavce nad větou 2.6, či drobná typografická pochybení jako např. sazba uvozovek ve čtvrté kapitole.

Připomínky a otázky

1. Z kontextu usuzuji, že $|P|$ dole na straně 3 neznačí, na rozdíl od zbytku práce, mohutnost množiny P. Je to tak?
2. V důkazu věty 3.8 má, tuším, místo $\mathrm{Hom}(M, M^\kappa)$ být $\mathrm{Hom}(M^\kappa, M)$. Mohl byste podrobně zdůvodnit, proč je izomorfismus $M^\kappa \cong \mathrm{Hom}_S(S^{(\kappa)}, M)$ pravých R-modulů rovněž izomorfismem pravých S_κ-modulů?
3. Znáte nějaký příklad self-slender abelovské grupy, která není slender? Existuje pro self-slender grupy podobný popis, jakým se pro slender grupy věta 4.8?

Závěr

Práci považuji za velmi kvalitní, obsahující vlastní výsledky a splňující požadavky na diplomovou práci kladené. Proto ji také **doporučuji uznat jako práci diplomovou**.

Návrh klasifikace oponent sdělí předsedovi zkušební (sub)komise.

doc. Mgr. Jan Šaroch, Ph.D.
Katedra algebry MFF UK
29. května 2023