

## POSUDEK VEDOUcíHO DIPLOMOVÉ PRÁCE

**Název:** Inverse limits in module categories

**Autor:** Matouš Menčík

### Shrnutí obsahu práce

Limity inverzních systému modulů jsou základní konstrukcí v komutativní algebře pro zúplnění modulů v  $I$ -adické topologii, a v algebraické geometrii pro použití Mittag-Lefflerových podmínek (např. k důkazu lokálnosti pojmu vektorového bandlu nad libovolným schématem). Funktor inverzní limity *projlim* ale není zprava exaktní, a vlastnosti jeho derivovaných funktoru závisí obecně na teorii množin.

Práce je pro libovolnou třídu modulů  $C$  věnována studiu třídy modulů *projlim C*, které vzniknou použitím funktoru *projlim* na inverzní systémy tvořené moduly z třídy  $C$ . Podnětem k ní byl náš nedávný článek v *J. Algebra* 606 (2022) s L. Positselskim a P. Příhodou o uzávěrových vlastnostech direktních limit (kde místo funktoru *projlim* figuruje exaktní funktor *injlim*). V článku byly mj. popsány třídy *injlim Add M* (resp. *injlim add M*) všech direktních limit libovolných (resp. konečných) direktních sum kopií modulu  $M$  a dokázána jejich rovnost pro tzv. self-small moduly (a tedy např. pro všechny konečně generované moduly). Otevřeným problémem ale zůstala otázka jejich rovnosti pro libovolný modul  $M$ .

Zadáním práce bylo dualizovat část výsledků článku s tím, že vzhledem k neexaktnosti funktoru *projlim* se očekávaly jen částečné pozitivní výsledky (dualizace), a protipříklady pro obecnou situaci.

Matoušovi Menčíkovi se podařilo část výsledků článku dualizovat úplně. V několika případech našel i obecný kategoriální důkaz, který je snadné dualizovat, a získat tak jednoduchý důkaz původního výsledků pro direktní limity modulů. Dokázal také duální popis pro třídu *projlim prod M* všech direktních limit konečných direktních součinů kopií modulu  $M$ , a pomocí něho našel jednoduchý příklad, kdy třída *projlim prod M* je menší *projlim Prod M*.

Duálním pojmem k pojmu self-small modulu je pojem strongly self-slender modulu. V práci je ukázáno, že za předpokladu neexistence měřitelných kardinálů (tedy např. za předpokladu Goedelova axiomu konstruovatelnosti) platí rovnost *projlim prod M = projlim Prod M* pro libovolný slender modul (a tedy např. pro regulární modul nad libovolným spočetným oborem integrity). V závěru práce je ale naopak ukázáno, že za předpokladu existence vlastní třídy měřitelných kardinálů žádný nenulový strongly self-slender modul neexistuje.

### Celkové hodnocení práce

**Téma práce.** *Hodnocení náročnosti a přiměřenosti tématu. Bylo téma zpracováno tak, aby bylo splněno zadání práce?*

Téma práce je náročné, vyžadující jak hlubší znalosti konstrukcí direktních a inverzních limit v kategoriích modulů, tak některých množinově-teoretických principů. Téma bylo zpracováno kvalitně, zadání práce bylo splněno.

**Vlastní příspěvek.** *Obsahuje práce vlastní příspěvek autora? V čem tento příspěvek spočívá? Je v práci dostatečně specifikován?*

Matouš Menčík na diplomové práci pracoval zcela samostatně, všechny důkazy v práci jsou jeho vlastní. I pro tvrzení, která jsou přímou dualizací výsledků článku, bylo často netriviální nalézt duální důkaz.

**Matematická úroveň.** *Jaká je matematická úroveň práce? Obsahuje práce rigorózně a korektně zformulovaný matematický text?*

Práce je psána stručně, ale rigorózně, na velmi dobré matematické úrovni.

**Práce se zdroji.** *Jsou zdroje správně citovány? Neobsahuje práce doslova zkopírované nebo otrocky přeložené pasáže?*

Práce je původní a řádně cituje všechny použité zdroje.

**Formální úprava.** *Hodnocení formální úpravy práce.*

Práce je na velmi dobré formální úrovni. Byla vytvořena v systému LaTeX.

### **Připomínky a otázky**

---

### **Závěr**

Práci považuji za výbornou a doporučuji ji uznat jako diplomovou práci.

*Návrh klasifikace vedoucí/oponent sdělí předsedovi zkušební (sub)komise.*

Jméno vedoucího: Jan Trlifaj

Pracoviště: KA MFF UK

Datum: 5.5.2023

podpis: