Posudek vedoucího doktorandské disertační práce

Zdeněk Silber: *Konvergence v Banachových prostorech*

Předložená disertační práce se věnuje dvěma okruhům souvisejícím s konvergencí posloupností a netů v Banachových prostorech. Je tvořena úvodem a třemi dalšími kapitolami, přičemž každá ze tří kapitol je tvořena jedním článkem. Jeden z článků byl již publikován, druhý byl přijat k publikaci a třetí byl zaslán k publikaci. První dva články se týkají weak*-derivovaných množin v duálních Banachových prostorech (což je první ze zmíněných okruhů), třetí článek se zabývá kvantifikací Banach-Saksovy vlastnosti vyšších řádů (což je druhý ze zmíněných okruhů). Dále stručně představím oba okruhy a obsah práce.

Weak*-derivované množiny. Počátky zkoumání weak*-derivovaných množin spadají do třicátých let dvacátého století, kdy si S. Mazurkiewicz povšiml, že (řečeno dnešní terminologií) weak*-hustý podprostor duálního Banachova prostoru nemusí být sekvenciálně weak*-hustý, čímž zodpověděl otázku S. Banacha. Sice se uvádí, že ho k této otázce přivedly nedostatečné znalosti obecné topologie, zejména konvergence netů, ale později se ukázalo, že tyto problémy a související výsledky nacházejí použití v řadě oblastí (jako jsou harmonická analýza, baireovské třídy lineárních operátorů, 'ill-posed' problémy aj.).

Je-li X Banachův prostor a $A \subset X^*$ podmnožina duálu, pak weak*-derivovaná množina množiny A je tvořena limitami omezených weak*-konvergentních netů z A. V případě, že X je separabilní, jde právě o limity weak*-konvergentních posloupností z A. Weak*-derivovaná množina se pak značí $A^{(1)}$. Je-li A konvexní, pak z Krein-Šmuljanovy věty plyne, že A je weak*-uzavřená (tj. $A = \overline{A}^{w^*}$), právě když $A^{(1)} = A$. Jak bylo zmíněno výše, S. Mazurkiewicz nalezl příklady podprostorů $A \subset X^*$, které jsou weak*-husté (tj. $\overline{A}^{w^*} = X^*$), ale $A^{(1)} \subsetneqq X^*$. Z Krein-Šmuljanovy věty v tomto případě plyne, že $A^{(1)} \subsetneqq (A^{(1)})^{(1)}$. To přirozeně vede k definici iterovaných weak*-derivovaných množin $A^{(\alpha)}$ pro každý ordinál α (v limitním kroku uvážíme, jak je zvykem, sjednocení množin z předchozích kroků). Pak je zřejmé, že pro každou množinu A existuje ordinál α, pro který platí $A^{(\alpha+1)} = A^{(\alpha)}$. Nejmenší takové α se nazývá řád množiny A. Pokud A je konvexní (což je zajímavý případ) a α je její řád, pak $A^{(\alpha)} = \overline{A}^{w^*}$.

Finální výsledky o řádech podprostorů duálních prostorů lze shrnout do následujícího přehledu:

- Je-li X kvazireflexivní (tj. X je konečné kodimenze v X^{**}), pak každý podprostor $Y \subset X^*$ má řád 0 (je-li weak*-uzavřený) nebo 1 (není-li weak*-uzavřený).
- (M.I. Ostrovskii, 1987) Není-li X kvazireflexivní, pak pro každý nelimitní ordinál $\alpha < \omega_1$ existuje podprostor $Y \subset X^*$ řádu α. Pro separabilní X je tento výsledek optimální.

Zájem o weak*-derivované množiny – nejen podprostorů, ale i obecných konvexních množin – byl oživen v důsledku použití ke konstrukci protipříkladů v teorii rozšiřování holomorfních funkcí na Banachových prostorech (D. García, O. Kalenda a M. Maestre, 2010). Otázky položené v tomto článku zodpověděl M.I. Ostrovskii v roce 2011, když dokázal následující výsledky:

- Není-li X reflexivní, existuje konvexní množina $A \subset X^*$, pro kterou $A^{(1)} \subsetneqq A^{(2)}$.
- Nechť X je Banachův prostor. Pak existuje podprostor $Y \subset X^*$, pro který je $Y^{(1)}$ vlastní normově hustý podprostor X^*, právě když X není kvazireflexivní a zároveň obsahuje nekonečněrozměrný podprostor se separabilním duálem.

Výsledky prvních dvou kapitol. Z. Silber se v kapitolách 1 a 2 věnuje iterovaným verzím výše zmíněných Ostrovského výsledků. Hlavními výsledky jsou:

- Theorem 1.8: Není-li X reflexivní, pak pro každé $n \in \mathbb{N}$ existuje konvexní podmnožina X^* řádu n.
- Theorem 1.13: Není-li X reflexivní, pak existuje konvexní podmnožina X^* řádu $\omega + 1$.
- Theorem 2.3: Předpokládejme, že X není kvazireflexivní a obsahuje nekonečněrozměrný podprostor se separabilním duálem. Pak pro každý nelimitní ordinál $\alpha < \omega_1$ existuje podprostor $Y \subset X^*$, pro který je $Y^{(\alpha)}$ vlastním normově hustým podprostorem X^*.

Prvním krokem k důkazu výsledků z kapitoly 1 je pečlivá analýza Ostrovského konstrukce a její doplnění o horní odhad řádu příslušné množiny. Následuje technicky náročné induktivní zobecnění spojené s řadou přesných výpočtů. Výchozím bodem pro druhou kapitolu je kombinace metod ze dvou Ostrovského článků, které bylo třeba doplnit o použití konečněrozměrných rozkladů místo Schauderových bazí.

Na článek, který je obsahem první kapitoly, navázal M.I. Ostrovskii v preprintu z prosince 2021 a rozšířil výše zmíněné výsledky (Theorem 1.8 a Theorem 1.13) pro spočetné nelimitní ordinály. Použil k tomu modifikaci metody Z. Silbera spolu s indexováním pomocí stromů a lesů (z teorie grafů).

Výsledky prvních dvou kapitol spolu s Ostrovského rozšířením jsou v této oblasti vpodstatě finální. Asi jediným zbývajícím problémem jsou otázky spojené se spočetnými limitními ordinály. Z Baireovy věty snadno plyne, že řád podprostoru nemůže být spočetný limitní ordinál, ale pro konvexní množiny to zřejmé není. Rovněž není jasné, zda Theorem 2.3 platí i pro limitní α.

Banach-Saksova vlastnost, její iterace a kvantifikace. Příběh výsledků třetí kapitoly začíná rovněž ve třicátých letech dvacátého století, kdy S. Banach a S. Saks dokázali, že v prostorech L^p (pro $p \in (1, \infty)$) lze z každé omezené posloupnosti vybrat cesàrovsky konvergentní podposloupnost. Pro tuto vlastnost Banachových prostorů se později začal používat název Banach-Saksova vlastnost. Je známo, že prostory s Banach-Saksovou vlastností tvoří vlastní podtřídu reflexivních prostorů. Rovněž se zkoumá slabá Banach-Saksova vlastnost – ta vyžaduje existenci cesàrovsky konvergentní podposloupnosti pouze pro posloupnosti, které jsou slabě konvergentní. Tuto vlastnost pak mají i některé nereflexivní prostory, například c_0 a L^1.

Kromě vlastností Banachova prostoru jako celku se zkoumají i lokalizované verze. Omezená podmnožina A Banachova prostoru je (slabě) Banach-Saksova, pokud z každé (slabě konvergentní) posloupnosti v A lze vybrat cesàrovsky konvergentní podposloupnost. Banach-Saksovy množiny tvoří vlastní podtřídu relativně slabě kompaktních množin. Rozdíl mezi Banach-Saksovou vlastností definovanou pomocí konvergence aritmetických průměrů a Mazurovou větou, která pro slabě konvergentní posloupnost dává konvergenci jistých konvexních kombinací, vedl k definici Banach-Saksovy vlastnosti vyšších řádů (S. Argyros, S. Mercourakis a A. Tsarpalias, 1998). Tyto definice jsou dosti komplikované a v související teorii se netriviálním způsobem používají věty Ramseyova typu.

Jiným směrem výzkumu je program kvantifikace, který spočívá – zhruba řečeno – v náhradě implikací nerovnostmi mezi vhodnými kvantitami. Tento program vedl, zejména v posledních dvaceti letech, k výrazně hlubšímu porozumění řadě vlastností Banachových prostorů a řadě vět o Banachových prostorech. Do tohoto programu zapadá i nedávný článek o kvantitativní verzi Banach-Saksovy vlastnosti (H. Bendová, O. Kalenda a J. Spurný, 2015).

Výsledky třetí kapitoly. Jedním z úkolů Z. Silbera bylo prozkoumat možnosti kvantifikace Banach-Saksovy vlastnosti vyšších řádů a dokázat alespoň nějaké kvantitativní verze známých vět. Právě tomu se věnuje třetí kapitola disertace. Prvním krokem byla definice potřebných kvantit, což je obsahem oddílů 3.2.4 a 3.2.5. Kvantity tohoto druhu musí vycházet z příslušných kvalitativních pojmů, v tomto případě šlo o technické definice z výše zmíněného článku S. Argyrose se spoluautory. Definice nových kvantit nebyla zdaleka přímočará – v některých případech se nabízejí dvě různé verze, z nichž jedna je na první pohled přirozenější a s druhou se zase lépe pracuje. Alespoň v jednom případě není jasné, zda jsou ony dvě verze ekvivalentní. K hlavním výsledkům patří:

- Theorem 3.3: Kvantitativní verze chararakterizace slabě Banach-Saksových množin vyšších řádů. Pro důkaz bylo třeba pochopit všechny jemnosti důkazu kvalitativní verze a tento důkaz modifikovat a maximálně zpřesnit. Pro některé nerovnosti bylo třeba vymyslet nový postup, protože pouhá modifikace a zpřesnění by nedala optimální konstantu.
- Theorem 3.12: Kvantitativní vztah mezi relativní slabou kompaktností, Banach-Saksovou vlastností vyšších řádů a relativní kompaktností.
- Lemma 3.18 a Proposition 3.21: Monotonie některých z kvantit v závislosti na řádu, který uvažujeme.
- Nová míra slabé nekompaktnosti definovaná pomocí Banach-Saksových kvantit pro libovolný řád (viz Proposition 3.24 a Proposition 3.25).

V této oblasti je stále prostor pro další výzkum. K otevřeným otázkám patří například, zda ona nově objevená míra slabé nekompaktnosti je ekvivalentní některé ze standardních měr nebo zda dvě verze Banach-Saksovy kvantity vyššího řádu jsou ekvivalentní. Výsledkem, který se prozatím nepodařilo přenést do kontextu vyšších řádů, je dichotomie pro jednotkovou kouli spojená s verzí Jamesovy věty o distorzi pro ℓ^1-spreading modely. To souvisí s tím, že není jasné, jak zformulovat analogii věty o spreading modelech pro vyšší řády.

Celkové hodnocení. Práci považuji za vysoce kvalitní. Uchazeč musel podrobně prostudovat a pochopit technicky složité výsledky z literatury (to platí o Ostrovského článcích i o Banach-Saksově vlastnosti vyšších řádů), tvůrčím způsobem kombinovat a modifikovat známé metody, jakož i najít správné formulace (například pro definice kvantit ve třetí kapitole) a vyvinout nové postupy. Jako nejnáročnější bych vyzvedl třetí kapitolu. Zde jsem zadal úkol pokusit se nejprve o kvantifikaci pro Banach-Saksovu vlastnost druhého řádu, protože jsem očekával, že to bude dobrý první krok. Nicméně student vybudoval nezbytnou teorii rovnou pro obecný řád a zvolil pro to srozumitelný zápis. Celkově se domnívám, že předložená práce jednoznačně prokazuje, že je uchazeč schopen samostatné tvořivé práce. Proto bez nejmenších pochyb doporučuji práci uznat jako doktorandskou disertační práci.

V Praze, 27.6.2022

Prof. RNDr. Ondřej Kalenda, Ph.D., DSc.
KMA MFF UK