

# Posudek práce

předložené na Matematicko-fyzikální fakultě  
Univerzity Karlovy

- posudek vedoucího       posudek oponenta  
 bakalářské práce       diplomové práce

Autor/ka: Igor Bajo  
Název práce: Measures of quantum entanglement  
Studijní program a obor: Fyzika, Obecná fyzika  
Rok odevzdání: 2022

Jméno a tituly vedoucího/opponenta: prof. RNDr. Pavel Cejnar, Dr., DSc.  
Pracoviště: Ústav částicové a jaderné fyziky MFF UK, Praha  
Kontaktní e-mail: cejnar@ipnp.mff.cuni.cz

## Odborná úroveň práce:

- vynikající    velmi dobrá    průměrná    podprůměrná    nevyhovující

## Věcné chyby:

- téměř žádné    vzhledem k rozsahu přiměřený počet    méně podstatné četné    závažné

## Výsledky:

- originální    původní i převzaté    netriviální kompilace    citované z literatury    opsané

## Rozsah práce:

- veliký    standardní    dostatečný    nedostatečný

## Grafická, jazyková a formální úroveň:

- vynikající    velmi dobrá    průměrná    podprůměrná    nevyhovující

## Tiskové chyby:

- téměř žádné    vzhledem k rozsahu a tématu přiměřený počet    četné

## Celková úroveň práce:

- vynikající    velmi dobrá    průměrná    podprůměrná    nevyhovující

## Slovní vyjádření, komentáře a připomínky vedoucího/oponenta:

Bakalářská práce se zabývá problematikou kvantového provázání v systémech vzájemně interagujících spinů (qubitů). Cílem bylo popsat anomálii kvantové provázanosti v kvantových fázových přechodech 1. a 2. řádu (jejich prekurzorech při konečné velikosti systému). Pro celkový počet  $N$  spinů byla studována jak provázanost pro různá disjunktní rozdělení systému na dva podsystemy s  $K$  a  $N-K$  spiny (pomocí von Neumannovy entropie), tak provázanost dvojice spinů v rámci celé  $N$ -tice (pomocí tzv. *entanglement of formation* – český ekvivalent zatím neexistuje). Je třeba zdůraznit, že po teoretické stránce jde práce za rámec učiva probíraného v kurzech kvantové teorie v rámci bakalářského studia na MFF UK (především pokud jde o koncept kvantového fázového přechodu a popis provázanosti částí systému ve smíšeném stavu pomocí *entanglement of formation*).

Celkově se dá říci, že cíle práce byly splněny. Student se rámcově seznámil s relevantními teoretickými koncepty, naprogramoval řešení interagujícího spinového systému a získal grafy závislosti obou typů provázanosti na interakčním parametru systému, a to pro oba typy kvantového fázového přechodu. Práce má však řadu formálních a věcných nedostatků.

**Formální nedostatky:** překlepy (např. chybějící interpunkce, nerozlišené matematické symboly atd.), nevysvětlené symboly v rovnicích, nezavedené zkratky, chaoticky uváděná literatura s chybějícími údaji o publikacích... Některé slovní formulace jsou dosti neobratné a svědčí o nedokonalém ovládnutí cizího jazyka. Značení symbolů v matematických rovnicích není konzistentní napříč celou prací (stejně symboly používány v různých významech).

**Věcné nedostatky:** Výklad se místy jeví jako nelogický (jako na str.4, kde se čtenář marně pídí po tom, jakých hodnot nabývá  $j$  pro obecné  $N$ ) a někdy je až zavádějící (jako na str.8 při vysvětlování kritéria čistoty stavu pomocí stopy kvadrátu operátoru hustoty nebo na str.10 při vysvětlování rozkladu matice hustoty na „sumu čistých stavů“). Autor zbytečně vysvětluje běžně známé, učebnicové pasáže kvantové mechaniky (skládání momentů hybnosti), ale u konceptů klíčových pro pochopení práce se omezuje jen na vysvětlení typu „jak se to spočítá“. To se týká například pojmů *entanglement of formation* a *concurrency*, ale také definice von Neumannovy entropie subsystémů s využitím Schmidtova rozkladu operátoru hustoty. Je dost dobře možné, že student těmto pojmům ve skutečnosti do hloubky neporozuměl, i když byl schopen naprogramovat jejich numerický výpočet. Velká nejistota číší z pasáží vysvětlující kvantové fázové přechody (kde není vyjasněna role parity a pojem „*parity breaking*“ se objevuje v zavádějícím kontextu). Chybí jasné důvody, proč v případě systémů ve smíšených stavech nelze provázání podsystemů charakterizovat von Neumannovou entropií. Práce se ani nepokouší o nějaké fyzikální vyjasnění hlavního studovaného efektu, totiž zvýšení provázanosti v okolí kvantového fázového přechodu.

Na druhou stranu chci zmínit také některé **pozitivní stránky práce**. Student pracoval do značné míry samostatně. Na jedné straně to vedlo k návštěvě několika slepých uliček, např. když se student pokoušel o rozklad obecného stavu v  $2^N$  rozměrném Hilbertově prostoru pomocí skládání momentů hybnosti nebo když pracoval s obecnějším Hamiltoniánem, který vykazoval více typů fázových přechodů 2. řádu. Na druhé straně to ale zvětšilo skutečný (zjevný plus skrytý) rozsah práce (nepoužité výsledky nejsou popsány ve výsledném textu) a míru „procvičení“ studenta. Ačkoliv práce na tématu probíhala trochu pomaleji, než jsem doufal, přístup studenta k práci byl celkově docela chvályhodný – student si dle zadání práce sám stanovoval cíle a hledal metody jejich dosažení. Samostatně vypracoval metodiku výpočtu různých měř provázanosti, napsal a odladil kód pro řešení Lipkinova modelu a porovnal získané numerické výsledky. Jakkoliv tato samostatnost měla i výše uvedené negativní důsledky, včetně již diskutovaných věcných nedostatků ve výsledné podobě práce, lze ocenit, že student se k relativně náročné výzvě postavil čelem. Výsledek není zajisté dokonalý, ale myslím, že si zaslouží být uznán jako platná bakalářská práce. Navrhuji hodnocení stupněm „velmi dobře“ nebo „dobře“ dle úrovně obhajoby.

**Případné otázky při obhajobě a náměty do diskuze:**

**Práci**

doporučuji

nedoporučuji

uznat jako bakalářskou.

**Navrhuji hodnocení stupněm:**

výborně  velmi dobře  dobře  neprospěl/a

(Komise nechť se přikloní k jednomu z navržených výsledků dle úrovně ústní obhajoby.)

Místo, datum a podpis vedoucího/opponenta:

18. 1. 2023, Pavel Cejnar