

Posudek práce

předložené na Matematicko-fyzikální fakultě
Univerzity Karlovy

- posudek vedoucího posudek oponenta
 bakalářské práce diplomové práce

Autor: Igor Bajo
Název práce: Measures of quantum entanglement
Studijní program a obor: Obecná fyzika
Rok odevzdání: 2022

Jméno a tituly oponenta: Mgr. Pavel Stránský, Ph.D.
Pracoviště: Ústav částicové a jaderné fyziky, Matematicko-fyzikální fakulta UK
Kontaktní e-mail: pavel.stransky@mff.cuni.cz

Odborná úroveň práce:

- vynikající velmi dobrá průměrná podprůměrná nevyhovující

Věcné chyby:

- téměř žádné vzhledem k rozsahu přiměřený počet méně podstatné četné závažné

Výsledky:

- originální původní i převzaté netriviální kompilace citované z literatury opsané

Rozsah práce:

- veliký standardní dostatečný nedostatečný

Grafická, jazyková a formální úroveň:

- vynikající velmi dobrá průměrná podprůměrná nevyhovující

Tiskové chyby:

- téměř žádné vzhledem k rozsahu a tématu přiměřený počet četné

Celková úroveň práce:

- vynikající velmi dobrá průměrná podprůměrná nevyhovující

Slovní vyjádření, komentáře a připomínky oponenta:

Bakalářská práce Igora Baja se věnuje kvantověmechanického jevu provázanosti (*entanglement*), konkrétně dvěma veličinám, které se k měření kvantové provázanosti používají: Von Neumannova entropie a konkurence, odvozená z veličiny entanglement of formation (nemá ustálený český název). Obě tyto míry autor teoreticky zavádí a následně počítá pro různé velikosti systému a různé volby parametrů Lipkinova modelu, což je jednoduchý model N plně propojených interagujících spinů. Autor se též lehce dotýká jevu kvantového fázového přechodu přítomného ve studovaném systému a ukazuje, že i pro relativně malé systémy lze pozorovat v okolí prekursoru kvantového fázového přechodu významné zvýšení obou studovaných měř provázanosti.

Práce je psána v anglickém jazyce a její jazyková úroveň je velmi dobrá. Rozsah práce je spíše nižší: po odečtení bohaté grafické části a přetištěného počítačového kódu zůstane 13 stran rešeršního textu a 4 strany diskuze výsledků, úvodu a závěru. Některé pasáže jsou příliš podrobné, jako například podsekcce 1.2 o učebnicovém tématu skládání dvou kvantových momentů hybnosti. Naopak pasážím o méně známých konceptech by myslím pomohlo, kdyby jim bylo věnováno více prostoru a péče. Rovněž diskuze obdržných výsledků je strohá.

Vyzdvihl bych, že student naprogramoval výpočet obou měř provázanosti v jednoduchém Lipkinově modelu, což obnášelo jisté netriviální kroky kvůli nutnosti počítat nikoliv se systémem jako celkem, jak se běžně dělá, ale rozdělit ho na různě velké podsystémy. Kód v jazyce Python je přetištěn v dodatku. K programu bohužel není žádný popis, jak ho používat. Jeho výsledkem je obrovské množství obrázků, z nichž některé koincidují s obrázky začleněnými v práci.

Kde předložená práce velmi pokulhává, je samotný text, který obsahuje velké množství překlepů a chyb, a to jak formálních, tak věcných. Nejedná se o chyby, které by zpochybňovaly obdržné numerické výsledky; spíše ukazují, že autor některé koncepty a veličiny, které v práci používá, dostatečně nepochopil. Soupis nedostatků je uveden za koncem hlavní části posudku.

Kontrola na plagiátorství neodhalila žádnou shodu, která by nebyla náležitě označena jako citace nebo která by nebyla shodou triviální.

Student v práci prokázal, že je schopen se v zadané problematice zorientovat natolik, aby na základě dostupných teoretických poznatků vytvořil funkční počítačový kód a pomocí něj získal originální numerické výsledky. Celková prezentace teorie a diskuze výsledků jsou spíše na podprůměrné úrovni. Autor v závěru zmiňuje, že ve skutečnosti toho udělal víc, zejména co se týče numeriky a programování. Je škoda, že se tyto výsledky nedostaly do finální verze práce. S ohledem na všechny uvedené skutečnosti doporučuji uznat práci Igora Baja jako bakalářskou a ohodnotit ji stupněm *dobře*.

Výčet nejdůležitějších nedostatků práce:

Místa, na kterých jsou výklad a značení zmatené, nepřesné nebo chybné:

- 6. strana, 2. odstavec (začínající „Transition of phases...“) – kvantový fázový přechod není přechod mezi kvantovými stavy.
- Zatímco text okolo rovnice (1.7) celý mluví o operátoru \hat{J} , který odpovídá podle (1.4) operátoru celkového spinu systému složeného z N spinů $\frac{1}{2}$, za rovnicí (1.7) se najednou píše „It should be unsurprising then, that in our one spin-1/2 particle system, the only possible value of j is $j = 1/2$.“
- 7. strana, 3. odstavec (začínající „The second is Entanglement of Formation...“) tvrdí, že autor bude pracovat se smíšenými stavy. Není vysvětleno, že smíšené stavy se získají provedením parciální stopy čistého stavu celého systému; navíc použití slova „ensemble“ by mohlo vést k dojmu, že i celý systém bude uvažován ve smíšeném stavu.

- Rovnice (2.3) a (2.4) platí i v případě, že maticová realizace operátorů hustoty $\hat{\rho}$ není diagonální (autor uvádí, že matice musejí být diagonální).
- 10. strana, 2. odstavec: Zde by stálo za to upřesnit, že celková matice hustoty $\hat{\rho}$ je **váženým** součtem dílčích matic hustoty odpovídajících čistým stavům. Váhy jsou pak ony pravděpodobnosti, se kterými se při výpočtech pracuje.
- Označení „spin-flip“ matice hustoty symbolem $\hat{\rho}^+$ může být matoucí a mylně odkazovat k hermitovskému sdružení, čímž není. Běžné značení v literatuře je vlnka, $\hat{\rho}$.
- 11. strana, 6. odstavec. Rovnice v textu $\dim(\mathcal{H}_J) \neq \dim(\mathcal{H}_{J_{B,A}}) + \dim(\mathcal{H}_{J_{B,A}})$ nedává smysl, navíc s ohledem na následující text by místo sčítání mělo být násobení.
- Zavedení báze za rovnicí (3.1) je matoucí a chybné. Autor měl zřejmě na mysli přiřazení $|M = J\rangle \leftrightarrow (1, 0, 0, \dots)$ až $|M = -J\rangle \leftrightarrow (0, 0, \dots, 1)$.
- 13. strana, popis algoritmu. Označení „vectorize the $|j, m\rangle$ “ je zavádějící, když již samotný objekt $|j, m\rangle$ je vektor.
- 14. strana, popis algoritmu. V bodě „by getting its eigenvalues“ má správně být „by getting the eigenvalues of $\hat{\rho}_{pair} \hat{\rho}_{pair}^+$ “.
- V popisech algoritmů je zmíněna volba konstanty γ , která se však nikde jinde v textu nezmiňuje. Dle analýzy přiloženého kódu by se mohlo jednat o parametr χ modelu.

Nejdůležitější formální chyby:

- Formát referencí není konzistentní, navíc u některých referencí chybí klíčové údaje (u [4] a [7] chybí číslo strany, u [11] název časopisu).
- Reference jsou řazeny bez zjevného klíče; první odkaz je například na referenci [10] (3. strana za rovnicí (1.1)).
- Některé veličiny vůbec nejsou zavedené, jako například N v rovnici (1.5) nebo χ v rovnici (1.6).
- Značení je nekonzistentní, a to zejména u indexů veličin. Systematicky není uváděn jejich význam a rozsah. Užití indexů je matoucí s častými překlepy. Například v rovnici (1.2) označuje index k v S_k složku vektoru spinového operátoru, zatímco v rovnici (1.4) index n v \mathbf{S}_n odkazuje ke konkrétnímu spinu vícespinového systému, a v bezprostředně následujícím textu je n opět užito jako index složky. Jiný příklad: Symboly $\hat{\rho}_{1,2}$ označují dle (2.8) matice hustoty podsystémů, avšak v rovnici (2.11) je ρ_n (mělo by být ρ_i) jejich i -tá vlastní hodnota. Mělo by být navíc specifikováno, že vektory $|\chi_{1,2i}\rangle$ jsou odpovídajícími vlastními vektory. A do třetice: v rovnici (3.1) je nejspíš $m \equiv M$.
- Rovnice je zvykem chápat jako součást textu, měly by tedy obsahovat interpunkci. To autor nepoužívá.
- Autor nadužívá vět ukončených vykřičníkem, aby dodal váhu některým tvrzením. (Nebo aby vylekal čtenáře?)
- Popisky obrázků jsou velmi stručné. Obrázky nejsou příliš diskutovány ani v textu. Jejich velké množství bez diskuze může působit dojmem, že jimi autor jen „nafukoval“ rozsah práce.

Případné otázky při obhajobě a náměty do diskuze:

- Proč se existence kvantového fázového přechodu projevuje na mírách provázanosti? Lze z měř provázanosti rozhodnout o řádu kvantového fázového přechodu?
- Obhajovaná práce se věnuje dvěma mírám provázanosti. Existují ještě nějaké další míry provázanosti?
- V grafech 4.11 a 4.14 by bylo zajímavé vykreslit hranici, na které dochází ke kvantovému fázovému přechodu dle rovnice (1.16) a diskutovat, nakolik souhlasí s pozorovaným maximem měř provázanosti.
- V sekci 3.1 autor píše, že výpočetní složitost diagonalizace závisí na hodnotě diagonalizované matice (rank matice). V literatuře se však obvykle uvádí, že závisí na dimenzi matice. Může autor uvést důvody, proč je hodnota matice pro výpočetní složitost klíčová, případně zdroj, ze kterého čerpal?

Práci

doporučuji

nedoporučuji

uznat jako bakalářskou.

Navrhuji hodnocení stupněm:

výborně velmi dobře dobře neprospěl/a

Místo, datum a podpis oponenta:

V Praze dne 13.1.2023

Pavel Stránský