MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ FAKULTA
Univerzita Karlova

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Bc. Marek Pospíšil

Gravitační perturbace v NP/GHP formalismu

Ústav teoretické fyziky

Vedoucí diplomové práce: Mgr. David Kofroň, Ph.D.
Studijní program: Teoretická fyzika
Studijní obor: FTFP

Praha 2022

Prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci vypracoval(a) samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů. Tato práce nebyla využita k získání jiného nebo stejného titulu.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V .... dne ....

Podpis autora

Poděkování:

Rád bych zde poděkoval svému vedoucímu za jeho trpělivé vysvětlování a pracné kontroly mého postupu.

Velký dík patří rovněž autorům balíčku xAct, bez něhož by tato práce nemohla vzniknout. Zvláštní vděk zaslouží A. G.-Parrado, autor našeho podkladového sešitu.

Konečně bych rád poděkoval svým rodičům, přátelům a příbuzným, jejichž podpora byla nedocenitelná.

Název práce: Gravitační perturbace v NP/GHP formalismu

Autor: Bc. Marek Pospíšil

Ústav: Ústav teoretické fyziky

Vedoucí diplomové práce: Mgr. David Kofroň, Ph.D., Ústav teoretické fyziky

Abstrakt: Práce seznamuje čtenáře s tetrádovými přístupy v obecné teorii relativity (OTR), jmenovitě s Newman – Penroseovým (NP) a a Geroch – Held – Penroseovým (GHP) formalismem. Ty jsou následně vztaženy k běžnějším souřadnicovým vyjádřením. Následně se práce věnuje technikám perturbací v OTR, a to jak běžné perturbaci metriky, tak k metodě superpotenciálu, která je pro GHP formalismus běžnější. Dále jsou zde zrekapitulovány důležité výsledky z této metody vycházející.

Těžištěm vlastní práce je zobecnění některých dosavadních výsledků na prostoročasy s akcelerací (tzv. C-metrika) a kontrola výsledků existujících, a to pomocí výpočtů v programu Wolfram Mathematica. Aby nešlo pouze o výpočty v poněkud neprůhledných GHP a NP formalismech, je následně hlavní výsledek zkontrolován rovněž pomocí přepisu do souřadnicových derivací.

Klíčová slova: NP GHP perturbace relativita

Title: Gravitational perturbations in NP/GHP formalism

Author: Bc. Marek Pospíšil

Institute: Institute of Theoretical Physics

Supervisor: Mgr. David Kofroň, Ph.D., Institute of Theoretical Physics

Abstract: This work gets the reader acquainted with tetrad approaches to general theory of relativity (GTR), namely with Newman – Penrose (NP) and Geroch – Held – Perose (GHP) formalisms. Obtained expressions are expressed in coordinates. Subsequently, this work concerns with the perturbation techniques in GTR, including both metric perturbation and the method of superpotential, the latter being more common in GHP formalism. Following is the recapitulation of important results based on this method.

The core of the work is in generalization of known results for spacetimes with acceleration (so called C-metric) and checking previous results using computation in the Wolfram Mathematica program. In order not to work just with rather complicated GHP and NP formalisms, the main result is checked also by transcription into coordinate partial derivatives.

Keywords: NP GHP perturbation relativity

Obsah

Úvod

V rámci obecné teorie relativity obvykle pracujeme s metrikou. Je to právě tato veličina, jenž vystupuje v Einsteinových rovnicích, a přesná řešení obvykle bývají známa nejvíce podle metrického tenzoru, z něhož se teprve odvozují další vlastnosti prostoročasu.

Roku 1961 však Newman a Penrose ve své práci [1] představili jiný přístup. Jako základ jim posloužily čtyři nulové vektory, takzvaná nulová tetráda. S její pomocí pak můžeme provádět mnohé výpočty bez použití tenzorových veličin, jak předvedli např. Teukolský [2] či Kinnersley [3].

Další, ještě pokročilejší navázání na NP formalismus je systém známý pod iniciálami GHP, jenž Geroch, Held a Penrose představili v roce 1973 [4]. Jeho výhodou je ještě větší kompaktnost výsledných rovnic, ovšem počítání v něm je poněkud náchylnější na chyby. Tato náchylnost trápí ostatně i NP formalismus. Jednotliví autoři se navíc různí se znaménkových konvencích, což vede k dalšímu nárůstu problémů.

Tato práce si klade za cíl užít dnešních softwarových nástrojů, konkrétně programu Wolfram Mathematica a zejména pomocného softwarového balíku xAct od Martína-Garcíy [5], ke kontrole výsledků dostupných v literatuře. Dále představujeme několik pomocných nástrojů k práci s oběma formalismy.

Mnohé předešlé výsledky se omezovaly na prostoročasy s nulovým zrychlením, v nichž platí dodatečné identity a výpočty se značně zjednodušují. Mezi hlavní výsledky této práce tak budou patřit obecnější rovnice, platné i v prostoročasech s nenulovou akcelerací.

1. Teoretická část

1.1 Základní vztahy

V Einsteinových rovnicích gravitačního pole vystupuje jako neznámá metrika $g_{\mu\nu}$ a veličiny z ní odvozené. Těmi jsou zejména Ricciho tenzor $R_{\mu\nu}$ a jeho stopa, Ricciho skalár $\mathcal{R}$. Pravá strana rovnic je pak vyhrazena zdrojům v podobě $T_{\mu\nu}$ tenzoru energie-hybnosti:

$$R_{ij} - \frac{\mathcal{R}}{2} g_{ij} = 8\pi T_{\mu\nu} \tag{1.1}$$

(jak uvádí mezi mnoha dalšími např. Wald [6]; sdílíme zde i často užívanou konvenci $c = G = 1$). Zde pokládáme kosmologickou konstantu za rovnou nule. Ricciho tenzor je odvozen z tenzoru Riemannova skrze vztah:

$$R_{\mu\nu} = R_{\mu\sigma\nu}{}^{\sigma} = R_{\mu\sigma\nu\kappa} g^{\sigma\kappa}, \tag{1.2}$$

(počítáme s Einsteinovou sumační konvencí) kdežto Riemannův tenzor lze závést například vztahem

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} = g_{\kappa\sigma}(\Gamma^{\sigma}{}_{\mu\rho,\nu} - \Gamma^{\sigma}{}_{\nu\rho,\mu} + \Gamma^{\alpha}{}_{\mu\rho}\Gamma^{\sigma}{}_{\alpha\nu} - \Gamma^{\alpha}{}_{\nu\rho}\Gamma^{\sigma}{}_{\alpha\mu}), \tag{1.3}$$

v němž Christoffelovy symboly druhého druhu jsou definovány jako:

$$\Gamma^{\mu}{}_{\nu\rho} = \frac{g^{\mu\sigma}}{2}(g_{\nu\sigma,\rho} + g_{\rho\sigma,\nu} - g_{\nu\rho,\sigma}), \tag{1.4}$$

a čárka značí parciální derivaci podle příslušné souřadnice.

1.2 Zavedení nulové tetrády

V rámci standardního čtyřrozměrného prostoročasu není jistě problém představit dva reálné vektory, které jsou nulové, tedy splňují:

$$l_\mu l^\mu = 0 = n_\mu n^\mu. \tag{1.5}$$

Na bázi je může doplnit dvojice prostorupodobných vektorů a^μ,b^μ, normalizovaných na 1 a ortogonálních. Pro účely formalismu Newmana a Penrose [1] je ale klíčové definovat dvojici *komplexních* navzájem k sobě sdružených vektorů m^μ,$\bar{m}^\mu$ skrz předpis:

$$m_\mu = \frac{1}{\sqrt{2}}(a_\mu - i b_\mu). \tag{1.6}$$

Tato tzv. *nulová tetráda* poté splní

$$m_\mu m^\mu = 0 = \bar{m}_\mu \bar{m}^\mu, \tag{1.7}$$

(normalizace), jakož i

$$l_\mu n^\mu = 1 = -m_\mu \bar{m}^\mu. \tag{1.8}$$

Ostatní skalární součiny jsou pak rovny nule. Po vzoru významných předešlých prací Chandrasekhara [7] či Price [8] označme $e^{\mu}_{(i)} \equiv (l^\mu, n^\mu, m^\mu, \bar{m}^\mu)$. Tetrádový index (zde i) lze zdvihat a snižovat pomocí tetrádové metriky, jejíž podobu určují (1.7) a (1.8) na

$$\eta_{(i)(j)} = \eta^{(i)(j)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \tag{1.9}$$

(poznamenejme, že namísto (1.8) lze uvažovat i tetrádu, pro níž $l_\mu n^\mu = -1 = -m_\mu \bar{m}^\mu$, přičemž tato volba se konvenčně kompenzuje změnou znamének některých rovnic, které budou následovat, a některých veličin). Metriku prostoročasovou z těchto vektorů zkonstruujeme pomocí následujícího vztahu:

$$g_{\mu\nu} = l_\mu n_\nu + n_\mu l_\nu - (m_\mu \bar{m}_\nu + \bar{m}_\mu m_\nu) = e_{(i)\mu} e_{(j)\nu} \eta^{(i)(j)}. \tag{1.10}$$

1.3 Směrové derivace a spinové koeficienty

Uvažujeme-li skalární pole φ, jeho kovariantní derivace je obvykle značena jako $\nabla_\mu \varphi \equiv \varphi_{;\mu}$. V NP formalismu je dále běžné (a užitečné) zavést značení pro směrové derivace:

$$\begin{aligned} l^\mu \varphi_{;\mu} &\equiv D\varphi \\ n^\mu \varphi_{;\mu} &\equiv \Delta\varphi \\ m^\mu \varphi_{;\mu} &\equiv \delta\varphi \\ \bar{m}^\mu \varphi_{;\mu} &\equiv \bar{\delta}\varphi, \end{aligned} \tag{1.11}$$

které zjednodušuje zápis rovnic. Podobně budeme toto značení užívat i pro směrové derivace obecných tenzorů.

V souladu se základním článkem Newmana a Penrose [1] dále představujeme dvanáct skalárů, tzv. spinových koeficientů (pro pochopení původu názvu viz právě tento článek), a to:

$$\kappa = m^\mu D l_\mu\,, \qquad \epsilon = \frac{1}{2}(n^\mu D l_\mu - \bar{m}^\mu D m_\mu)\,, \qquad \tau = m^\mu \Delta l_\mu\,, \tag{1.12}$$

$$\rho = m^\mu \bar{\delta} l_\mu\,, \qquad \alpha = \frac{1}{2}(n^\mu \bar{\delta} l_\mu - \bar{m}^\mu \bar{\delta} m_\mu)\,, \qquad \mu = -\bar{m}^\mu \delta n_\mu\,, \tag{1.13}$$

$$\sigma = m^\mu \delta l_\mu\,, \qquad \beta = \frac{1}{2}(n^\mu \delta l_\mu - \bar{m}^\mu \delta m_\mu)\,, \qquad \lambda = -\bar{m}^\mu \bar{\delta} n_\mu\,, \tag{1.14}$$

$$\nu = -\bar{m}^\mu \Delta n_\mu\,, \qquad \gamma = \frac{1}{2}(n^\mu \Delta l_\mu - \bar{m}^\mu \Delta m_\mu)\,, \qquad \pi = -\bar{m}^\mu D n_\mu. \tag{1.15}$$

1.4 Weylův tenzor a NP formalismus

Jak uvádí např. Wald [6] (rov. 3.2.28), Riemannův tenzor $R_{\kappa\lambda\mu\nu}$ lze ve čtyřech dimenzích rozložit na bezestopou část a stopy dle vztahu:

$$R_{\kappa\lambda\mu\nu} = C_{\kappa\lambda\mu\nu} + \frac{1}{2}(g_{\kappa\mu} R_{\lambda\nu} + g_{\lambda\nu} R_{\kappa\mu} - g_{\lambda\mu} R_{\kappa\nu} - g_{\kappa\nu} R_{\lambda\mu}) - \frac{\mathcal{R}}{6}(g_{\kappa\mu} g_{\lambda\nu} - g_{\lambda\mu} g_{\kappa\nu}). \tag{1.16}$$

Zde $C_{\kappa\lambda\mu\nu}$ je bezestopý Weylův tenzor, $R_{\mu\nu}$ tenzor Ricciho a $\mathcal{R}$ Ricciho skalár. Ve vakuu si Weylův a Riemannův tenzor odpovídají, neboť Ricciho tenzor (a tudíž i jeho stopa) vymizí.

Vzhledem k tomu, že velmi (anti)symetrický Riemann má ve čtyřech dimenzích celkem 20 nezávislých složek, zatímco Ricciho tenzor jich má deset, zůstává na $C_{\kappa\lambda\mu\nu}$ deset nezávislých složek. Ty konvenčně zakódujeme do pěti komplexních skalárů

$$
\begin{aligned}
\Psi_0 &\equiv \Psi_{0000} \equiv -C_{\kappa\lambda\mu\nu} l^\kappa m^\lambda l^\mu m^\nu \\
\Psi_1 &\equiv \Psi_{0001} \equiv -C_{\kappa\lambda\mu\nu} l^\kappa n^\lambda l^\mu m^\nu \\
\Psi_2 &\equiv \Psi_{0011} \equiv -C_{\kappa\lambda\mu\nu} l^\kappa m^\lambda \bar{m}^\mu n^\nu \\
\Psi_3 &\equiv \Psi_{0111} \equiv -C_{\kappa\lambda\mu\nu} l^\kappa n^\lambda \bar{m}^\mu n^\mu \\
\Psi_4 &\equiv \Psi_{1111} \equiv -C_{\kappa\lambda\mu\nu} n^\kappa \bar{m}^\lambda n^\mu \bar{m}^\nu
\end{aligned}
\tag{1.17}
$$

(původ prostřední notace je ve spinorovém kalkulu) a zbývající nezávislé složky (připadající na Ricciho tenzor) budou reprezentovat

$$
\Phi_{00} \equiv -\frac{1}{2} R_{\mu\nu} l^\mu l^\nu \,, \qquad \Phi_{01} \equiv -\frac{1}{2} R_{\mu\nu} l^\mu m^\nu = \bar{\Phi}_{10} \,, \tag{1.18}
$$

$$
\Phi_{11} \equiv -\frac{1}{4} R_{\mu\nu} (l^\mu n^\nu + m^\mu \bar{m}^\nu) \,, \qquad \Phi_{02} \equiv -\frac{1}{2} R_{\mu\nu} m^\mu m^\nu = \bar{\Phi}_{20} \,, \tag{1.19}
$$

$$
\Phi_{12} \equiv -\frac{1}{2} R_{\mu\nu} n^\mu m^\nu = \bar{\Phi}_{21} \,, \qquad \Phi_{22} \equiv -\frac{1}{2} R_{\mu\nu} n^\mu n^\nu \tag{1.20}
$$

z nichž Φ_{00},Φ_{11} a Φ_{22} jsou reálné, ostatní komplexní. Konečně pro Ricciho skalár zavádí Newman a Penrose reálný parametr $\Lambda \equiv \frac{\mathcal{R}}{24}$. Polní rovnice jsou následně získány skrz Ricciho identity, jejich plná forma není ovšem právě stručná a proteď se bez ní obejdeme.

1.5 Klasifikace prostoročasů dle Petrova

Tenzor čtvrtého řádu se "správnými" (anti)symetriemi (například právě Weylův tenzor) vyčíslený v nějakém bodě prostoročasu lze chápat jako lineární operátor na prostoru bivektorů:

$$
X^{\mu\nu} \to \frac{1}{2} C^{\mu\nu}{}_{\kappa\lambda} X^{\kappa\lambda}. \tag{1.21}
$$

Pro bivektory můžeme tak napsat rovnici pro vlastní čísla:

$$
\frac{1}{2} C^{\mu\nu}{}_{\kappa\lambda} X^{\kappa\lambda} = \lambda X^{\mu\nu}. \tag{1.22}
$$

Díky symetriím Weylova tenzoru má tato rovnice nejvýše čtyři lineárně nezávislá řešení. Jim pak odpovídají takzvané "hlavní nulové směry"(principal null directions), jimiž jsou jisté nulové vektory. Jak je z lineární algebry dobře známo, rovnice (1.22) může poskytnout vlastní bivektory s multiplicitou větší než jedna. Pokud se tak stane, promítne se tento fakt i do multiplicity hlavních nulových směrů.

Petrovova klasifikace pak shrnuje, že existuje právě šest možností:

-typ I nemá žádný bivektor ani hlavní nulový směr degenerovaný, existují zde tedy čtyři lineárně nezávislé bivektory

-typ II má jeden z bivektorů dvakrát degenerovaný, zbylé dva jsou lineárně nezávislé

-typ D má dva bivektory dvakrát degenerované

-typ III má jeden z bivektorů třikrát degenerovaný

-typ N má čtyřikrát degenerovaný bivektor a

-typ O splňuje (v daném bodě prostoročasu) $C_{\alpha\beta\gamma\delta} = 0$.

Jestliže není Weylův tenzor Petrovova typu I, hovoříme o něm jako o *algebraicky speciálním.* Množství významných prostoročasů (Kerrův, Schwarzschildův, ...) je přitom typu D, a výpočty se značně zjednodušují, jestliže nastavíme vektory l^μ a n^μ do hlavních nulových směrů. Důvodem je ekvivalentní vyjádření Petrovovy klasifikace skrz trojici bivektorů (dos Santos, [9]):

$$
\begin{aligned}
U_{\mu\nu} &= -2n_{[\mu}\bar{m}_{\nu]} \\
V_{\mu\nu} &= 2l_{[\mu}m_{\nu]} \\
W_{\mu\nu} &= 2(m_{[\mu}\bar{m}_{\nu]} - l_{[\mu}n_{\nu]}).
\end{aligned}
\tag{1.23}
$$

("[]" ve spodních indexech značí antisymetrizaci) Weylův tenzor lze poté vyjádřit jako:

$$
\begin{aligned}
C_{\mu\nu\kappa\lambda} =& \Psi_0 U_{\mu\nu}U_{\kappa\lambda} + \Psi_1(U_{\mu\nu}W_{\kappa\lambda} + W_{\mu\nu}U_{\kappa\lambda}) \\
&+ \Psi_2(U_{\mu\nu}V_{\kappa\lambda} + V_{\mu\nu}U_{\kappa\lambda} + W_{\mu\nu}W_{\kappa\lambda}) + \Psi_3(V_{\mu\nu}W_{\kappa\lambda} + W_{\mu\nu}V_{\kappa\lambda}) \\
&+ \Psi_4 V_{\mu\nu}V_{\kappa\lambda} + cc.,
\end{aligned}
\tag{1.24}
$$

kde Ψ_i jsou definovány výše a "cc." značí komplexní sdružení předchozích členů. Petrovova klasifikace je pak vyjádřena jako:

-$\Psi_0 = 0$ pro typ I

-$\Psi_0 = 0 = \Psi_1$ pro typ II

-všechny Weylovy skaláry až na Ψ_2 jsou nulové pro typ D

-$\Psi_0 = 0 = \Psi_1 = \Psi_2$ pro typ III

-všechny Weylovy skaláry až na Ψ_4 jsou nulové pro typ N

-všechny Weylovy skaláry jsou nulové pro typ O

Jelikož v této práci budeme studovat především prostoročasy typu D (tj. takové, v nichž splňuje Weylův tenzor příslušnou Petrovovu klasifikaci v každém bodě), hodí se zmínit, že v těchto prostoročasech vymizí (provedeme-li další reorientaci nulové tetrády) také některé spinové koeficienty, konkrétně κ, σ, λ a ν (viz Teukolsky, [2]), a (v případě vakuových prostoročasů) také všechna Φ_{ij}.

1.6 GHP formalismus

Další specializaci získaného formalismu představili Geroch, Held a Penrose v článku ([4]), kde upozornili na jisté diskrétní symetrie v NP-formalismu.

Zavedeme-li zvláštní operaci "′", definovanou skrz

$$
(l^\mu)' = n^\mu \quad (n^\mu)' = l^\mu \quad (m^\mu)' = \bar{m}^\mu \quad (\bar{m}^\mu)' = m^\mu,
\tag{1.25}
$$

pak jistě $D' = \Delta$ a $\delta' = \bar{\delta}$. Navíc z definice (1.15) vidíme, že platí ($'$ komutuje s ∇):

$$\kappa' = -\nu \quad \sigma' = -\lambda \quad \rho' = -\mu \quad \tau' = -\pi \quad \beta' = -\alpha \quad \epsilon' = -\gamma. \tag{1.26}$$

I při zvolení všech čtyř nulových vektorů stále zbývá jistá volnost, a to volnost kalibrační. Jelikož směry l a n v GHP fixujeme (abychom využili všech výhod prostoročasů typu D), zbývají nám jen boosty v rovině (l/n) a rotace v rovině $(m/\bar{m})$.

Při takovéto transformaci, jejíž parametry uvádí např. Price ([8] str. 28) lze ve výsledku veškeré změny shrnout pomocí komplexní funkce ζ, přičemž

$$l^\mu \to \zeta\bar{\zeta} l^\mu \quad n^\mu \to \zeta^{-1}\bar{\zeta}^{-1} n^\mu \quad m^\mu \to \zeta\bar{\zeta}^{-1} m^\mu \quad \bar{m}^\mu \to \zeta^{-1}\bar{\zeta}\bar{m}^\mu. \tag{1.27}$$

Jak vidíme, v předcházející rovnici mají všechny transformace jednotný tvar $e^\mu_{(i)} \to \zeta^p \bar{\zeta}^q e^\mu_{(i)}$. Veličině (nejen vektoru), jež se transformuje podle tohoto předpisu, říkáme "veličina typu (p,q)". Alternativou je charakterizovat transformační vlastnosti pomocí spinové váhy $s = \frac{p-q}{2}$ a boostové váhy $b = \frac{p+q}{2}$.

Mohlo by se zdát, že všechny dosud definované veličiny, zejména spinové koeficienty, budou nyní mít vlastní přiřazená svá s a b. Bohužel čtveřice α,β,γ a ϵ nemají tyto parametry dobře definovány. Ilustrujme problém na β:

$$\begin{aligned} 2\beta = n^\mu \delta l_\mu - \bar{m}^\mu \delta m_\mu &\to \zeta^{-1}\bar{\zeta}^{-1} n^\mu \zeta\bar{\zeta}^{-1} m^\nu (\zeta\bar{\zeta} l_\mu)_{;\nu} - \zeta^{-1}\bar{\zeta}\bar{m}^\mu \zeta\bar{\zeta}^{-1} m^\nu (\zeta\bar{\zeta}^{-1} m_\mu)_{;\nu} \\ &= 2\zeta\bar{\zeta}^{-1}\beta + 2\bar{\zeta}^{-1} m^\nu \zeta_{;\nu} + 2\zeta m^\nu \bar{\zeta}^{-1}_{;\nu}. \end{aligned} \tag{1.28}$$

Podobné problémy provází i naše dosud užívané směrové derivace, jejichž působením můžeme dostat objekty bez dobře definovaných spinových a boostových vah. Je proto nutné představit nové operátory $\eth$ ("eth")a þ ("thorn"), definované svým působením na χ typu (p,q) jako

$$\eth\chi \equiv (\delta - p\beta + q\bar{\beta}')\chi\,, \qquad \eth'\chi \equiv (\delta' + p\beta' - q\bar{\beta})\chi\,, \tag{1.29}$$

$$\text{þ}\chi \equiv (D - p\epsilon - q\bar{\epsilon})\chi\,, \qquad \text{þ}'\chi \equiv (D' + p\epsilon' + q\bar{\epsilon}')\chi. \tag{1.30}$$

Každý z operátorů má dobře definovaný typ, tj. při působení na veličinu typu (p,q) vyprodukuje $\eth$ veličinu typu (p+1,q-1), $\eth'$ veličinu typu (p-1,q+1), þ veličinu typu (p+1,q+1) a $\text{þ}'$ veličinu typu (p-1,q-1). Jak Geroch, Held a Penrose zdůrazňují, jde opravdu o derivace v tom smyslu, že jsou lineární vůči součtu a vůči násobení splňují Leibnitzovo pravidlo.

Není náhodou, že je-li typ operátoru O (p,q), je typ O' (-p,-q). Stejně se to má i s působením "$'$" na libovolnou jinou veličinu. Komplexní sdružení pak z objektu typu (p,q) vytvoří objekt typu (q,p), zatímco násobením objektů o typech (p,q) a (r,s) vznikne objekt typu (p+r,q+s). Tím je algebra všech zde se vyskytujících objektů dovršena, snad jen poznamenejme, že sčítat lze pochopitelně pouze objekty o stejném typu.

1.7 Více ke kalibrační volnosti

Pod pojmem kalibrace (či "gauge") si ve fyzice představujeme situaci, kdy teorie připouští změnu některých parametrů, jež vede k usnadnění řešení, aniž je přitom narušena platnost samotné teorie (výsledná "fyzika"). Typickým příkladem je situace potenciálů v elektromagnetismu či již zmíněná Lorentzova transformace, která stojí v základu GHP formalismu. V rámci této práce budeme používat několik různých typů kalibrace, proto neuškodí si je představit.

Prvním z typů kalibrace je již poznaná volnost ve volbě vektorů. Diskrétní symetrii pokrývá operace "′", nás ale budou zajímat transformace pomocí funkce ζ. Ty jsou speciálním případem infinitesimálních lorentzovských transformací s malým parametrem ε (odlišeným od ϵ-spinového koeficientu pomocí fontu).

Po vzoru článku Stewarta a Walkera [10] rozdělíme grupu transformací na tři abelovské podgrupy, konkrétně:

a) rotace zachovávající l^μ s komplexním parametrem a:

$$\begin{aligned} l^\mu &\to \hat{l}^\mu = l^\mu \\ n^\mu &\to \hat{n}^\mu = n^\mu + \varepsilon(\bar{a}m^\mu + a\bar{m}^\mu) + O(\varepsilon^2) \\ m^\mu &\to \hat{m}^\mu = m^\mu + \varepsilon a l^\mu, \end{aligned}$$

b) rotace zachovávající n^μ s komplexním parametrem a:

$$\begin{aligned} l^\mu &\to \hat{l}^\mu = l^\mu + \varepsilon(a m^\mu + \bar{a}\bar{m}^\mu) + O(\varepsilon^2) \\ n^\mu &\to \hat{n}^\mu = n^\mu \\ m^\mu &\to \hat{m}^\mu = m^\mu + \varepsilon \bar{a} n^\mu, \end{aligned}$$

c) a konečně kombinovaný boost a rotace s reálnými parametry b,c:

$$\begin{aligned} l^\mu &\to \hat{l}^\mu = l^\mu + \varepsilon b l^\mu + O(\varepsilon^2) \\ n^\nu &\to \hat{n}^\mu = n^\mu - \varepsilon b n^\mu + O(\varepsilon^2) \\ m^\mu &\to \hat{m}^\mu = m^\mu + i\varepsilon c m^\mu + O(\varepsilon^2) \end{aligned}$$

Můžeme si všimnout, že a) a b) na sebe přichází transformací pomocí operace "′", jestliže budeme požadovat $a' = a$; z toho důvodu se budeme podrobněji zabývat pouze první z nich. Pro úplnost poznamenejme, že parametr a je typu $(0, -2)$, a že tato transformace, ač infinitesimální, poruší původní symetrii GHP formalismu ve smyslu $(\hat{A})' \neq \widehat{(A')}$.

Další kalibrační volnost je poskytnuta díky perturbacím. Jak velmi čistě popisuje např. Price [8], obvyklý koncept perturbace je v obecné relativitě značně ztížen faktem, že odchýlením od přesného řešení Einsteinových rovnic daného metrikou g a varietou M nedostáváme kvantity definované na M, nýbrž nový prostoročas (M', g') a kvantity definované zde. Ty je třeba vhodným způsobem vztáhnout k původním objektům z M.

Převezmeme-li notaci právě Price [8] či Stewarta a Walkera [10], uvažujeme třídu prostoročasů (M_λ, g_λ) parametrizovanou parametrem λ tak, že $(M_0, g_0) = (M, g)$ a $(M_1, g_1) = (M', g')$. Představme dále příhodné vektorové pole ξ^μ, které spojuje (M, g) a (M', g'). Pokud nyní máme veličinu $Q = Q(\lambda, p)$ (která může být i tenzorová), závisející na poloze p a parametru λ, a chceme-li nalézt $\delta Q(p)$ -

perturbaci prvního řádu v λ - je třeba vypočíst $Q(1,p+\delta p)$, "přitáhnout si" tento výsledek do (M,g), zde od něj odečíst $Q(0,p)$, dělit δp a provést limitu pro $\delta p \to 0$.

Nejen znalci diferenciální geometrie již v popsaném postupu rozpoznali derivaci, konkrétně tu Lieovu. Platí tedy:

$$\delta Q \equiv \mathcal{L}_\xi Q(\lambda,p)|_{\lambda=0}. \tag{1.31}$$

V předešlém vzorci nejenže není ξ^μ zvoleno jednoznačně, nadto není ani žádný mechanismus či další požadavek, jímž by mělo být určeno. Jinými slovy, můžeme definovat $\widetilde{\delta Q} = \delta Q - \mathcal{L}_\eta Q$, kde $\eta^\mu = (\tilde{\xi} - \xi)^\mu$. V tomto pojetí je kalibrační transformace druhého druhu změnou způsobu, jakým identifikujeme body M s body z M', a z této nejednoznačnosti plyne i největší obtíž. Mezi příspěvkem perturbace z M' a příspěvkem pozadí z M dokážeme totiž rozlišit, pouze bude-li $\mathcal{L}_\eta Q = 0$ pro libovolné η.

V tomto smyslu lze tedy hovořit o kalibračně invariantních veličinách druhého druhu, jestliže Q splňuje $\mathcal{L}_\eta Q = 0$. Lze nahlédnout, že k tomu je zapotřebí, aby $Q(\lambda,p) = a$, kde a je buď konstantní skalár, nebo lineární kombinace Kroneckerových delta. Kvůli tomu není perturbace metriky takto kalibračně invariantní. Existují ovšem jiné kvantity vzešlé z GHP a NP formalismu, které již toto kritérium splňují, a to Ψ_0 a Ψ_4.

1.8 Perturbační teorie blíže

V předchozí sekci jsme naznačili, jak se v obecné relativitě pracuje s perturbacemi. Jejich popis je rovněž dobře rozveden v knize Walda [6], z níž budeme čerpat nyní. Přeznačením parametru λ na ε, jenž je v současné literatuře užívané častěji, dostaneme známý vzorec

$$g^\varepsilon = g^0 + \varepsilon g^1 + O(\varepsilon^2)\,, \tag{1.32}$$

kde ε je "malé". Jelikož platí vztah (1.10), pak jsou-li perturbací ovlivněny vektory nulové tetrády, je jimi ovlivněna i prostoročasová metrika (a naopak). Hlavní úskalí zde spočívá ve faktu, že perturbace metriky fakticky znamená také perturbaci kovariantní derivace ∇^0. Jestliže ∇^ε je spjatá s plnou metrikou, platí dle Walda [6] standardní vztah mezi ∇^ε a původní kovariantní derivací ∇^0. Tento vztah je dán rozdílovým tenzorem:

$$C^\mu{}_{\nu\rho}(\varepsilon) = \frac{1}{2}(g^\varepsilon)^{\mu\sigma}(\nabla^0_\nu g^\varepsilon_{\rho\sigma} + \nabla^0_\rho g^\varepsilon_{\nu\sigma} - \nabla^0_\sigma g^\varepsilon_{\nu\rho})\,, \tag{1.33}$$

$$= \frac{1}{2}(g^\varepsilon)^{\mu\sigma}(\nabla^0_\nu g^1_{\rho\sigma} + \nabla^0_\rho g^1_{\nu\sigma} - \nabla^0_\sigma g^1_{\nu\rho})\,, \tag{1.34}$$

přičemž poslední řádek platí, neboť $\nabla^0_\nu g^0_{\alpha\beta} = 0$

Jestliže se omezíme na vakuové podkladové prostoročasy, můžeme odvodit linearizované Einsteinovy rovnice. Začneme od perturbovaného Riemannova tenzoru, jenž je dán jako:

$$R^\varepsilon_{\mu\nu\lambda}{}^\rho = R^0_{\mu\nu\lambda}{}^\rho + 2C^\sigma{}_{\lambda[\mu}C^\rho{}_{\nu]\sigma} - 2\nabla^0_{[\mu}C^\rho{}_{\nu]\lambda}, \tag{1.35}$$

kde $R^{0}_{\mu\nu\lambda}{}^{\rho}$ je přirozeně podkladový Riemannův tenzor. Jelikož pracujeme s vakuovým podkladovým prostoročasem, je $R^0_{\mu\nu} = 0$, a tudíž

$$R^{\varepsilon}_{\mu\nu} = 2C^{\sigma}{}_{\nu[\mu}C^{\lambda}{}_{\lambda]\sigma} - 2\nabla^0_{[\mu}C^{\sigma}{}_{\sigma]\nu}. \tag{1.36}$$

Přitom ovšem první člen je kvadratický v C, jež je samo o sobě lineární v ε (díky tomu, že $\nabla^0_\rho g^0_{\mu\nu} = 0$). Tento člen je tudíž $O(\varepsilon^2)$ a my můžeme psát:

$$\begin{aligned} R^{\varepsilon}_{\mu\nu} &= -2\nabla^0_{[\mu}C^{\sigma}{}_{\sigma]\nu} \\ &= g^{0\lambda\rho}(\nabla^0_\lambda\nabla^0_{(\nu}g^1_{\mu)\rho} - \frac{1}{2}\nabla^0_\mu\nabla^0_\nu g^1_{\lambda\rho} - \frac{1}{2}\nabla^0_\lambda\nabla^0_\rho g^1_{\mu\nu}), \end{aligned} \tag{1.37}$$

Položením $R^{\varepsilon}_{\mu\nu} = 0$ dostáváme rovnici, v níž se vyskytuje pouze podkladová kovariantní derivace a oba metrické tenzory. Jakkoli se jedná o značné zjednodušení oproti plným Einsteinovým polním rovnicím (a dalšího zjednodušení lze docílit vhodnou volbou kalibrace), Wald správně poznamenává, že se stále jedná o složitou soustavu provázaných parciálních diferenciálních rovnic.

1.9 Perturbace a superpotenciál

Jak správně uvádí ve své nedávné práci Deadman a Stewart [11], existuje vícero přístupů k perturbacím, jež mají každý své výhody a nevýhody. V této práci se budeme tak muset vztahovat nejen k obvyklé perturbační formuli

$$g_{\mu\nu} = g^0_{\mu\nu} + \varepsilon g^1_{\mu\nu} + O(\varepsilon^2), \tag{1.38}$$

ale i k perturbacím skrze superpotenciál, jež by mohl nést množství jmen, my se ovšem přidržíme označení "hertzovský" (podle H. Hertze). Bez zacházení do detailů konstatujme, že pokud na $g^1_{\mu\nu}$ zavedené výše naložíme de Donderovu kalibrační podmínku:

$$\nabla^\mu g^1_{\mu\nu} = 0, \tag{1.39}$$

lze odvodit, že $g^1_{\mu\nu}$ je řešením vlnové rovnice

$$\Box g^1_{\mu\nu} \equiv g^{0\rho\sigma}\nabla_\rho\nabla_\sigma g^1_{\mu\nu} = 0. \tag{1.40}$$

Jelikož ovšem $g^1_{\mu\nu}$ musí splnit obě předchozí rovnice, je v některých případech jednodušší hledat namísto něj právě Hertzův superpotenciál $H_{\mu\nu\rho\sigma}$, který splní

$$H_{\mu\nu\rho\sigma} = H_{[\mu\nu][\rho\sigma]} = H_{\rho\sigma\mu\nu}, \tag{1.41}$$

ale především

$$g^1_{\mu\nu} = \nabla^\rho\nabla^\sigma H_{\mu\rho\nu\sigma}. \tag{1.42}$$

Díky tomu, nalezneme-li řešení vlnové rovnice

$$\Box H_{\mu\nu\rho\sigma} = 0, \tag{1.43}$$

nalezneme pak i $g^1_{\mu\nu}$. Přitom - podobně jako potenciály v klasickém elektromagnetismu - není ani $H_{\mu\nu\rho\sigma}$ dáno jednoznačně. Skrz tuto kalibrační volnost můžeme zredukovat počet nezávislých složek superpotenciálu na dvě.

V prostoročasech typu D s příslušně uzpůsobenou tetrádou lze pak s pomocí spinorového kalkulu typicky ukázat, že existuje komplexní skalární pole χ o jistém GHP typu, jež musí splnit jistou rovnici. Od velmi složité úlohy hledání řešení Einsteinových rovnic se tak dostáváme k řešení komplexní parciální diferenciální rovnice druhého řádu.

1.10 Teukolského rovnice

Jako příklad výše popsaného perturbačního postupu můžeme uvést (podle všeho historicky první) článek Teukolského [2], v němž jsou odvozeny rovnice, jež musí splnit perturbované Ψ_0 a Ψ_4 v prostoročasu s podkladem typu D.

Jak sám Teukolský připouští, jeho odvození lze zjednodušit, užijeme-li GHP formalismu (namísto původně užité NP varianty). Uvažujme Ricciho identitu:

$$(þ - \rho - \bar{\rho})\sigma - (ð - \tau + \bar{\pi})\kappa - \Psi_0 = 0, \tag{1.44}$$

a dvě z Bianchiho identit:

$$(þ' + \mu)\Psi_0 - (ð - 4\tau)\Psi_1 - 3\sigma\Psi_2 = (ð + 2\bar{\pi})\Phi_{01} - (þ - \bar{\rho})\Phi_{02} - \bar{\lambda}\Phi_{00} + 2\sigma\Phi_{11} - 2\kappa\Phi_{12} \tag{1.45}$$

a

$$(ð' + \pi)\Psi_0 - (þ - 4\rho)\Psi_1 - 3\kappa\Psi_2 = (ð + \bar{\pi})\Phi_{00} - (þ - 2\bar{\rho})\Phi_{01} + 2\sigma\Phi_{10} - 2\kappa\Phi_{11} - \bar{\kappa}\Phi_{02} \tag{1.46}$$

Tyto rovnice platí zcela obecně.

Nyní provedeme linearizaci typu $K = K^0 + K^P$, kde K^0 je kvantita podkladového prostoročasu, kdežto K^P kvantita perturbovaná (přirozeně $\varepsilon K^P \equiv 0$).

Specializujme se dále na podkladový prostoročas typu D. V něm se všechny GHP rovnice značně zjednodušují, a my můžeme využít dalších dvou Bianchiho identit:

$$\begin{aligned} þ\Psi_2^0 &= 3\rho\Psi_2^0 \\ ð\Psi_2^0 &= 3\tau\Psi_2^0 \end{aligned} \tag{1.47}$$

(tato jejich forma je ovšem vázaná na prostoročas typu D).

Pomocí rovnic výše můžeme "zjednodušit" rovnici (1.44) na

$$(þ - 4\rho^0 - \bar{\rho}^0)(\Psi_2^0\sigma^P) - (ð - 4\tau^0 + \bar{\pi}^0)(\Psi_2^0\kappa^P) - \Psi_0^P\Psi_2^0 = 0. \tag{1.48}$$

(zde vystupující derivace jsou brány vůči podkladovému prostoročasu). Dále využijeme komutátoru, jež se v rámci prostoročasu typu D zjednoduší na

$$(þð - ðþ)\chi = (\bar{\pi}þ + \bar{\rho}ð - q\bar{\pi}\bar{\rho})\chi \tag{1.49}$$

pro χ typu (p,q). Zapůsobíme-li nyní na (1.45) pomocí $(þ - 4\rho^0 - \bar{\rho}^0)$ a na (1.46) pomocí $(ð - 4\tau^0 + \bar{\pi}^0)$, pak s užitím komutátoru výše můžeme odečtením obou rovnic od sebe eliminovat druhé derivace ψ_1^0, a dostaneme následující:

$$
\begin{aligned}
&3((\eth - 4\tau + \bar{\pi})(\kappa^P \Psi_2) - (\text{þ} - 4\rho - \bar{\rho})(\sigma^P \Psi_2)) \\
&+ \text{þþ}'\Psi_0^P - \eth\eth'\Psi_0^P + (\mu - \bar{\pi})\text{þ}\Psi_0^P + (\text{þ}\mu)\Psi_0^P + 4(\text{þ}\tau)\Psi_1^P - \pi\eth\Psi_0^P \\
&- (4\rho + \bar{\rho})(\mu\Psi_0^P + \text{þ}'\Psi_0^P) - 4\tau\bar{\rho}\Psi_1^P - 4(\eth\rho)\Psi_1^P - (\eth\pi)\Psi_0^P \\
&+ (4\tau - \bar{\pi})(\pi\Psi_0^P + \eth'\Psi_0^P) - 4\rho\bar{\pi}\Psi_1^P = \mathcal{R}_0
\end{aligned}
\tag{1.50}
$$

(pro narůstající složitost rovnic přestáváme označovat neperturbované veličiny symbolem "0"). Zde $\mathcal{R}_0$ značí členy úměrné projekcím Ricciho tenzoru, konkrétně je:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{R}_0 =&(\text{þ} - 4\rho - \bar{\rho})((\eth + 2\bar{\pi})\Phi_{01}^P - (\text{þ} - \bar{\rho})\Phi_{02}^P) \\
&- (\eth - 4\tau + \bar{\pi})((\eth + \bar{\pi})\Phi_{00}^P - (\text{þ} - 2\bar{\rho})\Phi_{01}^P)
\end{aligned}
\tag{1.51}
$$

S užitím Ricciho identit platných pro podkladový prostoročas typu D:

$$
\begin{aligned}
\text{þ}\tau &= \rho(\bar{\pi} + \tau) \\
\eth\rho &= \tau(\rho - \bar{\rho})
\end{aligned}
\tag{1.52}
$$

je možné z rovnice (1.50) zcela eliminovat Ψ_1^P. Dále je vidět, že první řádek (1.50) lze pomocí (1.48) značně zjednodušit. Než přejdeme ke slavné Teukolského rovnici, zapojíme do hry ještě Einsteinovy polní rovnice, jež se pro vakuový podkladový prostoročas zjednoduší na:

$$
R_{\mu\nu}^P = 8\pi T_{\mu\nu}^P \equiv 2\mathcal{T}_{\mu\nu},
\tag{1.53}
$$

kde π v předchozí rovnici je přirozeně Ludolfovo číslo, pročež jsme pro zabránění zmatení zavedli značení $\mathcal{T}_{\mu\nu}$ pro vhodný násobek tenzoru energie-hybnosti (jež je přirozeně $O(\varepsilon)$). Projekce Ricciho tenzoru Φ_{00},Φ_{01} apod. tak přechází v projekce $\mathcal{T}_{00}$,$\mathcal{T}_{01}$, kde $\mathcal{T}_{\mu\nu}$ "dědí" tetrádové vektory z definice příslušných projekci Ricciho tenzoru.

Díky tomu je pak možné psát:

$$
[(\text{þ} - 4\rho - \bar{\rho})(\text{þ}' + \mu) - (\eth - 4\tau + \bar{\pi})(\eth' + \pi) - 3\Psi_2]\Psi_0^P = \mathcal{T}_0,
\tag{1.54}
$$

kde

$$
\begin{aligned}
\mathcal{T}_0 =&(\text{þ} - 4\rho - \bar{\rho})((\eth + 2\bar{\pi})\mathcal{T}_{01} - (\text{þ} - \bar{\rho})\mathcal{T}_{02}) \\
&- (\eth - 4\tau + \bar{\pi})((\eth + \bar{\pi})\mathcal{T}_{00} - (\text{þ} - 2\bar{\rho})\mathcal{T}_{01}),
\end{aligned}
\tag{1.55}
$$

a my vidíme, že pro Ψ_0^P jsme dostali parciální diferenciální rovnici druhého řádu s koeficienty závislými pouze na kvantitách podkladového prostoročasu. Z řešení této rovnice je přitom možné získat plnou metriku perturbovaného prostoročasu, jak ukázal např. Chandrasekhar [12].

1.11 Teukolského-Starobinského identity

Již jsme si představili operaci "′", která využívá vzájemné záměny tetrádových vektorů. Není těžké ověřit, že $\Psi_0' = \Psi_4$ a $\Psi_2' = \Psi_2$. Nyní můžeme skrz tuto diskrétní symetrii nahlédnout, že

$$[(\text{þ}' + 4\mu + \bar{\mu})(\text{þ} - \rho) - (\eth' + 4\pi - \bar{\tau})(\eth - \tau) - 3\Psi_2]\Psi_4^P = \mathcal{T}_4, \tag{1.56}$$

kde

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_4 = (\text{þ}' + 4\mu + \bar{\mu})((\eth' - 2\bar{\tau})\mathcal{T}_{10} - (\text{þ}' + \bar{\mu})\mathcal{T}_{13}) \\ - (\eth' + 4\pi - \bar{\tau})((\eth' - \bar{\tau})\mathcal{T}_{11} - (\text{þ}' + 2\bar{\mu})\mathcal{T}_{10}) \end{aligned} \tag{1.57}$$

(pochopitelně jsme pouze aplikovali "′" na (1.54) a její zdroj).

Vyvstává ovšem zásadní otázka: jestliže vyřešením rovnice (1.54) dostaneme Ψ_0^P a řešením rovnice (1.56) získáme Ψ_4^P, za jakých podmínek jsou obě tato pole příslušná stejné perturbaci metriky?

Lze odvodit vztahy mezi Ψ_0^P a Ψ_4^P, které již garantují, že obě vedou na stejnou metriku. Pro ilustraci začneme s jednodušším příkladem, jímž je elektromagnetické pole. To v NP a GHP formalismu charakterizuje trojice projekcí Maxwell-Faradayova tenzoru:

$$\begin{aligned} \varphi_0 &\equiv F_{\mu\nu} l^\mu m^\nu \\ \varphi_1 &\equiv \frac{1}{2} F_{\mu\nu}(l^\mu n^\nu + \bar{m}^\mu m^\nu) \\ \varphi_2 &\equiv F_{\mu\nu} \bar{m}^\mu n^\nu. \end{aligned} \tag{1.58}$$

V řeči GHP formalismu splní tyto kvantity čtveřici rovnic uvedených (za předpokladu absence zdrojů elektromagnetického pole a pozadí typu D) např. ve [13]. Pro odvození postačí užít první dvě:

$$\begin{aligned} (\eth' + \pi)\varphi_0 &= (\text{þ} - 2\rho)\varphi_1 \\ (\eth' + 2\pi)\varphi_1 &= (\text{þ} - \rho)\varphi_2 \end{aligned} \tag{1.59}$$

Vidíme, že zapůsobíme-li na první rovnici $(\eth' + 3\pi)$ a na druhou $(\text{þ} - 3\rho)$, pak sečtením obou rovnic (a užitím komplexně sdruženého komutátoru k (1.49)) a užitím Ricciho identit dostaneme:

$$\text{þ}\text{þ}\varphi_2 - 4\rho\text{þ}\varphi_2 + 2\rho^2\varphi_2 = \eth'\eth'\varphi_0 + 4\pi\eth'\varphi_0 + 2\pi^2\varphi_0 + 2(\text{þ}\pi + \eth'\rho)\varphi_1 \tag{1.60}$$

Zatím jsme nepoužili předpoklad, který článek Teukolského a Starobinského [13] (jenž pracuje dokonce přímo s Kerrovým prostoročasem) obsahuje, totiž předpoklad vakua, tedy nulové pravé strany Einsteinových rovnic. Z něho ovšem dostáváme několik dalších identit (viz Gómez-Lobo a kol. [14]), mezi nimi

$$\text{þ}\pi = -\eth'\rho, \tag{1.61}$$

která z rovnice (1.60) vyloučí φ_1. Poté lze dosáhnout (s využitím Bianchiho identit v prostoročase typu D) velmi elegantního tvaru výsledné rovnice, a to

$$\text{þ}\text{þ}(\Psi_2^{-\frac{2}{3}}\varphi_2) = \eth'\eth'(\Psi_2^{-\frac{2}{3}}\varphi_0) \tag{1.62}$$

(jak jej uvádí například Kofroň [15]).

Přímočarou aplikací operace "′" získáme také rovnici

$$\text{þ}'\text{þ}'(\Psi_2^{-\frac{2}{3}}\varphi_0) = \eth\eth(\Psi_2^{-\frac{2}{3}}\varphi_2), \tag{1.63}$$

kde jsme využili $\varphi'_0 = -\varphi_2$ a $\varphi'_2 = -\varphi_0$.

V elektromagnetismu je situace ovšem o mnoho jednodušší než pro gravitační pole, reprezentované skalárními projekcemi Weylova tenzoru Ψ_i. Ty splňují Bianchiho identity:

$$\begin{aligned} \text{þ}'\Psi_0 - \eth\Psi_1 &= -\Psi_0\mu - 4\Psi_1\tau + 3\Psi_2\sigma \\ \text{þ}'\Psi_1 - \eth\Psi_2 &= \Psi_0\nu - 2\Psi_1\mu - 3\Psi_2\tau + 2\Psi_3\sigma \\ \text{þ}'\Psi_2 - \eth\Psi_3 &= 2\Psi_1\nu - 3\Psi_2\mu - 2\Psi_3\tau + \Psi_4\sigma \\ \text{þ}'\Psi_3 - \eth\Psi_4 &= 3\Psi_2\nu - 4\Psi_3\mu - \Psi_4\tau \end{aligned}, \tag{1.64}$$

které jsme zjednodušili předpokladem vakua, totiž že $\Phi_{ij} = 0 \,\forall\, i,j$ až do řádu $O(\varepsilon^2)$. Zároveň počítáme celou dobu s *neakcelerovanými* prostoročasy, v nichž platí dodatečné identity. Záměrně jsme zdůraznili strukturu levých stran, z nichž je patrné, jak lze získat analogii rovnice (1.62) pro Ψ_0^P a Ψ_4^P.

Zapůsobením pomocí $\text{þ}'$ na první z těchto rovnic a prokomutováním $\text{þ}'\eth\Psi_1$ na $\eth\text{þ}'\Psi_1 + \dots$ dostaneme možnost dosadit za $\text{þ}'\Psi_1$ ze druhé rovnice. Tím získáme úměru $\text{þ}'\text{þ}'\Psi_0 = \eth\eth\Psi_2 + \dots$. Tu ale můžeme opět zderivovat pomocí $\text{þ}'$, prokomutovat $\text{þ}'\eth\eth\Psi_2$ na $\eth\eth\text{þ}'\Psi_2$ a pokračovat v dosazování.

Postupně je tak (pochopitelně po finální linearizaci) možné dospět až ke tvaru (Kofroň [15]):

$$(\text{þ}')^4(\Psi_2^{-\frac{4}{3}}\Psi_0^P) = \eth^4(\Psi_2^{-\frac{4}{3}}\Psi_4^P) + 3\mathcal{V}[\bar{\Psi}_4], \tag{1.65}$$

v němž operátor $\mathcal{V}$ je definován (při působení na veličinu GHP typu $\{p,q\}$) jako

$$\mathcal{V}[\chi] = \Psi_2^{-\frac{1}{3}}(\mu\text{þ} + \rho\text{þ}' - \pi\eth - \tau\eth' + \frac{p}{2}\Psi_2 + \frac{q}{2}\frac{\rho}{\bar{\rho}}\bar{\Psi}_2)\chi. \tag{1.66}$$

Operátor $\mathcal{V}$ má dále tu speciální vlastnost, že komutuje se všemi čtyřmi GHP derivacemi. Pro důkaz tohoto faktu je nutné ponořit se hlouběji do teorie Killingových vektorů a tenzorů, což je nad rámec této práce - zájemce proto pouze odkážeme na [8].

2. Výpočetní nástroje

2.1 Wolfram Mathematica a xAct

Jelikož účelem této práce je kontrolovat výsledky jiných autorů, je na místě použít spolehlivější metody, než jaké byly užity dotyčnými autory. Hlavním nástrojem našich výpočtů jsou proto program Mathematica, a specificky balíček volně dostupných výpočetních nástrojů známých jako xAct.

Jako první demonstrace síly tohoto balíčku může posloužit příloha "Výpočet spinových koeficientů", která na relativně malé ploše představuje vše potřebné k výpočtu Ψ_i a spinových koeficientů (pro ukázku používáme Kerrovo řešení, stačí ovšem vyměnit tetrádu a celý výpočet zopakovat).

Pro výpočty související s NP a GHP formalismy budeme ovšem používat zejména notebook Gómeze-Loba [16], jenž představuje všechny příslušné koeficienty obou formalismů a odvozuje s užitím spinorového kalkulu všechny relevantní rovnice. Díky tomu je ideálním základem, na němž budeme stavět naše výpočty.

2.2 Základy xActu

Představíme si nyní práci s balíčkem xAct, a to právě na příkladu přílohy A.7. První dva příkazy slouží k nahrání potřebných součástí přímo do aktivního notebooku (je tedy pochopitelně nutné napřed xAct jako takový mít stažený). Poté již následují intuitivně pojmenované příkazy, jež připravují půdu pro samotný výpočet.

Prvním z nich je DefManifold, jenž zavádí podkladovou varietu, určuje její dimenzi na 4, a stanovuje indexy, jenž budou užívány při práci s objekty na této varietě. Vidíme zároveň, že xAct sám definuje také tečný bundle k této varietě, a obě definice ohlásí ve výstupu příkazu.

Následující příkaz určuje metriku g o signatuře {1,3,0}, jejíž příslušná beztorzní kovariantní derivace bude značena CD. Poté v souladu s Gómezem-Lobem [16] definujeme také spinovou strukturu s metrikou g, vektorovým bundlem Spin, indexy ve složených závorkách, spinovou metrikou ϵ, soldering form σ a derivací CDe.

Současně se zadanými objekty se automaticky definují další, přidružené tenzory a spinory, o jejichž existenci jsme okamžitě informováni ve výstupu obou příkazů. Jelikož nebudeme téměř žádný z nich potřebovat, není potřeba se jim zde věnovat.

Následuje definice tetrádových vektorů, zahrnující jednak název, jednak jejich typ skrz počet indexů ve hranatých závorkách, dále pak varietu, na níž jsou definovány, a instrukce pro jejich jednodušší zobrazování. Podobně jako metrika g ještě v této fázi není tetráda nijak určena, existuje pouze jako abstraktní objekt.

Definovat potřebujeme ještě dvanáct spinorových koeficientů, a dále souřadnicový systém (v tomto případě půjde o Boyer-Linquistovy souřadnice, proto i systém nese jméno BL). V obojím případě musíme specifikovat varietu, na níž mají být objekty zavedeny, a pro souřadnicový systém dále očíslované "souřadnicové skaláry".

Zavádění všech relevantních veličin je poněkud zdlouhavé, jde ale o nezbytnou daň za plynulost následných výpočtů. První skutečně autorská funkce se nazývá metrikator, a jejím účelem je přečíst ze vcelku standartně zapsaného délkového elementu ds2 jeho protějšek v podobě metriky.

Než zadáme samotný délkový element, nadefinujeme ještě konstanty Mass a ang, známé z Kerrova řešení coby hmotnost a moment hybnosti soustavy, a dále pomocné funkce souřadnic Σ a Δ (nezaměňovat s Δ coby symbolem pro derivaci!). Poté již následuje zapsání délkového elementu a výpočet a uložení příslušné metriky.

Nejsložitější součástí právě představovaného notebooku je bezesporu funkce spingen. Nebudeme zde podrobně popisovat její vnitřek, neboť náplní této práce není xAct jako takový. Namísto toho představíme jednak vstupy, jednak výstupy této funkce.

Na vstupu přijímá spingen g coby abstraktně definovanou metriku, dále specifické hodnoty, jež mají být metrice připsány (a to ve formě, v jaké jsou poskytnuty funkcí metrikator), poté souřadnicový systém, v němž se tyto hodnoty mají s metrikou identifikovat, a konečně tetrádu vektorů definovaných pomocí souřadnic příslušného souřadnicového systému.

V průběhu výpočtu jsou pak xActem vytvořena pravidla identifikující složky g v bázi "chart" s příslušnými elementy matice "metrika", dále složky abstraktních tetrádových vektorů (definovaných dříve) jsou spojeny s tetrádou vstupující do funkce spingen, a konečně jsou pomocí již představených vztahů vypočteny Ψ_i a spinové koeficienty.

2.3 Podkladový notebook

Notebook Gómeze-Loba [16] je, jak už bylo řečeno, založen zejména na spinorovém kalkulu. Jakkoli xAct umožňuje i tuto cestu, budeme většinou nahlížet na příslušné výpočty pouze jako na pomocný mezikrok. Je zde ovšem několik charakteristických prvků v přístupu tohoto notebooku, jež je nutné představit.

Prvním z nich je báze NP. Balíček xAct neumožňuje nahrazovat kontrakce tetrádových vektorů a derivací pomocí značení (1.7), není-li tato kontrakce příslušná konkrétní bázi. Gómez-Lobo [16] řeší tento problém tak, že v bázi NP jsou tetrádové vektory shodné s nejtriviálnějšími jednotkovými, tj.:

$$l^{\mu,NP} = (1,0,0,0)\,, \qquad n^{\mu,NP} = (0,1,0,0)\,, \tag{2.1}$$

$$m^{\mu,NP} = (0,0,1,0)\,, \qquad \bar{m}^{\mu,NP} = (0,0,0,1)\,. \tag{2.2}$$

Nevýhodou tohoto přístupu je, že poté přirozeně derivace těchto vektorů v NP bázi jsou nulové, a nelze proto užít přímo rovnic (1.8)-(1.11).

Namísto toho jsou tyto rovnice implementovány skrz spinorový kalkulus a ve výsledku jsou zakódovány do Christoffelových symbolů, které se při práci s kovariantní derivací CDe v bázi NP samy "objeví" na příslušných místech. Díky popsanému mechanismu pak výrazy typu $e_i^\mu e_j^\nu \nabla_\nu e_\mu^k$ po převedení do báze NP a vysčítání dají správné spinové koeficienty.

Podobné "okliky" (které jsou samozřejmě oklikami pouze vzhledem k našemu přístupu založeném na vektorech, jinak jsou pro NP formalismus vcelku přirozené) jsou následně užity při odvození Newman-Penroseových rovnic a komutačních relací NP operátorů. Jejich plné znění uvádíme pro úplnost v přílohách.

Pokračujme ale k zavedení GHP formalismu. Základním problémem, jemuž bude vystaven každý pokus o implementaci operátorů $þ$ a $ð$, je jejich rozdílné působení na objekty různých vah. Z toho důvodu náš podkladový notebook představuje příkaz GHPWeightOf, jehož účel je zjevný z názvu - přečte váhu výrazu.

V rámci definice je GHPWeightOf seznámen s typy všech relevantních veličin. Poté přistupuje notebook k zavedení diferenciálních GHP operátorů, a to prostřednictvím hlubších příkazů xActu, jež zde nebudeme šířeji rozebírat. Notebook poté již jen překládá již odvozené rovnice NP formalismu do GHP formalismu, a naše analýza zde tak může skončit.

2.4 Několik drobností

Jelikož budeme pracovat s perturbacemi pouze do prvního řádu v ε, hodí se mít jednoduchý způsob, jak odfiltrovat členy $O(\varepsilon^2)$. Mathematica toho dokáže docílit hned několika způsoby, my jsme zvolili jednoduché pravidlo typu "rule delayed" jménem "uneps". Jeho kód se vejde na řádek, a funguje bezchybně, pouze je nutné napřed roznásobit členy daného výrazu příkazem "Expand".

Další nedocenitelnou pomůckou budou pravidla, jež přiřadí druhým (i vyšším) GHP derivacím jejich ekvivalent, jež bude ovšem mít všechny operátory v pořadí $þ - þ' - ð - ð'$ (popř. v pořadí opačném). Zde je možné využít "GHPCommutators" a pouze je několika příkazy převést na pravidla typu "rule delayed". Výsledná pravidla nazýváme "Kom" a "Antikom".

Bohužel musíme konstatovat, že pravidlo "NPToGHP", zkonstruované v podkladovém notebooku, nefunguje správně, použije-li se na výrazy, kde se vyskytují vícenásobné NP derivace. Naštěstí pravidlo "GHPToNP", určené k převodu opačným směrem, si s vícenásobnými derivacemi poradí bez problémů, takže je možné jistou oklikou dospět k sadám pravidel, jež fungují bez problémů.

Rádi bychom na tomto místě vposled zdůraznili, že podkladový notebook (přiložený jako příloha A.8) není autorským dílem, a námi provedené úpravy v něm jsou naprosto marginální. Veškeré zásluhy na jeho funkčnosti připadají jeho autorům.

3. Výsledky

3.1 Linearizovaná perturbace obecného prostoročasu typu D

V relativně nedávném článku [11] představují Deadman a Stewart výsledky perturbací, jež vychází z rovnice pro skalární pole χ o GHP typu $\{4,0\}$. Tato diferenciální rovnice, v níž vystupují pouze kvantity podkladového prostoročasu, zní:

$$[(\text{þ} - \bar{\rho})\,(\text{þ}' + 3\rho') - (\eth - \bar{\tau}')\,(\eth' + 3\tau') - 3\Psi_2]\,\chi = 0 \tag{3.1}$$

(povšimněme si podobnosti s Teukolského rovnicí!) Pro χ splňující předchozí rovnici je podle Deadmana a Stewarta [11] řešením linearizovaných vakuových Einsteinových rovnic metrika

$$g_{\mu\nu} = g^{B}_{\mu\nu} + \hat{g}_{\mu\nu}, \tag{3.2}$$

přičemž $g^{B}_{\mu\nu}$ je metrika podkladového prostoročasu (o němž předpokládáme, že je typu D), kdežto $\hat{g}_{\mu\nu}$ je dáno jako:

$$\frac{\hat{g}_{\mu\nu}}{\varepsilon} = (X + \bar{X})n_\mu n_\nu + Y m_\mu m_\nu + \bar{Y}\bar{m}_\mu \bar{m}_\nu - 2Z n_{(\mu} m_{\nu)} - 2\bar{Z} n_{(\mu}\bar{m}_{\nu)}. \tag{3.3}$$

Tetrádové vektory vystupující v této rovnici musí být přitom shodné s hlavními nulovými směry podkladového prostoročasu, zatímco pomocné funkce X,Y,Z jsou dány jako:

$$X = \eth'\eth'[\chi] + 2\tau'\eth'[\chi]\,, \tag{3.4}$$
$$Y = \text{þ}'\text{þ}'[\bar{\chi}] + 2\bar{\rho}'\text{þ}'[\bar{\chi}]\,, \tag{3.5}$$
$$Z = \text{þ}'\eth[\bar{\chi}] + (\tau + \bar{\tau}')\text{þ}'[\bar{\chi}] + \bar{\rho}'\eth[\bar{\chi}]\,. \tag{3.6}$$

Pro účely výpočtu potřebujeme ještě znát perturbovanou tetrádu, a citovaný článek nám v tomto ohledu vychází vstříc, neboť přímo uvádí:

$$\begin{aligned}
l^P_\mu &= l_\mu + \varepsilon\left(\frac{X + \bar{X}}{2} n_\mu - Z m_\mu - \bar{Z}\bar{m}_\mu\right) \\
l^{\mu,P} &= l^\mu - \varepsilon\frac{X + \bar{X}}{2} n^\mu \\
m^P_\mu &= m_\mu - \varepsilon\frac{\bar{Y}}{2}\bar{m}_\mu \\
m^{\mu,P} &= m^\mu + \varepsilon\left(-\bar{Z}n^\mu + \frac{\bar{Y}}{2}\bar{m}^\mu\right)
\end{aligned} \tag{3.7}$$

Přitom nedochází k perturbaci n, a to ani v kovariantních, ani v kontravariantních složkách.

Doposud se víceméně držíme notace citovaného článku (až na explicitní vypsání malého perturbačního parametru ε a označení celkových vektorů indexem "P"). Naše výsledky se ovšem od Deadmana a Stewarta [11] mírně odlišují. Nejvíce stojí za zmínku výsledek v koeficientu β' Máme totiž:

$$
\begin{aligned}
\frac{(\beta^P - \beta)'}{\varepsilon} = & [\frac{1}{2}(\text{þ}')^2\eth + (\tau - \frac{\beta}{2})(\text{þ}')^2 + (\frac{\bar{\rho}'}{2} - \epsilon')\text{þ}'\eth + \\
& + (\frac{\text{þ}'\tau}{2} - \bar{\rho}'(\beta - \frac{\tau}{2}) - \epsilon'(\tau + \bar{\tau}'))\text{þ}' - \bar{\rho}'\epsilon'\eth]\bar{\chi}
\end{aligned}
\tag{3.8}
$$

Při výpočtech vedoucích k těmto výsledkům bylo přitom zapotřebí užít jen (3.1) a standardních GHP relací a komutátorů. Zdůrazníme ještě jednou význačnost posledního tvrzení: k výsledkům citovaného článku lze dojít bez užití identit platných pouze v neakcelerovaných prostoročasech. Všechny výsledky v této sekci jsou tedy obecně platné i pro neakcelerované prostoročasy.

Cesta k výsledkům přesto ovšem nebyla zdaleka přímočará. Výpočet zahrnuje definici osmi nezávislých tenzorů, nové kovariantní derivace, mnoho práce s pravidly a zjednodušování bez pomoci příkazu Simplify zabudovaného v Mathematice, jenž si s výrazy o mnoha členech nedovede poradit dost rychle. Projdeme jej nyní popořadě, jak jej představujeme v notebooku - příloze A.9. Ten vyžaduje napřed spustit podkladový notebook [16].

Ze všeho nejdříve nadefinujeme parametr epsilon, a dále pravidlo "uneps", představené ve druhé kapitole. Následuje dvanáct spinových koeficientů, nadefinovaných především pro zabránění zmatku. Potřebujeme též nadefinovat skalární pole χ, jeho komplexně sdružený protějšek a jejich GHP váhy.

Následují zjednodušení zadávání GHP operátorů, přičemž tohoto zjednodušení ihned využijeme v přepisu řídící rovnice (3.1). Dále nadefinujeme pomocné funkce, jejich GHP váhy pro snazší manipulaci, a jejich hodnoty v řeči χ a $\bar{\chi}$. Pokračujeme nadefinováním perturbace metriky a jednotlivých vektorů, a také přechodového tenzoru $Cdot$.

Pravidla "cdotove" a "metrika" poslouží k nahrazení příslušných veličin za jejich protějšky. Dále budeme potřebovat perturbovanou kovariantní derivaci, pojmenovanou ∇P. Než se ovšem dostaneme k její aplikaci, budou se nám hodit pravidla odpovídající Ricciho a Bianchiho identitám a také identitám vakuovým.

Vlastní výpočet můžeme zahájit teprve nyní, a to výpočtem přechodového tenzoru. Jedná se zároveň o nejdelší část co se výpočetního času týče. Následně již jen sepíšeme očekávané tvary spinových koeficientů - tyto již nejsou shodné s citovaným článkem, ale jak uvidíme, výpočty potvrdí jejich správnost.

Pokračujeme již zadáním definic spinových koeficientů, v jejichž definici jsme nahradili standardní tetrádové vektory těmi perturbovanými. Poté, co uplatníme jedno z našich pravidel a zbavíme se členů $O(\varepsilon^2)$, donutíme xAct nahradit naši dosud užívanou kovariantní derivaci pomocí ∇P a přechodového tenzoru.

Užitečnost ∇P pro nás tímto skončila, a my ji můžeme - tentokrát "uměle", běžným příkazem z arzenálu Mathematicy - nahradit opět za derivaci CDe. Zároveň nahradíme přechodové tenzory pomocí "Cdot", které již máme vypočtené. Tím jsme fakticky provedli přechod od původní derivace k perturbované.

Na tento mezivýsledek aplikujeme dříve vytvořená pravidla, což nám jej velmi zjednoduší a připraví na poslední krok - převedení všeho do NP báze. Při následném zjednodušování spinových koeficientů můžeme využít příkazu "NPToGHP" zabudovaného v našem podkladovém sešitě, který - jak jsme již konstatovali - si neporadí s vícenásobnými NP derivacemi, ovšem zde se vyskytují pouze derivace prvního řádu na X, Y a Z.

Jakmile převedeme tyto do GHP (s mezikrokem v podobě záměny zde ekvivalentních derivací PDNP a CDe), můžeme posledním pravidlem dostat výsledek již v řeči χ a $\bar{\chi}$. Výsledky zbylých spinových koeficientů uvádíme níže:

$$
\begin{aligned}
\frac{(\rho^P-\rho)}{\varepsilon} &= [\frac{1}{2}\text{þ}'\eth'^2 + (\bar{\tau}+\tau')\text{þ}'\eth' - \frac{1}{2}\bar{\rho}'\eth'^2 + (\bar{\tau}^2+\bar{\tau}\tau'+\tau'^2)\text{þ}' - \bar{\rho}'\tau'\eth']\chi \\
&\quad - [\frac{1}{2}\text{þ}'\eth^2 + 2\tau\text{þ}'\eth + \frac{1}{2}\bar{\rho}'\eth^2 + \tau(2\tau+\bar{\tau}')\text{þ}' + \bar{\rho}'\tau\eth]\bar{\chi} \qquad (3.9) \\
\frac{\kappa^P}{\varepsilon} &= -[\frac{1}{2}\eth^3 + \frac{1}{2}(\tau+\bar{\tau}')\eth^2 + \tau\bar{\tau}'\eth]\bar{\chi} + \frac{1}{2}[\text{þ}\text{þ}'\eth' + (\bar{\tau}+2\tau')\text{þ}\text{þ}' - \tau\eth'^2 \\
&\quad + (\bar{\rho}(\bar{\tau}-\tau') + 2\text{þ}\tau')\text{þ}' + (\Psi_2 - 2\tau\tau')\eth']\chi \qquad (3.10) \\
\frac{(\epsilon^P-\epsilon)}{\varepsilon} &= \frac{1}{2}[\tau'\text{þ}'\eth' + \epsilon'\eth'^2 + \tau'(\bar{\tau}+2\tau')\text{þ}' + \epsilon'\tau'\eth']\chi - \frac{1}{2}[\text{þ}'\eth^2 + (2\tau+\bar{\tau}')\text{þ}'\eth \\
&\quad - \epsilon'\eth^2 + (2\tau+\bar{\tau}')\tau\text{þ}' - 2\epsilon'\bar{\tau}'\eth]\bar{\chi} \qquad (3.11) \\
\frac{(\beta^P-\beta)}{\varepsilon} &= [-\frac{1}{2}\beta'\text{þ}'^2 + (\epsilon' + \frac{\rho'}{2})\text{þ}'\eth' + (\epsilon'(\bar{\tau}+\tau') - \beta'\rho' + \rho'(\frac{\bar{\tau}}{2}+\tau'))\text{þ}' + \epsilon'\rho'\eth']\chi \\
&\qquad (3.12) \\
\frac{\sigma^P}{\varepsilon} &= \frac{1}{2}[\text{þ}\text{þ}'^2 + 2\rho'\text{þ}\text{þ}' + (\rho-\bar{\rho})\text{þ}'^2 + 2(\bar{\tau}'-\tau)\text{þ}'\eth' + 2(\eth\tau' - \Psi_2 + \\
&\quad \rho'\rho - \tau\bar{\tau} - \tau\tau' + \bar{\tau}\bar{\tau}')\text{þ}' - \rho'(\tau-\bar{\tau}')\eth']\chi \qquad (3.13) \\
\frac{(\sigma^P)'}{\varepsilon} &= \frac{1}{2}[\text{þ}'^3 + (\rho'+\bar{\rho}')\text{þ}'^2 + \rho'\bar{\rho}'\text{þ}']\bar{\chi} \qquad (3.14) \\
\frac{(\tau^P-\tau)}{\varepsilon} &= \frac{1}{2}[\text{þ}'^2\eth' + (\bar{\tau}+2\tau')\text{þ}'^2 + (\text{þ}'\bar{\tau} + 2\rho'(\tau'-\bar{\tau}))\text{þ}']\chi \qquad (3.15) \\
\frac{(\tau^P-\tau)'}{\varepsilon} &= \frac{1}{2}[\text{þ}'^2\eth + (2\tau+\bar{\tau}')\text{þ}'^2 + (\text{þ}'\tau)\text{þ}']\bar{\chi} \qquad (3.16) \\
\frac{(\rho^P)'}{\varepsilon} &= \frac{(\kappa^P)'}{\varepsilon} = \frac{(\epsilon^P)'}{\varepsilon} = 0 \qquad (3.17)
\end{aligned}
$$

Není dobře patrné, kde se naše výsledky odlišují, proto si dovolíme slovně vypsat chyby v práci Deadmana a Stewarta [11]:

- $(\beta^P)'$ má ve 2. členu þ^2 namísto správného $(\text{þ}')^2$
- dále ve třetím členu má být $\bar{\rho}'$ namísto pouhého ρ'
- ve velké závorce na druhém řádku u téhož koeficientu má být $\bar{\rho}'$ místo $\bar{\rho}$
- konečně tamtéž namísto $(\tau - \frac{\beta}{2})$ je správně $\frac{\tau}{2} - \beta$
- dále v κ je nutné nahradit $\tau\tau'\eth\bar{\chi}$ za $\tau\bar{\tau}'\eth\bar{\chi}$

Známy jsou také další identity, platné ve vakuových prostoročasech typu D, jež čerpáme z článku Gómeze-Loba a kol. [14]. S jejich pomocí lze ukázat, že článek Deadmana a Stewarta [11] má - až na překlepy - správně též vypočtená Ψ_i. Výpočet je tentokrát ovšem o něco složitější.

Předně, Ψ_i jsou úměrná druhým derivacím X, Y, Z, tudíž potřebujeme pravidla přiřazující NP derivace na ně jejich GHP protějškům. Ta označujeme v dalším průběhu jako "DvojXYZ", jejich odvozování je pak spíše technického rázu, neboť stačí použít GHPToNP.

Pokračujeme vypočtením Weylova tenzoru, opět z důvodu úspory času. Jednotlivé jeho projekce poté zjednodušujeme pomocí pravidel na jedno použití, odvozených derivováním a úpravami rovnice (3.1), popřípadě komutátorů. Výsledky pětice Weylových skalárů uvádíme níže:

$$\frac{\Psi_0^P}{\varepsilon} = \frac{1}{2}[\eth^4]\bar{\chi} + \frac{3\Psi_2}{2}\left[-\rho'\text{þ} + \rho\text{þ}' + \tau'\eth - \tau\eth' + 2\Psi_2\right]\chi\,, \tag{3.18}$$

$$\frac{\Psi_1^P}{\varepsilon} = \frac{1}{2}[\text{þ}'\eth^3 + 3\tau\text{þ}'\eth^2 + 6\tau^2\text{þ}'\eth + 6\tau^3\text{þ}']\bar{\chi} - \frac{3}{2}\Psi_2[\text{þ}'\eth' + (\bar{\tau} + \tau')\text{þ}' + \rho'\eth']\chi\,, \tag{3.19}$$

$$\frac{(\Psi_2^P - \Psi_2)}{\varepsilon} = -\frac{1}{2}[\text{þ}'^2\eth^2 + 4\tau\text{þ}'^2\eth + 6\tau^2\text{þ}'^2 + 2(\text{þ}'\tau)\text{þ}'\eth + 6\tau(\text{þ}'\tau)\text{þ}']\bar{\chi}\,, \tag{3.20}$$

$$\frac{\Psi_3^P}{\varepsilon} = \frac{1}{2}[\text{þ}'^3\eth + 3\tau\text{þ}'^3 + 3(\text{þ}'\tau)\text{þ}'^2 + (\text{þ}'^2\tau)\text{þ}']\bar{\chi}\,, \tag{3.21}$$

$$\frac{\Psi_4^P}{\varepsilon} = \frac{1}{2}[\text{þ}'^4]\bar{\chi}\,. \tag{3.22}$$

Na místě je nyní využít našich možností a ověřit, zda námi vypočtená β' je v souladu s ostatními koeficienty. Uvažujme následující Ricciho identitu:

$$\eth'\kappa = \text{þ}\rho - \kappa\pi + \bar{\kappa}\tau - \sigma\bar{\sigma} - \rho^2 - \Phi_{00} \tag{3.23}$$

V naší situaci (vakuový prostoročas typu D) se tato rovnice redukuje na:

$$(\eth' + \eth'^P)\varepsilon\kappa^P = (\text{þ} + \text{þ}^P)(\rho + \varepsilon\rho^P) - \varepsilon\kappa^P\pi + \varepsilon\bar{\kappa}^P\tau - (\rho + \varepsilon\rho^P)^2, \tag{3.24}$$

kde horní index "P" i nadále značí perturbované kvantity, přičemž podkladové kvantity jsou ponechány bez indexu. Víme přitom, že GHP operátor $\eth'$ v sobě (alespoň působí-li na objekt vhodné váhy) obsahuje i koeficient $\alpha = -\beta'$. Platnost (3.24) do prvního řádu v ε je přitom vynucená přímo platností Einsteiových rovnic.

Největší obtíží v ověřování (3.24) je bezpochyby nalezení perturbovaných operátorů þ^P a $\eth'^P$. Jelikož perturbujeme především tetrádové vektory, není například pravda, že $(\text{þ}\rho)^P = \text{þ}(\rho{+}\rho^P)$, neboť þ v sobě implicitně obsahuje $D \equiv l_\mu\nabla^\mu$, ovšem chceme-li spočíst þ^P, musíme uvažovat $D^P \equiv l_\mu^P\nabla^\mu$, a vidíme tedy, že þ^P v sobě bude obecně obsahovat kombinaci všech GHP operátorů!

Další komplikací je, že rovnice (3.24) již nemá jako celek konzistentní GHP váhu. Důvodem tohoto možná překvapivého faktu je, že perturbované vektory nejsou namířeny do hlavních nulových směrů (což by nás nemělo překvapit, neboť z výsledků [11] je jasné, že $\Psi_i \neq 0$ pro žádné i). Nemáme tak k dispozici obvyklou kontrolu konzistence našich výpočtů.

Není bohužel možné vypsat zde postup ověřování (3.24), neboť i v prvním řádu v ε obsahuje rovnice stovky členů. Principiálně se ovšem povaha naší práce nemění: hlavním nástrojem zůstávají GHP komutátory, doprovázené užitím (3.1). Nakonec se vše zjednoduší pomocí Ricciho a Bianchiho identit, a my můžeme konstatovat, že Deadman a Stewart se vskutku zmýlili (nebo spíše přepsali) při výpočtu β'. Pouze při užití (3.8) je totiž Ricciho identita splněna.

3.2 Rozšíření Teukolského-Starobinského identit

Naším dalším cílem je mírné zobecnění již citovaného výsledku, totiž identit spojujících Ψ_0 a Ψ_4, pakliže mají oba tyto Weylovy skaláry příslušet ke stejné metrice. Pro zjednodušení je budeme dále citovat jako T-S identity. Náš notebook - příloha A.10 - vyžaduje opět spustit napřed podkladový notebook [16].

Poprvé se přesuneme zcela do GHP formalismu. Nadefinujeme si proto tenzory τ',ρ',σ' a κ' (a pro úplnost též β' a ϵ'), a rovněž pravidla pro jejich správné nahrazování, a to ve směru "bez čárek"→"s čárkami". Musíme též funkci GHPWeightOf, která je součástí podkladového sešitu, předat GHP váhy nových proměnných.

Následuje vcelku standardní zavádění pravidel, z nichž zmíníme pouze sadu AltB, která převádí opačným směrem nežli pravidla označená jako Bianchi. To budeme potřebovat, až se budeme snažit odstranit nežádoucí derivace ze vzniklého výrazu.

Pro zjednodušení výsledku je také zapotřebí vykrátit veličiny úměrné ε^2 či vyšším mocninám, jichž se bude v průběžném výsledku vyskytovat tolik, že by to znemožnilo jeho efektivní úpravu. Za tím účelem představíme jednak pravidlo "expliciteps", které nahradí veličiny nulové v nultém řádu stejnou veličinou, ovšem vynásobenou ε, dále pak budeme užívat již známého "uneps".

Naším cílem je zopakovat postup nastíněný v kapitole 1.10, ovšem vyvarovat se používání identit platných pouze v neakcelerovaných prostoročasech (a označených "lomene" v našem notebooku). Tím dospějeme ke generalizaci Teukolského-Starobinského identit, na tuto poté uplatníme rovnice platné v neakcelerovaných prostoročasech a zkontrolujeme, že se vskutku naše rozšířená verze redukuje na původní.

Abychom si cestu za generalizací T-S identit zjednodušili, využijeme již známého vztahu (1.65), z něhož "vypustíme" operátor $\mathcal{V}$ a do výsledné rovnice dosadíme za $\eth^4\Psi_4$ (přirozeně nezáleží na tom, za který ze členů dosadíme). Pro zjednodušení zadávání tak používáme *nesprávnou* rovnici, která (1.65) pouze připomíná. Uvidíme ale, že nakonec to bude vůči přehlednosti výsledku lepší.

Následuje nejobtížnější část celého výpočtu: úprava výrazu označeného jako "W" ze tvaru o délce několika set členů do lidsky čitelné podoby. Jediným vodítkem nám je tvar operátoru $\mathcal{V}$, k jehož zobecnění se snažíme dospět.

Abychom vůbec zjistili, které členy potřebujeme odstranit, je nám k dispozici příkaz Cases, který při správném užití dokáže zobrazit, jaké čtvrté (popř. třetí, druhé,...) GHP derivace se v mezivýsledku vyskytují. Nevystačíme si ovšem pouze s tímto příkazem: je dále zapotřebí několika "předčasných linearizací" pomocí příkazu expliciteps, které nám umožní nahlédnout, jakou podobu mají ty části mezivýsledku, které hodláme nakonec zachovat.

Získaný tvar členu, který nazveme $\mathcal{W}$, je poté:

$$\begin{aligned}\frac{\mathcal{W}}{3} = &\mathcal{V}[\bar{\Psi}_4] + \Psi_2^{-\frac{1}{3}}((4\bar{\Psi}_4 + 5\bar{\rho}'\bar{\sigma}' - 5\bar{\tau}'\bar{\kappa}')\text{þ}'\rho + (5\tau\bar{\kappa}' - 5\rho'\bar{\sigma}')\text{þ}'\bar{\rho} + \\ &+ 10\bar{\kappa}'(\tau^2\bar{\tau} - \tau'(\bar{\tau}')^2) + 4\bar{\Psi}_4(\tau\bar{\tau} - \tau\tau' - \rho\rho') + 5\bar{\kappa}'(\bar{\Psi}_2\tau - \Psi_2\bar{\tau}' + \\ &+ \bar{\rho}\rho'\bar{\tau}' - \bar{\rho}\rho'\tau) + 5\bar{\sigma}'(\rho(\bar{\rho}')^2 - \bar{\rho}(\rho')^2))\end{aligned} \tag{3.25}$$

Stojí za zmínku, že v samotném notebooku nedospějeme přímo k $\mathcal{W}$, ale k poněkud odlišnému výrazu - užití příkazu "Simplify" po cestě totiž rovnici vynásobilo $\Psi_2^{\frac{16}{3}}$. Přesto je možné přečíst $\mathcal{W}$ z našeho výsledku, neboť známe podobu $\mathcal{V}$. Hledané zobecnění vztahu (1.65) pak zní:

$$(\text{þ}')^4(\Psi_2^{-\frac{4}{3}}\Psi_0^P) - \eth^4(\Psi_2^{-\frac{4}{3}}\Psi_4^P) = \mathcal{W}, \tag{3.26}$$

přičemž v notebooku A.10 je rovněž ověřeno, že $\mathcal{W} = 3\mathcal{V}[\bar{\Psi}_4]$, pokud se omezíme na neakcelerované prostoročasy. Rovnice (3.25) přitom obsahuje mnohé veličiny, které jsou řádu $O(\varepsilon)$ v prostoročasech typu D, což by mělo čtenáři napovědět, že v celé rovnici bylo pro přehlednost upuštěno od indexu "P" používaného o sekci výše.

Výraz (3.25) by měl obsahovat index "P" u všech veličin, jejichž nultý řád je v prostoročasech typu D nulový. Ostatní veličiny (Ψ_2,ρ,τ, ...) jsou již v nultém řádu nenulové a bylo by možno za ně dosadit z předchozí sekce, od tohoto dosazení ovšem prozatím upustíme, abychom zachovali přehlednost.

3.3 Blíže ke tvaru zobecnění

Kdokoli znalý podoby T-S identit může být zaražen, že $\mathcal{W}$ není roven působení operátoru na $\bar{\Psi}_4$. Proč je vůbec možné takový tvar očekávat? Jedním z řešení původních identit je totiž $\Psi_0 = 0 = \Psi_4$, a zjevně poté jsou T-S identity splněny. Jak je tedy možné, že $\mathcal{W}$ se v příslušných prostoročasech redukuje na $\mathcal{V}$, ale není na první pohled nulový pro $\bar{\Psi}_4 = 0$?

Naštěstí se ukazuje, že "přebývající" členy jsou ve skutečnosti triviální. Pro důkaz tohoto tvrzení přepišme (3.25) do nového tvaru:

$$\frac{\mathcal{W}}{3} = \mathcal{V}[\bar{\Psi}_4] + \Psi_2^{-\frac{1}{3}}(4\bar{\Psi}_4(\text{þ}'\rho + \tau\bar{\tau} - \tau\tau' - \rho\rho') + K), \tag{3.27}$$

kde

$$\begin{aligned} K =&(5\bar{\rho}'\bar{\sigma}' - 5\bar{\tau}'\bar{\kappa}')\text{þ}'\rho + (5\tau\bar{\kappa}' - 5\rho'\bar{\sigma}')\text{þ}'\bar{\rho} + 10\bar{\kappa}'(\tau^2\bar{\tau} - \tau'(\bar{\tau}')^2) + \\ &+ 5\bar{\kappa}'(\bar{\Psi}_2\tau - \Psi_2\bar{\tau}' + \bar{\rho}\rho'\bar{\tau}' - \bar{\rho}\rho'\tau) + 5\bar{\sigma}'(\rho(\bar{\rho}')^2 - \bar{\rho}(\rho')^2)) \end{aligned} \tag{3.28}$$

Pro důkaz, že $K = 0$ (a to nejen pro speciální případ $\Psi_0 = 0 = \Psi_4$ - konec konců K na těchto Weylových skalárech vůbec nezávisí - ale pro libovolný prostoročas typu D) musíme vše přepsat do řeči perturbací. Tak dospějeme k překvapivě kompaktnímu tvaru:

$$K = \frac{5}{2}[\bar{\rho}'\text{þ}'\rho - \rho'\text{þ}'\bar{\rho} + \rho'\bar{\rho}(\bar{\rho}' - \rho')][2\rho'\bar{\rho}'\text{þ}'\chi + (\bar{\rho}' + \rho')\text{þ}'\text{þ}'\chi + \text{þ}'\text{þ}'\text{þ}'\chi] \tag{3.29}$$

Je vcelku jasné, že první závorka musí být nulová, má-li platit $K = 0$. Přítomnost derivací by nás mohla vést k použití některých identit převádějících je na kombinace členů bez derivací. Bohužel $\text{þ}'\rho$ se je možné takto zbavit jen v neakcelerovaných prostoročasech, a my chceme náš důkaz udržet obecný.

Naštěstí lze využít zajímavého přepisu:

$$
\begin{aligned}
\bar{\rho}'\text{þ}'\rho &= \text{þ}'[\rho\bar{\rho}'] - \rho\text{þ}'(\bar{\rho}') = \text{þ}'[\rho'\bar{\rho}] - \rho(\bar{\rho}')^2 \\
\rho'\text{þ}'\bar{\rho} &= \text{þ}'[\rho'\bar{\rho}] - \bar{\rho}\text{þ}'(\rho') = \text{þ}'[\rho'\bar{\rho}] - \bar{\rho}(\rho')^2,
\end{aligned}
\tag{3.30}
$$

kde poslední rovnost na každém řádku platí díky Ricciho identitám a dalším vztahům k nalezení v Priceovi [8]. Tím už ale vidíme, že

$$
\begin{aligned}
&\bar{\rho}'\text{þ}'\rho - \rho'\text{þ}'\bar{\rho} + \rho'\bar{\rho}(\bar{\rho}' - \rho') = \\
&= \text{þ}'[\rho'\bar{\rho}] - \rho(\bar{\rho}')^2 - (\text{þ}'[\rho'\bar{\rho}] - \bar{\rho}(\rho')^2) + \rho'\bar{\rho}(\bar{\rho}' - \rho') \\
&= \rho'\bar{\rho}\bar{\rho}' + \bar{\rho}(\rho')^2 - \bar{\rho}(\rho')^2 - \rho(\bar{\rho}')^2 = \bar{\rho}'(\bar{\rho}\rho' - \rho\bar{\rho}') = 0,
\end{aligned}
\tag{3.31}
$$

díky již dříve citovaným vztahům. Můžeme tedy zcela člen označený jako K odstranit, a psát pouze tento zobecněný tvar T-S identit:

$$
(\text{þ}')^4(\Psi_2^{-\frac{4}{3}}\Psi_0^P) - \eth^4(\Psi_2^{-\frac{4}{3}}\Psi_4^P) = 3\mathcal{V}[\bar{\Psi}_4] + 12\Psi_2^{-\frac{1}{3}}\bar{\Psi}_4^P(\text{þ}'\rho + \tau\bar{\tau} - \tau\tau' - \rho\rho') \tag{3.32}
$$

Je na místě uvést, že operátorová forma $\mathcal{W}$ je nám nadále neznámá. Ze tvaru původního $\mathcal{V}$ je možno usoudit, že ve finálním tvaru $\mathcal{W}$ budou přítomny členy tvaru $p * (\dots)$, které ovšem nedokážeme získat, neboť $p = 0$, a to jak pro $\bar{\Psi}_4$, tak pro $\bar{\Psi}_4' = \bar{\Psi}_0$. Nepomohlo by tak ani provedení celého odvozování pro rozdíl $\text{þ}^4(\Psi_2^{-\frac{4}{3}}\Psi_4^P) - (\eth')^4(\Psi_2^{-\frac{4}{3}}\Psi_0^P)$. Je možné, že $\mathcal{W}$ je zobecněním $\mathcal{V}$ i v jeho druhé důležité roli - roli komutujícího operátoru. Jelikož ale neznáme plnou podobu $\mathcal{W}$, nemůžeme s našimi prostředky tuto skutečnost ověřit.

Dodejme na závěr této podkapitoly, že s pomocí Ricciho identit a několika dalších operací je možné dospět k vícero odvozeným identitám, jež jsou o stupeň složitější než ty Ricciho a jejich platnost není zdaleka zjevná. Uvažme například výraz:

$$
A = \psi_2\bar{\rho} - \bar{\psi}_2\rho + 2\rho^2\bar{\rho}' - 2\rho\bar{\rho}\bar{\rho}' + (\bar{\rho} - \rho)\tau\bar{\tau} + \rho\eth'(\bar{\tau}') - \bar{\rho}\eth(\tau') \tag{3.33}
$$

Platí $A = 0$, neboť lze dokázat $\bar{A}' = 0$, a to poměrně snadno pomocí identit platných v neakcelerovaných prostoročasech. Platnost $A = 0$ je ovšem daleko širší. Začneme od jednoduché rovnice:

$$
(\rho - \bar{\rho})\rho\bar{\rho}' = (\rho - \bar{\rho})\bar{\rho}\rho' \,, \tag{3.34}
$$

platné v každém typu D. Přenásobíme ji dvěma, a odečteme a přičteme několik členů:

$$
\begin{aligned}
(\rho - \bar{\rho})(2(\bar{\rho}\rho' - \rho\bar{\rho}') - \tau\bar{\tau} + \tau\bar{\tau}) = \Psi_2\bar{\rho} - \Psi_2\bar{\rho} + \bar{\Psi}_2\rho - \bar{\Psi}_2\rho + \bar{\rho}\eth(\tau') - \bar{\rho}\eth(\tau') + \\
+ \rho\eth'(\bar{\tau}') - \rho\eth'(\bar{\tau}')
\end{aligned}
\tag{3.35}
$$

Nyní stačí přeuspořádat výslednou rovnici, a dostaneme

$$
\Psi_2\bar{\rho} - \bar{\Psi}_2\rho + 2\rho^2\bar{\rho}' - 2\rho\bar{\rho}\bar{\rho}' + (\bar{\rho} - \rho)\tau\bar{\tau} + \rho\eth'(\bar{\tau}') - \bar{\rho}\eth(\tau') + cc. = 0 \tag{3.36}
$$

neboli $A + \bar{A} = 0$. Řešením takovéto rovnice je samozřejmě i případ, kdy $A = i * B, B \in \mathbb{R}$, takže *nelze* tvrdit, že by $A = 0$ platilo v *každém* prostoročase typu D. Čtenář ale jistě uzná, že už vzhledem k počtu členů, z nichž každý je typicky komplexní, je tato varianta velmi nepravděpodobná.

3.4 Vyjádření v souřadnicích

Geometrické identity odvozené dříve mají v obecné relativitě pevně dané místo, ovšem jejich uplatnění má své limity. Jedná se totiž o identity velmi abstraktní, a navíc zakódované do jazyka GHP formalismu, jehož derivační operátory nelze identifikovat již ani se směrovými derivacemi. Proto nyní provedeme totální překlad $\mathcal{W}$ do parciálních derivací, a to pro prostoročas známý jako C-metrika.

Na úvod se sluší představit tento prostoročas, představující dvojici nabitých, rovnoměrně zrychlených černých děr. Zde se přidržíme Kofroňova článku [17], kde je uvedena následující podoba délkového elementu:

$$\mathbf{d}s^2 = \frac{1}{A^2(x-y)^2}\left(K_\tau^2\mathcal{G}(y)\mathbf{d}\tau^2 - \frac{\mathbf{d}y^2}{\mathcal{G}(y)} + \frac{\mathbf{d}x^2}{\mathcal{G}(x)} + K_\varphi^2\mathcal{G}(x)\mathbf{d}\varphi^2\right), \tag{3.37}$$

kde

$$\mathcal{G}(z) = (1-z^2)(1+Ar_pz)(1+Ar_mz), \tag{3.38}$$

parametr A definuje zrychlení, a konečně $r_{p,m}$ jsou definovány skrz M hmotnost a q náboj coby

$$r_{p,m} = M \pm \sqrt{M^2-q^2}. \tag{3.39}$$

V řeči nulové tetrády je pak prostoročas C-metriky popsán následovně:

$$\begin{aligned}
\mathbf{l} &= -\frac{A^2(x-y)^2}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\mathcal{G}(y)K_\tau}\frac{\partial}{\partial\tau} - \frac{\partial}{\partial y}\right)\\
\mathbf{n} &= -\frac{\mathcal{G}(y)}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\mathcal{G}(y)K_\tau}\frac{\partial}{\partial\tau} - \frac{\partial}{\partial y}\right)\\
\mathbf{m} &= \frac{A(x-y)}{\sqrt{2\mathcal{G}(x)}}\left(-\mathcal{G}(x)\frac{\partial}{\partial x} + \frac{i}{K_\varphi}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right).
\end{aligned} \tag{3.40}$$

Tato tetráda je přizpůsobena hlavním nulovým směrům Weylova tenzoru, takže se těšíme z výhod prostoročasu typu D. Navíc platí $\epsilon = 0$, a nenulové spinové koeficienty tak jsou pouze:

$$\begin{aligned}
\pi &= A\sqrt{\frac{G(x)}{2}}\\
\mu &= \frac{G(y)}{\sqrt{2}(x-y)}\\
\tau &= -\pi\\
\rho &= -\frac{A^2(x-y)}{\sqrt{2}}\\
\gamma &= -\frac{\sqrt{2}}{4}\left[\frac{G(y)}{(x-y)^2}\right]_{,y}(x-y)^2\\
\beta &= -\frac{\sqrt{2}}{4}A(x-y)\left[\sqrt{G(x)}\right]_{,x}\\
\alpha &= \frac{\sqrt{2}}{4}A\left[\frac{\sqrt{G(x)}}{(x-y)^2}\right]_{,x}(x-y)^3,
\end{aligned} \tag{3.41}$$

kdežto jediná nenulová projekce Weylova tenzoru je

$$\Psi_2 = -A^3(x-y)^3(\frac{r_p + r_m}{2} + A r_p r_m (x+y)). \tag{3.42}$$

Rutina zavádění jednotlivých veličin v notebooku Cmetrika - příloze A.11 - je analogická krokům popsaným dříve v jiných noteboocích: napřed spustíme podkladový notebook, poté všechny další potřebné součásti xActu, nadefinujeme potřebné tenzory, skaláry a další objekty a jejich GHP váhy.

Prvním zajímavějším příkazem je "DefChart", ovšem i ten již známe z kapitoly 2, sekce "Základy xActu", stejně jako funkce "metrikator"a "spingen". Jejich jediným účelem zde je vypočíst spinové koeficienty, které jsme uvedli výše (nedokáží to ovšem v tak elegantním tvaru, jaký jsme citovali).

Poté, co spingen vypočte všechny potřebné veličiny a my je uložíme do pravidla nazvaného "pravidloC", následuje teprve hlavní součást notebooku. Je totiž nutné spojit báze označené jako "NP" a "Cmetric", aby xAct dokázal převést NP derivace na parciální derivace v jiné bázi.

K tomu stačí vypsat vztahy jednotlivých bázových vektorů k sobě navzájem, a pomocí několika příkazů "vysvětlit", že hodláme nahrazovat jednu bázi za druhou. Následně se můžeme přesvědčit, že nulová tetráda je již ve svých kovariantních složkách správně nadefinována.

Zbývá již jen po složkách nadefinovat tetrádu kontravariantní, a můžeme se pustit do vlastní kontroly. Vzhledem k tomu, že nyní potřebujeme pracovat přímo se směrovými derivacemi, bude nutné přesunout se zpět do NP formalismu. Na místě je také několik dalších definic pro přehlednost, což se týká zejména perturbovaných veličin.

Prvním zajímavým výsledkem v tomto notebooku je již VelkeV. Jedná se o operátor $\mathcal{V}$ aplikovaný na χ tak, aby vynikla jeho podoba. Ta je překvapivě

$$\frac{A^5(x-y)^4}{2K_\varphi K_\tau}(r_p + r_m + 2r_p r_m A(x+y))\left(K_\varphi \frac{\partial \chi}{\partial t} + iK_\tau \frac{\partial \chi}{\partial \phi}\right). \tag{3.43}$$

Zdůrazněme význam tohoto výsledku: $\mathcal{V}$ je komutující operátor, tedy by tato kombinace parciálních derivací měla komutovat s libovolným GHP operátorem.

Pokračujme ale k hlavní části výpočtu. Příznačně pojmenované strany "leva" a "prava" snad není třeba dále vysvětlovat. Ačkoli finálním cílem je "překlad" všech členů do souřadnicového vyjádření, musíme mít na paměti, že před zjednodušením se zde budou vyskytovat statisíce členů. Je proto nejen užitečné, ale přímo nezbytné co nejvíc zjednodušit úkol kladený před Mathematicu.

Můžeme si například všimnout, že velmi málo přítomných členů je úměrných $\bar{\chi}$, ačkoli se zde vyskytuje až osmkrát zderivované. Nemělo by proto být těžké geometricky dokázat, že tyto členy se vyruší navzájem, kdežto vůbec "překlad" těchto výrazů do NP formalismu by zabral drahocenný čas.

Užijeme tedy jednoduchého triku: nahradíme $\bar{\chi}$ za $konst * \bar{\chi}$, a zderivujeme výsledek podle *konst*. Tím se dostaneme k výrazu "komplex", který následně aplikací komutátorů a Ricciho a vakuových identit zredukujeme až do triviálna. Vidíme tedy, že vskutku můžeme v původním výrazu bez újmy na obecnosti položit $\bar{\chi} = 0$.

Naše snaha o zkrácení výpočetního času ještě ovšem skončit nemůže. Napřed použijeme komutátory a srovnáme všechny derivace do stejného pořadí, načež vše dále zjednodušíme pomocí Bianchiho a Ricciho identit a vakuových identit.

Výraz "celek" je poté ekvivalentním přepisem (3.32), kde jsme obě strany přenásobili $\Psi_2^{\frac{4}{3}}$, což odstraní nežádoucí třetinové mocniny tohoto koeficientu, s nimiž je jinak těžké si poradit. Na tento výraz ještě povoláme komutátory a další identity.

Tím dospějeme ke trojřádkovému výrazu, v němž χ vystupuje pouze derivováno pomocí $þ'$. Je tak jasné, že závorky před jednotlivými členy se musí vynulovat, má-li výsledný výraz být roven nule.

Nezávisle na sobě tedy můžeme postupně tři zmíněné závorky převést do NP formalismu, a to včetně derivací. Poté zbývá převést zpět NP koeficienty do GHP formalismu, a dosadit za všechny přítomné veličiny pomocí "pravidloC" a "funcC"až na úroveň souřadnicových skalárů v základních směrech. Vidíme, že ani po maximálním zjednodušení není žádný z výsledků nula.

Neznamená to ovšem, že bychom neuspěli. Vzpomeňme, že článek Deadmana a Stewarta [11] pracuje s předpokladem *vakuového* prostoročasu, zatímco nabitá C-metrika takovým prostoročasem ve vší obecnosti není. Pro splnění podmínek, kterými jsme svázáni, je nutno položit $q = 0$, načež již je vše splněno.

Pro ještě důkladnější kontrolu nyní užijeme zobecněnou verzi C-metriky, rotující C-metriku. Její délkový element je dle Kofroně [18]:

$$\begin{aligned}\mathbf{d}s^2 = \frac{B^2}{A^2(x-y)^2}\Bigg\{&\frac{\mathcal{G}(y)}{1+(aAxy)^2}\Big[(1+(aAx)^2)K_\tau\,\mathbf{d}\tau + aA(1-x^2)K_\varphi\,\mathbf{d}\varphi\Big]^2\\ &-\frac{1+(aAxy)^2}{\mathcal{G}(y)}\,\mathbf{d}y^2 + \frac{1+(aAxy)^2}{\mathcal{G}(x)}\,\mathbf{d}x^2\\ &+\frac{\mathcal{G}(x)}{1+(aAxy)^2}\Big[(1+(aAy)^2)K_\varphi\,\mathbf{d}\phi - aA(1-y^2)K_\tau\,\mathbf{d}\tau\Big]^2\Bigg\}, \end{aligned} \tag{3.44}$$

přičemž definice $\mathcal{G}$ zůstala stejná, ovšem

$$r_{p,m} = M \pm \sqrt{M^2 - q^2 - a^2}, \tag{3.45}$$

kde nový parametr a je spojen s rotací, zatímco B je konstantní konformní faktor. Nulová tetráda nyní vypadá následovně:

$$\begin{aligned}\mathbf{l} &= -\left[\left(1+a^2A^2x^2\right)K_\tau\,\mathbf{d}\tau + \frac{1}{\mathcal{H}(y)}\,\mathbf{d}y + aA(1-x^2)K_\varphi\,\mathbf{d}\varphi\right],\\ \mathbf{n} &= \frac{\Omega^2}{2}\,\mathcal{H}(y)\left[(1+a^2A^2x^2)K_\tau\,d\tau - \frac{1}{\mathcal{H}(y)}\,dy + aA(1-x^2)K_\varphi\,d\varphi\right],\\ \mathbf{m} &= \frac{\Omega}{\sqrt{2}}\sqrt{\mathcal{H}(x)}\left[-aA(1-y^2)K_\tau\,d\tau + i\,\frac{1}{\mathcal{H}(x)}\,dx + (1+a^2A^2y^2)K_\varphi\,d\varphi\right]\end{aligned} \tag{3.46}$$

Je také nutné představit pomocné funkce:

$$\mathcal{H}(z) = \frac{\mathcal{G}(z)}{1+(aAxy)^2} \tag{3.47}$$

a

$$\Omega = \frac{B}{A(x-y)} \tag{3.48}$$

I tento prostoročas je typu D, ovšem je podstatně složitější, a proto není divu, že i nenulových spinových koeficientů přibylo. Jejich výpis následuje:

$$\begin{aligned}
\pi &= \frac{A}{\sqrt{2}B}\frac{(1+iaAxy)(1-iaAy^2)\sqrt{\mathcal{G}(x)}}{\sqrt{(1+(aAxy)^2)^3}}\\
\mu &= -\frac{A}{\sqrt{2}B}\frac{(1+iaAxy)(1-iaAx^2)\sqrt{-\mathcal{G}(y)}}{\sqrt{(1+(aAxy)^2)^3}}\\
\tau &= -\pi\\
\rho &= \mu\\
\gamma &= \frac{A}{4\sqrt{2}B}\frac{(1-iaAxy)^2(x-y)^3}{\sqrt{-(1+(aAxy)^2)\mathcal{G}(y)}}\left[\frac{-\mathcal{G}(y)}{(1-iaAxy)^2(x-y)^2}\right]_{,y}\\
\epsilon &= \gamma\\
\beta &= \frac{-A}{4\sqrt{2}B}\frac{(1-iaAxy)^2(x-y)^3}{\sqrt{(1+(aAxy)^2)\mathcal{G}(x)}}\left[\frac{-\mathcal{G}(x)}{(1-iaAxy)^2(x-y)^2}\right]_{,x}\\
\alpha &= -\beta
\end{aligned} \tag{3.49}$$

Pochopitelně je nenulové také Ψ_2, a jeho vyjádření v souřadnicích zní:

$$\Psi_2 = \frac{A^2(x-y)^2}{12B^2}\frac{(1-iaAxy)^3}{(1+(aAxy)^2)}\left\{\left[\frac{\mathcal{G}(x)}{(1-iaAxy)^3}\right]_{,xx} - \left[\frac{\mathcal{G}(y)}{(1-iaAxy)^3}\right]_{,yy}\right\}. \tag{3.50}$$

Se všemi veličinami na místě se můžeme znovu pustit do kontroly. Ta je nyní zjednodušena tím, že můžeme bez obav převzít výsledky z předchozí sekce, pokud jsme k jejich odvození nepotřebovali konkrétní vyjádření v souřadnicích. Problém ovšem nastává u třetí závorky.

Z jejího znění je jasné proč: vyskytuje se zde čtvrtá derivace $(þ')^4[\rho]$, a její překlad do NP formalismu vede na výraz o mnoha členech. Jakkoli by dostatečně silný hardware tento problém překonal, my si musíme pomoci další geometrickou identitou:

$$þ'\rho = ð'\tau - \Psi_2 + \bar{\rho}'\rho - \tau\bar{\tau} \tag{3.51}$$

Ta nám pomůže, jelikož můžeme následně překomutovat pořadí derivací, a $þ'\tau$ již lze zjednodušit pomocí Ricciho identit. Postup opakujeme ještě se třetími derivacemi, opět abychom ušetřili co nejvíce výpočetního času. Nakonec dospějeme ke mnohem méně čitelnému výsledku, ovšem stejně jako v předchozím případě stačí položit $q = 0$ a vše zjednodušit.

Závěry

NP a GHP formalismy již pomohly nejednomu autorovi se zvládnutím obtížného úkolu práce s Einsteinovými rovnicemi. Daní za to je jejich složitost. Trvalo proto jistou dobu, než se autorovi těchto řádků podařilo do nich proniknout. Jakkoli výstupy práce lze v Mathematice zkontrolovat během desítek minut, na jejich tvorbu padly desítky hodin.

Dalším nevděčným rysem tématu práce je snaha o opravu cizích chyb. Podaří-li se vám je najít, můžete nanejvýš konstatovat, jak málo se původní kontrolované dílo lišilo od správné formy. Potvrdíte-li správnost původní práce, pak jako by vaše vlastní snaha pozbyla smyslu.

I proto se druhá část výsledků zaměřuje na Teukolského-Starobinského identity, které jsou samy o sobě jedním z nejzásadnějších, ale také nejkomplexnějších výsledků dosavadního bádání. Potvrzuje se, že platí i mimo neakcelerované prostoročasy, byť jejich podobu bylo nutné pozměnit.

Je to právě podoba operátoru $\mathcal{W}$, která si zaslouží nejvíce pozornosti. Nadále ji proto upravujeme a prověřujeme pomocí našich softwarových nástrojů. Jelikož ovšem nepracujeme se spinorovým kalkulem, schází v této práci potvrzení (či vyvrácení) role $\mathcal{W}$ coby komutujícího operátoru ve vakuových prostoročasech. Ověření této skutečnosti tak necháváme na případné práce budoucí.

Literatura

[1] Ezra Newman; Roger Penrose. An Approach to Gravitational Radiation by a Method of Spin Coefficients. *Journal of mathematical physics*, 1961.

[2] Saul A. Teukolsky. Perturbations of a rotating black hole I. *The Astrophysical Journal*, 1973.

[3] William Morris Kinnersley. *Type D gravitational fields.* PhD thesis, California Institute of Technology, 1969.

[4] R. Geroch; A.Held; R.Penrose. A space-time calculus based on pairs of null directions. *Journal of Mathematical Physics 14, 874*, 1973.

[5] José M. Martín-García. xAct: Efficient tensor computer algebra for the Wolfram Language.

[6] Robert M. Wald. *General relativity.* The University of Chicago Press, 1984.

[7] S. Chandrasekhar. *The Mathematical Theory of Black Holes.* Oxford University Press, 1983.

[8] Larry. R. Price. *Developments in the perturbation theory of algebraically special spacetimes.* PhD thesis, University of Florida, 2007.

[9] Wytler Cordeiro dos Santos. Bivectors in Newman-Penrose formalism in General Relativity – from electromagnetism to Weyl curvature tensor.

[10] John M. Stewart; M. Walker. Perturbations of space-times in general relativity. *Proceedings of the Royal Society*, 1974.

[11] E Deadman and J M Stewart. Linearized perturbations of the Kerr spacetime and outer boundary conditions in numerical relativity. *Classical and Quantum Gravity*, 28(1):015003, dec 2010.

[12] S. Chandrasekhar. *The Mathematical Theory of Black Holes.* Oxford University Press, 1983.

[13] Saul A. Teukolsky; William H. Press. Perturbations of a rotating black hole. III. Interaction of the hole with gravitational and electromagnetic radiation. *The Astrophysical Journal*, 1974.

[14] A. García-Parrado Gómez-Lobo S. Brian Edgar and J. M. Martín García. Petrov D vacuum spaces revisited: Identities and Invariant Classification.

[15] David Kofroň. Point particles and Appell's solutions on the axis of a Kerr black hole for an arbitrary spin in terms of the Debye potentials. *Physical Review D*, 2020.

[16] Alfonso García-Parrado Gómez-Lobo. The N.P. and G.H.P. formalisms.

[17] David Kofroň. Separability of test fields equations on the C-metric background. *Physical review D*, 2015.

[18] David Kofroň. Separability of test fields equations on the C-metric background ii. *Physical review D*, 2016.

A. Přílohy

A.1 Newman-Penroseovy rovnice

$$
\begin{aligned}
D\rho - \bar{\delta}\kappa &= \rho^2 + \sigma\bar{\sigma} + (\epsilon + \bar{\epsilon})\rho - \bar{\kappa}\tau - (3\alpha + \bar{\beta} - \pi)\kappa + \Phi_{00}\,, && \text{(A.1)}\\
D\sigma - \delta\kappa &= (\rho + \bar{\rho} + 3\epsilon - \bar{\epsilon})\sigma - (\tau - \bar{\pi} + \bar{\alpha} + 3\beta)\kappa + \Psi_0\,, && \text{(A.2)}\\
D\tau - \Delta\kappa &= (\tau + \bar{\pi})\rho + (\bar{\tau} + \pi)\sigma + (\epsilon + \bar{\epsilon})\tau - (3\gamma + \bar{\gamma})\kappa + \Psi_1 + \Phi_{01}\,, && \text{(A.3)}\\
D\alpha - \bar{\delta}\epsilon &= (\rho - 2\epsilon + \bar{\epsilon})\alpha + \beta\bar{\sigma} - \bar{\beta}\epsilon - \kappa\lambda - \bar{\kappa}\gamma + (\epsilon + \rho)\pi + \Phi_{10}\,, && \text{(A.4)}\\
D\beta - \delta\epsilon &= (\alpha + \pi)\sigma + (\bar{\rho} - \bar{\epsilon})\beta - (\mu + \gamma)\kappa - (\bar{\alpha} - \bar{\pi})\epsilon + \Psi_1\,, && \text{(A.5)}\\
D\gamma - \Delta\epsilon &= (\tau + \bar{\pi})\alpha + (\bar{\tau} + \pi)\beta - (\epsilon + \bar{\epsilon})\gamma - (\gamma + \bar{\gamma})\epsilon + \tau\pi - \nu\kappa && \text{(A.6)}\\
&\quad + \Psi_2 - \Lambda + \Phi_{11}\,, && \text{(A.7)}\\
D\lambda - \bar{\delta}\pi &= \rho\lambda + \bar{\sigma}\mu + \pi^2 - (\alpha - \bar{\beta})\pi - \nu\bar{\kappa} - (3\epsilon - \bar{\epsilon})\lambda + \Phi_{20}\,, && \text{(A.8)}\\
D\mu - \delta\pi &= \bar{\rho}\mu + \sigma\lambda + \pi\bar{\pi} - (\epsilon + \bar{\epsilon})\mu - \pi(\bar{\alpha} - \beta) - \nu\kappa + \Psi_2 + 2\Lambda\,, && \text{(A.9)}\\
D\nu - \Delta\pi &= (\pi + \bar{\tau})\mu + (\bar{\pi} + \tau)\lambda + (\gamma - \bar{\gamma})\pi - (3\epsilon + \bar{\epsilon})\nu + \Psi_3 + \Phi_{21}\,, && \text{(A.10)}\\
\Delta\lambda - \bar{\delta}\nu &= (3\alpha + \bar{\beta} + \pi - \bar{\tau})\nu - (\mu + \bar{\mu} + 3\gamma - \bar{\gamma})\lambda - \Psi_4 && \text{(A.11)}\\
\delta\rho - \bar{\delta}\sigma &= (\bar{\alpha} + \beta)\rho - (3\alpha - \bar{\beta})\sigma + (\rho - \bar{\rho})\tau + (\mu - \bar{\mu})\kappa - \Psi_1 + \Phi_{01}\,, && \text{(A.12)}\\
\delta\alpha - \bar{\delta}\beta &= \mu\rho - \lambda\sigma + \alpha\bar{\alpha} + \beta\bar{\beta} - 2\alpha\beta + (\rho - \bar{\rho})\gamma + (\mu - \bar{\mu})\epsilon && \text{(A.13)}\\
&\quad - \Psi_2 + \Lambda + \Phi_{11}\,, && \text{(A.14)}\\
\delta\lambda - \bar{\delta}\mu &= (\rho - \bar{\rho})\nu + (\mu - \bar{\mu})\pi + (\alpha + \bar{\beta})\mu + (\bar{\alpha} - 3\beta)\lambda - \Psi_3 + \Phi_{21}\,, && \text{(A.15)}\\
\delta\nu - \Delta\mu &= \mu^2 + \lambda\bar{\lambda} + (\gamma + \bar{\gamma})\mu - \bar{\nu}\pi + (\tau - 3\beta - \bar{\alpha})\nu + \Phi_{22}\,, && \text{(A.16)}\\
\delta\gamma - \Delta\beta &= (\tau - \bar{\alpha} - \beta)\gamma + \mu\tau - \sigma\nu - \epsilon\bar{\nu} - (\gamma - \bar{\gamma} - \mu)\beta + \alpha\bar{\lambda} + \Phi_{12}\,, && \text{(A.17)}\\
\delta\tau - \Delta\sigma &= \mu\sigma + \rho\bar{\lambda} + \tau^2 + (\beta - \bar{\alpha})\tau - (3\gamma - \bar{\gamma})\sigma - \kappa\bar{\nu} + \Phi_{02}\,, && \text{(A.18)}\\
\Delta\rho - \bar{\delta}\tau &= (\bar{\beta} - \alpha - \bar{\tau})\tau - \rho\bar{\mu} - \sigma\lambda + (\gamma + \bar{\gamma})\rho + \nu\kappa - \Psi_2 - 2\Lambda\,, && \text{(A.19)}\\
\Delta\alpha - \bar{\delta}\gamma &= (\rho + \epsilon)\nu - (\tau + \beta)\lambda + (\bar{\gamma} - \bar{\mu})\alpha + (\bar{\beta} - \bar{\tau})\gamma - \Psi_3\,. && \text{(A.20)}
\end{aligned}
$$

A.2 Komutační relace NP formalismu

$$
\begin{aligned}
(\Delta D - D\Delta)\chi &= [(\gamma + \bar{\gamma})D + (\epsilon + \bar{\epsilon})\Delta - (\bar{\tau} + \pi)\delta - (\tau + \bar{\pi})\bar{\delta}]\chi\,, && \text{(A.21)}\\
(\delta D - D\delta)\chi &= [(\bar{\alpha} + \beta - \bar{\pi})D + \kappa\Delta - (\bar{\rho} + \epsilon - \bar{\epsilon})\delta - \sigma\bar{\delta}]\chi\,, && \text{(A.22)}\\
(\delta\Delta - \Delta\delta)\chi &= [-\bar{\nu}D + (\tau - \bar{\alpha} - \beta)\Delta + (\mu - \gamma + \bar{\gamma})\delta + \bar{\lambda}\bar{\delta}]\chi\,, && \text{(A.23)}\\
(\bar{\delta}\delta - \delta\bar{\delta})\chi &= [(\bar{\mu} - \mu)D + (\bar{\rho} - \rho)\Delta - (\bar{\beta} - \alpha)\delta - (\bar{\alpha} - \beta)\bar{\delta}]\chi\,. && \text{(A.24)}
\end{aligned}
$$

A.3 Ricciho identity v GHP formalismu

$$
\begin{aligned}
\eth\rho - \eth'\sigma &= (\rho-\bar\rho)\tau + (\bar\rho' - \rho')\kappa - \Psi_1 + \Phi_{01}\,, && \text{(A.25)}\\
þ\rho - \eth'\kappa &= \rho^2 + \sigma\bar\sigma - \bar\kappa\tau - \tau'\kappa + \Phi_{00} && \text{(A.26)}\\
þ\sigma - \eth\kappa &= (\rho+\bar\rho)\sigma - (\tau+\bar\tau')\kappa + \Psi_0\,, && \text{(A.27)}\\
þ\tau - þ'\kappa &= (\tau-\bar\tau')\rho + (\bar\tau-\tau')\sigma + \Psi_1 + \Phi_{01}\,, && \text{(A.28)}\\
\eth\tau - þ'\sigma &= \tau^2 - \rho'\sigma - \bar\sigma'\rho + \kappa\bar\kappa' + \Phi_{02} && \text{(A.29)}\\
þ'\rho - \eth'\tau &= \rho\bar\rho' + \sigma\sigma' - \tau\bar\tau - \kappa\kappa' - \Psi_2 - 2\Lambda\,. && \text{(A.30)}
\end{aligned}
$$

Zbývající rovnice lze získat z těchto pomocí operace $'$ a $\bar{}$.

A.4 Komutační relace GHP formalismu

Nechť χ je typu $\{p,q\}$. Pak:

$$
\begin{aligned}
(þþ' - þ'þ)\chi &= [(\bar\tau-\tau')\eth + (\tau-\bar\tau')\eth' - p(\kappa\kappa' - \tau\tau' + \Psi_2 + \Phi_{11} - \Lambda) -\\
&\quad - q(\bar\sigma'\bar\kappa - \bar\rho\bar\tau' + \Phi_{01})]\chi\\
(þ\eth - \eth þ)\chi &= [-\bar\tau' þ - \kappa þ' + \bar\rho\eth + \sigma\eth' - p(\rho'\kappa - \tau'\sigma + \Psi_1) -\\
&\quad - q(\bar\sigma'\bar\kappa - \bar\rho\bar\tau' + \Phi_{01})]\chi\\
(\eth\eth' - \eth'\eth)\chi &= [(\bar\rho' - \rho')þ + (\rho-\bar\rho)þ' + p(\rho\rho' - \sigma\sigma' + \Psi_2 - \Phi_{11} - \Lambda) -\\
&\quad - q(\bar\rho\bar\rho' - \bar\sigma\bar\sigma' + \Psi_2 - \Phi_{11} - \Lambda)]\chi,
\end{aligned}
\tag{A.31}
$$

přičemž i tentokrát lze ostatní komutátory získat z těchto pomocí operací $'$ a $\bar{}$.

A.5 Vakuové a neakcelerované GHP identity

Nechť $R_{\mu\nu} = 0$. V řeči GHP formalismu se tento fakt projeví platností následujících rovnic:

$$
\begin{aligned}
\tau\bar\tau &= \tau'\bar{\tau}'\\
\rho\bar\rho' &= \bar\rho\rho'\\
þ'\tau &= \rho'(2\tau - \bar\tau') - \tau\bar\rho'\\
\eth'\rho &= \tau'(2\rho - \bar\rho) - \rho\bar\tau
\end{aligned}
\tag{A.32}
$$

Zatímco první dvě rovnice se při aplikaci $'$ ani $\bar{}$ nezmění, aplikací těchto operací na zbylé dvě získáme rovnice pro zbylé GHP koeficienty.

Specializujeme-li se na neakcelerované prostoročasy, poté platí:

$$
\begin{aligned}
\tau\bar\tau &= \tau'\bar{\tau}' = \rho\bar\rho' = \bar\rho\rho'\\
þ'\rho &= \rho\rho' + \tau'(\tau - \bar\tau') - \frac{1}{2}\Psi_2 - \frac{\rho}{2\bar\rho}\bar\Psi_2\\
\eth'\tau &= \tau\tau' + \rho(\rho' - \bar\rho') + \frac{1}{2}\Psi_2 - \frac{\rho}{2\bar\rho}\bar\Psi_2
\end{aligned}
\tag{A.33}
$$

A.6 Bianchiho identity

Jelikož jejich podoba je v GHP formalismu nejstručnější, uvedeme je právě takto. Navíc ještě budeme předpokládat vakuový podkladový prostoročas. Poté se zjednoduší na:

$$\begin{aligned} \text{þ}\Psi_1 - \eth'\Psi_0 &= -\tau'\Psi_0 + 4\rho\Psi_1 - 3\kappa\Psi_2 \\ \text{þ}\Psi_2 - \eth'\Psi_1 &= \sigma'\Psi_0 - 2\tau'\Psi_1 + 3\rho\Psi_2 - 2\kappa\Psi_3 \\ \text{þ}\Psi_3 - \eth'\Psi_2 &= 2\sigma'\Psi_1 - 3\tau'\Psi_2 + 2\rho\Psi_3 - \kappa\Psi_4 \\ \text{þ}\Psi_4 - \eth'\Psi_3 &= 3\sigma'\Psi_2 - 4\tau'\Psi_3 + \rho\Psi_4 \end{aligned} \tag{A.34}$$

a dodatečné 4 rovnice získané aplikací $'$ na předchozí čtveřici. V prostoročase typu D zbydou pouze tyto netriviální rovnice:

$$\begin{aligned} \text{þ}\Psi_2 &= 3\rho\Psi_2 \\ \text{þ}'\Psi_2 &= 3\rho'\Psi_2 \\ \eth\Psi_2 &= 3\tau\Psi_2 \\ \eth'\Psi_2 &= 3\tau'\Psi_2 \end{aligned} \tag{A.35}$$

A.7 Výpočet spinových koeficientů - Mathematica notebook

A.8 Podkladový notebook - Mathematica notebook

A.9 Perturbace - Mathematica notebook

A.10 Důkaz TSI - Mathematica notebook

A.11 Cmetrika - Mathematica notebook