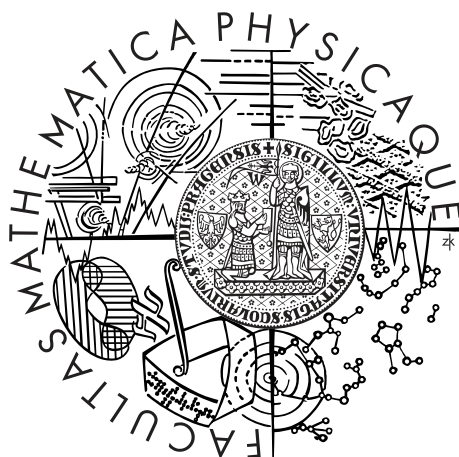


Univerzita Karlova v Praze  
Matematicko-fyzikální fakulta

## BAKALÁŘSKÁ PRÁCE



David Holý

## Zavedení vektorového součinu

Katedra didaktiky matematiky

Vedoucí bakalářské práce: Mgr. Zdeněk Halas, DiS., Ph.D.

Studijní program: Fyzika se zaměřením na vzdělávání

Studijní obor: Fyzika se zaměřením na vzdělávání  
se sdruženým studiem  
Matematika se zaměřením na vzdělávání

Praha 2022

Rád bych poděkoval Mgr. Zdeňku Halasovi, DiS., PhD. za vstřícný přístup při konzultacích, které byly pro vypracování této práce nesmírně podnětné. Zároveň také vyjadřuji dík svým blízkým a přátelům, kteří mě podporovali a poskytovali mi nesmírnou motivaci a inspiraci.

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval(a) samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova v Praze má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V ..... dne .....

Podpis autora

Název práce: Zavedení vektorového součinu

Autor: David Holý

Katedra: Katedra didaktiky matematiky

Vedoucí bakalářské práce: Mgr. Zdeněk Halas, DiS., Ph.D., Katedra didaktiky matematiky

Abstrakt: Práce je zaměřena na dobře motivované zavedení vektorového součinu a vysvětlení jeho vlastností. Na jednoduchých fyzikálních příkladech je studován moment síly jakožto veličina popisující „otáčivý účinek síly“, s jejíž pomocí jsou postupným rozbořením a úvahami odhaleny vlastnosti, které pak vektorový součin definují. V práci jsou odvozeny souřadnice vektorového součinu vzhledem ke kartézské bázi. Práce zároveň obsahuje přehled jeho základních vlastností a aplikací. Konkrétním příkladem je pak Lorentzova síla, která je podrobně rozebrána. Na závěr je pak představen pojem rotace vektorového pole, který je konceptuálně vysvětlen. Práce je zaměřena na didakticky správné předložení vektorového součinu, konkrétní ukázkou jeho praktických aplikací a představení jeho souvislostí s pokročilejší matematickou látkou.

Klíčová slova: vektorový součin, moment síly, Lorentzova síla, vektorové pole, rotace

Title: Definition of vector product

Author: David Holý

Department: Department of Mathematics Education

Supervisor: Mgr. Zdeněk Halas, DiS., Ph.D., Department of Mathematics Education

Abstract: The main goal of this thesis is to present a compelling and well-motivated definition of the vector product and to explain its properties. Torque serves as a medium through which "the rotating effect of force" is studied on simple physical examples. Elaboration leads to revealing essential properties that define the vector product. The thesis contains the derivation of Cartesian coordinates of the vector product. It also contains a list of its basic mathematical properties and applications. Lorentz force is presented as a concrete example of its application and is thoroughly analyzed. In the closing section, the term curl of a vector field is introduced and conceptually explained. The thesis was focused on bringing a good didactic presentation of a vector product, its concrete applications in practice, and its connection to more advanced fields of mathematical inquiry.

Keywords: vector product, cross product, torque, Lorentz force, vector field, curl

# Obsah

Úvod	3
<b>1 Fyzikální motivace</b>	<b>5</b>
1.1 Moment síly	5
1.1.1 Rovnováha na houpačce	6
1.1.2 Když síla nepůsobí kolmo	9
1.1.3 Geometrická interpretace – obsah rovnoběžníku	10
1.1.4 Směr otáčení - hledáme vhodný vektor	11
1.1.5 Orientace momentu síly a tvorba báze	12
1.2 Shrnutí a definice vektorového součinu	13
1.2.1 Schéma postupu odvození	13
1.2.2 Definice	13
1.2.3 Proč název vektorový součin?	14
<b>2 Souřadnice vektorového součinu</b>	<b>17</b>
2.1 Hledáme souřadnice vůči kartézské bázi	17
2.2 Jak by se měl vektorový součin chovat vůči násobení skalárem?	18
2.3 Vektorový součin kartézských bázevých vektorů	20
2.3.1 Mnemotechnická pomůcka výpočtu souřadnic	21
2.3.2 Zmínka o determinantu	21
<b>3 Vlastnosti vektorového součinu</b>	<b>22</b>
3.1 Algebraické vlastnosti vektorového součinu	22
3.1.1 Distributivita vůči sčítání vektorů	22
3.1.2 Asociativita vůči násobení skalárem	23
3.1.3 Antikomutativita	23
3.1.4 Vektorový součin není asociativní vůči vektorovému násobení!	23
3.2 Matematické aplikace	24
3.2.1 Rovnoběžnost vektorů	24
3.2.2 Obsah trojúhelníku	24
3.2.3 Normálový vektor k rovině	25
3.3 Formalismus Levi-Civitova symbolu	25
3.3.1 Důkazy vlastností vektorového součinu pomocí Levi-Civitova symbolu	26
<b>4 Aplikace - Lorentzova síla</b>	<b>27</b>
4.1 Nabitá částice v homogenním mag. poli	28
4.1.1 Kolmost síly $\vec{F}$ na $\vec{v}$ , $\vec{B}$	28
4.1.2 Orientace síly $\vec{F}$	30

4.1.3	Velikost síly $\vec{F}$ . . . . .	31
4.1.4	Shrnutí . . . . .	32
4.2	Nabitá částice v nehomogenním poli . . . . .	33
4.2.1	Poznámka pro zájemce: magnetické stínění . . . . .	33
<b>5</b>	<b>Rotace vektorového pole</b>	<b>34</b>
5.1	Vektorové pole vektorové proměnné . . . . .	34
5.1.1	Konzervativní pole a potenciál . . . . .	35
5.2	Motivace pojmu rotace vektorového pole . . . . .	37
5.3	Matematický popis rotace vektorového pole . . . . .	38
5.3.1	Rotace ve 2D . . . . .	38
5.3.2	Rotace ve 3D . . . . .	39
5.4	Nuance a příklady rotace vektorového pole . . . . .	41
5.4.1	Nevířivé pole s makroskopickou rotací . . . . .	41
5.4.2	Pole s opačnou rotací směru makroskopického otáčení . . . . .	42
5.4.3	Pole s nenulovou rotací, jehož proudnice jsou přímky . . . . .	42
5.5	Aplikace rotace vektorového pole . . . . .	43
5.5.1	Maxwellovy rovnice . . . . .	43
	<b>Závěr</b>	<b>45</b>
	<b>Literatura</b>	<b>46</b>
	<b>Seznam obrázků</b>	<b>48</b>

# Úvod

V této bakalářské práci se zaměříme na dobře motivované zavedení vektorového součinu, přičemž budeme klást důraz na srozumitelnost a přímočarost výkladu.

V mnoha středoškolských učebnicích<sup>1</sup> se lze dočíst korektní definici:

Vektorový součin dvou vektorů, které leží na jedné přímce, je nulový vektor. Vektorový součin dvou vektorů  $\vec{u}, \vec{v}$ , které neleží na jedné přímce, je vektor  $\vec{w}$ , který má tyto vlastnosti:

1.  $\vec{w}$  je kolmý k oběma vektorům  $\vec{u}, \vec{v}$ ;
2. vektory  $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$  tvoří pravotočivou bázi
3. jeho velikost je rovna obsahu rovnoběžníku, který je určen vektory  $\vec{u}, \vec{v}$ :  
 $|\vec{w}| = |\vec{u}||\vec{v}| \sin \alpha$ , kde  $\alpha$  je úhel vektorů  $\vec{u}, \vec{v}$ .

V již zmíněných učebnicích se pak dozvíme jeho vlastnosti, souřadnice vůči kartézské bázi a případně pouhou zmínku o jeho aplikacích. Konkrétně v středoškolské učebnici analytické geometrie (Kočandrle a Boček, 1998) se na str. 57 uvádí: „Tak, jako skalární součin, má i vektorový součin četné aplikace ve fyzice.“ Nezbyvá však místo pro kvalitní motivaci a příklady jeho aplikací v praxi. Žáci se pak mohou ptát — a oprávněně — proč něco takového zavádět a k čemu jim to bude?

Proto při motivaci vektorového součinu budeme vycházet z vhodně zvolených, ale jednoduchých fyzikálních příkladů. Na základě komentovaných úvah a pozorování pak dospějeme k vlastnostem definující vektorový součin.

V podobném duchu odvodíme souřadnice vektorového součinu vůči kartézské bázi, přičemž při jednotlivých krocích výpočtů dojdeme k dalším vlastnostem vektorového součinu. Ty pak přehledně uspořádáme a řádně dokážeme. Ukážeme si i velmi efektivní a elegantní formu zápisu vektorového součinu pomocí Levi-Civita symbolu, díky němuž se podstatně zkrátí důkazy vlastností vektorového součinu.

Ukážeme si konkrétní fyzikální příklad aplikace vektorového součinu, který vystupuje v definici Lorentzovy síly – síly ovlivňující pohyb nabitých částic v elektromagnetických polích. Pro doplnění si kvalitativně ukážeme i její praktické důsledky.

Na závěr se seznámíme s pojmem rotace vektorového pole. K němu dospějeme na základě vhodného souboru pozorování a příkladů. Cílem je poskytnout čtenáři konceptuální vysvětlení této problematiky, seznámit jej s danou terminologií a poukázat na souvislost s vektorovým součinem. Důraz je kladen na přístupnost, tedy aby základní ideu pochopil i čtenář vektorové analýzy neznalý. Na úplném konci toto povídání zakončíme zmíněním Maxwellových rovnic a jejich souvislostí se středoškolskou látkou.

---

<sup>1</sup>Např. Polák (2008), či Kočandrle a Boček (1998)

Práce je uspořádána tak, že její obtížnost s rostoucími kapitolami roste.

Kapitola 1. je psána tak, aby vektorový součin pochopil i student prvního ročníku střední školy.

Následující kapitoly 2. a 3. jsou pak určeny čtenáři seznámenému se základy analytické geometrie, tedy obvykle studentu druhého či třetího ročníku gymnázia.

Kapitola 4. pak staví na kapitolách předchozích, kde se získané znalosti aplikují.

Kapitola 5. je pak nad rámec středoškolských znalostí. Její obsah je primárně určen pro maturanty a studenty prvního ročníku technicky zaměřených vysokých škol, kdy se se základními pojmy vektorové analýzy seznamují.

Práce je také určena učitelům matematiky a fyziky, kterým poskytuje jiný pohled na problematiku vektorového součinu.

Z didaktického hlediska bylo cílem dosáhnout dobré míry čtivosti a zřetelnosti, z toho důvodu je práce psána přístupným, místy až neformálním jazykem. Volba jazyka je však přiměřena obsahu kapitol. Důraz je kladen na pochopení a aplikaci získaných znalostí. Proto je práce dále doplněna spoustou poznámek pod čarou, které jsou vysvětlujícího, popisného, či jiného doplňujícího a rozšiřujícího charakteru.

Stručně řečeno, pokud čtenář nabyde dojmu, že je tento text moc jednoduchý až triviální, pak naplnil svůj účel.



# Kapitola 1

## Fyzikální motivace

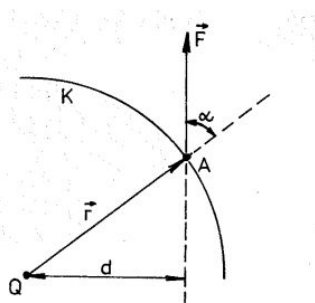
### 1.1 Moment síly

Jako motivaci k zavedení vektorového součinu použijeme moment síly. Je to vektor, který je v učebnici mechaniky (viz Kvasnica, 1988) definován takto:

---

„Mějme například bod  $A$ , který se pohybuje po kružnici  $K$  a působí na něj síla  $\vec{F}$  (obrázek 1.1). *Moment síly* vzhledem k bodu  $Q$  je definován vztahem:

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$



Obrázek 1.1: Zavedení momentu síly

Jeho velikost je  $M = rF \sin \alpha$ , směr a smysl je dán pravidly vektorového součinu.“

---

Poté následuje odkaz na matematický dodatek na konci knihy, kde je vektorový součin definován a jsou vypsány jeho vlastnosti. Ty se ale žákům mnohdy mohou jevit prapodivně, uveďme typické otázky:

- Proč je jeho velikost rovna obsahu nějakého rovnoběžníku?
- Proč by měl být kolmý<sup>1</sup>?
- K čemu je pravidlo pravé ruky? Proč nepoužít ruku levou?
- Proč má vůbec smysl ho zavádět?

---

<sup>1</sup>na vektory, jenž ho určují

Naším cílem je poskytnout odpovědi na tyto otázky. Využijeme momentu síly jako průvodce v našem výkladu – budeme zkoumat jednoduché fyzikální situace.

Z hlediska didaktického budeme s momentem síly pracovat jakožto s veličinou popisující „**otáčivý účinek síly**.“<sup>2</sup> Chceme najít vhodný matematický objekt, kterým tento otáčivý účinek správně popíšeme. Uvidíme, že to bude právě **vektorový součin**.

Při utahování matičky nezáleží pouze na velikosti síly, ale také na délce ramena síly. Obtížnost významně klesne, pokud si vezmeme na pomoc klíč.

Musíme tedy vyřešit problém, jak matematicky vyjádřit, že matičku klíčem utáhneme i s poměrně malou silou stejně dobře, jako kdybychom se namáhali a utáhli ji velkou silou ručně.<sup>3</sup> Chceme najít takové **číslo**, které jednoznačně popíše velikost daného *momentu síly*.

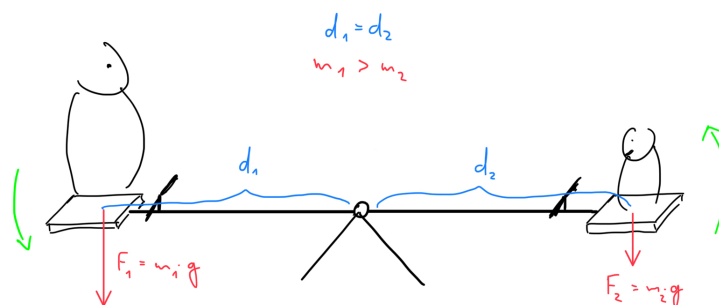
Předchozí odstavec nás vede k otázce, jak vůbec zjistíme, že je otáčivý účinek různých sil stejný? Jinými slovy, jak je můžeme **porovnat**? Princip, ze kterého vyjdeme, známe ze základní školy. Jedná se o **zákon rovnováhy na páce**, který si budeme názorně modelovat pomocí převažovací houpačky.

### 1.1.1 Rovnováha na houpačce

Mějme houpačku ve tvaru rovnoramenné páky. Zajímavé je, že i mnohem lehčí dítě je schopno vyvážit hmotnějšího dospělého. Tohle chceme vysvětlit.

V situaci 1.2 sedí oba ve stejné vzdálenosti od středu otáčení. Obě tíhové síly  $F_1, F_2$  působí kolmo dolů k povrchu a mají tendenci houpačkou otáčet. Jelikož ale každá působí na jiné straně houpačky, působí jejich momenty proti sobě.

Těžší dospělý dítě převažuje, houpačka se otáčí, jak je naznačeno na obrázku zelenými šipkami. Moment síly dospělého má tedy větší velikost, než moment síly dítěte.



Obrázek 1.2: Dospělý je těžší, působí větším momentem síly, houpačka se otáčí

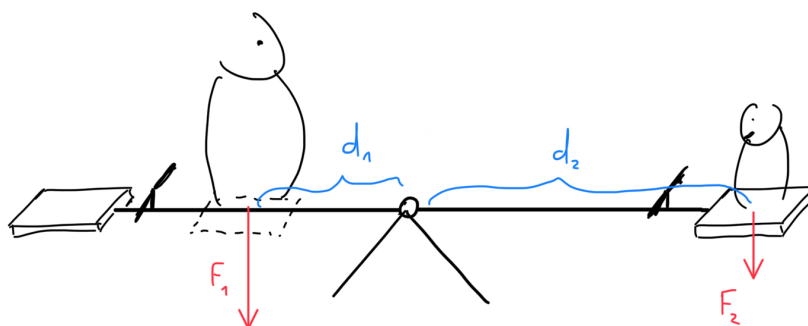
Chceme, aby se momenty rovnaly. Pokud se ale dospělý začne postupně posouvat směrem ke středu otáčení, jeho moment síly se bude postupně zmenšovat.<sup>4</sup>

<sup>2</sup>Pojmy otáčivý účinek síly a moment síly budeme v textu střídát.

<sup>3</sup>Tím rozumíme to, že k jejímu utáhnutí musíme vyvinout stejný otáčivý účinek.

<sup>4</sup>Dokonce přímo úměrně!

Zastavíme ho v okamžiku, kdy nastane **rovnováha** a kdy bude houpačka ve vodorovné poloze:



Obrázek 1.3: Dospělý se posune blíž, aby nastala rovnováha

Pozorujme, že v této situaci síly působí **kolmo** k ramenům houpačky.<sup>5</sup>

Ve stavu rovnováhy se houpačka neotáčí, přestože na ni stále působí oba momenty síly dospělého a dítěte. Jelikož tyto momenty působí proti sobě a houpačka se neotáčí, musí mít **stejnou velikost!**

Nyní se odvoláme na *zákon rovnováhy na páce*, z něhož plyne, že rovnováha nastane, když platí (1.1):

$$F_1 \cdot d_1 = F_2 \cdot d_2 \quad (1.1)$$

Nyní zpozorněme. Nejenže umíme pomocí houpačky porovnat jednotlivé otáčivé účinky dvou sil, ale umíme také říct, kdy se rovnají – v rovnováze. Tím jsme objevili kýženou *veličinu* popisující **velikost** otáčivého účinku síly – *moment síly*.<sup>6</sup>

Otáčivý účinek síly je určen součinem  $F \cdot d$ .

Tohle je skutečně významné. Součin  $F \cdot d$  totiž popisuje otáčivý účinek **jedné konkrétní síly**. Zároveň nám její i kvantifikuje, tedy nám dává konkrétní číselnou hodnotu.

Nyní již snadno vysvětlíme, proč je lehčí dítě schopno vyvážit těžšího dospělého,<sup>7</sup> či že matici utáhneme klíčem stejně dobře.

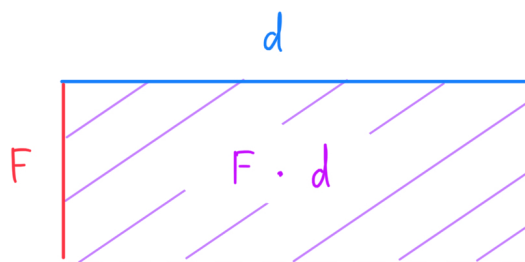
<sup>5</sup>Toto je velmi důležité!

<sup>6</sup>Předtím jsme moment síly chápali jako pouhé pojmenování otáčivého účinku síly. Nyní chápeme její podstatu, její tvar —  $F \cdot d$ .

<sup>7</sup>Dospělý zkrátil své rameno  $d_1$  právě tak, že platila rovnost (1.1), a tedy se momenty vyrovnaly.

## Geometrická interpretace – obsah obdélníku

Geometricky lze interpretovat součin  $F \cdot d$  jako obsah obdélníku, což vidíme na obrázku 1.4:<sup>8</sup>



Obrázek 1.4: Součin  $F \cdot d$  interpretujeme jako obsah obdélníku

Taková geometrická interpretace je skutečně vhodná. Krásně vystihuje situaci, že podstatný je opravdu až *obsah* obdélníku, *součin*  $F \cdot d$ . Ke každému momentu síly si tedy můžeme představit nekonečně mnoho dvojic  $F, d$  reprezentujících různé obdélníky, ovšem se stejným obsahem.<sup>9</sup>

### Poznámka

Prozatím jsme nijak nepopsali to, že dítě a dospělý otáčeli houpačku opačnými směry. Otázce, jak určit směr otáčení, se budeme věnovat v sekci 1.1.4.

Doposud jsme s veličinami  $F, d$  pracovali jako se skaláry, tedy jako s čísly. Počítali jsme pouze s **velikostí** síly, nikoli jejím směrem. Zároveň byla různá i působíště sil. K dobrému popisu fyzikálních situací nám tedy pouhé skaláry nestačí. Vhodným modelem je však popis pomocí vektorů. Odteď tak budeme brát sílu  $\vec{F}$  jako vektor, stejně tak budeme značit působíště síly vektorem  $\vec{r}$ .

---

Příklad houpačky jsme zkoumali kvůli potřebě porovnání otáčivých účinků *dvou* různých sil. Použili jsme zákon rovnováhy na páce, pomocí něhož jsme objevili součin  $F \cdot d$  jako číslo kvantifikující velikost otáčivého účinku síly. Připomeňme, že daný součin se však vztahuje již k jedné konkrétní síle, netřeba nic porovnávat!<sup>10</sup>

Klíčovým předpokladem bylo, že síla  $\vec{F}$  byla **kolmá** na rameno houpačky  $\vec{d}$ . Velikost momentu síly tak máme definovanou pouze pro tento případ. Je tedy jasné, že tuto definici musíme zobecnit i pro případy, kdy síla kolmo na rameno síly nepůsobí. To budeme opět modelovat na poměrně jednoduchém příkladu – otáčením dveří.

---

<sup>8</sup>Strany obdélníku mají rozměr  $[d] = \text{m}$  a síly  $[F] = \text{N}$ . To ale vůbec nevadí, můžeme si to dovolit. Čtenář by si mohl představit, že se tento obdélník nachází v jakémsi *síloprostoru*. Ve skutečnosti však jeho obsah bude mít rozměr momentu síly, což se nám přesně hodí!

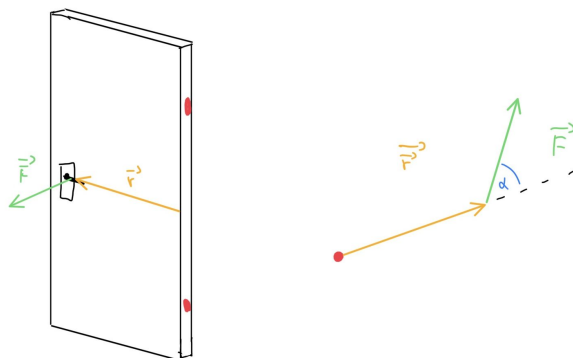
<sup>9</sup>Skutečně nádherné a elegantní řešení, že?

<sup>10</sup>Proto byl přechod od porovnávání dvou sil  $F_1, F_2$  k součinu  $F \cdot d$  tolik důležitý!

## 1.1.2 Když síla nepůsobí kolmo

Chceme zjistit, jaký bude moment síly, pokud budeme za kliku dveří táhnout silou v obecném směru, jak je znázorněno na obrázku 1.5.

Vytvořme si jednoduchý model – jeden hmotný bod daný vektorem  $\vec{r}$ , na který působí síla  $\vec{F}$ , kde  $\alpha$  je úhel těchto vektorů. Hmotný bod při otáčení vykonává pohyb po kružnici se středem v ose otáčení.<sup>11</sup>



Obrázek 1.5: Vlevo – skutečná situace; vpravo – pohled shora, zjednodušení

Rozebereme dva speciální případy, kdy síla působí kolmo a ve směru vektoru  $\vec{r}$ :



Obrázek 1.6: Síla působí kolmo,  $\alpha = 90^\circ$

V tomto případě již máme problém vyřešen, neboť se jedná o stejnou situaci jako v případě houpačky 1.1.1. Velikost momentu síly je  $|\vec{F}| \cdot |\vec{r}|$ .<sup>12</sup>



Obrázek 1.7: Síla působí ve směru  $\vec{r}$ ;  $\alpha = 0^\circ$

Případ, kdy síla působí ve stejném směru jako  $\vec{r}$ , známe opět ze života. Je to situace, kdy dveře „vytrháváme z pantu.“ V tomto případě se však dveře neotáčejí, otáčivý účinek síly je tedy **nulový**.<sup>13</sup> Nyní jsme připraveni na rozbor obecného případu.

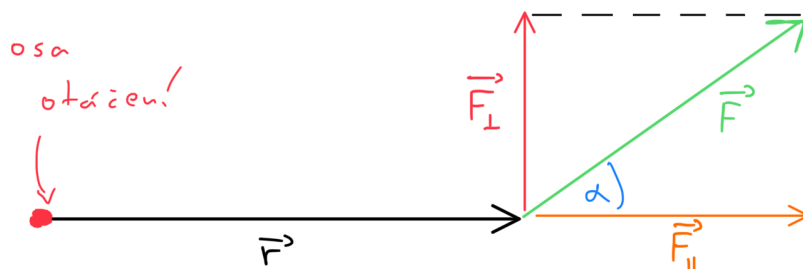
<sup>11</sup>Sledujme, že se jedná o situaci přímo z definice v úvodu kapitoly. Každý hmotný bod dveří opravdu vykonává pohyb po kružnici. Nyní však máme důvod se takovým pohybem zabývat, přestože je otevírání dveří skutečně jednoduchým příkladem.

<sup>12</sup>Používáme již značení pro velikost vektoru. Zároveň místo vektoru  $\vec{d}$  používáme  $\vec{r}$

<sup>13</sup>Dveře se skutečně nebudou otáčet, ani kdybychom působili silou stáda koní.

## Síla působí ve směru daném úhlem $\alpha$

Konečně řešíme příklad, který nás původně zajímal. Působící sílu si můžeme rozložit do dvou navzájem kolmých, čili ortogonálních složek. Zde máme volnost zvolit si směry, jak chceme. Zvolme si je podle nám již známých, rozebraných případů:



Obrázek 1.8: Rozklad síly do dvou složek

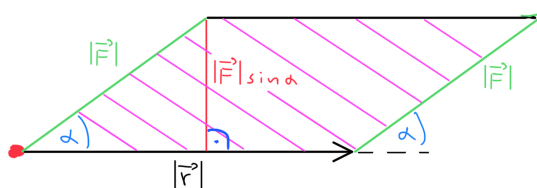
- Moment **rovnoběžné** složky síly  $\vec{F}_{\parallel}$  je **nulový**.
- Moment **kolmé** složky síly  $\vec{F}_{\perp}$  má velikost  $|\vec{F}_{\perp}| \cdot |\vec{r}|$ . Zároveň také  $|\vec{F}_{\perp}| = |\vec{F}| \sin \alpha$ .<sup>14</sup> Pozorujme, že pouze kolmá složka  $\vec{F}_{\perp}$  má otáčivý účinek.<sup>15</sup>

Našli jsme číslo, které charakterizuje velikost momentu síly působící na dveře v obecném směru. Označíme si jej jako  $M$  a jeho velikost určíme pomocí vztahu:

$$M = |\vec{r}| \cdot |\vec{F}_{\perp}| = |\vec{r}| \cdot |\vec{F}| \sin \alpha \quad (1.2)$$

### 1.1.3 Geometrická interpretace – obsah rovnoběžníku

Stejně jako v sekci 1.1.1 zkusme geometricky interpretovat vzorec (1.2).



Obrázek 1.9: Rovnoběžník určený vektory  $\vec{r}$ ,  $\vec{F}$

Vidíme, že číslo  $M = |\vec{r}| \cdot |\vec{F}| \sin \alpha$  je **obsah rovnoběžníku** určeného vektory  $\vec{r}$ ,  $\vec{F}$ . Základna má délku  $|\vec{r}|$ , výška  $|\vec{F}| \sin \alpha$ .

Jedná se o přirozené zobecnění předchozího pozorování z sekce 1.1.1, pouze přecházíme z obdélníku na **rovnoběžník**.<sup>16</sup>

<sup>14</sup>Člen  $\sin \alpha$  se zde objeví jednoduchou aplikací funkce sinus.

<sup>15</sup>Ostatně proto jsou kliky na dveřích designovány tak, aby za ně člověk táhnul „co nej-  
kolměji.“

<sup>16</sup>Vzpomeneme-li si na úvodní otázku, nyní již rozumíme, proč je velikost momentu síly určena obsahem rovnoběžníku.

### 1.1.4 Směr otáčení - hledáme vhodný vektor

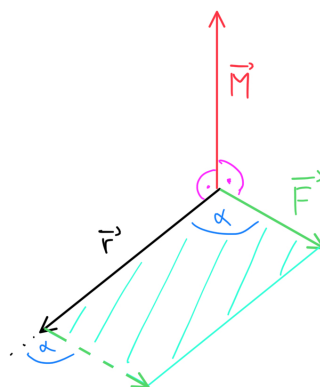
V této kapitole jsme hledali veličinu popisující otáčivý účinek, či moment síly. Rozmysleli jsme si, že číslo  $M$  popisuje jeho velikost. To však nestačí, hledaný objekt musí obsahovat i **informaci o směru** otáčení.<sup>17</sup> Je tedy jasné, že hledaný objekt musí být **vektorem**.<sup>18</sup>

Musíme určit, jaký by vektor  $\vec{M}$  měl mít *směr*.

Otáčivý pohyb hmotného bodu dveří<sup>19</sup> se odehrává v rovině. Určit tuto rovinu je klíčové, pomocí ní pak určíme směr otáčení.<sup>20</sup>

Tato rovina je jednoznačně určena vektory  $\vec{r}$  a  $\vec{F}$ . My bychom ji chtěli vyjádřit jediným vektorem  $\vec{M}$ . To lze, stačí, aby  $\vec{M}$  byl na tuto rovinu **kolmý**.

Odtud okamžitě plyne, že vektor  $\vec{M}$  je kolmý i na oba vektory  $\vec{r}$ ,  $\vec{F}$ , což je ilustrováno na obrázku 1.10.<sup>21</sup>



Obrázek 1.10: Vektor  $\vec{M}$  je kolmý na oba vektory  $\vec{r}$ ,  $\vec{F}$

#### Poznámka

V případě, že jsou vektory  $\vec{F}$ ,  $\vec{r}$  kolineární,<sup>22</sup> rovina určena není. Otáčivý účinek je ale v tomto případě nulový, a tedy hledaný vektor bude nulovým vektorem:

$$\vec{r} \parallel \vec{F} \implies \vec{M} = \vec{o}$$

Pozorujme, že vektor  $\vec{M}$  určuje osu otáčení. Zbývá nám rozmyslet si, jak vektorem  $\vec{M}$  rozlišit otáčení dveří „doleva“ a „doprava“. To učiníme v následující sekci.

<sup>17</sup>Směru otáčení čeho? Obecně hmotného bodu. Popis pro hmotný bod lze poté použít již pro cokoliv – dveře, houpačku, asteroid ve vesmíru...

<sup>18</sup>Laskavý čtenář si jistě pamatuje poučku, že „vektor má směr a velikost.“

<sup>19</sup>Každý bod dveří se pohybuje po kružnici!

<sup>20</sup>Například při jízdě na bicyklu nám určitě záleží na tom, aby bylo kolo kolmo k povrchu. Pokud by se otáčivý pohyb kola měl konat v rovině rovnoběžné s povrchem, museli bychom s bicyklem spadnout na stranu. A takový rozdíl směru otáčení bychom skutečně pocítili.

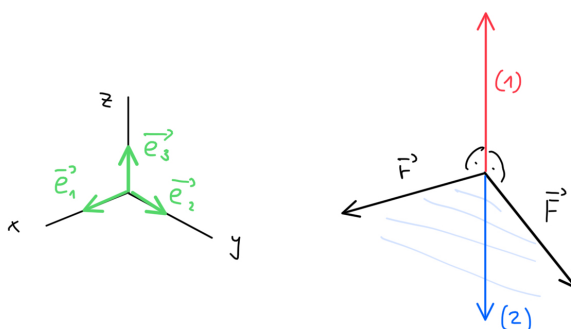
<sup>21</sup>Opět jsme dostali odpověď k druhé z úvodních otázek. Otáčivý pohyb se koná v rovině, kterou jsme schopni určit tak, že na ni je vektor  $\vec{M}$  kolmý.

<sup>22</sup>Kolineární znamená, že mají stejný směr.

### 1.1.5 Orientace momentu síly a tvorba báze

$\vec{M}$  určuje osu otáčení, která je kolmá na vektory  $\vec{r}$  a  $\vec{F}$ . Nevíme ale, ve směru které vektorové polopřímky by měl  $\vec{M}$  ležet. Vektor  $\vec{M}$  musí být určen jednoznačně, a zároveň musí být schopen tyto dvě možnosti otáčení rozlišit.

Při pohledu na obrázek 1.11 napravo vidíme, že máme dvě možnosti. Je čistě na nás, který ze směrů (1) a (2) prohlásíme za směr  $\vec{M}$ . Je to úplně jedno, máme **možnost volby**. Na základě dohody se pak volí možnost (1).

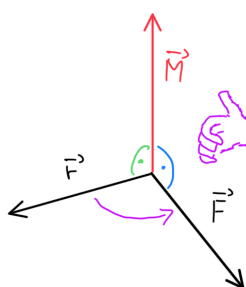


Obrázek 1.11: Nalevo – kartézská báze; napravo – možnosti volby směru  $\vec{M}$

Víme, že pokud jsou vektory  $\vec{r}$  a  $\vec{F}$  různoběžné,  $\vec{M}$  je na ně kolmý. Tím pádem jsou vektory  $\vec{r}$ ,  $\vec{F}$ ,  $\vec{M}$  lineárně nezávislé, tvoří tedy **bázi** prostoru  $\mathbb{E}^3$ .

Na základě dohody pak volíme orientaci vektoru  $\vec{M}$  tak, aby báze  $\{\vec{r}, \vec{F}, \vec{M}\}$  byla orientována stejně nám známá kartézská báze  $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ , viz obrázek 1.11 nalevo. Takovou bázi budeme nazývat **pravotočivou**. (Kočandrla a Boček, 1998).

Pokud je toto vyjádření matoucí, pomůže nám známé *pravidlo pravé ruky*, viz obrázek 1.12.



Obrázek 1.12: Ilustrace pravidla pravé ruky

„Pokud od vektoru  $\vec{r}$  pravou rukou směřujeme prsty k vektoru  $\vec{F}$  (směrem fialové šipky), pak palec určuje směr vektoru  $\vec{M}$ .“

Takové vyjádření samozřejmě není matematicky korektní, ale z hlediska výkladu na střední škole je dobré ho zde zmínit. Je totiž velice názorné.<sup>23</sup>

<sup>23</sup>Dostálo se nám odpovědi i na třetí otázku z úvodu. Skutečně bychom mohli směr  $\vec{M}$  určit i opačně, tedy pomocí levé ruky. Pravou používáme, protože jsme si to tak **zvolili**.



## 1.2 Shrnutí a definice vektorového součinu

### 1.2.1 Schéma postupu odvození

Z didaktického hlediska je vhodné předchozí myšlenky shrnout do stručného schématu shrnujícího jednotlivé kroky.

Otáčivý účinek síly  $\xrightarrow{\text{motivace}}$  houpačka  $\xrightarrow{ZRnP}^{24}$  součin  $F \cdot d$  určuje jeho velikost

$\vec{F} \not\perp \vec{r} \xrightarrow{\text{motivace}}$  otevírání dveří  $\xrightarrow{\text{řešení}}$  rozklad sil  $\rightarrow$  pouze kolmá složka  $\vec{F}_\perp$  má otáčivý účinek  $\xrightarrow{\text{úprava}}$   $|\vec{M}| = |\vec{r}||\vec{F}| \sin \alpha \dots$  obsah rovnoběžníku určeného  $\vec{r}, \vec{F}$

Jak určit směr otáčení  $\xrightarrow{\text{rovina otáčení}}$   $\vec{M}$  je kolmý na  $\vec{r}, \vec{F} \xrightarrow{\text{orientace}}$  **volíme**, aby  $\{\vec{r}, \vec{F}, \vec{M}\}$  tvořily pravotočivou bázi

Vidíme, kde se berou odpovědi na otázky z úvodu a že chcít vektor, který:

a) je kolmý k vektorům  $\vec{r}, \vec{F}$

b) jeho velikost je rovna obsahu rovnoběžníku určeného  $\vec{r}, \vec{F}$

c) je jednoznačně určený pomocí požadavku na orientaci báze

nakonec dává smysl. Přesně a úplně totiž popisuje mechanické situace, které jsme zkoumali. Moment síly je vektor, který je jednoznačně určen vektory  $\vec{r}, \vec{F}$ . Dvěma vektorům přiřadíme vektor jiný, jedná se tedy o operaci.

Přístupme tedy k formální definici vektorového součinu.

### 1.2.2 Definice

Vektorovým součinem budeme rozumět operaci, která dvěma libovolným vektorům  $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{E}_3$  přiřadí takový vektor  $\vec{w}$ , který:<sup>25</sup>

a) je nulový vektor  $\vec{0}$ , pokud jsou vektory  $\vec{u}, \vec{v}$  kolineární<sup>26</sup>

b) pokud jsou vektory  $\vec{u}, \vec{v}$  nekolineární<sup>27</sup>, pak:

- $\vec{w}$  je kolmý na oba vektory  $\vec{u}, \vec{v}$

- vektory  $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$  tvoří pravotočivou bázi

- jeho velikost je rovna obsahu rovnoběžníku určeného vektory  $\vec{u}, \vec{v}$ :

$$|\vec{w}| = |\vec{u}||\vec{v}| \sin \alpha, \text{ kde } \alpha \text{ je úhel vektorů } \vec{u}, \vec{v}$$

Matematický symbol pro vektorový součin je:

$$\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v}$$

<sup>24</sup>Zkratkou *ZRnP* rozumíme zákon rovnováhy na páce.

<sup>25</sup>(Kočandrle a Boček, 1998, str. 58)

<sup>26</sup>lineárně závislé

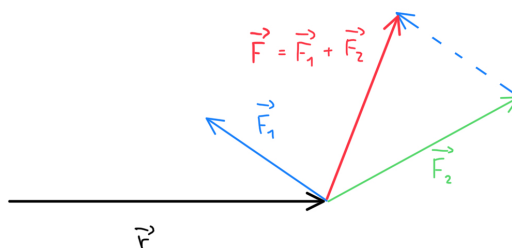
<sup>27</sup>lineárně nezávislé

### 1.2.3 Proč název vektorový součin?

Zavedení vektorového součinu jsme motivovali pomocí momentu síly jakožto veličiny popisující „otáčivý účinek síly.“ Ukázalo se, že je velice rozumné, aby tato veličina byla **vektorem** kolmým na  $\vec{r}, \vec{F}$ , jehož velikost byla rovna obsahu rovnoběžníku určeného těmito vektory. Zmíněnou „vektorovost“ jsme si tedy vysvětlili. Proč však výsledný vektor nazývat vektorovým *součinem*?

V sekci 1.1.1 jsme sice zdůrazňovali, že hledaným objektem je *součin*, to se nicméně vztahovalo k násobení čísel  $F$  a  $d$ . My zavádíme matematickou operaci, která přiřazuje vektorům  $\vec{r}, \vec{F}$  vektor  $\vec{M}$ . Řešíme tedy, proč bychom tuto novou operaci měli nazývat součinem.

Připomeňme, že *součinem* nazýváme „**to, co je distributivní vůči sčítání.**“ Držme se příkladu otevírání dveří, konkrétně, jak to dopadne, když budou působit síly dvě; jaký bude výsledný vektor  $\vec{M}$ , čili moment síly? Fyzikální odpověď ze zkušenosti známe.



Obrázek 1.13: Dvě působící síly a jejich výslednice

Jednotlivé momenty obou sil se sčítají, čili  $\vec{M} = \vec{M}_1 + \vec{M}_2$ . Zároveň ale platí, že „výsledné působení všech sil  $\vec{F}_1, \vec{F}_2$  je stejné, jako by působila jen výsledná síla.“<sup>28</sup> Matematicky to vyjádříme jako  $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$ .

Vektory  $\vec{r}, \vec{F}$  určují moment síly  $\vec{M}$ , což jsme značili  $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$ .<sup>29</sup> Pak platí:

$$\begin{aligned}\vec{M} &= \vec{r} \times \vec{F} = \vec{r} \times (\vec{F}_1 + \vec{F}_2) \\ \vec{M} &= \vec{M}_1 + \vec{M}_2 = (\vec{r} \times \vec{F}_1) + (\vec{r} \times \vec{F}_2)\end{aligned}$$

Což celkově dává:

$$\vec{r} \times (\vec{F}_1 + \vec{F}_2) = (\vec{r} \times \vec{F}_1) + (\vec{r} \times \vec{F}_2) \quad (1.3)$$

Vztah 1.3 je ale právě **distributivita**, konkrétně distributivita momentu síly vůči sčítání sil! Tohle přirozené pozorování slouží jako ilustrace toho, proč chceme, aby vektorový součin distributivitu splňoval.<sup>30</sup>

<sup>28</sup>tzv. princip superpozice sil (Dvořák, 2016-20a)

<sup>29</sup>Symbol  $\times$  je opravdu pouhé značení. To, že se chová jako klasické násobení chceme teprve ukázat.

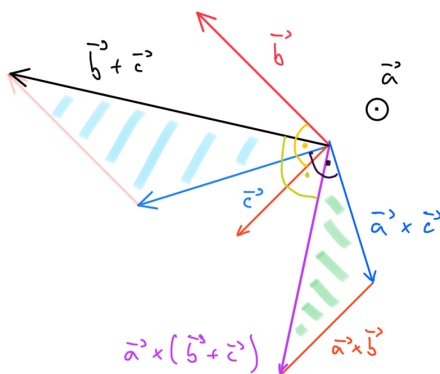
<sup>30</sup>Jelikož je symbol tečky  $\cdot$  již obsazen skalárním součinem, značíme vektorové násobení symbolem křížku  $\times$ .

Nyní si geometricky dokážeme, že vektorový součin je opravdu distributivní, čili  $\forall \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{E}_3$  :

$$\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}.$$

*Důkaz.*

Nejprve dokážeme, že vektorový součin je distributivní, pokud jsou vektory  $\vec{b}, \vec{c}$  kolmé na vektor  $\vec{a}$ . Zvolme si pohled, aby  $\vec{a}$  směřoval kolmo před rovinu papíru.



Obrázek 1.14: Distributivita vektorového součinu

Vektor  $\vec{a} \times \vec{b}$  je  $\vec{a}, \vec{b}$  je zkonstruován přesně podle definice (oranžově). Jeho velikost je  $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}|$ , protože kvůli kolmosti je  $\sin \alpha = 1$ .

Pro vektor  $\vec{a} \times \vec{c}$  platí totéž, protože je  $\vec{c}$  opět kolmý na  $\vec{a}$ . Tedy  $|\vec{a} \times \vec{c}| = |\vec{a}||\vec{c}|$ .

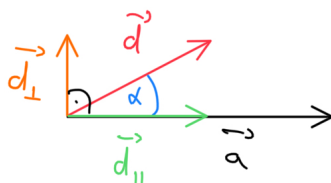
Z našeho hlediska však vektorové součiny  $(\vec{a} \times \vec{b}), (\vec{a} \times \vec{c})$  vzniknou pouhým otočením o  $90^\circ$  a přenásobením faktorem  $|\vec{a}|$ .

Podobně tak zkonstruujeme i vektorový součin  $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c})$ . Pro něj pak platí  $|\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c})| = |\vec{a}||\vec{b} + \vec{c}|$ .

Vektorový součin v daném příkladě můžeme chápat jako pouhou transformaci modrého trojúhelníku na zelený (jsou podobné). A jelikož  $\vec{b} + \vec{c} = (\vec{b} + \vec{c})$ , pak musí platit:

$$\vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c} = \vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}).$$

Nyní ukážeme, že každou situaci lze převést na předchozí případ.



Obrázek 1.15: Získání kolmé složky

Pro každý vektor  $d$  lze získat velikost jeho kolmé složky k vektoru  $\vec{a}$ :

$|\vec{d}_\perp| = |\vec{d}| \sin \alpha$ . Z definice  $\vec{d}_\parallel \times \vec{a} = 0$ . Nenulový výsledek dává pouze kolmá složka.

Pokud tedy  $(\vec{b} + \vec{c}) \not\perp \vec{a}$ , poté dle výše dokázaného (platí stejně jako pro  $\vec{d}$ ) pak

$$|\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c})| = |\vec{a}||\vec{b} + \vec{c}| \sin \alpha$$

Výsledný vektor splňuje definiční podmínky vektorového součinu. □

V této kapitole jsme zkoumali moment síly, či „otáčivý účinek síly.“ Bylo to z důvodu, že mechanika je pro nás nejpřirozenější. Námi probírané příklady byly jednoduché, takže i z didaktického hlediska vhodné.

V úvodu jsme si položili typické otázky (obsah rovnoběžníku, proč je kolmý, orientace), na které jsme postupně pomocí fyzikálních příkladů našli odpovědi. Uvedli jsme formální definici vektorového součinu.

Rozmysleli jsme si, že název *vektorový součin* je vhodný, neboť se jedná o operaci, která je *distributivní* a která dvěma vektorům přiřazuje opět *vektor*.

Zásadní věc, kterou jsme však nezjistili, jsou **souřadnice** vektorového součinu. Hledání souřadnic tedy bude předmětem následující kapitoly.

# Kapitola 2

## Souřadnice vektorového součinu

V této kapitole si odvodíme souřadnice vektorového součinu vzhledem ke kartézské bázi  $K_b$ , tedy bázi, kterou studenti střední školy znají.<sup>1</sup> Úloha tedy zní – pro libovolné vektory  $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{E}_3$  najděte souřadnice jejich vektorového součinu  $\vec{a} \times \vec{b}$ .

Postupovat budeme následovně: napíšeme si vyjádření vektorů  $\vec{a}, \vec{b}$  po složkách, využijeme distributivity, vytkneme skaláry a provedeme závěrečnou úpravu podle definice. Uvidíme, že daný výpočet je ve skutečnosti poměrně přímočarý.

### 2.1 Hledáme souřadnice vůči kartézské bázi

Mějme libovolné vektory  $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{E}_3$ , které vyjádříme pomocí bázevých vektorů:

$$\begin{aligned}\vec{a} &= a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3, & a_1, a_2, a_3 &\in \mathbb{R} \\ \vec{b} &= b_1\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2 + b_3\vec{e}_3, & b_1, b_2, b_3 &\in \mathbb{R}\end{aligned}$$

Chceme najít souřadnice  $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$  vektorového součinu  $\vec{a} \times \vec{b}$  v bázi  $K_b$ , aby:

$$\vec{a} \times \vec{b} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3$$

---

Napišme si vektorový součin vektorů  $\vec{a}, \vec{b}$  ve složkách:

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3) \times (b_1\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2 + b_3\vec{e}_3) \stackrel{0}{=} \quad (2.1)$$

Použijme distributivitu (krok 0), čili roznásobme:

$$\begin{aligned}\stackrel{0}{=} & (a_1\vec{e}_1 \times b_1\vec{e}_1) + (a_1\vec{e}_1 \times b_2\vec{e}_2) + (a_1\vec{e}_1 \times b_3\vec{e}_3) + \\ & (a_2\vec{e}_2 \times b_1\vec{e}_1) + (a_2\vec{e}_2 \times b_2\vec{e}_2) + (a_2\vec{e}_2 \times b_3\vec{e}_3) + \\ & (a_3\vec{e}_3 \times b_1\vec{e}_1) + (a_3\vec{e}_3 \times b_2\vec{e}_2) + (a_3\vec{e}_3 \times b_3\vec{e}_3) \stackrel{1}{=} \end{aligned}$$

Na první pohled by se mohlo zdát, že jsme situaci zhoršili. Není tomu tak. Vidíme, že jsme dostali členy tvaru  $(a_i\vec{e}_i \times b_j\vec{e}_j)$ ;  $i, j \in \{1, 2, 3\}$ . Máme zde vektorové součiny **bázevých vektorů**<sup>2</sup>, zbavili jsme se tedy vektorového součinu dvou

---

<sup>1</sup>Kartézskou bázi máme na mysli jednotkové vektory  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$  po řadě směřující ve směru os  $x, y, z$ . Jejich souřadnice jsou:  $\vec{e}_1 = (1, 0, 0)$ ;  $\vec{e}_2 = (0, 1, 0)$ ,  $\vec{e}_3 = (0, 0, 1)$ . Středoškolské vyjádření např. vektoru  $\vec{v} = (3, -2, 2)$  je totiž pouhý zápis pro:  $(3, -2, 2) = 3(1, 0, 0) - 2(0, 1, 0) + 2(0, 0, 1) = 3\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2 + 2\vec{e}_3$ .

<sup>2</sup>U nich spočítat vektorový součin nebude problém – jsou jednotkové a navzájem kolmé.

obecných vektorů! To je úspěch. Problém je, že jsme dostali vektorové součiny různě skalárně vynásobených (tedy naškálovaných) bázevých vektorů. Hodilo by se nám je vytknout před závorku (krok 1) – to okomentujeme v sekci 2.2. Zkusme to provést:

$$\stackrel{1}{=} a_1b_1(\vec{e}_1 \times \vec{e}_1) + a_1b_2(\vec{e}_1 \times \vec{e}_2) + a_1b_3(\vec{e}_1 \times \vec{e}_3) + \\ a_2b_1(\vec{e}_2 \times \vec{e}_1) + a_2b_2(\vec{e}_2 \times \vec{e}_2) + a_2b_3(\vec{e}_2 \times \vec{e}_3) + \\ a_3b_1(\vec{e}_3 \times \vec{e}_1) + a_3b_2(\vec{e}_3 \times \vec{e}_2) + a_3b_3(\vec{e}_3 \times \vec{e}_3) \stackrel{2}{=}$$

Vidíme, že se pomalu „prokousáváme dál.“ Vidíme, že v závorkách máme vektorové součiny samotných bázevých vektorů. Jejich výsledky snadno určíme – pro podrobnější komentář viz sekci 2.3 – v kroku 2:<sup>3</sup>

$$\stackrel{2}{=} a_1b_1(\vec{0}) + a_1b_2(\vec{e}_3) + a_1b_3(-\vec{e}_2) + \\ a_2b_1(-\vec{e}_3) + a_2b_2(\vec{0}) + a_2b_3(\vec{e}_1) + \\ a_3b_1(\vec{e}_2) + a_3b_2(-\vec{e}_1) + a_3b_3(\vec{0}) =$$

To nám po vyškrtnutí nulových členů dává

$$a_1b_2 \vec{e}_3 - a_1b_3 \vec{e}_2 - a_2b_1 \vec{e}_3 + a_2b_3 \vec{e}_1 + a_3b_1 \vec{e}_2 - a_3b_2 \vec{e}_1,$$

Což pouze upravíme do finální formule:

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_2b_3 - a_3b_2)\vec{e}_1 + (a_3b_1 - a_1b_3)\vec{e}_2 + (a_1b_2 - a_2b_1)\vec{e}_3 \quad (2.2)$$

Pro přehlednost již napíšeme pouze **souřadnice**<sup>4</sup>

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1).$$

Máme, co jsme chtěli. Nyní se pouze vrátíme k jednotlivým krokům a ukážeme, že jsou korektní.

## 2.2 Jak by se měl vektorový součin chovat vůči násobení skalárem?

Nyní již víme, že vektorový součin obecných vektorů  $\vec{a}, \vec{b}$  lze převést na lineární kombinaci<sup>5</sup> vektorových součinů jednotlivě naškálovaných bázevých vektorů. V kroku 1 jsme skaláry  $a_i, b_j$  vytkli před závorku, tedy např.:

$$(a_1\vec{e}_1 \times b_2\vec{e}_2) \stackrel{1}{=} a_1b_2(\vec{e}_1 \times \vec{e}_2)$$

Je to oprávněná úprava?

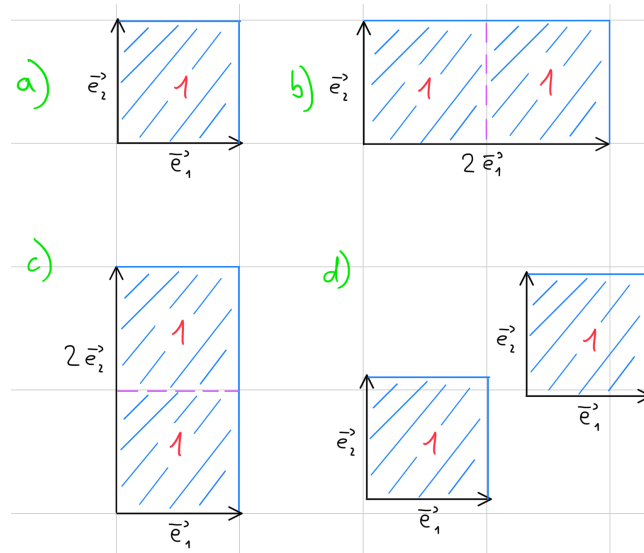
Řešíme pouze **velikost** vektorového součinu, jeho směr násobení skalárem nijak neovlivní.<sup>6</sup> Z definice víme, že velikost vektorového součinu je určena obsahem rovnoběžníku. Provedeme „*důkaz obrázkem*.“ Zkoumejme tyto 4 příklady:

<sup>3</sup>Označením  $\vec{0}$  rozumíme nulový vektor.

<sup>4</sup>Kompletně bychom měli říct, že jsme našli *souřadnice vektorového součinu obecných vektorů  $\vec{a}, \vec{b}$  vzhledem ke kartézské bázi  $K_b$* . To se však již nevešlo na řádek, zároveň to může čtenáře až děsit. Není třeba se ničeho bát, jsou to zkrátka „staré dobré souřadnice.“

<sup>5</sup>Učené slovo pro „rozložit do složek  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ .“

<sup>6</sup>Jedná se o *skaláry*, tedy opravdu pouze škálují. Se směrem (kromě změny orientace pomocí znaménka  $-$ ) nic nezmůžou.



Obrázek 2.1: Ilustrace násobení skalárem

- a)  $\vec{e}_1 \times \vec{e}_2 \dots$  v tomto případě je  $|\vec{e}_1 \times \vec{e}_2| = 1$   
 Vytyčený rovnoběžník je jednotkový čtverec.
- b)  $2\vec{e}_1 \times \vec{e}_2 \dots$  v tomto případě je  $|2\vec{e}_1 \times \vec{e}_2| = 2$   
 Vytyčený rovnoběžník je obdélník, jehož obsah je 2.
- c)  $\vec{e}_1 \times 2\vec{e}_2 \dots$  v tomto případě je  $|\vec{e}_1 \times 2\vec{e}_2| = 2$   
 Vytyčený rovnoběžník je obdélník, jehož obsah je 2.
- d)  $2(\vec{e}_1 \times \vec{e}_2) \dots$  nyní  $2|\vec{e}_1 \times \vec{e}_2| = 2 \cdot 1 = 2$   
 Výsledek případu (a) vezmeme dvakrát, dá tedy plochu s obsahem 2.

Vidíme, že výsledek je pro násobení dvěma následující:

$$(2\vec{e}_1) \times \vec{e}_2 = \vec{e}_1 \times (2\vec{e}_2) = 2(\vec{e}_1 \times \vec{e}_2)$$

Stejnou logikou bychom mohli použít pro libovolné reálné číslo. Volba čísla 2 zde byla čistě ilustrativní. Výše popsaná vlastnost je *asociativnost vektorového součinu vektorů vzhledem k násobení reálným číslem* (Polák (2008) str. 564), což zapíšeme:

$$(a\vec{e}_1) \times \vec{e}_2 = \vec{e}_1 \times (a\vec{e}_2) = a(\vec{e}_1 \times \vec{e}_2), \quad a \in \mathbb{R} \quad (2.3)$$

□

Jedná se o krok 1 z původního odvození. Vysvětlili jsme si, proč vlastnost (2.3) platí a vektorový součin ji splňuje.

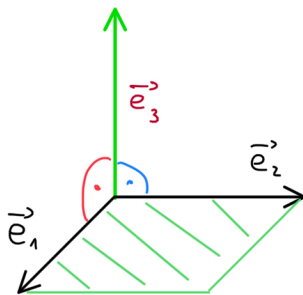
## 2.3 Vektorový součin kartézských bázových vektorů

Členy  $(\vec{e}_1 \times \vec{e}_1)$ ,  $(\vec{e}_2 \times \vec{e}_2)$ ,  $(\vec{e}_3 \times \vec{e}_3)$  budou nulové z definice. Každý vektor je sám vůči sobě kolineární, tj:

$$\vec{e}_i \times \vec{e}_i = 0, \quad i \in \{1,2,3\}$$

Určíme členy  $(\vec{e}_1 \times \vec{e}_2)$ ,  $(\vec{e}_2 \times \vec{e}_1)$ ,  $(\vec{e}_1 \times \vec{e}_3)$ ,  $(\vec{e}_3 \times \vec{e}_1)$ ,  $(\vec{e}_2 \times \vec{e}_3)$ ,  $(\vec{e}_3 \times \vec{e}_2)$ .

Velikost všech daných vektorových součinů bude  $|\vec{e}_i \times \vec{e}_j| = 1$ ,  $i, j \in \{1,2,3\}, i \neq j$ .



Obrázek 2.2: Bázové vektory

Protože  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$  jsou vektory kartézské báze, jsou na sebe kolmé a jednotkové. Z obrázku a pomocí pravidla pravé ruky tedy snadno určíme:

$$\vec{e}_1 \times \vec{e}_2 = \vec{e}_3$$

$$\vec{e}_2 \times \vec{e}_3 = \vec{e}_1$$

$$\vec{e}_3 \times \vec{e}_1 = \vec{e}_2$$

Určíme i  $\vec{e}_2 \times \vec{e}_1$ . Výsledný vektor musí být jednotkový, kolmý na  $\vec{e}_2, \vec{e}_1$  a tvořit pravotočivou bázi. Vektor  $\vec{e}_3$  tvoří bázi levotočivou! To napravíme tím, že vezmeme vektor k němu **opačný**, tedy vektor  $-\vec{e}_3$ .<sup>7</sup> Obdobná logika platí pro zbylé případy, celkem tedy:

$$\vec{e}_2 \times \vec{e}_1 = -\vec{e}_3$$

$$\vec{e}_3 \times \vec{e}_2 = -\vec{e}_1$$

$$\vec{e}_1 \times \vec{e}_3 = -\vec{e}_2$$

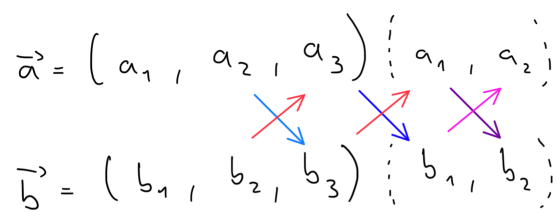
Tím jsme z definice vysvětlili i oprávněnost kroku 2 z našeho výpočtu.

<sup>7</sup>Vyzýváme čtenáře, aby se vlastnoručně přesvědčil a rozmyslel si, že při aplikaci pravidla pravé ruky palec směřuje opravdu ve směru opačném vektoru  $\vec{e}_3$ .



### 2.3.1 Mnemotechnická pomůcka výpočtu souřadnic

Uveďme jednoduchou pomůcku, podle které lze lehce souřadnice vektorového součinu spočítat. Pokud si vektory  $\vec{a}, \vec{b}$  napíšeme pod sebe, souřadnice určíme snadno pomocí šipek. Modré součiny jsou kladné, součiny po šipkách směrem nahoru obohatíme znaménkem minus.

$$\begin{array}{c} \vec{a} = (a_1, a_2, a_3) \\ \vec{b} = (b_1, b_2, b_3) \end{array} \quad \begin{array}{c} (a_1, a_2) \\ (b_1, b_2) \end{array}$$


$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_2b_3 - b_2a_3, a_3b_1 - b_3a_1, a_1b_2 - b_1a_2)$$

Obrázek 2.3: Pomůcka k výpočtu souřadnic

Dá se snadno zapamatovat, neboť samotné šipky tvoří křížek, což je zároveň symbol, který používáme ke značení vektorového součinu.

Poznamenejme, že cílem není, aby si žáci zapamatovali toto schéma. Je však dobré ho znát, proto jej uvádíme na samotném závěru kapitoly.

### 2.3.2 Zmínka o determinantu

Všimněme si, že tvar souřadnic obsahuje jistou symetrii.<sup>8</sup>

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1).$$

Jednotlivé souřadnice mají stejný tvar, pouze se mění indexy. V matematice takovou symetrii „přes kombinace indexů“ vyjadřujeme pomocí tzv. *determinantu*.<sup>9</sup>

---

My si pouze uvedeme, že souvisí s maticemi<sup>10</sup>, značí se  $\det$  či svislými čarami. Pro matici 2x2 se vypočítá (podobně jako v pomůcce nahoře) násobením „zleva dolů s plusem, zprava nahoru s minusem“:

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - cb$$

---

Vidíme, že  $x$ -ová souřadnice vektorového součinu obsahuje kombinace  $y$ -ových a  $z$ -ových souřadnic. Obdobně to platí pro ostatní. Zároveň si můžeme všimnout, že se jednotlivé indexy „cyklicky posouvají“.

Pokud si souřadnice vektorů napíšeme v souřadnicích pod sebe tak, že zachováme pořadí a vynecháme index souřadnice, kterou vyjadřujeme, pak:<sup>11</sup>

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \vec{e}_1 + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \vec{e}_2 + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \vec{e}_3$$

<sup>8</sup>K ní se vrátíme ještě v sekci 3.3.

<sup>9</sup>Pro více informací o determinantu a jeho souvislosti s vektorovým součinem (Macek, 2021).

<sup>10</sup>Zápis čísel do sloupců a řádků

<sup>11</sup>Vyzýváme čtenáře, necht' si platnost sám ověřit.

# Kapitola 3

## Vlastnosti vektorového součinu

V kapitole 2 jsme našli souřadnice vektorového součinu  $\vec{a} \times \vec{b}$ . Vycházeli jsme přitom z distributivity a také jsme museli „vytknout skaláry před závorku.“ Odůvodnili jsme platnost vybraných vlastností, které jsme při odvození použili. V této kapitole je přehledně uspořádáme.

Nejenže ukážeme, jaké vlastnosti vektorový součin má, zdůrazníme také, které vlastnosti — narozdíl např. od klasického násobení čísel — **nemá!**

Na závěr zde zahrneme i jeho matematické aplikace a jinou možnost zápisu.

### 3.1 Algebraické vlastnosti vektorového součinu

V této sekci budeme daná tvrzení dokazovat algebraicky, tedy výpočtem přes souřadnice. Pro přehlednost budeme souřadnice psát do hranatých závorek

$$\vec{x} = [x_1, x_2, x_3].$$

#### 3.1.1 Distributivita vůči sčítání vektorů

Vektorový součin je distributivní vůči sčítání, tedy  $\forall \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{E}_3$  :

$$(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$$

*Důkaz.* Ukážeme, že souřadnice na levé i pravé straně se rovnají.

$$\begin{aligned} (\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} &= [(a_2 + b_2)c_3 - (a_3 + b_3)c_2, (a_3 + b_3)c_1 - (a_1 + b_1)c_3, (a_1 + b_1)c_2 - (a_2 + b_2)c_1] = \\ &= [(a_2c_3 - a_3c_2) + (b_2c_3 - b_3c_2), (a_3c_1 - a_1c_3) + (b_3c_1 - b_1c_3), (a_1c_2 - a_2c_1) + (b_1c_2 - b_2c_1)] = \\ &= [a_2c_3 - a_3c_2, a_3c_1 - a_1c_3, a_1c_2 - a_2c_1] + [b_2c_3 - b_3c_2, b_3c_1 - b_1c_3, b_1c_2 - b_2c_1] = \\ &= \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c} \end{aligned}$$

Čímž je důkaz hotov. □

### 3.1.2 Asociativita vůči násobení skalárem

Vektorový součin je asociativní vůči násobení skalárem:  $\forall a \in \mathbb{R}; \forall \vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{E}_3$  :

$$a\vec{u} \times \vec{v} = \vec{u} \times a\vec{v} = a(\vec{u} \times \vec{v})$$

*Důkaz.*

$$\begin{aligned} a\vec{u} \times \vec{v} &= [au_1, au_2, au_3] \times [v_1, v_2, v_3] = [au_2v_3 - au_3v_2, au_3v_1 - au_1v_3, au_1v_2 - au_2v_1] \\ \vec{u} \times a\vec{v} &= [u_1, u_2, u_3] \times [av_1, av_2, av_3] = [u_2av_3 - u_3av_2, u_3av_1 - u_1av_3, u_1av_2 - u_2av_1] \\ (\vec{u} \times \vec{v}) &= a[u_1, u_2, u_3] \times [v_1, v_2, v_3] = [au_2v_3 - au_3v_2, au_3v_1 - au_1v_3, au_1v_2 - au_2v_1] \end{aligned}$$

$$a\vec{u} \times \vec{v} = \vec{u} \times a\vec{v} = a(\vec{u} \times \vec{v})$$



### 3.1.3 Antikomutativita

Vektorový součin **není** komutativní. Při určování směru jsme definovali, že musí tvořit pravotočivou bázi. Záleží tedy na pořadí. Platí ovšem, že vektorový součin je *antikomutativní*, tj.  $\forall \vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{E}_3$  :

$$\vec{u} \times \vec{v} = -\vec{v} \times \vec{u}$$

*Důkaz.*

$$\begin{aligned} \vec{u} \times \vec{v} &= [u_2v_3 - u_3v_2, u_3v_1 - u_1v_3, u_1v_2 - u_2v_1] \\ \vec{v} \times \vec{u} &= [v_2u_3 - v_3u_2, v_3u_1 - v_1u_3, v_1u_2 - v_2u_1] = \\ &= -[v_2u_3 - v_3u_2, v_3u_1 - v_1u_3, v_1u_2 - v_2u_1] \end{aligned}$$

Celkem  $\vec{u} \times \vec{v} = -\vec{v} \times \vec{u}$



### 3.1.4 Vektorový součin není asociativní vůči vektorovému násobení!

Zdůrazněme, že vektorový součin **není** asociativní vůči vektorovému násobení:

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} \neq \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}). \quad (3.1)$$

*Důkaz.*

Stačí nám najít jediný protipříklad, abychom dokázali, že  $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} \neq \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$  obecně neplatí.<sup>1</sup>

Sledujme následující příklad. Pokud by vektorový součin byl asociativní, pak:

$$(\vec{e}_1 \times \vec{e}_2) \times \vec{e}_2 = \vec{e}_1 \times (\vec{e}_2 \times \vec{e}_2)$$

<sup>1</sup>Samozřejmě se může stát, že pro některé vektory bude vztah (3.1) platit. Lze dokázat, že pokud  $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$ , pak nutně  $(\vec{c} \times \vec{a}) \times \vec{b}$ . Jedná se o důsledek tzv. *Jacobiho identity*:  $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) + \vec{b} \times (\vec{c} \times \vec{a}) + \vec{c} \times (\vec{a} \times \vec{b}) = 0$ , kterou ponecháme bez důkazu.

$$\vec{e}_3 \times \vec{e}_2 = \vec{e}_1 \times \vec{o}$$

$$-\vec{e}_1 = \vec{o}$$

To je ovšem spor, protože  $-\vec{e}_1 \neq \vec{o}$ . □

## 3.2 Matematické aplikace

Nyní si ukážeme vybrané matematické aplikace vektorového součinu.

### 3.2.1 Rovnoběžnost vektorů

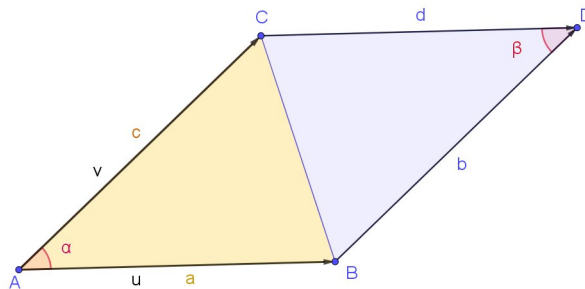
Pokud  $\forall \vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{E}_3 : |\vec{u} \times \vec{v}| = 0$ , pak jsou tyto vektory rovnoběžné.

*Důkaz.*

Z definice vektorového součinu je  $\vec{u} \times \vec{v} = 0$ , pokud jsou kolineární, čili rovnoběžné. Tím je tvrzení dokázáno. □

### 3.2.2 Obsah trojúhelníku

Pro libovolný trojúhelník  $ABC \in \mathbb{E}_3$  necht'  $\vec{u} = B - A, \vec{v} = C - A$  jsou vektory s počátkem v bodě  $A$  směřující po řadě do bodů  $B, C$ . Pak obsah trojúhelníku  $ABC$  je dán vztahem  $S_{ABC} = \frac{1}{2}|\vec{u} \times \vec{v}|$ .



Obrázek 3.1: Trojúhelník  $ABC$

*Důkaz.*

Obsah rovnoběžníku  $S_{ABDC}$  je z definice vektorového součinu roven  $|\vec{u} \times \vec{v}|$ . Úhlopříčka  $BC$  rovnoběžník  $ABDC$  pólí. Z toho důvodu  $S_{ABC} = S_{DCB}$ . Tedy  $S_{ABDC} = S_{ABC} + S_{DCB} = S_{ABC} + S_{ABC} = 2S_{ABC}$ , z čehož plyne:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}S_{ABDC} = \frac{1}{2}|\vec{u} \times \vec{v}|.$$

□

### 3.2.3 Normálový vektor k rovině

Nechť je  $\rho \in \mathbb{E}_3$  rovina určená bodem  $A \in \mathbb{E}_3$  a vektory  $\vec{u}, \vec{v} \in \rho, \vec{u} \neq \vec{v}$ . Pak je  $\vec{u} \times \vec{v}$  normálový vektor k rovině  $\rho$ .<sup>2</sup>

*Důkaz.*

Z definice vektorového součinu je  $\vec{u} \times \vec{v} \perp \vec{u}$ , zároveň  $\vec{u} \times \vec{v} \perp \vec{v}$ .

Tedy  $\vec{u} \times \vec{v}$  je normálový vektor k rovině  $\rho$ . □

## 3.3 Formalismus Levi-Civitova symbolu

Jak jsme zmínili v sekci 2.3.2, souřadnice vektorového součinu obsahují jistou symetrii. Při výpočtu souřadnic vektorového součinu se nám členy  $\vec{e}_i \times \vec{e}_i$  vynulovaly. Členy s indexy po řadě (1,2,3), (2,3,1), (3,1,2) byly kladné, pokud se však prohodilo pořadí, znaménko bylo záporné. To nás motivuje k tomu zavést jiný způsob zápisu, který by krácení členů a jejich manipulaci zjednodušil. Proto si definujeme následující symbol:

$$\epsilon_{ijk} =: \begin{cases} +1, & \text{je-li } (i,j,k) \text{ rovno } (1,2,3), (2,3,1), (3,1,2), \\ -1, & \text{je-li } (i,j,k) \text{ rovno } (3,2,1), (1,3,2), (2,3,1), \\ 0, & \text{jindy, tj.: } i = k \text{ nebo } j = k \text{ nebo } k = i \end{cases} \quad (3.2)$$

Nazývá se Levi-Civitův symbol. Platí, že vektorový součin  $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$  lze vyjádřit:<sup>3</sup>

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \sum_{i,j,k=1}^3 \epsilon_{ijk} \vec{e}_i a_j b_k = (a_2 b_3 - a_3 b_2) \vec{e}_1 + (a_3 b_1 - a_1 b_3) \vec{e}_2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1) \vec{e}_3$$

V tandemu s Levi-Civitovým symbolem se používá také tzv. Einsteinova sumační konvence, kde se při výpočtech symbol sumy  $\sum_{i,j,k=1}^3$  vynechává. Celkový zápis vektoru  $\vec{c}$  by tedy byl:

$$\vec{c} = \epsilon_{ijk} \vec{e}_i a_j b_k$$

Pozorujme, že z definice Levi-Civitova symbolu platí:

$$\epsilon_{ijk} = -\epsilon_{ikj}$$

<sup>2</sup>Vektor  $\vec{u} \times \vec{v} / |\vec{u} \times \vec{v}|$  by pak byl jednotkovým či normovaným normálovým vektorem.

<sup>3</sup>Guio (2011). Symbolem  $\sum_{i,j,k=1}^3$  značíme tzv. *sumu*. Tím rozumíme, že sčítáme přes všechny možnosti, jak trojici (1,2,3) uspořádat. Kvůli Levi-Civitově symbolu pak vyjádření vektorového součinu skutečně platí. Důkaz lze provést rozepsáním.

### 3.3.1 Důkazy vlastností vektorového součinu pomocí Levi-Civitova symbolu

#### Distributivita vůči sčítání vektorů 3.1.1

*Důkaz.*

$$\forall \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{E}_3 : (\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \epsilon_{ijk} \vec{e}_i (a_j + b_j) c_k = \epsilon_{ijk} \vec{e}_i a_j c_k + \epsilon_{ijk} \vec{e}_i b_j c_k = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$$

Vidíme, že důkaz se pomocí formalismu Levi-Civitova symbolu zkrátil na jeden řádek. □

#### Asociativita vůči násobení skalárem

*Důkaz.*

Skalár  $a$  je konstanta, takže jej ze sumy lze vytknout.

$$\forall a \in \mathbb{R}; \forall \vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{E}_3 :$$

$$a\vec{u} \times \vec{v} = \epsilon_{ijk} \vec{e}_i a u_j v_k = a \epsilon_{ijk} \vec{e}_i u_j v_k$$

$$\vec{u} \times a\vec{v} = \epsilon_{ijk} \vec{e}_i u_j a v_k = a \epsilon_{ijk} \vec{e}_i u_j v_k$$

$$a(\vec{u} \times \vec{v}) = a \epsilon_{ijk} \vec{e}_i u_j v_k$$

□

#### Antikomutativita

*Důkaz.*  $\forall \vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{E}_3$ . Pouze použijeme vlastnost, že prohození dvou indexů „vyhodí“ minus:

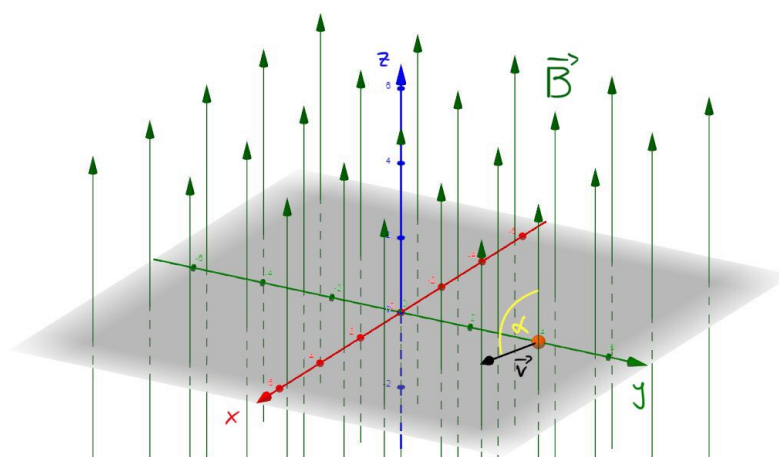
$$\vec{u} \times \vec{v} = \epsilon_{ijk} \vec{e}_i u_j v_k = -\epsilon_{ikj} \vec{e}_i u_j v_k = -\vec{v} \times \vec{u}$$

□

# Kapitola 4

## Aplikace - Lorentzova síla

V této kapitole se podíváme na pohyb nabitě částice v magnetickém poli. Vyjdeme z myšleného experimentu, kdy pomocí „protonového děla“ budeme rychlostí  $\vec{v}$  pod úhlem  $\alpha^1$  vystřelovat nabitou částici do homogenního magnetického pole o velikosti  $B$ , viz. obrázek 4.1.<sup>2</sup> Taková částice se pohybuje po zvláštní trajektorii – po šroubovici. Budeme tedy chtít tento pohyb popsat – najít vztah pro sílu, která takový pohyb způsobuje – tzv. *Lorentzovu sílu*.



Obrázek 4.1: Homogenní magnetické pole

Homogenní pole budeme předpokládat z toho důvodu, že je jednoduché a dobře se popisuje, zároveň je však dostatečně názorné, protože pomocí něj budeme pozorovat vlastnosti Lorentzovy síly – je kolmá na  $\vec{v}$ ,  $\vec{B}$  a její velikost je dána  $|\vec{F}| = |\vec{v}||\vec{B}|\sin\alpha$ . Vidíme, že nám to připomíná vlastnosti vektorového součinu.

Ukážeme si, že „první rozumný nástřel“  $\vec{F} = \vec{v} \times \vec{B}$  neplatí. Odůvodníme si, proč jej musíme doplnit o elektrický náboj částice  $q$ , tedy:

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B} \quad (4.1)$$

Přesvědčíme se, že vztah 4.1 platí, navrhneme totiž experiment, pomocí kterého jej můžeme potvrdit.

<sup>1</sup>Úhel vektorů  $\vec{v}$ ,  $\vec{B}$ .

<sup>2</sup>Homogenní = stejnorodé. Veličina popisující magnetické pole se nazývá *magnetická indukce*, je to vektorová veličina  $\vec{B}$ , její jednotka je T (tesla).

Na závěr si ukážeme i pohyb částice v nehomogenním poli – magnetickém poli Země – jehož důsledkem si zdůvodníme, proč se polární záře vyskytuje pouze v polárních oblastech.<sup>3</sup>

Uveďme, že Lorentzova síla je experimentálně ověřená – např. Mengelkamp a kol. (2015), či odkaz na videozáznam experimentu Physierge (2014). Zdůrazněme, že nutnost experimentálního ověření je ve fyzice stejně důležitá, jako nutnost důkazu v matematice.

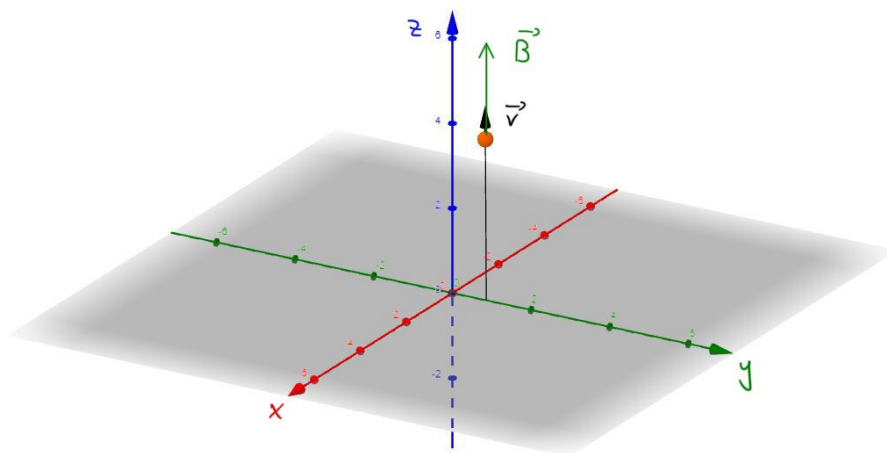
## 4.1 Nabitá částice v homogenním mag. poli

Mějme homogenní magnetické pole, které popíšeme vektorovou veličinou — *magnetickou indukcí* — tak, aby platilo  $\vec{B} = (0, 0, B)$ , kde  $B = |\vec{B}|$ . Dané *vektorové pole* si tedy můžeme představovat jako „les šipek“ směřujících ve směru osy  $z$ , jak bylo naznačeno na obrázku 4.1.<sup>4</sup>

### 4.1.1 Kolmost síly $\vec{F}$ na $\vec{v}$ , $\vec{B}$

Obdobně jako v kapitole 1 se zaměříme na pohyb těchto částic ve dvou speciálních směrech – ve směru magnetické indukce  $\vec{B}$  ( $\alpha = 0^\circ$ ) a kolmo na ni ( $\alpha = 90^\circ$ ).

1.) Částici vystřelujeme ve směru magnetické indukce,  $\alpha = 0^\circ$ . Vektor rychlosti  $\vec{v}$  je kolineární s  $\vec{B}$ . Pozorujeme **rovnoměrný přímočarý pohyb**, na částici tedy nepůsobí žádná síla,  $|\vec{F}| = 0$ .



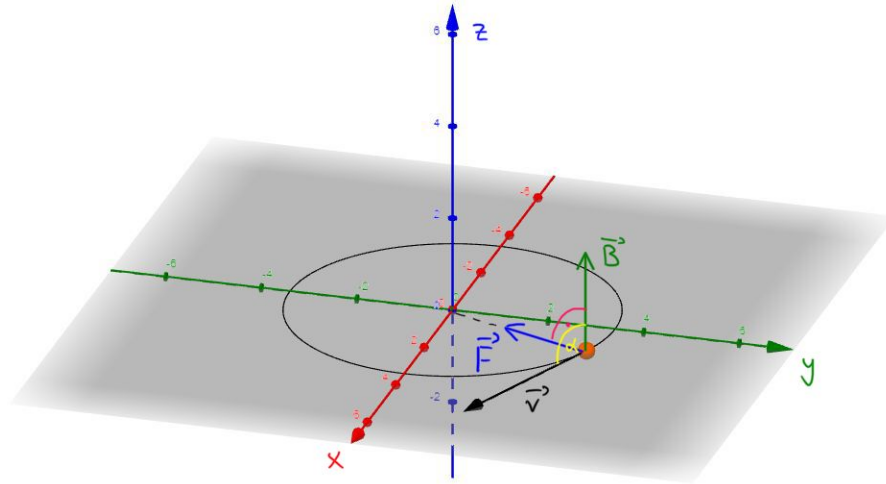
Obrázek 4.2: Rovnoměrný přímočarý pohyb,  $\alpha = 0^\circ$

<sup>3</sup>Už jenom kvůli tomu je zajímavé ji sledovat. Ale jak uvádí Dvořák (2020-21): „Lorentzova síla je základním vztahem popisujícím v rámci klasické fyziky chování elektromagnetického pole a vzájemnou interakci pole a nabitých částic. Navíc tento vztah platí i ve speciální teorii relativity.“ Všechno, co vidíme kolem sebe, se skládá z nabitých částic, takže porozumění jejich pohybu má jistě velký smysl a užitek.

<sup>4</sup>Obrázek byl vygenerován pomocí appletu oPhysics.

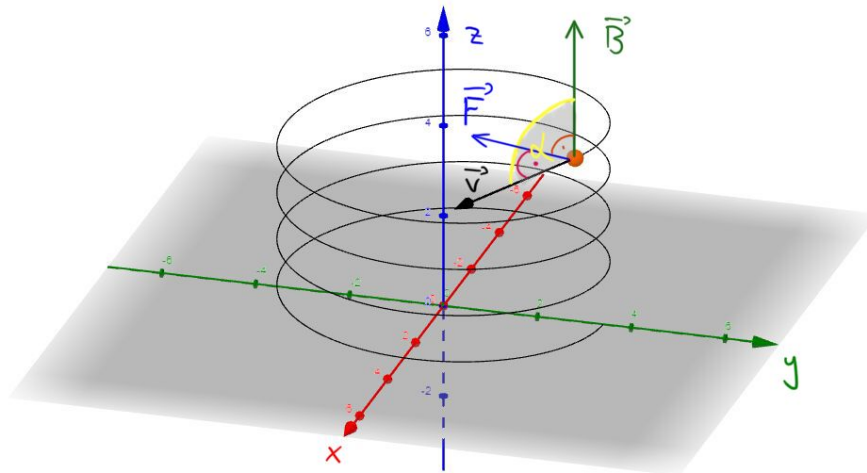


2.) Částici vystřelujeme kolmo na  $\vec{B}$ ,  $\alpha = 90^\circ$ . Pozorujeme **pohyb po kružnici**. Při takovém pohybu se směr rychlosti  $\vec{v}$  mění, na částici působí Lorentzova síla. Samotná velikost rychlosti ale zůstává stejná.<sup>5</sup> Proto síla, a tedy i zrychlení musí působit **kolmo** na  $\vec{v}$ , tedy **do středu** kružnice (obr. 4.3). Pozorujeme, že vektor  $\vec{B}$  je kolmý na rovinu kružnice, je tedy kolmý i na  $\vec{F}$ . Celkově pak:  $\boxed{\vec{F} \perp \vec{v} \wedge \vec{F} \perp \vec{B}}$ .



Obrázek 4.3: Pohyb po kružnici,  $\alpha = 90^\circ$

Jak víme, pokud částici vystřelíme pod libovolným úhlem  $\alpha \in (0, 90^\circ)$ , pozorujeme **pohyb po šroubovici**:



Obrázek 4.4: Trajektorií je šroubovice

Pohyb po šroubovici však můžeme chápat jako pohyb složený z případů 1.) a 2.) – částice totiž „krouží“ a zároveň se pohybuje „nahoru“ směrem  $z$ . Pohyb částice jsme tedy schopni popsat obecně pro všechny možné úhly  $\alpha \in \langle 0^\circ, 90^\circ \rangle$ .<sup>6</sup> Obecnou trajektorií částice v homog. mag. poli je tedy opravdu šroubovice. Pohyb rovnoměrný přímočarý a pohyb po kružnici jsou pak pouze speciální případy.

<sup>5</sup>Podobně jako když jedeme po kruhovém objezdu, na tachometru vidíme stejnou rychlost, přestože se vektor rychlosti jistě mění.

<sup>6</sup>Pokud bychom částici vystřelili „směrem dolů“  $v_z < 0$ , její trajektorií bude opět šroubovice. Její složka  $v_z$  se opět nebude měnit. Krouživý pohyb však bude okolo jiné osy – k tomu se blíže vyjádříme v následující sekci 4.1.2.

## Jaký směr však má síla $\vec{F}$ ?

Částice se ve směru osy  $z$  pohybuje rovnoměrně přímočaře, složka rychlosti  $v_z$  je konstantní, síla tak částici v směru osy  $z$  nijak neurychluje,  $F_z = 0$ . Pohyb ve směru osy  $z$  tak máme vyřešen.

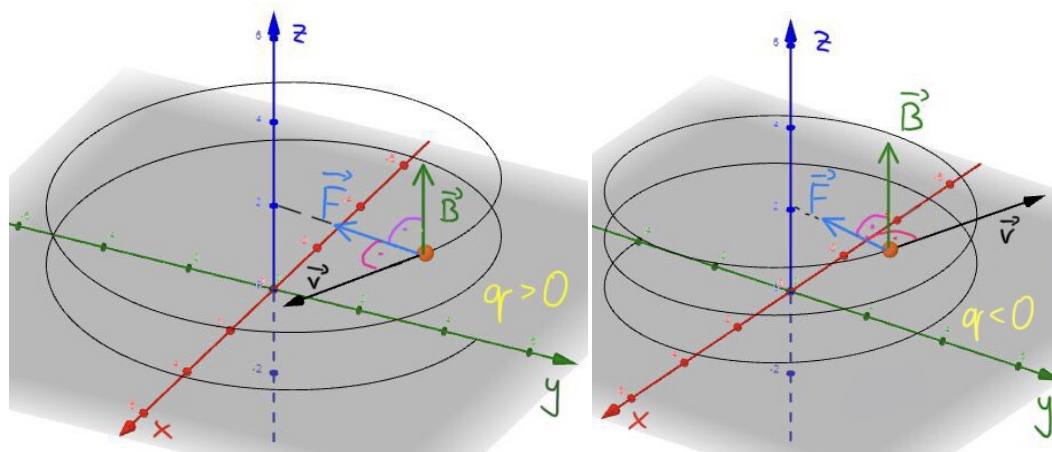
Pohyb ve směru os  $x, y$  budeme nejlépe analyzovat, pokud si představíme „pohled shora.“ Pak se pohyb po šroubovici jeví jako pohyb po kružnici, který ale již známe — síla působí do středu kružnice, tj. kolmo na  $\vec{v}$ .

Jelikož je ale  $F_z = 0$ , pak musí  $\vec{F} \perp \vec{B}$ .<sup>7</sup>

Lorentzova síla  $\vec{F}$  v homogenním magnetickém poli je **kolmá** na  $\vec{v}$  i  $\vec{B}$ .<sup>8</sup>

### 4.1.2 Orientace síly $\vec{F}$

Sledujme na obrázku 4.5 případ, kdy „protonové dělo“ vyměníme za „elektronové,“ tedy když náboj částice bude záporný. Porovnejme tyto případy.



Obrázek 4.5: Orientace síly závisí na **znaménku** náboje  $q$

Všimněme si, že pokud by síla byla určena vztahem  $\vec{F} = \vec{v} \times \vec{B}$  (což by byl „první rozumný nástřel“), směr síly by byl pro záporné částice neodpovídal, je totiž opačný. Směr výsledné síly ale opravíme, pokud jej vynásobíme záporným číslem – člen  $q$  se jeví jako vhodná volba:<sup>9</sup>

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}. \quad (4.2)$$

- Pro  $q > 0$  se směr síly nezmění. Vztah  $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$  směr tedy určuje správně.
- Pro  $q < 0$  je zapotřebí následující úvaha. Zajímá nás orientace, tedy pouze směr. Nechť  $q = -1$ , poté  $\vec{F} = -\vec{v} \times \vec{B} = \vec{B} \times \vec{v}$ .<sup>10</sup> Tedy i pro záporné částice vztah  $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$  směr síly již určuje správně.

Přesvědčili jsme se, že vztah  $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$  správně popisuje orientaci Lorentzovy síly.

<sup>7</sup>Síla  $\vec{F}$  má složky pouze v rovině  $xy$ . Indukce  $\vec{B}$  je na tuto rovinu kolmá.

<sup>8</sup>Což je potvrzení pozorování z úvodu kapitoly.

<sup>9</sup>Náboj  $q$  je skalár, tedy dle 2.2 jsou správně všechny možnosti:  $q\vec{v} \times \vec{B} = \vec{v} \times q\vec{B} = q(\vec{v} \times \vec{B})$ .

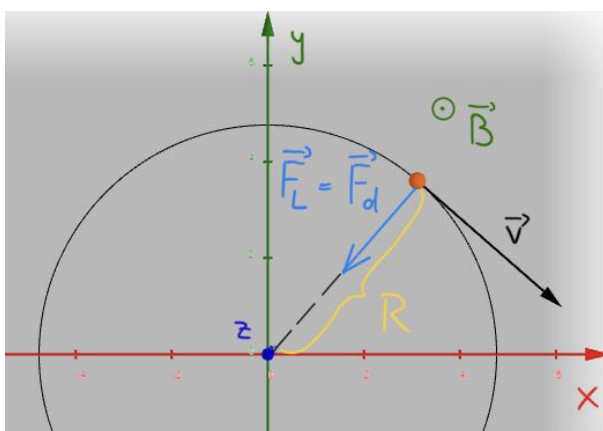
<sup>10</sup>Zde je použita *antikomutativita* vektorového součinu.

### 4.1.3 Velikost síly $\vec{F}$

Uvědomme si, že popisujeme nějakou fyzikální situaci *matematickým modelem*. Na základě experimentu pak vybíráme „vhodný nástroj,“ v našem případě se jím zdá být *vektorový součin*  $q\vec{v} \times \vec{B}$ . Viděli jsme, že směr síly je opravdu popsán tímto součinem.

Zbývá ověřit, že velikost síly je opravdu dána vztahem  $|\vec{F}| = q|\vec{v}||\vec{B}| \sin \alpha$ . To je však otázka experimentu, uveďme například Mengelkamp a kol. (2015). My si přiblížíme středoškolskou úvahu, jak bychom mohli vztah pro velikost síly v principu ověřit.

Stejně jako v kapitole 1 v sekci 1.1.1 s houpačkou tuto sílu musíme s něčím **porovnat**.



Obrázek 4.6: Lorentzova síla se rovná síle dostředivé

Při pohybu po kružnici plní Lorentzova síla  $\vec{F}_L$  funkci **dostředivé síly**  $\vec{F}_d$ ,<sup>11</sup> tedy se rovnají. Rychlost  $\vec{v}$  je kolmá na  $\vec{B}$ , tedy  $\sin \alpha = 1$ . Poté:

$$|\vec{F}_L| = qvB = m \frac{v^2}{R} = |\vec{F}_d|,$$

z čehož dostáváme vzorec pro poloměr otáčení

$$R = \frac{mv}{qB}.$$

Tento postup lze použít i pro případ šroubovice. Vztah pro dostředivou sílu totiž platí obecně (Pachová a Frey, 1964, str. 192), stačí tedy „připsat sinus“:

$$R = \frac{mv}{qB \sin \alpha}, \quad (4.3)$$

kde  $R$  je tentokrát poloměr *oskulační kružnice*.<sup>12</sup>

Vztah (4.3) pak lze využít pro měření velikosti Lorentzovy síly. Např. bychom měřili závislost  $R(q)$  poloměru na náboji. Ostatní parametry bychom zafixovali (byly by konstantní), a poté měřili. Ukázalo by se, že se jedná o nepřímou

<sup>11</sup>Velikost dostředivé síly je  $|\vec{F}_d| = v^2/R$ , kde  $R$  je *poloměr otáčení*.

<sup>12</sup>Jedná se o „poloměr otáčení v daném okamžiku.“ Dá se dokázat, že úhel, který v homogenním poli je úhel vektorů  $\vec{v}, \vec{B}$  konstantní (Pachová a Frey, 1964, str. 201).

úměrnost  $R(q) = k \cdot \frac{1}{q}$ , což potvrzuje předpověď. Podobně bychom měřili závislost  $R$  na zbylých veličinách. Celkově bychom naměřili

- $R(q) = k_1 \cdot \frac{1}{q}; \quad k_1 = \text{konst.}$
- $R(v) = k_2 \cdot v; \quad k_2 = \text{konst.}$
- $R(B) = k_3 \cdot \frac{1}{B}; \quad k_3 = \text{konst.}$
- $R(\alpha) = k_4 \cdot \frac{1}{\sin \alpha}; \quad k_4 = \text{konst.}$

Tím pádem bychom potvrdili platnost vztahu (4.3). Ten jsme ale odvodili z teorie, že  $|\vec{F}_L| = q|\vec{v}||\vec{B}| \sin \alpha$ . Jelikož se teorie shoduje s experimentem, prohlásíme pak vztah (4.4) za **velikost** Lorentzovy síly:<sup>13</sup>

$$|\vec{F}_L| = q|\vec{v}||\vec{B}| \sin \alpha. \quad (4.4)$$

Geometrická interpretace vektorového součinu zde není tolik názorná, jako v kapitole 1, stále je však platná. Vztah pro velikost Lorentzovy síly  $|\vec{F}| = q|\vec{v}||\vec{B}| \sin \alpha$  opět popisuje obsah rovnoběžníku určeného vektory  $\vec{v}, \vec{B}$ . Tento obsah je však přenásoben nábojem  $q$ . To bylo z důvodu „opravy“ orientace síly pro záporný náboj.

Poskytneme i další důvod k násobení  $q$ : z hlediska *rozměrové analýzy*<sup>14</sup> musí mít tento obsah rozměr síly, což platí pouze tehdy, když ve obsahu je náboj  $q$ .

#### 4.1.4 Shrnutí

Rozebrali jsme pohyb nabitě částice v homogenním magnetickém poli. Odpozovali jsme následující vlastnosti Lorentzovy síly:

- je kolmá na  $\vec{v}, \vec{B}$
- její orientace s úpravou o náboj  $q$  splňuje pravidlo pravé ruky
- její velikost je  $|\vec{F}| = q|\vec{v}||\vec{B}| \sin \alpha$

Vidíme, že se přesně jedná o definiční vlastnosti vektorového součinu. Proto ji můžeme definovat pomocí vztahu (4.5):<sup>15</sup>

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}. \quad (4.5)$$

Ve stručnosti je tedy „krouživý pohyb“ částic důsledkem Lorentzovy síly, která působí kolmo na vektor rychlosti. Zajímavým pozorováním je, že kvůli této kolmosti Lorentzova síla skutečně částice nijak **neurychluje**, ale pouze mění jejich směr.<sup>16</sup>

<sup>13</sup>Vzpomeňme na poznámku o důležitosti experimentu jako základu pro ověřování vzorců.

<sup>14</sup>Zjednodušeně jde o to, že „jednotky na levé straně musí vycházet stejně jako jednotky na pravé straně,“ tedy  $[\vec{F}] = \text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2} = [q] \cdot [\vec{v}] \cdot [\vec{B}]$ , což platí.

<sup>15</sup>Jak jsme zmínili v sekci 4.1.3, vektorový součin je oním „vhodným nástrojem“, který danou situaci správně popíše.

<sup>16</sup>Pro úplnost uveďme, že jsme zkoumali Lorentzovu sílu pouze pro magnetické pole. Pohyb nabitých částic ale ovlivňuje i elektrické pole, skutečný definiční vztah tak je  $\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$ , kde  $E$  je elektrická intenzita. Implicitně jsme tedy předpokládali  $\vec{E} = 0$ . To proto, že naším cílem bylo studovat „magnetickou složku,“ protože obsahuje vektorový součin.

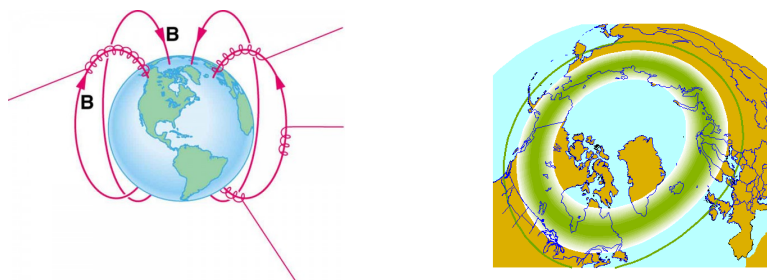
Zajímavé je také pozorování, že síla  $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$  nekoná práci. Pojmu práce se stručně věnujeme v sekci 5.1.1.

## 4.2 Nabitá částice v nehomogenním poli

Na závěr kapitoly si pouze naznačme pohyb částice v magnetickém poli, které není přesně homogenní a je dostatečně „rozumné“<sup>17</sup> (např. magnetické pole Země). Vztah pro (4.5) Lorentzovu sílu totiž platí obecně (Sedlák a Štoll, 2002, str. 200).

Citujme zdroj (Dvořák, 2016-20a, str. 5):

„Částice se zřejmě nemohou „příliš pohybovat“ kolmo na magnetické indukční čáry a spíše se pohybují podél nich.<sup>18</sup> Díky tomu jsou například nabitě částice přilétající k Zemi „zachyceny“ jejím magnetickým polem a pohybují se podél magnetických indukčních čar směrem k polárním oblastem (kde díky jejich interakci s molekulami vzduchu vyvolávají polární záře).“



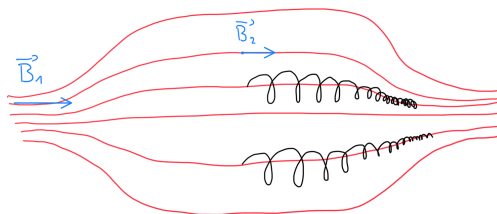
Obrázek 4.7: nalevo – vznik polární záře; napravo – předpověď k datu 6. 7. 2022

Na obrázku 4.7 nalevo je ilustrováno, že nabitě částice ze Slunce (tzv. *sluneční vítr*) jsou magnetickým polem Země vychýleny do polárních oblastí. O tom se můžeme přesvědčit pohledem 4.7 napravo. Zde je uvedena předpověď pro intenzitu polární záře.<sup>19</sup>

### 4.2.1 Poznámka pro zájemce: magnetické stínění

Pouze pro doplnění si uvedme, že model v předchozí sekci je pouze kvalitativní. Se změnou velikosti magnetické indukce — což se v nehomogenním poli jistě může objevit — se mění i poloměr  $R$ . Jak víme ze vzorce (4.3) s rostoucí indukcí klesá nepřímě úměrně.

Tohoto principu se využívá v tzv. *magnetických zrcadlech*, kde je magnetické pole uspořádáno tak, aby nabitě částice byly „chyceny do pasti,“ viz obr. 4.8.<sup>20</sup>



Obrázek 4.8: Ilustrace magnetické pasti,  $|\vec{B}_1| \gg |\vec{B}_2|$

<sup>17</sup>Tj. je spojitě a má spojitě první derivace.

<sup>18</sup>S tím, že se kolem nich „obtačejí“ podobně jako výše uvedená šroubovice.

<sup>19</sup>Aktuální předpovědi jsou dostupné na <https://www.gi.alaska.edu/monitors/aurora-forecast>.

<sup>20</sup>Kinetická energie zůstává stejná, postupně se však „přelévá“ v otáčivý pohyb, efektivně je pak částice bržděna, až zastavena, proto se někdy hovoří o *magnetické pasti*. To už jsme ale opravdu mimo téma vektorového součinu.

# Kapitola 5

## Rotace vektorového pole

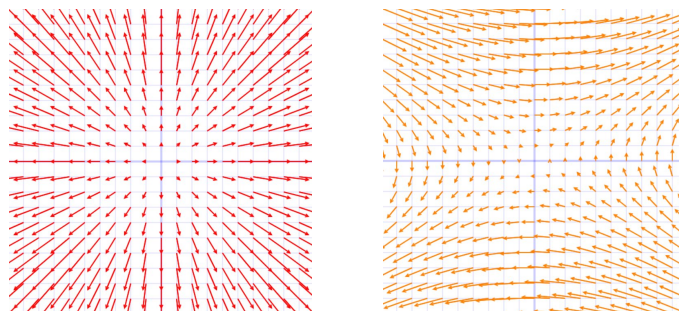
V kapitole o Lorentzově síle jsme na závěr uvedli případ nehomogenního pole – magnetického pole Země. To nás vede k otázce, jak takové pole matematicky popsat?

V této kapitole se zaměříme na pochopení pojmu **rotace** vektorového pole. Z počátku se možná bude zdát, že následující text s vektorovým součinem vůbec nesouvisí. Uvidíme ale, že daná stať nám poslouží jako motivace k tomu rotaci (nebo také vířivost) vektorového pole zavést.

Opět se budeme držet fyzikální interpretace a názornosti. Cílem není napsat pojednání o vektorové analýze v plné obecnosti a rigorizitě, neboť jde o látku skutečně komplikovanou a náročnou. Proto budeme vektorové pole chápat v kontextu známých fyzikálních veličin (elektrická intenzita, magnetická indukce, či pole rychlosti toku tekutiny), neboť pak bude daná matematická podstata mnohem názornější.

### 5.1 Vektorové pole vektorové proměnné

Vektorovou veličinu můžeme chápat jako *vektorové pole vektorové proměnné*. To znamená, že danému bodu prostoru určeného  $\vec{r}$  přiřadí vektor  $\vec{E}$ , příkladem budiž elektrická intenzita  $\vec{E}(\vec{r}, t)$  – typicky pak závisí na poloze a na čase.<sup>1</sup>



Obrázek 5.1: Ilustrace vektorových polí

Předpokládejme, že je naše vektorové pole „hezké“,<sup>2</sup> tedy takové, abychom si jej mohli modelovat pomocí *proudnic*, tedy orientovaných křivek. Za použití analogie z hydrodynamiky nám „ukážou směr proudění“ dané veličiny (např. siločáry).

<sup>1</sup>Obecně se jedná o funkci více proměnných  $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ . Daným prostorem pak rozumíme vektorový prostor dimenze  $n$ .

<sup>2</sup>Které je spojitě a má spojitě i první derivace podle všech proměnných.

Ukazuje se, že vektorový popis i takového „hezkého“ pole (a tedy jeho proudění), je velmi náročná úloha.<sup>3</sup> V jistých situacích si však takový popis můžeme významně zjednodušit.

Daným zjednodušením máme na mysli zavedení *potenciálu*,<sup>4</sup> tedy funkce, jejímž výsledkem již není vektor, ale skalár – tedy pouhé číslo. Jako příklad můžeme uvést „výšku v krajině,“ ta nám totiž určuje *potenciální* energii (podle vztahu  $E_p = mgh$ ).

Pokud bychom do daného místa reliéfu krajiny umístili malou kuličku, bude se kutálet *směrem největšího spádu* dolů – směrem daného *vektorového pole*.<sup>5</sup>

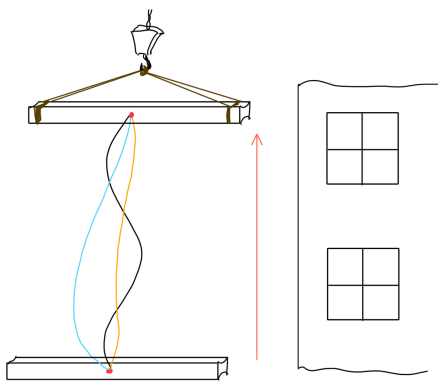
### 5.1.1 Konzervativní pole a potenciál

Uveďme, že následující sekce je významně inspirována textem Dvořák (2016-20b), na němž dále staví a rozvíjí jej.

Již samotný název *potenciál* nám napovídá, že se jedná o jakousi potenci daného pole, jeho schopnost či možnost „něčeho“.

Možnost čeho? Např. možnost konat práci: Když v zimě do kopce vytlačíme sáňky a neubrzdíme je, sjedou nám zpět dolů – sjedou, protože tuto práci vykonalo tíhové pole.

To nás vede k klíčovému pojmu *konzervativního pole*. Tím budeme rozumět pole, v němž vykonaná práce závisí pouze na počátečním a koncovém bodu, nikoli na trase.<sup>6</sup> To ilustrujeme na tom, že stavební jeřáb pro opakované zvednutí ocelového trámu ze země do 6. patra vykoná vždy stejnou práci, přestože se trám při jednotlivých zvedáních kývá vždy jinak a jeho trajektorie je různá – vykonaná práce tedy nezáleží trajektorii trámu.<sup>7</sup>



Obrázek 5.2: Práce jeřábu pro zvednutí trámu nezávisí na jeho trajektorii

<sup>3</sup>Uveďme např. Navier-Stokesovy rovnice popisující proudění nestlačitelné newtonovské kapaliny, úlohu, která stále není vyřešena v plné obecnosti. Jedná se o jeden z tzv. *problémů milénia*, za jehož řešení Clayův matematický institut vypsala odměnu 1 milionu dolarů.

<sup>4</sup>Skalární funkce vektorové proměnné

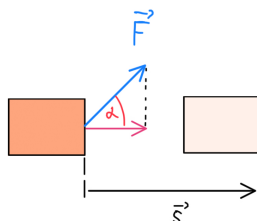
<sup>5</sup>Matematicky to interpretujeme pomocí *gradientu*, což je funkce, která nám z potenciálu určí dané vektorové pole.

<sup>6</sup>Tohle je značně neintuitivní. V životě máme totiž zažitý vliv odporových třecích sil, které konzervativní nejsou.

<sup>7</sup>To vysvětluje název konzervativní pole, protože vykonanou práci si můžeme „zakonzervovat.“

Jak matematicky předem popsané úvahy vyjádřit? Bohužel se neobejdeme bez integrálů, čtenáři však postačí pochopit danou úvahu:

Fyzikálně se práce počítá jako „síla po dráze,“ tedy  $W = F \cdot s$ . Pokud nepůsobí rovnoběžně ve směru pohybu, upraví se vztah jako  $W = F s \cos \alpha$ .

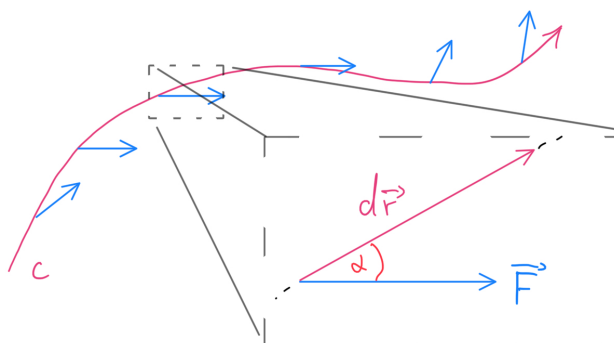


Obrázek 5.3: Práce jako skalární součin síly  $\vec{F}$  a posunutí  $\vec{s}$

Zde možná poznáváme středoškolské vyjádření *skalárního součinu*, proto pak obecně

$$W = \vec{F} \cdot \vec{s}. \quad (5.1)$$

Danou „trajektorii trámu“ můžeme vyjádřit pomocí křivky  $c$ . Celkovou práci vykonanou silovým polem pak vyjádříme tzv. *křivkovým integrálem* – ten můžeme chápat tak, že celkovou práci rozložíme do mnoha „malinkých kousků práce“  $dW = \vec{F} \cdot d\vec{r}$ , které poté zpětně sečteme, tedy integrujeme.<sup>8</sup>



Obrázek 5.4: Ilustrace myšlenky křivkového integrálu

Matematicky pak celkovou práci po křivce  $c$  vyjádříme

$$W = \int_c \vec{F} \cdot d\vec{r}.$$

Jak máme rozmyšleno, pro konzervativní pole tato *práce závisí pouze na počátečním a koncovém bodu* – rovná se **rozdílu potenciálu** v těchto bodech.<sup>9</sup>

<sup>8</sup>Kdybychom kousek křivky dostatečně přiblížili, tak každé „hezké“ vektorové pole můžeme brát jako konstantní a „kousek práce“ počítat jako  $dW = \vec{F} \cdot d\vec{r}$ , což vidíme na obr. 5.1.1.

<sup>9</sup>V případě zvedání trámu pak práce  $W$  bude rovna rozdílu potenciálních energií  $E_p$  v počátečním a koncovém bodu.



Vektorové pole je konzervativní, pokud:<sup>10</sup>

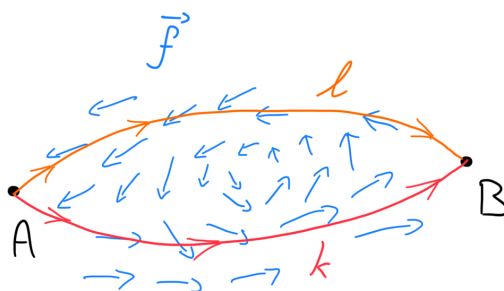
$$W = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = \varphi(B) - \varphi(A) = \text{konst.} \quad (5.2)$$

Zde potenciál v bodě  $A$  značíme  $\varphi(A)$ , podobně pak pro  $B$ .

Ukázali jsme si, že zavést potenciál je nesmírně užitečné, protože složitou úlohu převádí na „pouhé odečítání čísel.“ Máme dokonce podmínku (5.2), kdy je vektorové pole konzervativní, a tedy kdy potenciál zavést lze. Daná podmínka je však velmi těžko ověřitelná.<sup>11</sup> Chceme proto najít jinou podmínku, která nám potvrdí, že je vektorové pole konzervativní.

## 5.2 Motivace pojmu rotace vektorového pole

Sledujme následující úvahu. Mějme vektorové pole  $\vec{f}$  vyjadřující např. proudění vody v aquaparku, viz obrázek 5.5. Ptáme se, jakou musíme vykonat práci,<sup>12</sup> abychom se z bodu  $A$  dostali do bodu  $B$  po křivkách  $k, l$ .



Obrázek 5.5: Vířivé proudění vody  $\vec{f}$

Vidíme, že tekoucí voda mezi body  $A, B$  tvoří *vír*.

Je také jasné, že po křivce  $k$  bude vykonaná práce menší než po křivce  $l$ . V prvním případě nás voda unáší a pomáhá nám, v druhém bychom museli „plavat proti proudu.“

Celkově tedy pozorujeme, že pokud pole *víří*, pak není konzervativní. Je tedy rozumné chtít takovou *míru vířivosti*, čili **rotaci**, definovat.

Stejně jako v předchozí sekci („mikropráce“  $dW$ ) se pokusíme toto víření popsat *lokálně*, tedy v okolí daného bodu. Nakonec pak vyslovíme myšlenku, že vektorové pole bude konzervativní (a tedy bude existovat potenciál), pokud v *každém bodě* bude jeho rotace nulová, tedy podmínku *globální*.

<sup>10</sup>Alternativně se takové vyjádření formuluje, že křivkový integrál po libovolně uzavřené křivce musí být nulový  $\oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$ . Interpretace je poměrně jednoduchá – když po dané cestě skončíme zpět na stejném místě, počáteční bod a koncový bod splývají, rozdíl v potenciálu tedy musí být nula.

<sup>11</sup>Pro nekonečně mnoho dvojic bodů bychom museli ověřit její platnost pro nekonečně mnoho možných křivek.

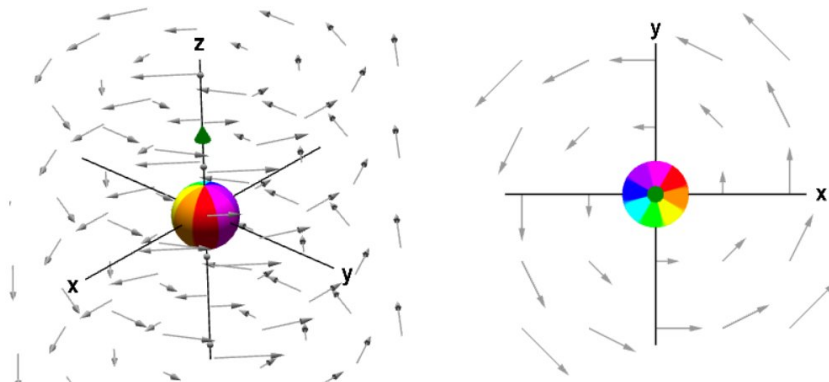
<sup>12</sup>Či jakou musíme vyvinout námahu.

## 5.3 Matematický popis rotace vektorového pole

Myšlenky v následující sekce byly inspirovány materiály od Sandersona.

K lokálnímu popisu rotace použijme následující představu. Mějme velmi malý balónek, který umístíme do libovolného bodu  $R$  prostoru  $\mathbb{E}_3$ . Bez újmy na obecnosti zvolme soustavu souřadnic, aby  $R = (0, 0, 0)$ .

Pokud vektorové pole  $\vec{E} = (E_x, E_y, E_z)$  v okolí daného bodu  $R$  víří, pak se balónek bude **otáčet**.<sup>13</sup> Pokud se balónek otáčet nebude, pole  $\vec{E}$  v okolí bodu  $R$  proudí nevířivě, jeho rotace tedy bude nulová.<sup>14</sup>



Obrázek 5.6: Představa rotace pomocí otáčení „velmi malého balónku“

### 5.3.1 Rotace ve 2D

Danou situaci nejprve kvůli jednoduchosti budeme sledovat pouze v rovině  $xy$ , následně pak vyjádření rotace zobecníme do prostoru  $\mathbb{E}_3$ . Budeme potřebovat pojem derivace, nicméně jsme se snažili, aby i čtenář bez její znalosti myšlenku našeho vyjádření pochopil.

Již z kapitoly 1 víme, že rotační pohyb lze popsat normálovým vektorem na rovinu otáčení, tedy  $xy$ . Zároveň chceme rozlišit mezi otáčením „doleva a doprava“. Míru vířivosti zároveň chceme vyjádřit konkrétním číslem.<sup>15</sup>

Z tohoto důvodu budeme *rotaci* vektorového pole popisovat **vektorem**, který je kolmý na rovinu otáčení balónku. Zbývá nám rozmyslet si, jak určit číslo, kterým *míru vířivosti* popíšeme.

Víření (a tedy rotaci balónku) na obrázku 5.6 prohlásíme za **kladný** směr rotace. Takové otáčení můžeme určit (jak již známe) pomocí pravidla pravé ruky – prsty by směřovaly ve směru rotace, palec nám pak určí *orientaci* vektoru rotace.<sup>16</sup>

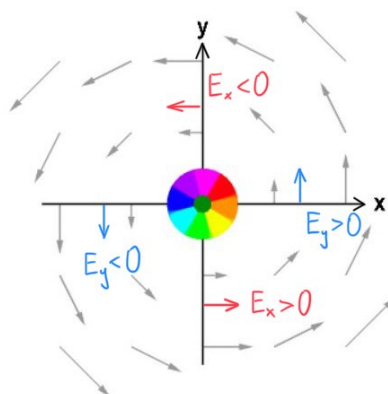
<sup>13</sup>Vzpomeňme si na otáčivý účinek síly. Zde má otáčivý účinek vektorové pole. Přestože se nacházíme v podstatně pokročilejší látce, princip je pořád stejný. Pokud jde o otáčení, tušíme, že se dříve či později objeví vektorový součin.

<sup>14</sup>Obrázek byl získán z appletu Nykamp a Harman a následně upraven.

<sup>15</sup>Cítíme zde přítomnost vektorového součinu?

<sup>16</sup>Tuto orientaci na obrázku 5.6 – nalevo – ukazuje zeleně vyznačený vektor.

Víme, že obě složky  $E_x$  i  $E_y$  balónek roztáčejí v kladném smyslu. Na obr. 5.7 nyní sledujeme, jak se *mění*<sup>17</sup> složka vektorového pole  $E_y$  ve směru osy  $x$ .



Obrázek 5.7: Pravotočivé víření vektorového pole

Vidíme, v okolí bodu  $R$  složka  $E_y$  ve směru osy  $x$  **roste**.<sup>18</sup> Její příspěvek k rotaci si tedy označme jako  $G$  a vyjádříme jej pomocí parciální derivace<sup>19</sup>

$$G = \frac{\partial E_y}{\partial x}.$$

Obdobně pak v okolí bodu  $R$  sledujeme, že ve směru osy  $y$  složka  $E_x$  **klesá**.<sup>20</sup> Ovšem složka  $E_x$  balónek roztáčí stejným směrem jako  $E_y$ , přestože klesá! My ale chceme, aby příspěvek k rotaci složky  $E_x$  měl stejné znaménko. Z toho důvodu její příspěvek k rotaci, který si označíme  $H$ , obohatíme o záporné znaménko, čímž tento problém vyřešíme.<sup>21</sup> Tedy

$$H = -\frac{\partial E_x}{\partial y}.$$

Nyní jsme postihli všechny příspěvky k rotaci v rovině  $xy$ .

Velikost rotace vektorového pole v rovině vyjádříme součtem příspěvků  $G + H$ , tedy číslem:

$$Q = \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}.$$

### 5.3.2 Rotace ve 3D

Máme zavedenou rotaci vektorového pole v bodě  $R$  v rovině  $xy$ . Zobecnění do prostoru  $\mathbb{E}_3$  již provedeme snadno. Stejně, jako jsme v předchozích kapitolách rozkládali vektor síly  $\vec{F}$  do složek  $F_x, F_y, F_z$ , můžeme do složek rozložit i vektor rotace vektorového pole.

<sup>17</sup>Právě takovou změnu budeme popisovat pomocí (parciální) derivace.

<sup>18</sup>Její hodnoty jsou dokonce nejdříve záporné a poté kladné, tedy skutečně roste.

<sup>19</sup>„Jmenovatel“  $\partial x$  nám určuje, v jakém směru zkoumáme růst složky „čitatele.“

Daná derivace je **kladná**, protože složka  $E_y$  **roste**.

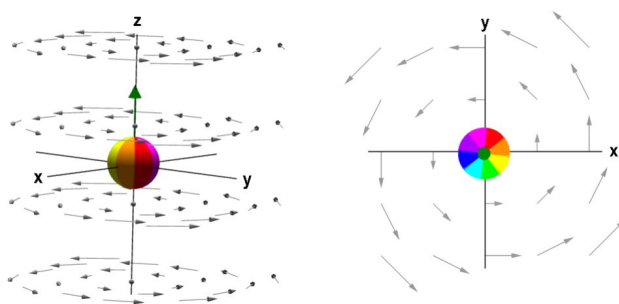
<sup>20</sup>Zde je derivace **záporná**, protože ve směru  $x$  složka  $E_x$  **klesá**.

<sup>21</sup>Nechť si čtenář danou úvahu rozmyslí, je totiž naprosto klíčová.

Označme si vektor rotace vektorového pole jako  $\text{rot}\vec{E}$ . Jaký bude význam jednotlivých složek?

V předchozí sekci 5.3.1 jsme si rozmysleli, že rotaci v rovině  $xy$  popíšeme vektorem, který je na ni kolmý, určuje směr otáčení dle pravidla pravé ruky. Jeho velikost již také známe, ta bude dána výrazem  $Q = \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}$ . Ale vektor kolmý na rovinu  $xy$  je vektor  $\vec{e}_3$  báze ve směru osy  $z$ . Tedy výraz  $Q$  bude  $z$ -ovou souřadnicí vektoru rotace  $\text{rot}\vec{E}$ .

Výše popsané ilustrujeme na obrázku 5.8. V daném konkrétním příkladě se balónek otáčí pouze okolo osy  $z$ . Proto je (v souladu se zavedenou orientací) celkový vektor  $\text{rot}\vec{E}$  orientován ve směru osy  $z$ . Pokud si vektorové pole rozložíme do podobných případů (což můžeme), obdobně dostaneme všechny souřadnice.



Obrázek 5.8: Ilustrace vířivého pole

Jinými slovy:

- $x$ -ová souřadnice vektoru  $\text{rot}\vec{E}$  určí rotaci pole v rovině  $yz$
- $y$ -ová souřadnice vektoru  $\text{rot}\vec{E}$  určí rotaci pole v rovině  $xz$
- $z$ -ová souřadnice vektoru  $\text{rot}\vec{E}$  určí rotaci pole v rovině  $xy$

Poté jednotlivé složky stačí sečíst, čímž dostaneme výsledný vektor rotace

$$\text{rot}\vec{E} = \left( \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}, \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x}, \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right). \quad (5.3)$$

Výraz (5.3) nám jistě připomíná souřadnice vektorového součinu. Zbývá si rozmyslet vektory, jejichž tento vektorový součin bude výsledkem.

Definujme proto nový *operátor* nabla:<sup>22</sup>

$$\vec{\nabla} = \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

Rotaci vektorového pole pak můžeme stručně zapsat pomocí vektorového součinu:<sup>23</sup>

$$\text{rot}\vec{E} = \vec{\nabla} \times \vec{E} \quad (5.4)$$

<sup>22</sup>Nejedná se přísně vzato o *vektor*, ale opravdu o *operátor*. V našem případě to je zobrazení, které danému vektoru  $\vec{u}$  prostoru  $\mathbb{E}_3$  přiřadí vektor  $\vec{v}$  stejného prostoru. Označíme ho však šipkou a budeme s ním jako s vektorem počítat.

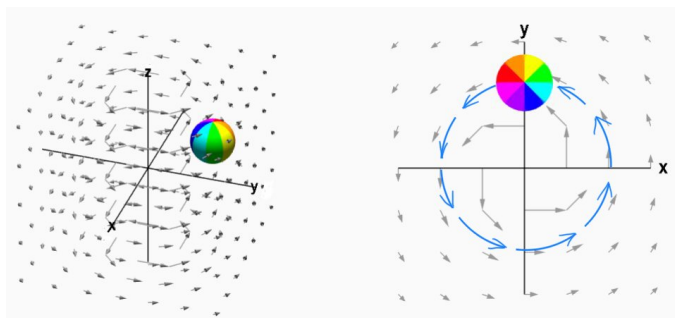
<sup>23</sup>Ekvivalentně lze vyjádřit vztah (5.4) pomocí Levi-Civitova symbolu  $\vec{\nabla} \times \vec{E} = \epsilon_{ijk} \frac{\partial E_k}{\partial x_j} \vec{e}_i$ .

## 5.4 Nuance a příklady rotace vektorového pole

Jak jsme zmínili, rotaci definujeme v daném bodě  $R$ . Jedná se o lokální, „mikroskopický“ popis. Nyní si ukážeme pár neintuitivních příkladů, na nichž budeme ilustrovat, že rozhodovat o rotaci pole „podle obrázků“ nemusí být vždy dobrý nápad. V poznámkách pod čarou si rotace vypočítáme pomocí (5.3).<sup>24</sup>

### 5.4.1 Nevěřivé pole s makroskopickou rotací

Sledujme vektorové pole na obrázku 5.9.



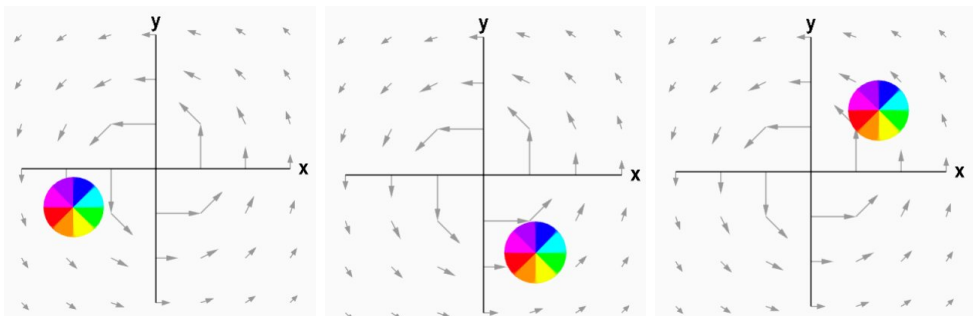
Obrázek 5.9: Nevěřivé vektorové pole způsobující makroskopické otáčení

Balónek bude v daném poli vykonávat pohyb po kružnici se středem na ose  $z$  (kružnici jsme modře vyznačili). Mohlo by nás napadnout, že rotace takového pole opět bude směřovat ve směru osy  $z$ , protože se přeci okolo ní balónek otáčí. Taková úvaha je však **úplně špatně**.

Výše popsaná úvaha se vztahuje k makroskopickému pohybu balónku. Rotaci jsme však definovali lokálně v **daném bodě** – vektor rotace nám totiž určuje *směr a velikost* „otáčení balónku,“ ale pouze v daném bodě! Makroskopický pohyb vůbec nepopisuje a nesouvísí s ním.

V konkrétním příkladu na obrázku 5.10 je totiž vektorové pole *nevěřivé*, jeho rotace je tedy nulová. To znamená, že v žádném bodě<sup>25</sup> tohoto pole se balónek neotáčí okolo své osy.

Fakt, že je balónek z makroskopického hlediska polem po kružnici *unášen* (proudnicí je kružnice), rotaci daného pole nijak neovlivní.<sup>26</sup>



Obrázek 5.10: Balónek je polem unášen, nijak však nerotuje – pole tak nevěří

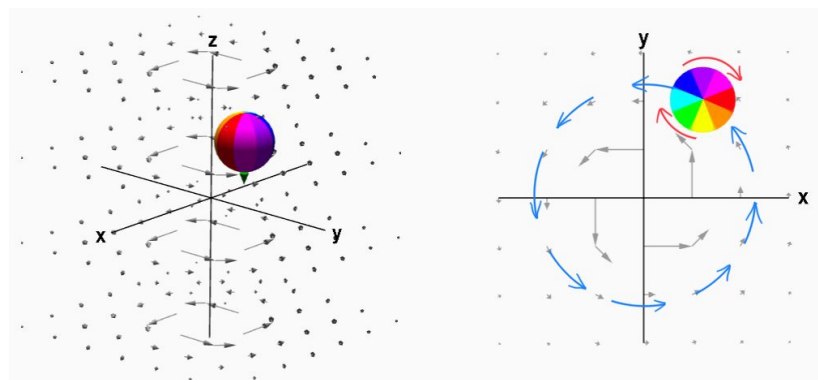
<sup>24</sup>Nykamp

<sup>25</sup>Kromě osy  $z$ , kde pole diverguje.

<sup>26</sup>Matematické vyjádření pole je  $\vec{F}(x,y,z) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}, 0\right)$ ; ale  $\text{rot}\vec{F} = (0,0,0)$ , protože  $\frac{\partial F_y}{\partial x} = \frac{\partial F_x}{\partial y}$ , což se v  $z$ -ové souřadnici odečte na nulu.

## 5.4.2 Pole s opačnou rotací směru makroskopického otáčení

Opět sledujeme vektorové pole na obrázku 5.11



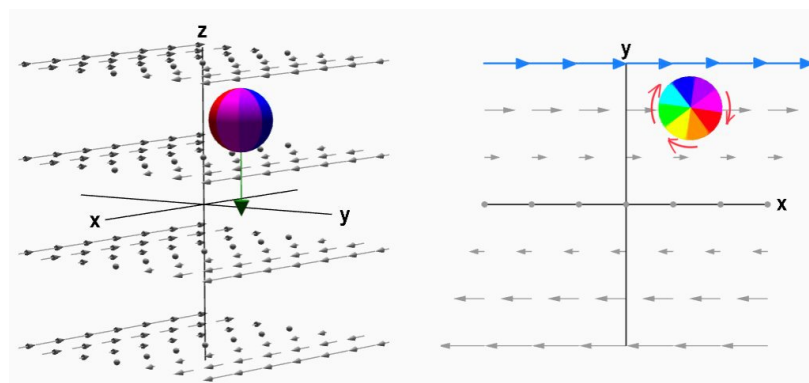
Obrázek 5.11: Vektor rotace směřuje proti směru osy  $z$

Na obrázku je opět modře vyznačen *směr proudnice* – tedy směr makroskopického pohybu. Červeně je však vyznačen rotační pohyb balónku v daném bodě, který je v *opačném směru* makroskopického proudění daného pole.

To je způsobeno tím, že blíže ose  $z$  je intenzita proudění pole větší a rostoucím poloměrem pak klesá. Celkem logicky se pak balónek otáčí vyznačeným směrem, přestože to na první pohled nemusí být zřejmé.<sup>27</sup>

## 5.4.3 Pole s nenulovou rotací, jehož proudnice jsou přímky

Na posledním příkladu si ukážeme, že vektorové pole může mít nenulovou rotaci i v případě, kde se žádné *víry* na první pohled nevyskytují. Pozorujme obrázek 5.12.



Obrázek 5.12: Proudnice jsou přímky, rotace je však nenulová

Pozoruhodné je, že přestože je každá proudnice (vyznačeno modře) *přímkou*, balónek stále rotuje. Velikost  $x$ -ové složky pole ve směru  $y$  roste. To je však přímo znění definice rotace, jak jsme ji zavedli.<sup>28</sup> Skutečně tak dané vektorové pole má nenulovou rotaci.

<sup>27</sup>Matematicky pak pole vyjádříme vztahem  $\vec{F}(x,y,z) = \left( \frac{-y}{(x^2+y^2)^{3/2}}, \frac{x}{(x^2+y^2)^{3/2}}, 0 \right)$ . Vektor rotace je pak  $\text{rot}\vec{F} = \left( 0, 0, \frac{-1}{(x^2+y^2)^{3/2}} \right)$ . Směřuje tedy ve proti směru osy  $z$ . Výpočet potvrzuje výše popsanou úvahu.

<sup>28</sup>Opět uveďme matematický popis.  $\vec{F}(x,y,z) = (y, 0, 0)$ . Rotace je pak  $\text{rot}\vec{F} = (0, 0, -1)$ .

## 5.5 Aplikace rotace vektorového pole

V závěru sekce 5.1.1 o konzervativním poli jsme hledali podmínku, s jejíž pomocí budeme moci snadno určit, zda dané vektorové pole  $\vec{E}$  konzervativní je nebo není. Rozmysleli jsme si, že pokud dané pole nevíří, pak je konzervativní. Danou „míru vířivosti“ jsme pak precizovali zavedením pojmu rotace vektorového pole, které však bylo lokální.

Rotaci vektorového pole však také můžeme chápat jako na jistý *operátor*, který dané vektorové pole  $\vec{E}$  „zanalyzuje a přetransformuje“ je ve výsledné pole  $\text{rot}\vec{E}$  popisující jeho *vířivost*.

Z toho pak přirozeně vyplývá podmínka, že vektorové pole **je konzervativní**, pokud  $\forall \vec{r} \in \mathbb{E}_3$  :<sup>29</sup>

$$\text{rot}\vec{E} = 0 \quad (5.5)$$

Podmínka (5.5) je skutečně velice užitečná. V předchozí sekci jsme si v poznámkách pod čarou ukázali, že vypočítat vektor rotace se znalostí (parciálního) derivování není nijak složité.<sup>30</sup> Navíc v celé kapitole předpokládáme pole „hezká“, takže existenci jejich derivací máme zaručenou. Případnou nulovost výsledného pole  $\text{rot}\vec{E}$  pak okamžitě poznáme.<sup>31</sup>

Podle podmínky (5.5) tak jsme schopni rozhodnout, zda pro dané vektorové pole  $\vec{E}$  existuje potenciál.<sup>32</sup>

### 5.5.1 Maxwellovy rovnice

Jako „zlatý hřeb“ našeho textu si uveďme Maxwellovy rovnice (Sedlák a Štoll, 2002, str. 331), které popisují elektromagnetické pole, zapíšeme je pomocí notace s operátorem nabra:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho \quad (5.6)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} - \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \vec{j} \quad (5.7)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \quad (5.8)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (5.9)$$

Dané veličiny jsou:  $\vec{D}$  = elektrická indukce,  $\vec{B}$  = magnetická indukce,  $\vec{H}$  = magnetická intenzita,  $\vec{E}$  = elektrická intenzita,  $\vec{j}$  = objemová hustota elektrického proudu,  $\rho$  = objemová hustota elektrického náboje.

<sup>29</sup>Samozřejmě lze použít ekvivalentní zápis  $\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$ .

<sup>30</sup>Pro složitá pole to může být pracné, nicméně postup při derivaci je jednoznačně určen.

<sup>31</sup>Narozdíl od podmínky (5.2), která se, jak jsme komentovali, ověřuje velmi nesnadno.

<sup>32</sup>Ten se pak dá dokonce analyticky zkonstruovat, do toho však již v tomto textu nebudeme zabíhat.

Maxwellovy rovnice kompletně popisují chování a vývoj elektromagnetického pole, tedy i jeho vlnění. Na základě těchto rovnic a jejich následného pochopení pak vysvětlujeme elektromagnetické vlny (telekomunikace, světlo, GPS), konstruujeme elektrické motory (pohánějící vlaky, automobily, ale i servomotory v jemných zařízeních), řídí se jimi elektronika i elektrotechnika, atd. Znat tyto rovnice tedy opravdu „stojí za to.“ Jejich nedělitelnou součástí je však **vektorový součin**,<sup>33</sup> s jehož pomocí jsou pak vyjádřeny naprosto elegantně.

## Elektrostatika a středoškolská souvislost s Maxwellovými rovnicemi

Zaměříme se na rovnici (5.10):

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \quad (5.10)$$

Pokud se s časem nemění magnetické pole, je  $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$ . Takový příklad známe ze střední školy – jedná se o elektrostatiku. V tomto případě tedy platí

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0,$$

v čemž poznáváme podmínku nulové rotace. Proto tedy platí, že elektrostatické pole je konzervativní, můžeme tedy zavést *elektrický potenciál*  $\varphi$ . Pomocí něj, jak jsme si zavedli, můžeme snadno určit práci elektrického pole, rozdíl potenciálů je totiž *elektrické napětí*  $U$ . To samozřejmě známe z monočlánků („tužkových baterek“), akumulátorech atd. Na pojmu napětí stojí prakticky všechny elektrické obvody, tedy i součásti všech elektronických a dalších zařízení. To všechno díky tomu, že  $\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$ .<sup>34</sup>

---

<sup>33</sup>Viz rovnice (5.7) a (5.10)

<sup>34</sup>Pro zájemce: Kromě skalárního potenciálu se dá zavést i vektorový potenciál, pomocí něhož se pak dají popsat situace i pro nestatické případy.



# Závěr

Zde končí naše povídání o vektorovém součinu, které můžeme s trochou nadsázky nazvat „Vektorový součin v souvislostech, aneb Od houpačky k Maxwellovým rovnicím.“ Je tedy namístě si tuto cestu zrekapitulovat.

K pojmu vektorového součinu jsme dospěli pomocí zkoumání vlastností momentu síly na jednoduchých příkladech. Jádrem našeho postupu bylo postupné precizování veličiny, kterou jsme popisovali „otáčivý účinek síly.“ Na základě této motivace jsme zjistili, že je vhodné zavést operaci, která dvěma vektorům  $\vec{u}, \vec{v}$  přiřadí vektor  $\vec{w}$  k nim kolmý, orientovaný dle pravidla pravé ruky a jehož velikost je rovna obsahu rovnoběžníku určeného těmito vektory.

Okomentovali jsme i patřičnost názvu *vektorový součin*, neboť se jedná o operaci, která dvěma vektorům přiřazuje opět vektor a která je distributivní vzhledem ke sčítání vektorů, což jsme si dokázali.

Odvodili jsme souřadnice vektorového součinu vzhledem ke kartézské bázi. Výchozím principem byla distributivita vůči sčítání vektorů, poté jsme využili asociativnosti vůči násobení skalárem, z definice jsme určili vektorové součiny jednotlivých bázových vektorů, čímž jsme se souřadnice získali. Zmínili jsme se také o vyjádření souřadnic pomocí determinantu.

Uspořádali jsme algebraické vlastnosti vektorového součinu, které jsme pomocí vyjádření v souřadnicích dokázali. Symetrie souřadnic vektorového součinu nás motivovala k zavedení Levi-Civita symbolu, pomocí kterého jsme si pak důkazy jednotlivých tvrzení zkrátili. Zmínili jsme také základní matematické aplikace vektorového součinu.

Ukázali jsme si fyzikální aplikaci vektorového součinu při hledání definice Lorentzovy síly působící na nabitě částice v magnetickém poli. Pomocí myšleného experimentu v homogenním poli jsme jsme identifikovali její vlastnosti a rozmysleli si její vyjádření, které obsahovalo vektorový součin. Zmínili jsme, že důsledkem této síly je přeměrovávání nabitých částic k polárním oblastem, kde jejich interakcí s atmosférou vzniká polární záře.

Seznámili jsme se s pojmy vektorové a konzervativní pole. Motivováni touhou najít potenciál jsme dospěli k pojmu rotace vektorového pole. Na základě ucho-pitelných fyzikálních úvah jsme zjistili, že se jedná o vektor, jehož souřadnice jsme opět vyjádřili pomocí vektorového součinu. Představili jsme si Maxwellovy rovnice a ukázali si, že i v jejich vyjádření vystupuje vektorový součin. Na závěr jsme vysvětlili jejich souvislost s elektrostatikou, tedy látkou středoškolákům známou.

# Literatura

- DVOŘÁK, L. (2016-20a). Dynamika hmotného bodu i. *Mechanika*, page 7. URL [https://kdf.mff.cuni.cz/vyuka/Mechanika/Mechanika\\_02\\_DynamikaHmotnehoBodu1\\_ver\\_0b.pdf](https://kdf.mff.cuni.cz/vyuka/Mechanika/Mechanika_02_DynamikaHmotnehoBodu1_ver_0b.pdf).
- DVOŘÁK, L. (2016-20b). Dynamika hmotného bodu ii. *Mechanika*, pages 6–15. URL [https://kdf.mff.cuni.cz/vyuka/Mechanika/Mechanika\\_03\\_DynamikaHmotnehoBodu2\\_ver\\_0b.pdf](https://kdf.mff.cuni.cz/vyuka/Mechanika/Mechanika_03_DynamikaHmotnehoBodu2_ver_0b.pdf).
- DVOŘÁK, L. (2020-21). Magnetické pole stacionárního elektrického proudu. *Elektrina a magnetismus*, (1), 5.
- GUIO, P. (2011). Levi-civita symbol and cross product vector/tensor. <https://www.ucl.ac.uk/ucappgu/seminars/levi-civita.pdf>. [Online; accessed 7-July-2022].
- KOČANDRLE, M. a BOČEK, L. (1998). *Analytická geometrie*. Dotisk 3. vydání. Prometheus, Praha 4. ISBN 978-80-7196-390-5.
- KVASNICA, J. (1988). *Mechanika*. Druhé vydání. Academia, Praha. URL [https://physics.mff.cuni.cz/kfnt/vyuka/fyzika1/Kvasnica\\_Mechanika.pdf](https://physics.mff.cuni.cz/kfnt/vyuka/fyzika1/Kvasnica_Mechanika.pdf).
- MACEK, L. (2021). Vektorový součin. *Bakalářská práce*. URL [https://kdm.karlin.mff.cuni.cz/diplomky/lukas\\_macek\\_bp/vektorovy\\_soucin.pdf](https://kdm.karlin.mff.cuni.cz/diplomky/lukas_macek_bp/vektorovy_soucin.pdf).
- MENGELKAMP, J., ZIOLKOWSKI, M., WEISE, K., CARLSTEDT, M., BRAUER, H. a HAUEISEN, J. (2015). Permanent magnet modeling for lorentz force evaluation. *IEEE Transactions on Magnetics*, **51**, 1–1. doi: 10.1109/TMAG.2015.2392082.
- NYKAMP, D. Q. Subtleties about curl. [https://mathinsight.org/curl\\_subtleties](https://mathinsight.org/curl_subtleties). [Online; accessed 7-July-2022].
- NYKAMP, D. Q. a HARMAN, C. A rotating sphere indicating the presence of curl. [https://mathinsight.org/applet/rotating\\_sphere\\_curl](https://mathinsight.org/applet/rotating_sphere_curl). [Online; accessed 7-July-2022].
- OPHYSICS. Magnetic Force on Charged Particles. <https://ophysics.com/em8.html>. [Online; accessed 1-July-2022].
- PACHOVÁ, Z. a FREY, T. (1964). *Vektorová a tenzorová analýza*. Vydání první. Státní nakladatelství technické literatury, Praha 1.

- PHYSIERGE (2014). Magnetic Force on Charged Particles. [https://www.youtube.com/watch?v=orsMYomjwIw&ab\\_channel=Physierge](https://www.youtube.com/watch?v=orsMYomjwIw&ab_channel=Physierge). [Online; accessed 1-July-2022].
- POLÁK, J. (2008). *Přehled středoškolské matematiky*. 9. přepracované vydání. Prometheus, Praha 4. ISBN 978-90-7196-356-1.
- SANDERSON, G. Curl. *Khan Academy*. URL <https://www.khanacademy.org/math/multivariable-calculus/multivariable-derivatives/curl-grant-videos/v/2d-curl-formula>. [Online; accessed 7-July-2022].
- SEDLÁK, B. a ŠTOLL, I. (2002). *Elektrina a magnetismus*. Vydání 2., opravené a rozšířené. Academia, Praha 2. ISBN 80-200-1004-1.

# Seznam obrázků

1.1	Zavedení momentu síly . . . . .	5
1.2	Dospělý je těžší, působí větším momentem síly, houpačka se otáčí	6
1.3	Dospělý se posune blíž, aby nastala rovnováha . . . . .	7
1.4	Součin $F \cdot d$ interpretujeme jako obsah obdélníku . . . . .	8
1.5	Vlevo – skutečná situace; vpravo – pohled shora, zjednodušení . .	9
1.6	Síla působí kolmo, $\alpha = 90^\circ$ . . . . .	9
1.7	Síla působí ve směru $\vec{r}$ ; $\alpha = 0^\circ$ . . . . .	9
1.8	Rozklad síly do dvou složek . . . . .	10
1.9	Rovnoběžník určený vektory $\vec{r}, \vec{F}$ . . . . .	10
1.10	Vektor $\vec{M}$ je kolmý na oba vektory $\vec{r}, \vec{F}$ . . . . .	11
1.11	Nalevo – kartézská báze; napravo – možnosti volby směru $\vec{M}$ . . .	12
1.12	Ilustrace pravidla pravé ruky . . . . .	12
1.13	Dvě působící síly a jejich výslednice . . . . .	14
1.14	Distributivita vektorového součinu . . . . .	15
1.15	Získání kolmé složky . . . . .	15
2.1	Ilustrace násobení skalárem . . . . .	19
2.2	Bázové vektory . . . . .	20
2.3	Pomůcka k výpočtu souřadnic . . . . .	21
3.1	Trojúhelník $ABC$ . . . . .	24
4.1	Homogenní magnetické pole . . . . .	27
4.2	Rovnoměrný přímočarý pohyb, $\alpha = 0^\circ$ . . . . .	28
4.3	Pohyb po kružnici, $\alpha = 90^\circ$ . . . . .	29
4.4	Trajektorií je šroubovice . . . . .	29
4.5	Orientace síly závisí na <b>znaménku</b> náboje $q$ . . . . .	30
4.6	Lorentzova síla se rovná síle dostředivé . . . . .	31
4.7	nalevo – vznik polární záře; napravo – předpověď k datu 6. 7. 2022	33
4.8	Ilustrace magnetické pasti, $ \vec{B}_1  \gg  \vec{B}_2 $ . . . . .	33
5.1	Ilustrace vektorových polí . . . . .	34
5.2	Práce jeřábu pro zvednutí trámu nezávisí na jeho trajektorii . . .	35
5.3	Práce jako skalární součin síly $\vec{F}$ a posunutí $\vec{s}$ . . . . .	36
5.4	Ilustrace myšlenky křivkového integrálu . . . . .	36
5.5	Vířivé proudění vody $\vec{f}$ . . . . .	37
5.6	Představa rotace pomocí otáčení „velmi malého balónku“ . . . . .	38
5.7	Pravotočivé víření vektorového pole . . . . .	39
5.8	Ilustrace vířivého pole . . . . .	40

5.9	Nevířivé vektorové pole způsobující makroskopické otáčení . . . .	41
5.10	Balónek je polem unášen, nijak však nerotuje – pole tak nevíří . .	41
5.11	Vektor rotace směřuje proti směru osy $z$ . . . . .	42
5.12	Proudnice jsou přímky, rotace je však nenulová . . . . .	42