

POSUDEK OPONENTA DIPLOMOVÉ PRÁCE

Název: Finanční kontrakty maximalizující užitkovou funkci

Autor: Bc. František Kožnar

SHRNUTÍ OBSAHU PRÁCE

V této práci je odvozena optimální výplata (optimální kontrakt na budoucí cenu nebo zisk podkladového aktiva), která maximalizuje očekávaný užitek agenta při dané tržní hodnotě kontraktu. Zkoumán je též hedging příslušného kontraktu. Ukazuje se, že v případě logaritmické užitkové funkce je optimální výplata dána poměrem dvou hustot a je diskutována souvislost se statistickým testováním věrohodnostním poměrem. Dále je uvedena aplikace na Kellyho kritérium a Mertonův problém. Šířeji je také diskutována souvislost s bayesovskou statistikou. Uvedená teorie je na závěr ilustrována na reálných datech a to na vývoji cen indexu S&P 500 a vývoji kurzu EUR/CZK.

CELKOVÉ HODNOCENÍ PRÁCE

Téma práce. Jedná se o zajímavé a poměrně náročné téma, které kombinuje znalosti z finanční matematiky, stochastické analýzy a statistiky. Zadání práce považuji za splněné.

Vlastní příspěvek. Vlastní příspěvek autora není v práci jasně vymezen. Usuzuji, že teoretická část je kompilace několika publikací vedoucího diplomové práce, vlastním příspěvkem autora jsou pak případové studie v kapitole Numerické výsledky. Na datech S&P 500 je odhadován drift metodou maximální věrohodnosti, na datech o kurzu EUR/CZK je testována četnost výplat u digitální opce a testována subjektivní versus objektivní míra za předpokladu mean reversion (nulový drift) pomocí dosaženého zisku a to jak pro teoretický kontrakt, tak pro jeho hedging.

Matematická úroveň. Matematická úroveň je trochu problematická. V práci jsou využívány poměrně náročné techniky a koncepty ze stochastické analýzy, jejich konkrétní popis a použití v předkládané práci je však spíše “inženýrské” a prostrádá rigoróznost. Jako příklad uvedu problematiku používání Itôovy formule, formalismus stochastických diferenciálních rovnic bez zavedení pojmů a definice řešení, nebo nesprávné podmiňování Wienerova procesu. Detailněji v sekci Připomínky a otázky.

Práce se zdroji. Použité zdroje jsou v práci citovány, teoretické část je založena především na kompilaci textů vedoucího. V kapitole 3 (Mertonův problém) však zcela chybí odkazy na literaturu, přestože autor patrně z nějaké literatury čerpal. Podobně je to s kapitolou 1.3 (Hedging), kde není odkaz na literaturu. Jde o opomenutí nebo je to vlastní příspěvek autora? Dále, v seznamu použité literatury jsou neúplné odkazy (v případě knih a skript chybí nakladatelství a město).

Formální úprava. Členění práce je přehledné, oceňuji přehledné grafy v části věnované numerickým výsledkům. Na druhou stranu práce obsahuje velké množství překlepů (např. hned v názvu diplomové práce), jazykových chyb a nesprávných formulací. Příklady jsou v sekci Vybrané překlepy a jazykové chyby. Celé práci by velmi prospěla důkladná jazyková korektura. Dále bych velmi ocenil přehled použitého značení, řada symbolů je použita v textu bez předchozího zavedení/vysvětlení (např. u_x^Y na str. 8 nebo $iid(0, 1)$ v Definiční 9).

PŘIPOMÍNKY A OTÁZKY

1. Itôova formule je v práci používána (a zmiňována) opakovaně, chybí však její přesná formulace nebo odkaz na konkrétní zdroj. Navíc je autorem nesprávně označována jako Ito-vova formule. Problematický je pak např. výpočet stochastického diferenciálu $du^Y(t, X_Y(t)) = u_x^Y(t, X_Y(t))dX_Y(t)$ na posledním řádku na str. 8 je, kde bych dle Itôovy formule očekával ještě člen druhého řádu a parciální derivaci u^Y podle t . Diskutabilní je také její použití v důkazu Věty 8 při výpočtu $dB^\mu(t, X(t))$, protože B^μ není reálná funkce, nýbrž pravděpodobnostní rozdělení. Jak by autor intpretoval parciální derivace $B_t^\mu(t, X(t))$, $B_x^\mu(t, X(t))$ a $B_{xx}^\mu(t, X(t))$?
2. str. 6, řádek 6: Není vysvětleno/definováno, co se myslí tím, že cena $X_Y(t)$ splňuje diferenciální rovnici (1.2):
$$dX_Y(t) = \sigma X_Y(t)dW(t).$$
3. V důkazu martingalové vlastnosti ceny $X_Y(t)$ na str. 6 autor chybně pracuje s podmíněnou střední hodnotou Wienerova procesu. Není pravda, že $\mathbb{E}[\exp(W(t+s))|\mathcal{F}_t] = \mathbb{E}[\exp(W(t) + W(s))|\mathcal{F}_t]$, ani že $\mathbb{E}[\exp(W(s) - s/2)|\mathcal{F}_t] = \mathbb{E}[\exp(W(s) - s/2)]$. Podobné je to u výpočtu funkcí $u^Y(t, x)$ a $u^X(t, x)$ na str. 8.
4. Příklad 4, str. 16: Funkce $U(x) = \exp(-x/B)$ není rostoucí, nelze ji tedy použít jako příklad užtkové funkce.
5. Str. 21: Formulace $\int_0^T dX(t)dt = \dots = \int_0^T \sigma dW^{\mathbb{Q}}(t)dt$ nedává matematicky smysl, $dX(t)$ ani $dW^{\mathbb{Q}}(t)$ nejsou reálné funkce/procesy.
6. V kapitole 4 (Spojitost s bayesovskou statistikou) uvažujete abstraktní množinu agentů S bez žádné dodatečné struktury (např. σ -algebry), opakovaně však přes tuto množinu integrujete, např. při výpočtu celkového kapitálu trhu $B(M) = \int B(u)du$. Není tedy jasné, vzhledem k jaké míře integrujete.
7. Na konci Příkladu 7 (str. 31) postrádám diskusi podmínek, za kterých existuje limita výběrových průměrů \bar{X}_∞ . Ta obecně existovat nemusí.
8. Str. 31: Zápis $dX(t) \sim N(\mu dt, \sigma\sqrt{dt})$ není zcela rigorózní ($dX(t)$ není náhodná velična) a zasloužil by bližší vysvětlení.
9. Str. 40, test hypotézy o $\mathbb{E}P(T)$: Nulová hypotéza by měla být $H_0 : \mathbb{E}P(T) = 1/2$. Používáte jednovýběrový t-test, ale neověřujete/nediskutujete normalitu náhodného výběru (která ve Vašem případě nejspíše splněna nebude). Nebylo by lepší použít nějaký neparametrický test nebo asymptotický test (vzhledem k velkému počtu pozorování)?
10. kap. 5.3. Zdá se, že pomocí hedgingu se nepodařilo replikovat teoretické výnosy daného kontraktu příliš dobře, a to ani ve střední hodnotě (průměrný výnos 0,649 versus průměr pro hedging 1,518 u digitální opce; podobně u mean reversion: 0,065 průměrný teoretický výnos versus 0,149 průměr pro hedging). Vzhledem k tomu, že rozdíly jsou celkem velké (a systematicky vychýlené), ocenil bych hlubší diskusi tohoto problému. Alespoň teoreticky by hedging měl replikovat výnosy přesně.

MÉNĚ ZÁSADNÍ CHYBY A KOMENTÁŘE

1. Definice 7 (Brownův pohyb):
 - a) Je uvedeno, že trajektorie procesu $\{W_t, t \geq 0\}$ je spojitá. Brownův pohyb má však nekonečně

mnoho trajektorií, přičemž se požaduje, aby skoro všechny byly spojitě.

b) V definici uvádíte $\text{var}W_t = \sigma^2 t$, kde σ^2 je nějaká konstanta. V práci však uvažujete vždy $\text{var}W_t = t$, přičemž σ je explicitní multiplikatívni parametr v modelu.

2. V důkazu Příkladu 2 (str. 12) mi není jasná úvaha ve druhé rovnosti u výpočtu $u^Y(t, x)$. Patrně autor používá výsledek o rozdělení maxima geometrického Brownova pohybu, aniž by tento výsledek uvedl či citoval.
3. Co se myslí tvrzením: “Pravděpodobnostní míra \mathbb{Q} je tedy martingal” uvedeném na str. 14?
4. Příklad 5, str. 17: Ve vzorci pro λ by $V(0)$ mělo být umocněno na γ .
5. Str. 23, konec kap. 3.2: Ve vyjádření stochastického vývoje pro V chybí $dV(t)$ a $V(t)$.
6. Označení “věrohodnostní funkce” pro $p^\theta(x) = f(x|\theta)$ v kapitole 4 je trochu matoucí. Totiž, díváme-li se na to jako na funkci proměnné x , jde o hustotu. O věrohodnostní funkci by se jednalo, kdybychom se na to dívali jako na funkci parametru θ . Preferoval bych např. označení podmíněná hustota nebo podmíněné rozdělení (v tab. 4.1.)
7. Vybrané překlady a jazykové chyby (z kapacitních důvodů není tento list úplný a slouží pro ilustraci)
 - Název práce: kontrakty → kontrakty
 - aktivo → aktivum (vyskytuje se v práci častěji)
 - Str. 5, ř. 2: všechny aktiva → všechna aktiva
 - Str. 5, ř. 6: v následující definici převzatý z... → v následující definici převzaté z...
 - Str. 5, ř. -5: vzhledem k filtraci generovaný Brownovým pohybem → vzhledem k filtraci generované Brownovým pohybem
 - Str. 7, ř. 7: V Markovských modelech, který zahrnuje → V Markovských modelech, které zahrnují
 - Brownův proces → Brownův pohyb (vyskytuje se v práci častěji)
 - Str. 24, ř. 8: Hustota výnosů jsou → Hustoty výnosů jsou
 - Bayesovská statistika → bayesovská statistika (vyskytuje se častěji)
 - Str. 37, ř. 5: Z věty o asymptotické normalitě maximálně věrohodnostních odhadů → Z věty o asymptotické normalitě maximálně věrohodných odhadů

ZÁVĚR

Ačkovli má práce jisté nedostatky, jako celek je vyhovující a doporučuji ji proto uznat jako diplomovou práci.

Jméno oponenta: Pavel Kříž
Pracoviště: KPMS, MFF UK
Datum: 22.8.2022