



**MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ
FAKULTA**
Univerzita Karlova

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Bc. František Kožnar

**Finanční kontrakty maximalizující
užitkovou funkci**

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí diplomové práce: doc. RNDr. Jan Večeř, Ph.D.

Studijní program: Matematika

Studijní obor: Pravděpodobnost, matematická
statistika a ekonometrie

Praha 2022

Prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci vypracoval(a) samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů. Tato práce nebyla využita k získání jiného nebo stejného titulu.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V dne

Podpis autora

Rád bych poděkoval Janu Večeřovi za cenné rady, věcné připomínky a vstřícnost při konzultacích a vypracování diplomové práce.

Název práce: Finanční kontrakty maximalizující užitkovou funkci

Autor: Bc. František Kožnar

Katedra: Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí diplomové práce: doc. RNDr. Jan Večeř, Ph.D., Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Abstrakt: Cílem práce je charakterizovat zisk maximalizující užitkovou funkci. Jedním způsobem je řešení věrohodnostního poměru mezi subjektivními pravděpodobnostními mírami agenta P a rizikově neutrální mírou trhu Q . Takovéto výnosy by měly být převedeny na funkci konečné ceny aktiv. Otázkou je, jakou míru P zvolit. Práce by měla shrnout Kellyho kritérium pro binomický vývoj ceny akcií a také problém Mertonova portfolia uvažující geometrický Brownův pohyb. Dále se ukáže spojitost s Bayesovskou statistikou, která umožňuje rozšíření z již dobře známých výsledků. Práce by měla pojednávat o cenách a zajištění kontraktů spolu s jejich asymptotickým chováním.

Klíčová slova: Finanční kontrakty opce ekvilibrium maximalizace užitkové funkce

Title: Optimal Financial Payoffs Maximizing Utility Function

Author: Bc. František Kožnar

Department: Department of Probability and Mathematical Statistics

Supervisor: doc. RNDr. Jan Večeř, Ph.D., Department of Probability and Mathematical Statistics

Abstract: The goal of this thesis is to characterize payoffs that maximize expected utility function in different market setups. One can solve this problem in its generality in terms of a function of a likelihood ratio between the subjective measure of an agent P and a risk neutral measure Q . Such payoffs should be transformed to the function of the terminal stock price. The question is what measure P should be chosen, the natural candidates would correspond to either the frequentist or the Bayesian choice of the parameters. The thesis should provide a link to the Kelly Criterion in the binomial evolution of the stock price and to the Merton's Portfolio Problem in the geometric Brownian motion example showing the possible extensions of these well known problems in the novel Bayesian setup. The thesis should discuss pricing and hedging of these contracts together with their asymptotic behavior.

Keywords: Financial Contracts Options Equilibrium Utility Maximization

Obsah

Úvod	2
1 Matematický popis ceny	3
1.1 Definice a věty	3
1.2 Geometrický Brownův pohyb	5
1.3 Hedging	7
2 Optimální výplata	14
2.1 Formulace problému	14
2.2 Statistické testování	17
2.3 Kellyho kritérium	20
3 Mertonův Problém	21
3.1 Klasický přístup	21
3.2 Řešení pomocí užtkové funkce	22
3.3 Rozdílný pohled na volatilitu	23
3.4 Mean Reversion	26
4 Spojitost s Bayesovskou statistikou	28
4.1 Ekvilibrium	28
4.2 Rozšíření na spojitý čas	31
5 Numerické výsledky	33
5.1 Volatilita	33
5.2 Index S&P 500	35
5.2.1 Data	35
5.2.2 Odhad driftu	36
5.3 Kurz EUR/CZK	37
5.3.1 Data	37
5.3.2 Digitální Opce	38
5.3.3 Mean Reversion	41
Závěr	44
Seznam použité literatury	45
Seznam obrázků	46
Seznam tabulek	47
A Přílohy	48
A.1 Zdrojové Kódy	48

Úvod

Budeme se zabývat agenty obchodujícími na nějakém trhu, kteří mají oproti trhu rozdílný pohled na oceňování ceny na trhu. Odvodíme optimální výplatu agenta, který maximalizuje užitek při obchodování Arrow-Debreu security při cenách určených pravděpodobnostní mírou trhu. Pro odvození řešení pro obecnou užitkovou funkci využijeme variační počet. Dále se budeme zabývat konkrétně logaritmickou užitkovou funkcí, která povede k věrohodnostnímu poměru cen trhu a agenta. Výsledkem bude Kullback-Leibler divergence.

Dále se budeme zabývat Mertonovým portfoliem, kde budeme využívat modely cen popisovaných geometrickým Brownovým pohybem. Budeme předpokládat dva agenty obchodující na trhu, kteří předpokládají nějakou hustotu ceny, která pochází z nějakého pravděpodobnostního prostoru Ω . Prvním agentem je tzv. market maker, který má pravděpodobnostní míru \mathbb{Q} , což znamená, že je ochotný koupit nebo prodat jakékoli množství Arrow-Debreu securities $A(x)$ za cenu $q(x)$ při výstupu (konečná cena) $x \in \Omega$. Arrow-Debreu security je kontrakt, který vyplatí jeden dolar (nebo jakoukoli jinou jednotku), pokud nastane výstup x a nebo 0 jinak. Přesná definice je pak uvedena v definici 8. Druhý agent je tzv. market taker, který předpokládá, že konečná cena má hustotu \mathbb{P} , tedy je ochotný koupit nebo prodat jakékoli množství Arrow-Debreu securities $A(x)$ za cenu $p(x)$ při výstupu (konečná cena) $x \in \Omega$. Otázka pro agenta: jaká je optimální výplata $V(x)$, kterou může dosáhnout při výstupu x , která maximalizuje nějakou jeho zvolenou (striktně konkávní a rostoucí) užitkovou funkci $U(x)$?

Matematicky tento problém můžeme vyjádřit jako hledání náhodné veličiny V , která maximalizuje

$$\mathbb{E}^{\mathbb{P}} [U(V)]$$

za podmínky

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}} [V] = V(0). \tag{1}$$

Hodnota $V(0)$ představuje počáteční hodnotu agentova kapitálu. Podmínka (1) znamená, že z pohledu trhu, tedy pravděpodobnostní míry \mathbb{Q} , může být dosažena jakákoliv výplata, pokud ji trh oceňuje na hodnotu $V(0)$. Jinými slovy trh umožňuje vytvořit jakýkoli kontrakt s výplatou V , pokud je jeho očekávaná hodnota stejná jako počáteční hodnota $V(0)$. Tedy nulový zisk pro agenta z pohledu trhu.

V další části se podíváme na spojitost Mertonova problému s Bayesovskou statistikou, která nám umožňuje rozšíření z již dobře známých výsledků.

V neposlední řadě budeme testovat uvedenou teorii na skutečných datech a to konkrétně na indexu S&P 500 a měnovém kurzu EUR/CZK.

1. Matematický popis ceny

1.1 Definice a věty

V této kapitole popíšeme, jak vypadá cena aktiv, kterou definujeme jako párový vztah. Začneme několika užitečnými definicemi, aby jsme si ujasnili terminologii. Následující text je založen na Vecer (2011).

Následující definice definuje cenu jako párový vztah dvou aktiv.

Definice 1 (Cena). *Cena je číslo reprezentující kolik jednotek aktiva Y je potřeba k získání jedné jednotky aktiva X . Tuto cenu budeme značit v čase t jako*

$$X_Y(t).$$

V této definici aktivum Y slouží jako referenční aktivum. Důležité je, že cena je vždy párový vztah dvou aktiv. Z praktického hlediska, referenční aktivum jsou typicky peníze (například dolar \$, euro € nebo česká koruna). Ale obecně to může být cokoliv, pokud hodnota není bezcenná.

Budeme používat následující značení: $X(t)$ znamená počet jednotek aktiva X v čase t . V zásadě aktivo X nepotřebuje index času t (například jedna unce zlata zůstane pořád jedna unce zlata), nicméně přidáním časového rozměru vyjadřujeme, že se konkrétní aktivum používá v konkrétní čas na obchodování, oceňování, zajišťování nebo vypořádání nějaké smlouvy. Pokud nebude docházet k nejednoznačnosti, tak vynecháme index času a jednoduše budeme psát pouze X . Můžeme tedy psát

$$1 \text{ jednotka } X = X_Y(t) \text{ jednotek } Y,$$

nebo jednoduše

$$X = X_Y(t) \cdot Y.$$

Ještě ujasníme, proč definujeme cenu jako párový vztah $X_Y(t)$, místo jednoduššího zápisu například $S(t)$, který se obvykle používá pro cenu akcií. Ukážeme to na následujících příkladech.

- Cena v dolarech za akcii S , $S_{\$}(t)$, kde roli aktiva X hraje akcie S a roli referenčního aktiva hraje dolar \$. Psaním pouze $S(t)$ místo $S_{\$}(t)$ by mohlo docházet k nejasnostem a záměně akcie S jako takové s její cenou $S_{\$}(t)$.
- Směnný kurz $\text{€}_{\$}(t)$, kde X představuje cizí měnu € a Y představuje domácí měnu \$. Volba domácí a cizí měny je relativní a proto $\text{\$}_{\text{€}}(t)$ je také směnný kurz.

Protože můžeme jakkoliv volit aktiva X a Y , tak dává smysl uvažovat i X jako referenční aktivum. Tedy

$$Y = Y_X(t) \cdot X.$$

Vztah ceny $X_Y(t)$ a $Y_X(t)$ je následující

$$Y_X(t) = \frac{1}{X_Y(t)}. \tag{1.1}$$

Vztah ceny (1.1) platí pouze pro $0 < X_Y(t) < \infty$, proto uvažujeme, že aktiva X a Y nejsou bezcenná. V tomto případě ceny $X_Y(t)$ a $Y_X(t)$ nám dávají stejnou informaci a proto není důležité jaké aktivo zvolíme jako referenční.

Dalším důležitým pojmem z financí je arbitráž. Definice arbitráže je následující.

Definice 2 (Arbitráž). *Arbitráž je příležitost bez rizika profitovat na trhu.*

Je důležité rozlišit mezi arbitrážní příležitostí a profitující obchodní strategií. Arbitráž znamená, že máme jistotu zisku (nemůže nastat ztráta), kdežto profitující strategie jednoduše znamená, že v průměru profitujeme, ale některé scénáře mohou vést ke ztrátě.

Arbitrážní příležitosti se na trhu občas vyskytují. Typickým příkladem může být nákup nějakého aktiva na jedné burze a následně ihned prodat za vyšší cenu na nějaké jiné burze.

V celé práci však budeme předpokládat, že na trhu nejsou arbitrážní příležitosti. V tomto případě jsou ceny martingaly. Martingaly jsou procesy, kde nejlepší předpověď pro budoucí hodnoty je současná hodnota. Matematicky nám to přesněji popíše následující definice.

Definice 3 (Filtrace). *Nechť $\{\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P}\}$ je pravděpodobnostní prostor, $T \subset \mathbb{R}, T \neq \emptyset$. Nechť pro všechny $t \in T$ je $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{A}$ σ -algebra. Systém $\{\mathcal{F}_t, t \in T\}$, tak že $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$ pro všechny $s, t \in T, s < t$, je nazýván filtrací.*

Definice 4 (\mathcal{F}_t -adaptace). *Nechť stochastický proces $\{X_t, t \in T\}$ je definován na $\{\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P}\}$ a nechť $\{\mathcal{F}_t, t \in T\}$ je filtrace. Řekneme, že proces $\{X_t, t \in T\}$ je adaptovaný na $\{\mathcal{F}_t, t \in T\}$ (\mathcal{F}_t -adaptovaný), jestliže pro všechny $t \in T$ je X_t \mathcal{F}_t -měřitelný.*

Definice 5 (Martingal). *Nechť $\{X_t, t \in T\}$ je adaptovaný na $\{\mathcal{F}_t, t \in T\}$ a $\mathbb{E}|X_t| < \infty$ pro všechny $t \in T$. Pak řekneme, že $\{X_t, t \in T\}$ je martingal, jestliže $\mathbb{E}[X_t | \mathcal{F}_s] = X_s$ skoro jistě pro všechna $s < t, s, t \in T$.*

Výsledek, že ceny jsou martingaly podle pravděpodobnostní míry korespondující s referenčním aktivem, je znám pod anglickým názvem First Fundamental Theorem of Asset Pricing.

Dalším důležitým pojmem je portfolio. To popisuje následující definice.

Definice 6 (Portfolio). *Portfolio je součet jednotlivých aktiv*

$$P(t) = \sum_{i=0}^N \Delta^i(t) \cdot X^i,$$

kde $\Delta^i(t)$ reprezentuje kolik jednotek aktiva X^i má být drženo v čase t .

Pokud $\Delta^i(t) > 0$, tak říkáme, že aktivo X^i držíme v dlouhé pozici (z anglického long position). Pokud $\Delta^i(t) < 0$, tak říkáme, že aktivo X^i držíme v krátké pozici (z anglického short position).

Poznamenejme, že portfolio $P(t)$ není číslo. Pokud zafixujeme $Y = X^0$ jako referenční aktivum, tak potom je cena portfolia jednoduše

$$P_Y(t) = \sum_{i=0}^N \Delta^i(t) \cdot X_Y^i.$$

Jinými slovy $P_Y(t)$ je číslo, kolik jednotek aktiva Y bychom dostali, pokud bychom směnili všechny aktiva za aktivum Y v čase t . Ještě poznamenejme, že jednotlivé pozice $\Delta^i(t)$ musejí být známy v čase t .

Pro teoretické výsledky potřebujeme nějakým způsobem modelovat vývoj ceny. K tomu nám pomůže Brownův pohyb, neboli Wienerův proces, který je popsán v následující definici převzatý z Prášková (2004).

Definice 7 (Brownův pohyb - Wienerův proces). *Brownův pohyb je Gaussovský proces $\{W_t, t \geq 0\}$ s následujícími vlastnostmi:*

1. $W_0 = 0$ skoro jistě a trajektorie procesu $\{W_t, t \geq 0\}$ je spojitá.
2. Pro všechny $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_n$ jsou náhodné veličiny $W_{t_1}, W_{t_2} - W_{t_1}, W_{t_3} - W_{t_2}, \dots, W_{t_n} - W_{t_{n-1}}$ nezávislé (nezávislé přírůstky).
3. Pro všechny $0 \leq t < s$ přírůstek $W_s - W_t$ má normální rozdělení s nulovou střední hodnotou a rozptylem $\sigma^2(s - t)$, kde σ^2 je kladná konstanta. Speciálně pro všechny $t \geq 0$ platí $\mathbb{E}W_t = 0$ a $\text{var}W_t = \sigma^2 t$.

Definujeme, jak oceňovat výstup ω pomocí Arrow-Debreu security. Arrow-Debreu security je kontrakt, který vyplatí jeden dolar (nebo jakoukoli jinou jednotku) pokud nastane výstup x a nebo 0 jinak.

Definice 8 (Arrow-Debreu Security).

$$A(\omega) = \begin{cases} 1 & \omega = \bar{\omega}, \\ 0 & \omega \neq \bar{\omega}. \end{cases}$$

Pak oceňujeme $\bar{\omega}$ jako:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[A] &= q(\bar{\omega}), \\ \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[A] &= p(\bar{\omega}). \end{aligned}$$

1.2 Geometrický Brownův pohyb

Následující text je založen na Vecer (2011). Předpokládejme dvě aktiva X a Y , která neposkytují arbitrážní příležitosti. V tomto případě musí být cena aktiva $X_Y(t)$ \mathbb{P}^Y -martingal, aby se zamezilo arbitrážním příležitostem. V případě, že uvažujeme spojitý čas, tak obecně můžeme jakýkoli martingal napsat jako součet martingalu se spojitou trajektorií a čistě nespojitým martingalem:

$$\mathcal{M}(t) = \mathcal{M}^c(t) + \mathcal{M}^d(t).$$

Spojitý martingal adaptovaný vzhledem k filtraci \mathcal{F}_t^W generovaný Brownovým pohybem může být reprezentován stochastickým integrálem:

$$\mathcal{M}^c(t) = \mathcal{M}^c(0) + \int_0^t \phi(s) dW(s),$$

kde $\phi(s)$ je \mathcal{F}_t^W adaptovaná (tento výsledek je znám pod anglickým názvem Martingale Representation Theorem).

Jelikož se zabýváme především modely se spojitým časem, tak proces $X_Y(t)$ musí mít tvar

$$dX_Y(t) = \phi(t)dW(t).$$

V našem případě budeme uvažovat jednoduchý, ale velmi populární model kde

$$\phi(t) = \sigma X_Y(t).$$

Potom cena $X_Y(t)$ splňuje diferenciální rovnici

$$dX_Y(t) = \sigma X_Y(t)dW(t). \quad (1.2)$$

Proces splňující (1.2) je nazýván geometrický Brownův pohyb. Parametr σ představuje volatilitu. Volatilita je neodmyslitelnou součástí difuzních modelů. Přírozenou otázkou je, jak vypadá míra \mathbb{P}^Y . Vzhledem k míře \mathbb{P}^Y je to tvořeno Brownovým procesem $W^Y(t)$ a diferenciální rovnice (1.2) má následující řešení

$$X_Y(t) = X_Y(0) \cdot \exp\left(\sigma W^Y(t) - \frac{1}{2}\sigma^2 t\right). \quad (1.3)$$

Poznamenejme, že cena $X_Y(t)$ z (1.3) je \mathbb{P}^Y martingal. Vlastnosti martingalu z definice 5 můžeme snadno ověřit. Cena $X_Y(t)$ je \mathcal{F}_t -adaptovaná, vlastnost konečné střední absolutní hodnoty:

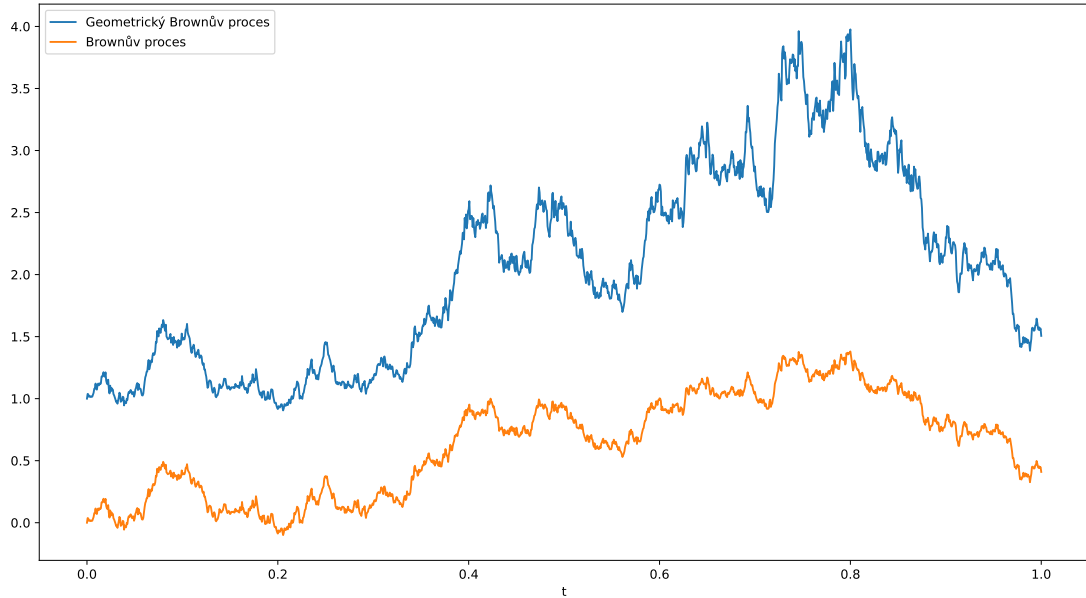
$$\begin{aligned} \mathbb{E}^Y |X_Y(t)| &= \mathbb{E}^Y \left| X_Y(0) \cdot \exp\left(\sigma W^Y(t) - \frac{1}{2}\sigma^2 t\right) \right| \\ &= |X_Y(0)| \cdot \mathbb{E}^Y \left[\exp\left(\sigma W^Y(t) - \frac{1}{2}\sigma^2 t\right) \right] \\ &= X_Y(0) \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(\sigma y - \frac{1}{2}\sigma^2 s\right) \frac{1}{\sqrt{2\pi s}} \exp\left(-\frac{y^2}{2s}\right) dy \\ &= X_Y(0) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi s}} \exp\left(-\frac{(y - \sigma s)^2}{2s}\right) dy = X_Y(0) < \infty. \end{aligned}$$

Třetí martingalová vlastnost ceny $X_Y(t)$:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^Y [X_Y(t+s) | \mathcal{F}_t^W] &= \mathbb{E}^Y \left[X_Y(0) \cdot \exp\left(\sigma W^Y(t+s) - \frac{1}{2}\sigma^2(t+s)\right) \middle| \mathcal{F}_t^W \right] \\ &= \mathbb{E}^Y \left[X_Y(0) \cdot \exp\left(\sigma W^Y(t) + \sigma W^Y(s) - \frac{1}{2}\sigma^2 t - \frac{1}{2}\sigma^2 s\right) \middle| \mathcal{F}_t^W \right] \\ &= X_Y(0) \cdot \exp\left(\sigma W^Y(t) - \frac{1}{2}\sigma^2 t\right) \mathbb{E}^Y \left[\exp\left(\sigma W^Y(s) - \frac{1}{2}\sigma^2 s\right) \middle| \mathcal{F}_t^W \right] \\ &= \underbrace{X_Y(0) \cdot \exp\left(\sigma W^Y(t) - \frac{1}{2}\sigma^2 t\right)}_{=X_Y(t)} \underbrace{\mathbb{E}^Y \left[\exp\left(\sigma W^Y(s) - \frac{1}{2}\sigma^2 s\right) \right]}_{=1} = X_Y(t). \end{aligned}$$

Cena $X_Y(t)$ je tedy martingal vzhledem k míře \mathbb{P}^Y .

Na obrázku 1.1 můžeme vidět náhodně vygenerovanou jednu trajektorii Brownova pohybu pro $t \in [0,1]$ s vlastnostmi $\sigma = 1$ a $X_Y(0) = 1$. Dále ještě můžeme vidět korespondující geometrický Brownův proces.



Obrázek 1.1: Ukázka Brownova procesu s vlastnostmi $\sigma = 1$, a $X_Y(0) = 1$, $t \in [0,1]$ a jeho korespondující geometrický Brownův proces.

1.3 Hedging

Pro oceňování kontraktů budeme používat V . Můžeme použít referenční aktiva Y nebo X pro vyjádření ceny V :

$$V = V_Y(t) \cdot Y = V_X(t) \cdot X.$$

V Markovských modelech, který zahrnuje i model ceny geometrického Brownova procesu, tak můžeme vyjádřit tyto ceny jako funkce u^Y a u^X definované jako

$$\begin{aligned} V_Y(t) &= u^Y(t, X_Y(t)), \\ V_X(t) &= u^X(t, Y_X(t)). \end{aligned}$$

Pro funkce u^Y a u^X platí následující vztah:

$$\begin{aligned} u^Y(t, X_Y(t)) &= u^X(t, Y_X(t)) \cdot X_Y(t), \\ u^X(t, Y_X(t)) &= u^Y(t, X_Y(t)) \cdot Y_X(t). \end{aligned}$$

Dostáváme proto následující vztah:

$$\begin{aligned} u^Y(t, x) &= u^X\left(t, \frac{1}{x}\right) \cdot x, \\ u^X(t, x) &= u^Y\left(t, \frac{1}{x}\right) \cdot x, \end{aligned}$$

pro $0 < x < \infty$.

Pokud jsou ceny $V_Y(t)$ a $V_X(t)$ Markovské z pohledu cen $X_Y(t)$ a $Y_X(t)$, tak funkce u^Y a u^X mohou být vyjádřeny jako:

$$\begin{aligned} u^Y(t, x) &= \mathbb{E}^Y \left[f^Y(X_Y(T)) | X_Y(t) = x \right], \\ u^X(t, x) &= \mathbb{E}^X \left[f^X(Y_X(T)) | Y_X(t) = x \right]. \end{aligned}$$

Pokud navíc jsou ceny $X_Y(t)$ a $Y_X(t)$ geometrické Brownovy procesy, můžeme spočítat funkce ceny u^Y a u^X přímo z podmíněné střední hodnoty. Pro funkci u^Y :

$$\begin{aligned}
u^Y(t,x) &= \mathbb{E}^Y \left[f^Y(X_Y(T)) | X_Y(t) = x \right] \\
&= \mathbb{E}^Y \left[f^Y \left(X_Y(t) \cdot \exp \left(\sigma W^Y(T-t) - \frac{1}{2} \sigma^2(T-t) \right) \right) | X_Y(t) = x \right] \\
&= \mathbb{E}^Y \left[f^Y \left(x \cdot \exp \left(\sigma W^Y(T-t) - \frac{1}{2} \sigma^2(T-t) \right) \right) | X_Y(t) = x \right] \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f^Y \left(x \cdot \exp \left(\sigma y \sqrt{T-t} - \frac{1}{2} \sigma^2(T-t) \right) \right) \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left(-\frac{y^2}{2} \right) dy,
\end{aligned} \tag{1.4}$$

kde jsme využili faktu, že

$$X_Y(T) = X_Y(t) \cdot \exp \left(\sigma W^Y(T-t) - \frac{1}{2} \sigma^2(T-t) \right)$$

a

$$\frac{W^Y(T-t)}{\sqrt{T-t}} \sim N(0,1).$$

Podobně můžeme dostat vyjádření i pro funkci u^X :

$$\begin{aligned}
u^X(t,x) &= \mathbb{E}^X \left[f^X(Y_X(T)) | Y_X(t) = x \right] \\
&= \mathbb{E}^X \left[f^X \left(Y_X(t) \cdot \exp \left(\sigma W^X(T-t) - \frac{1}{2} \sigma^2(T-t) \right) \right) | Y_X(t) = x \right] \\
&= \mathbb{E}^X \left[f^X \left(x \cdot \exp \left(\sigma W^X(T-t) - \frac{1}{2} \sigma^2(T-t) \right) \right) | Y_X(t) = x \right] \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f^X \left(x \cdot \exp \left(\sigma y \sqrt{T-t} - \frac{1}{2} \sigma^2(T-t) \right) \right) \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left(-\frac{y^2}{2} \right) dy.
\end{aligned}$$

Následující věta popisuje, jak odvodit hedging portfolio pro obecný kontrakt V .

Věta 1 (Hedging Portfolio). *Hedging portfolio $P(t)$ kontraktu je dáno následovně*

$$P(t) = \left[u_x^Y(t, X_Y(t)) \right] \cdot X + \left[u^Y(t, X_Y(t)) - u_x^Y(t, X_Y(t)) \cdot X_Y(t) \right] \cdot Y,$$

nebo ekvivalentně

$$P(t) = \left[u^X(t, Y_X(t)) - u_x^X(t, Y_X(t)) \cdot Y_X(t) \right] \cdot X + \left[u_x^X(t, Y_X(t)) \right] \cdot Y.$$

Důkaz. Hedging portfolio má následující tvar

$$P(t) = \Delta^X(t) \cdot X + \Delta^Y(t) \cdot Y$$

a platí

$$dP_Y(t) = \Delta^X(t, X_Y(t)) dX_Y(t).$$

Dále platí

$$dV_Y(t) = du^Y(t, X_Y(t)) = u_x^Y(t, X_Y(t)) dX_Y(t).$$

Aby platilo $P(t) = V(t)$ ve všech časech, musí kontrakt splňovat

$$\Delta^X(t, X_Y(t)) = u_x^Y(t, X_Y(t)) = \frac{\partial V_Y(t)}{\partial X_Y(t)}.$$

Pozice Δ^X v aktivu X je závislá na ceně kontraktu $V_Y(t)$ při změnách základní ceny $X_Y(t)$. Pozice Δ^Y v aktivu má následující tvar

$$\Delta^Y(t) = P_Y(t) - \Delta^X(t) \cdot X_Y(t) = u^Y(t, X_Y(t)) - u_x^Y(t, X_Y(t)) \cdot X_Y(t).$$

Pokud zvolíme X jako referenční aktivo, změna ceny hedging portfolia P je dána

$$dP_X(t) = \Delta^Y(t, Y_X(t))dY_X(t).$$

Dále máme

$$dV_X(t) = du^X(t, Y_X(t)) = u_x^X(t, Y_X(t))dY_X(t),$$

a proto

$$P(t) = V(t).$$

Pozice Δ^Y musí splňovat

$$\Delta^Y(t, Y_X(t)) = u_x^X(t, Y_X(t)) = \frac{\partial V_X(t)}{\partial Y_X(t)}.$$

Pozice $\Delta^X(t)$ v aktivu X má následující tvar

$$\Delta^X(t) = P_X(t) - \Delta^Y(t) \cdot Y_X(t) = u^X(t, Y_X(t)) - u_x^X(t, Y_X(t)) \cdot Y_X(t).$$

□

Uvedeme si zde dva příklady pro lepší představu. Prvním bude digitální opce (z anglického digital option), tedy kontrakt, který vyplatí jednu jednotku, pokud konečná cena bude v nějakém intervalu.

Příklad 1 (Digitální opce). *Uvažujme kontrakt s následující výplatou*

$$V(T) = \mathbb{I}(L \leq X_Y(T) \leq U) \cdot Y(T),$$

kde $0 \leq L \leq U$. Cena tohoto kontraktu je

$$\begin{aligned} u^Y(t, x) &= \mathbb{E}^Y [\mathbb{I}(L \leq X_Y(T) \leq U) | X_Y(t) = x] \\ &= \mathbb{P}^Y [(L \leq X_Y(T) \leq U) | X_Y(t) = x]. \end{aligned} \tag{1.5}$$

Vývoj ceny $X_Y(t)$ popisujeme geometrickým Brownovým procesem

$$dX_Y(t) = \sigma X_Y(t)dW^Y(t).$$

Řešení (1.5) má následující tvar

$$u^Y(t, x) = N(d_-(U)) - N(d_-(L)).$$

Hedging portfolio má následující tvar

$$\begin{aligned}\Delta^X(t) &= \frac{\phi(d_-(L)) - \phi(d_-(U))}{x\sigma\sqrt{T-t}} \\ \Delta^Y(t) &= N(d_+(U)) - N(d_+(L)) - \frac{\phi(d_+(L)) - \phi(d_+(U))}{x^2\sigma\sqrt{T-t}},\end{aligned}$$

kde N je distribuční funkce normálního rozdělení, $\phi(x)$ je hustota normálního rozdělení a

$$\begin{aligned}d_-(K) &= \frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}}\ln\left(\frac{K}{x}\right) + \frac{1}{2}\sigma\sqrt{T-t}, \\ d_+(K) &= \frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}}\ln(xK) + \frac{1}{2}\sigma\sqrt{T-t}.\end{aligned}$$

Důkaz. Jelikož $X_Y(t)$ je geometrický Brownův proces a

$$f^Y(X_Y(T)) = \mathbb{I}(L \leq X_Y(T) \leq U),$$

tak podle (1.4) dostaneme:

$$\begin{aligned}u^Y(t,x) &= \mathbb{E}^Y[\mathbb{I}(L \leq X_Y(T) \leq U) | X_Y(t) = x] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{I}\left[L \leq x \exp\left(\sigma y\sqrt{T-t} - \frac{1}{2}\sigma^2(T-t)\right) \leq U\right] \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) dy \\ &= \int_{d_-(L)}^{d_-(U)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) dy = N(d_-(U)) - N(d_-(L)).\end{aligned}$$

Z věty 1 dostaneme:

$$\begin{aligned}\Delta^X(t) &= u_x^Y(t,x) = \frac{\partial}{\partial x} u^Y(t,x) \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left[\int_{-\infty}^{d_-(U)} \phi(y) dy - \int_{-\infty}^{d_-(L)} \phi(y) dy \right] \\ &= \phi(d_-(U)) \frac{\partial}{\partial x} d_-(U) - \phi(d_-(L)) \frac{\partial}{\partial x} d_-(L) \\ &= \frac{\phi(d_-(L)) - \phi(d_-(U))}{x\sigma\sqrt{T-t}}, \\ \Delta^Y(t) &= u_x^X(t,x) = u^Y\left(t, \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x} u_x^Y\left(t, \frac{1}{x}\right) \\ &= N(d_+(U)) - N(d_+(L)) - \frac{\phi(d_+(L)) - \phi(d_+(U))}{x^2\sigma\sqrt{T-t}}.\end{aligned}$$

□

Na obrázku 1.2 je zobrazena ukázka vývoje ceny $X_Y(t)$ a ceny kontraktu $V(t)$. V tomto případě $V(t)$ vyjadřuje i pravděpodobnost, že konečná cena skončí v intervalu $[L, U]$. Volba parametrů L (dolní hranice) a U (horní hranice) je volena jako

$$\begin{aligned} L &= X_Y(0) \cdot \exp(-0.67 \cdot \sigma), \\ U &= X_Y(0) \cdot \exp(0.67 \cdot \sigma), \end{aligned}$$

tedy přibližně platí $\mathbb{P}^Y [L \leq X(T) \leq U] \approx 0.5$.



Obrázek 1.2: Ukázka digitální opce. Vidíme, že konečná cena $X_Y(T)$ skončila v intervalu $[L, U]$ a tedy konečná cena kontraktu $V(T)=1$.

Jako druhý příklad si ještě uvedeme kontrakt, který vyplatí maximum za dané období $[0, T]$.

Příklad 2 (Maximum opce). *Uvažujme kontrakt s následující výplatou:*

$$V(T) = \left(\max_{0 \leq t \leq T} X_Y(t) \right) \cdot Y(T). \quad (1.6)$$

Řešení (1.6) má následující tvar

$$u^Y(t, x) = m \cdot N(d_-(m)) + x \cdot N(\sigma\sqrt{T-t} - d_-(m)),$$

kde

$$m = M_Y(t) = \max_{0 \leq s \leq t} X_Y(s).$$

Hedging pozice $\Delta^X(t)$ má následující tvar

$$\Delta^X(t) = -\frac{m\phi(d_-(m))}{x\sigma\sqrt{T-t}} + N(\sigma\sqrt{T-t} - d_-(m)) + \frac{\phi(\sigma\sqrt{T-t} - d_-(m))}{\sigma\sqrt{T-t}}.$$

Hedging pozici pro $\Delta^Y(t)$ můžeme dostat ze vztahu

$$\Delta^Y(t) = u^Y\left(t, \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x}u_x^Y\left(t, \frac{1}{x}\right).$$

Kde N je distribuční funkce normálního rozdělení, $\phi(x)$ je hustota normálního rozdělení a funkce d_- a d_+ jsou stejné jako z věty 1.

Důkaz. Podle (1.4) a

$$f^Y(X_Y(T)) = \max_{0 \leq t \leq T} X_Y(t)$$

dostaneme:

$$\begin{aligned} u^Y(t, x) &= \mathbb{E}^Y \left[\max_{0 \leq t \leq T} X_Y(t) \mid X_Y(t) = x, M_Y(t) = m \right] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \max \left\{ x \cdot \exp \left(\sigma y \sqrt{T-t} - \frac{1}{2} \sigma^2 (T-t) \right), m \right\} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left(-\frac{y^2}{2} \right) dy \\ &= \int_{-\infty}^{d_-(m)} m \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left(-\frac{y^2}{2} \right) dy + \\ &+ \int_{d_-(m)}^{\infty} x \cdot \exp \left(\sigma y \sqrt{T-t} - \frac{1}{2} \sigma^2 (T-t) \right) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left(-\frac{y^2}{2} \right) dy \\ &= m \cdot N(d_-(m)) + x \cdot N \left(\sigma \sqrt{T-t} - d_-(m) \right), \end{aligned}$$

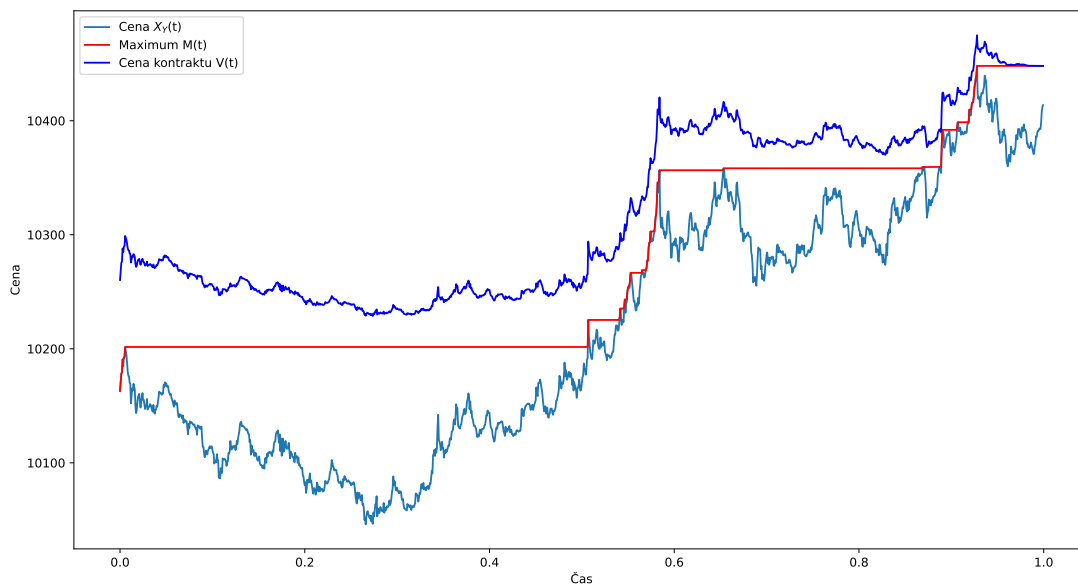
Z věty 1 dostaneme:

$$\begin{aligned} \Delta^X(t) &= u_x^Y(t, x) = \frac{\partial}{\partial x} u^Y(t, x) \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left[m \cdot N(d_-(m)) + x \cdot N \left(\sigma \sqrt{T-t} - d_-(m) \right) \right] \\ &= -\frac{m\phi(d_-(m))}{x\sigma\sqrt{T-t}} + N(\sigma\sqrt{T-t} - d_-(m)) + \frac{\phi(\sigma\sqrt{T-t} - d_-(m))}{\sigma\sqrt{T-t}}, \end{aligned}$$

$$\Delta^Y(t) = u_x^X(t, x) = u^Y\left(t, \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x}u_x^Y\left(t, \frac{1}{x}\right).$$

□

Na obrázku 1.3 je zobrazena ukázka vývoje ceny $X_Y(t)$ a ceny kontraktu $V(t)$. Vidíme, že v konečném čase T je cena kontraktu $V(T)$ rovna maximální hodnotě ceny $X_Y(t)$ na intervalu $[0, T]$.



Obrázek 1.3: Ukázka kontraktu, který vyplácí maximum.

Všimněme si, že v čase $t = 0$ je cena kontraktu:

$$\begin{aligned}
 u^Y(0, x) &= m \cdot N(d_-(m)) + x \cdot N(\sigma\sqrt{T-t} - d_-(m)) \\
 &= x \cdot N(d_-(x)) + x \cdot N(\sigma\sqrt{T-t} - d_-(x)) \\
 &= 2x \underbrace{N\left(\frac{1}{2}\sigma\sqrt{T}\right)}_{> \frac{1}{2}} > x.
 \end{aligned}$$

Tedy kontrakt v čase $t = 0$ stojí více než cena $X_Y(0)$, což dává dobrý smysl, jelikož na konci v čase $t = T$ kontrakt vyplácí maximum za dané období. Kontrakt je tedy výdělečný, přesáhne-li cena $X_Y(t)$ někdy $2X_Y(0) \cdot N\left(\frac{1}{2}\sigma\sqrt{T}\right)$.

2. Optimální výplata

2.1 Formulace problému

Následující text je založen na Vecer (2020). Předpokládejme dva agenty obchodující na trhu, kteří obchodují podle hustoty ceny, která se pohybuje na nějakém pravděpodobnostním prostoru Ω . Prvním agentem je tzv. market maker - trh, který předpokládá pravděpodobnostní míru \mathbb{Q} , což znamená, že je ochotný koupit nebo prodat jakékoli množství Arrow-Debreu securities $A(x)$ za cenu $q(x)$ při výstupu (konečné ceně) $x \in \Omega$. Druhým je tzv. market taker - agent, který předpokládá pravděpodobnostní míru \mathbb{P} , tedy je ochotný koupit nebo prodat jakékoli množství Arrow-Debreu securities $A(x)$ za cenu $p(x)$ při výstupu (konečné ceně) $x \in \Omega$. Otázka pro agenta: jaká je optimální výplata $V(x)$, kterou může dosáhnout při výstupu x , která maximalizuje nějakou jeho zvolenou (striktně konkávní a rostoucí) užitkovou funkci $U(x)$.

Trh oceňuje náhodnou výplatu V veličinu jako

$$\int_{\Omega} V(x)q(x)dx = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[V] = V(0).$$

Hodnota $V(0)$ stanovuje jaké typy výnosů jsou dosažitelné pro agenty. Počáteční hodnota kapitálu agenta je $V(0)$, to znamená, že může být dosažena každá výplata V , pokud ji trh \mathbb{Q} oceňuje na hodnotu $V(0)$. Pravděpodobnostní míra \mathbb{Q} je tedy martingal, neboli rizikově neutrální míra. Základní úlohu formulujeme následovně:

Věta 2 (Řešení optimální výplaty). *Nechť $U(x)$ je užitková funkce splňující $U'(x) > 0$ a $U''(x) < 0$. Náhodná veličina $V^{(p,q)}$, která maximalizuje*

$$\mathbb{E}^{\mathbb{P}}U[V]$$

za podmíněk

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[V] = V(0)$$

je dána

$$V(x) = I\left(\lambda \cdot \frac{q(x)}{p(x)}\right), \quad (2.1)$$

kde

$$I(x) = [U'(x)]^{-1}$$

a kde λ řeší

$$\int_{\Omega} I\left(\lambda \cdot \frac{q(x)}{p(x)}\right) q(x)dx = 0.$$

Důkaz. Řešíme vlastně problém variačního počtu, kde hledáme funkci V maximalizující

$$\int_{\Omega} U(V(x))p(x)dx$$

za podmíněk

$$\int_{\Omega} V(x)q(x) = 0.$$

Pro tuto optimalizační úlohu použijeme Lagrangeův funkcionál

$$J[V] = \int_{\Omega} [U(V(x))p(x) - \lambda V(x)q(x)] dx.$$

Optimální řešení splňuje

$$\frac{\partial J}{\partial V} = 0,$$

z čehož dostaneme

$$U'(V(x))p(x) - \lambda q(x) = 0,$$

upravením dostaneme řešení

$$V(x) = I \left(\lambda \cdot \frac{q(x)}{p(x)} \right),$$

kde

$$I(x) = [U'(x)]^{-1}$$

a kde λ řeší

$$\int_{\Omega} I \left(\lambda \cdot \frac{q(x)}{p(x)} \right) q(x) dx = 0.$$

Všimněme si, že optimální řešení $V^{(p,q)}$ závisí na věrohodnostním poměru $\frac{p(x)}{q(x)}$.
Podíváme se ještě na očekávaný přírůstek užítku: □

$$\mathbb{E}^{\mathbb{P}} [U(V^{(p,q)})] - U(0) = \int_{\Omega} U \left(I \left(\lambda \cdot \frac{q(x)}{p(x)} \right) \right) p(x) dx - U(0) \geq 0$$

reprezentuje statistickou divergenci. Očekávaný zisk, $\mathbb{E}^{\mathbb{P}} [V^{(p,q)}] > 0$, také reprezentuje statistickou divergenci a plyne přímo z Jensenovy nerovnosti. Ukážeme si zde několik příkladů.

Příklad 3 (Logaritmická užítková funkce). *Nechť $U(x) = \log(x)$. Pak*

$$I(x) = \frac{1}{x}$$

a proto

$$V^{(p,q)}(x) = \frac{1}{\lambda} \frac{p(x)}{q(x)}.$$

Z podmínky dostaneme

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[V] = V(0)$$

$$\int_{\Omega} \left[\frac{1}{\lambda} \frac{p(x)}{q(x)} \right] q(x) dx = V(0)$$

$$\int_{\Omega} \frac{p(x)}{\lambda} dx = V(0)$$

$$\frac{1}{\lambda} = V(0)$$

$$\lambda = \frac{1}{V(0)},$$

dohromady tedy dostaneme optimální řešení ve tvaru

$$V^{(p,q)}(x) = V(0) \cdot \frac{p(x)}{q(x)}.$$

Očekávaný užitek investora je

$$\mathbb{E}^{\mathbb{P}}[U(V^{(p,q)})] = \int_{\Omega} \log\left(\frac{p(x)}{q(x)}\right) p(x) dx = D_{KL}(\mathbb{Q}||\mathbb{P}),$$

což je Kullback-Leiblerova divergence.

Příklad 4 (Exponenciální užítková funkce). *Nechť $U(x) = \exp\left(-\frac{x}{B}\right)$, kde B představuje kapitál (bankroll).*

$$I(x) = -\log\left(-\frac{x}{B}\right)$$

a proto

$$V^{(p,q)}(x) = B \cdot \log\left(\frac{p(x)}{q(x)}\right) + B \cdot \log\left(-\frac{1}{\lambda B}\right).$$

Z podmínky $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[V] = 0$ (zde 0 představuje nulový zisk, nikoliv počáteční kapitál agenta) dostaneme

$$\lambda = -\frac{1}{B \cdot \exp\left(\int_{\Omega} \log\left(\frac{q(x)}{p(x)}\right) q(x) dx\right)},$$

dohromady dostaneme optimální řešení ve tvaru

$$\begin{aligned} V^{(p,q)}(x) &= B \cdot \log\left(\frac{p(x)}{q(x)}\right) + B \int_{\Omega} \log\left(\frac{p(x)}{q(x)}\right) p(x) dx \\ &= B \cdot \log\left(\frac{p(x)}{q(x)}\right) + B \cdot D_{KL}(\mathbb{Q}||\mathbb{P}). \end{aligned}$$

Očekávaný užitek investora je

$$\mathbb{E}^{\mathbb{P}} [U(V^{(p,q)})] = 1 - \exp(-D_{KL}(\mathbb{Q}||\mathbb{P})).$$

Ještě si všimněme, že očekávaný zisk je součtem dvou Kullback-Leiblerových divergencí

$$\mathbb{E}^{\mathbb{P}} [V^{(p,q)}] = B \cdot D_{KL}(\mathbb{P}||\mathbb{Q}) + B \cdot D_{KL}(\mathbb{Q}||\mathbb{P}).$$

Příklad 5 (Mocninná užítková funkce). *Nechť máme mocninnou užítkovou funkci*

$$U(x) = \frac{x^{1-\gamma} - 1}{1 - \gamma}$$

pro $\gamma > 0$ (pro $\gamma \rightarrow 1$ dostaneme logaritmickou užítkovou funkci). Dostaneme

$$I(x) = x^{-\frac{1}{\gamma}}$$

a proto

$$V^{(p,q)}(x) = \left(\frac{1}{\lambda} \frac{p(x)}{q(x)} \right)^{\frac{1}{\gamma}}.$$

Z podmínky $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}} [V] = V(0)$ dostaneme

$$\lambda = \frac{1}{V(0)} \left(\int_{\Omega} \left(\frac{p(x)}{q(x)} \right)^{\frac{1}{\gamma}} q(x) dx \right)^{\gamma}.$$

Celkově tedy dostaneme

$$V^{(p,q)}(x) = V(0) \cdot \frac{\left(\frac{p(x)}{q(x)} \right)^{\frac{1}{\gamma}}}{\int_{\Omega} \left(\frac{p(u)}{q(u)} \right)^{\frac{1}{\gamma}} q(u) du}.$$

2.2 Statistické testování

Věta 3 (Počet Arrow-Debreu Securities). *Počet Arrow-Debreu securities $F^{(p,q)}(x)$ potřebných k dosažení optimální výplaty $V^{(p,q)}(x)$ je*

$$F^{(p,q)}(x) = I \left(\lambda \cdot \frac{q(x)}{p(x)} \right) + C$$

pro jakoukoli konstantu C .

Důkaz. Výplata $V^{(p,q)}(x)$ je kombinací ceny Arrow-Debreu Security $A(x)$ a také zaplacení za všechny možné pozice v Arrow-Debreu Securities $A(y)$. Při koupení C jednotek Arrow-Debreu Securities očekáváme nulový profit, protože pouze jeden má výnos C , což je důsledek z

$$\int_{\Omega} A(x) dx = 1.$$

Výplata $V^{(p,q)}(x)$ při ceně x je

$$\begin{aligned} V^{(p,q)}(x) &= F^{(p,q)}(x) - \int_{\Omega} F^{(p,q)}(y) dy \\ &= I \left(\lambda \cdot \frac{q(x)}{p(x)} \right) + C - \int_{\Omega} \left[I \left(\lambda \cdot \frac{q(y)}{p(y)} \right) + C \right] dy = I \left(\lambda \cdot \frac{q(x)}{p(x)} \right). \end{aligned}$$

Tedy platí vztah (2.1). □

Toto nás vede k myšlence, že můžeme testovat, zdali realizovaný profit agenta maximalizující užitkovou funkci je statisticky významný. Zejména se budeme věnovat věrohodnostnímu poměru, když agenti maximalizují logaritmickou užitkovou funkci.

Už víme, že optimální hodnota kapitálu při konečné ceně x , který maximalizuje mocninnou užitkovou funkci je podle příkladu 5

$$V^{(p,q)}(x) = V(0) \cdot \frac{\left(\frac{p(x)}{q(x)} \right)^{\frac{1}{\gamma}}}{\int_{\Omega} \left(\frac{p(u)}{q(u)} \right)^{\frac{1}{\gamma}} q(u) du}.$$

Toto můžeme rozšířit o další cenu. Tedy optimální hodnota kapitálu po konečných nezávislých cenách x_1 a x_2 je

$$\begin{aligned} V^{(p,q)}(x_1, x_2) &= V(0) \cdot \frac{\left(\frac{p(x_1, x_2)}{q(x_1, x_2)} \right)^{\frac{1}{\gamma}}}{\int_{\Omega} \int_{\Omega} \left(\frac{p(u_1, u_2)}{q(u_1, u_2)} \right)^{\frac{1}{\gamma}} q(u_1, u_2) du_1 du_2} \\ &= V(0) \cdot \frac{\left(\frac{p(x_1)}{q(x_1)} \right)^{\frac{1}{\gamma}}}{\int_{\Omega} \left(\frac{p(u_1)}{q(u_1)} \right)^{\frac{1}{\gamma}} q(u_1) du_1} \cdot \frac{\left(\frac{p(x_2)}{q(x_2)} \right)^{\frac{1}{\gamma}}}{\int_{\Omega} \left(\frac{p(u_2)}{q(u_2)} \right)^{\frac{1}{\gamma}} q(u_2) du_2}. \end{aligned}$$

Poslední rovnost plyne z $p(x_1, x_2) = p(x_1) \cdot p(x_2)$ a $q(x_1, x_2) = q(x_1) \cdot q(x_2)$. Tedy to znamená, že agent po obdržení více konečných cen, který maximalizuje mocninnou užitkovou funkci, dostává optimální hodnotu, jako kdyby maximalizoval kapitál postupně.

Pokud navíc uvažujeme logaritmickou užitkovou funkci, tak po opakování této procedury n -krát, bude mít konečný kapitál následující hodnotu:

$$V^{(p,q)}(x_1, x_2, \dots, x_n) = V(0) \cdot \underbrace{\prod_{i=1}^n \frac{p(x_i)}{q(x_i)}}_{=L} = V(0) \cdot L. \quad (2.2)$$

Výsledná hodnota je tedy přeškálovaný věrohodnostní poměr L konstantou $V(0)$. Věrohodnostní poměr L můžeme využívat ke statistickým testům v pravděpodobnostních modelech.

Na základě statistiky (2.2) a Neyman–Pearsonova lemmatu (2.2) můžeme testovat hypotézu, zda je profit statistiky významný.

Poznámka (Neymanovo–Pearsonovo Lemma). *Nejsilnější test hypotézy*

$$H_0 : \mathbb{P} \text{ je správně} \quad H_1 : \mathbb{Q} \text{ je správně}$$

je při zamítnutí H_0 když $L < c$, kde c je síla testu.

Protože optimální hodnota kapitálu je přímo věrohodnostní poměr, tak konečná hodnota kapitálu je statistický indikátor, která z měř \mathbb{Q} a \mathbb{P} odpovídá obdržným hodnotám x_1, \dots, x_n . Pokud agent získá statisticky významný zisk, tak to naznačuje, že míra \mathbb{P} je správná oproti míře trhu \mathbb{Q} . Ze symetrie plyne, že statisticky významná ztráta naznačuje, že míra \mathbb{Q} je správně oproti míře \mathbb{P} .

Poznamenejme ještě, že toto testování platí pouze pro logaritmickou užitkovou funkci a obecně neplatí pro obecnou mocninnou užitkovou funkci ($\gamma \neq 1$) kvůli faktu, že optimální hodnota kapitálu je funkcí

$$\int_{\Omega} \left(\frac{p(u)}{q(u)} \right)^{\frac{1}{\gamma}} q(u) du,$$

což záleží na celé hustotě cen \mathbb{P} a \mathbb{Q} . Optimální hodnota kapitálu (uvažujeme-li logaritmickou užitkovou funkci) záleží pouze na realizovaných hodnotách, zatímco při obecné mocninné užitkové funkci optimální hodnota kapitálu záleží na celé hustotě, tedy i hodnotách, které nebyly realizovány. Tuto vlastnost si ukážeme na následujícím příkladu.

Příklad 6 (Fotbal). *Ukážeme si jednu vlastnost mocninné užitkové funkce na jednoduchém příkladě. Uvažujme tři možné výsledky fotbalového zápasu W - výhra, D - remíza a L - prohra. Dále uvažujme tři pravděpodobnostní míry \mathbb{Q} , \mathbb{P}^1 a \mathbb{P}^2 , kde \mathbb{Q} představuje názor na výsledek například sázkové kanceláře a pravděpodobnostní míry \mathbb{P}^1 představují názor na výsledek sázkaře. Pravděpodobnostní míra \mathbb{P}^2 představuje, že sázkař změnil názor na výsledek. Uvažujme například následující pravděpodobnosti:*

	Q	P ¹	P ²
W	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
D	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$
L	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$

Tabulka 2.1: Pravděpodobnosti výsledku zápasu podle měř \mathbb{Q} , \mathbb{P}^1 a \mathbb{P}^2 .

Uvažujme-li logaritmickou užitkovou funkci, tak optimální výplaty jsou:

	P ¹	P ²
W	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$
D	$\frac{4}{3}$	$\frac{2}{3}$
L	$\frac{4}{3}$	2

Tabulka 2.2: Optimální výplaty - logaritmická užitková funkce $\gamma = 1$.

Uvažujme-li mocninnou užitkovou funkci s $\gamma = \frac{1}{2}$, tak optimální výplaty jsou:

	\mathbb{P}^1	\mathbb{P}^2
W	$2(\sqrt{2} - 1)$	$2 - \frac{2}{\sqrt{3}}$
D	$2(1 - \sqrt{2})$	$2 - \frac{2}{\sqrt{3}}$
L	$2(1 - \sqrt{2})$	$2(\sqrt{3} - 1)$

Tabulka 2.3: Optimální výplaty - mocinná užitková funkce $\gamma = \frac{1}{2}$.

Nyní si všimněme, že sázkař nezměnil názor na výhru, změnil názor pouze na remízu a prohru. Uvažujeme-li logaritmickou užitkovou funkci, tak vidíme, že se optimální výplata při výhře nezměnila. Nicméně uvažujeme-li mocinnou užitkovou funkci, tak se optimální výplata při výhře změnila, přestože na ni sázkař nezměnil názor.

U mocinné užitkové funkce záleží u optimálních výplat na celé hustotě, kdežto u logaritmické užitkové funkce záleží jenom na konkrétních hodnotách výsledku.

2.3 Kellyho kritérium

V této sekci krátce popíšeme spojitost s Kellyho kritériem od Vecer (June 2, 2020). Problém hledání optimálního chování sázejících byl již studován Kellym, a v literatuře je to známo právě pod názvem Kellyho kritérium. Kellyho kritérium říká, jaký zlomek kapitálu sázejícího má být vsazen, když sázející má jiný názor na kurzy sázek než názor trhu. Tento problém je řešen pomocí maximalizací logaritmické užitkové funkce, výsledkem je maximalizace očekávaného exponenciálního růstu kapitálu sázejícího. Omezení tohoto přístupu je, že jsme omezeni na binární náhodné proměnné. V následující větě je uvedeno Kellyho kritérium a je dokázáno pomocí věty 2.

Věta 4 (Kellyho kritérium). *Kellyho kritérium je speciálním případem, kde volíme logaritmickou užitkovou funkci $U(x) = \log(1 + \frac{x}{B})$ a binární náhodnou veličinu X . Předpokládáme subjektivní pravděpodobnostní míru \mathbb{P} , tedy $\mathbb{P}(X = 1) = p$ a pravděpodobnostní míru trhu \mathbb{Q} , tedy $\mathbb{Q}(X = 1) = q$. Optimální výplata je*

$$V = \begin{cases} B \cdot \left(\frac{p}{q} - 1\right) & X = 1, \\ B \cdot \left(\frac{1-p}{1-q} - 1\right) & X = 0. \end{cases}$$

Důkaz. Podle věty (2) máme

$$V^{(p,q)}(x) = \frac{1}{\lambda} \frac{p(x)}{q(x)} - B = \begin{cases} B \cdot \left(\frac{p}{q} - 1\right) & X = 1, \\ B \cdot \left(\frac{1-p}{1-q} - 1\right) & X = 0, \end{cases}$$

Protože z podmínky dostaneme $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[V] = 0$ dostaneme $\lambda = \frac{1}{B}$.

□

3. Mertonův Problém

V této kapitole popíšeme Mertonův problém (Mertonovo portfolio) a ukážeme, že optimální řešení je přímým důsledkem výsledků z předchozí kapitoly 2. Nicméně optimální řešení z využívá faktu, že mohou být obchodovány Arrow-Debreu securities, což v praxi nelze provést. Arrow-Debreu securities musejí být replikovány obchodováním podkladového aktiva, k tomu je potřeba úplný trh (ve smyslu, že všechny možné výplaty mohou být dosaženy pouze obchodováním ceny $X_Y(t)$).

Mertonův problém může být popsán jako hledání optimální výplaty, kde agent předpokládá, že výnosy mají normální rozdělení s driftem μ , zatímco trh předpokládá, že výnosy jsou bez driftu. Zatím se omezíme na předpoklad, že agent i trh předpokládají stejnou volatilitu σ .

3.1 Klasický přístup

Řešení Mertonova problému nejdříve nalezneme pomocí lineárních parciálních diferenciálních rovnic. Tento výsledek a postup je již znám, ale pro ilustraci ho uvedeme pro srovnání s metodou uvedeným v sekci (3.2), který je mnohem univerzálnější.

Agent předpokládá drift μ , vývoj ceny tedy je

$$dS(t) = S(t)(\mu dt + \sigma dW^{\mathbb{P}}(t))$$

zatímco trh předpokládá

$$dS(t) = S(t)\sigma dW^{\mathbb{Q}}(t).$$

Definujme proces $X(t)$ jako jednoduchý výnos:

$$dX(t) = \frac{dS(t)}{S(t)} = \mu dt + \sigma dW^{\mathbb{P}}(t) = \sigma dW^{\mathbb{Q}}(t). \quad (3.1)$$

Trh umožňuje agentovy investovat do arbitrážních pozic v přírůstcích $dX(t)$, které mají z pohledu pravděpodobnostní míry \mathbb{Q} (pohled trhu) nulovou střední hodnotu. Integrací (3.1) podle času přes interval $[0, T]$ a položením $X(0) = 0$ dostaneme

$$\int_0^T dX(t)dt = \int_0^T \mu + \sigma dW^{\mathbb{P}}(t)dt = \int_0^T \sigma dW^{\mathbb{Q}}(t)dt$$

$$X(T) = \mu T + \sigma W^{\mathbb{P}}(T) = \sigma W^{\mathbb{Q}}(T).$$

Distribuční funkce $X(T)$ podle míry \mathbb{P} je tedy $N(\mu T, \sigma\sqrt{T})$, ale podle míry \mathbb{Q} je to $N(0, \sigma\sqrt{T})$. Věrohodnostní poměr je pak

$$\frac{p(X(T))}{q(X(T))} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 T}} \exp\left(-\frac{(X(T)-\mu T)^2}{2\sigma^2 T}\right)}{\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 T}} \exp\left(-\frac{X(T)^2}{2\sigma^2 T}\right)} = \exp\left(\frac{\mu}{\sigma^2} X(T) - \frac{1}{2} \frac{\mu^2}{\sigma^2} T\right). \quad (3.2)$$

3.2 Řešení pomocí užitkové funkce

Nyní můžeme aplikovat výsledky z předchozí předchozí kapitoly 2 a univerzálnější metodou se dopracovat ke stejnému výsledku.

Věta 5 (Mertonův Problém). *Optimální výplata $V(t)$ agenta maximalizující mocninnou užitkovou funkci je dána vzorcem*

$$V(t) = V(0) \exp \left(\frac{\mu}{\gamma\sigma^2} X(t) - \frac{1}{2} \left(\frac{\mu}{\gamma\sigma} \right)^2 t \right) \quad (3.3)$$

se stochastickým vývojem

$$dV(t) = \frac{\mu}{\gamma\sigma^2} V(t) dX(t).$$

Důkaz. Hustota $X(T)$ podle míry \mathbb{P} je

$$p(X(T)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 T}} \exp \left(-\frac{(X(T) - \mu T)^2}{2\sigma^2 T} \right),$$

zatímco podle míry \mathbb{Q}

$$q(X(T)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 T}} \exp \left(-\frac{X(T)^2}{2\sigma^2 T} \right).$$

Využitím (podrobnější výpočet zde neuvádíme, jelikož bude později uveden v obecnější verzi) mocninné užitkové funkce je optimální výplata $V(T)$ podle příkladu 5:

$$V(T) = V(0) \cdot \frac{\left(\frac{p(X(T))}{q(X(T))} \right)^{\frac{1}{\gamma}}}{\int_{\Omega} \left(\frac{p(x)}{q(x)} \right)^{\frac{1}{\gamma}} q(x) dx} = V(0) \exp \left(\frac{\mu}{\gamma\sigma^2} X(T) - \frac{1}{2} \left(\frac{\mu}{\gamma\sigma} \right)^2 T \right).$$

Využitím martingalové vlastnosti pravděpodobnostní míry \mathbb{Q} kontraktu spočítáme $V(t)$. Použijeme funkci u definovanou v (1.3):

$$\begin{aligned} u(t, x) &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} [V(T) | X(t) = x] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} V(0) \exp \left(\frac{\mu}{\gamma\sigma^2} y - \frac{1}{2} \left(\frac{\mu}{\gamma\sigma} \right)^2 (T - t) \right) \frac{\exp \left(-\frac{(y-x)^2}{2\sigma^2(T-t)} \right)}{\sqrt{2\pi(T-t)}} dy \\ &= V(0) \exp \left(\left(\frac{\mu}{\gamma\sigma^2} \right)^2 \sigma^2 (T - t) + \frac{\mu}{\gamma\sigma^2} x \right) \exp \left(-\frac{1}{2} \left(\frac{\mu}{\gamma\sigma} \right)^2 (T - t) \right) \\ &= V(0) \exp \left(\frac{\mu}{\gamma\sigma^2} x - \frac{1}{2} \left(\frac{\mu}{\gamma\sigma} \right)^2 t \right). \end{aligned}$$

Tedy

$$V(t) = V(0) \exp \left(\frac{\mu}{\gamma\sigma^2} X(t) - \frac{1}{2} \left(\frac{\mu}{\gamma\sigma} \right)^2 t \right),$$

což je geometrický Brownův proces. Proces $V(t) = u(t, X(t))$ je martingal podle míry \mathbb{Q} a podle Itovova vzorce dostaneme

$$\begin{aligned} du(t, X(t)) &= u_t(t, X(t))dt + u_x(t, X(t))dX(t) + \frac{1}{2}u_{xx}(t, X(t))(dX(t))^2 \\ &= \left[u_t(t, X(t)) + \frac{1}{2}\sigma^2 u_{xx}(t, X(t)) \right] dt + u_x(t, X(t))dX(t) \\ &= u_x(t, X(t))dX(t). \end{aligned}$$

Jelikož

$$u(t, x) = V(0) \exp \left(\frac{\mu}{\gamma\sigma^2}x - \frac{1}{2} \left(\frac{\mu}{\gamma\sigma} \right)^2 t \right),$$

tak

$$u_x(t, x) = V(0) \frac{\mu}{\gamma\sigma^2} u(t, x),$$

což nám dává stochastický vývoj

$$dV(t) = \frac{\mu}{\gamma\sigma^2} V(t) dX(t).$$

□

Zvolíme-li logaritmickou užitkovou funkci, tedy $\gamma = 1$, a počáteční hodnotu $V(0) = 1$, tak vidíme, že výsledky z (3.2) a (3.3) jsou stejné.

Větu 5 můžeme ještě rozšířit tak, že trh předpokládá drift r a agent předpokládá drift μ . Tedy

$$\begin{aligned} p(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 T}} \exp \left(-\frac{(x - \mu T)^2}{2\sigma^2 T} \right), \\ q(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 T}} \exp \left(-\frac{(x - rT)^2}{2\sigma^2 T} \right). \end{aligned}$$

Pak

$$V(T) = V(0) \exp \left(\frac{\mu - r}{\gamma\sigma^2} X(T) - \frac{1}{2} \left(\frac{\mu - r}{\gamma\sigma} \right)^2 T \right) \quad (3.4)$$

se stochastickým vývojem

$$\frac{\mu - r}{\gamma\sigma^2} dX(t).$$

3.3 Rozdílný pohled na volatilitu

Nyní budeme uvažovat Mertonův problém, kde budeme předpokládat rozdílnost volatilitu. Tedy agent předpokládá pravděpodobnostní míru \mathbb{P} a $X(T) \sim N(\mu T, \sigma_p \sqrt{T})$, zatímco trh předpokládá pravděpodobnostní míru \mathbb{Q} a $X(T) \sim N(0, \sigma_q \sqrt{T})$. Bez jakýkoliv dalších předpokladů na σ_p a σ_q (σ_p může být větší i menší než σ_q) vyřešíme optimální výplatu s mocninnou užitkovou funkcí z příkladu 5:

Věta 6 (Mertonův problém s rozdílnou volatilitou). *Optimální výplata $V(t)$ agenta maximalizující mocninnou užítkovou funkci za různých předpokladů na volatilitu σ_p a σ_q je dána vzorcem*

$$V(t) = V(0) \sqrt{\frac{(\gamma - 1)\sigma_p^2 + \sigma_q^2}{((\gamma - 1) + \frac{t}{T})\sigma_p^2 + (1 - \frac{t}{T})\sigma_q^2}} \times \exp\left(\frac{(\frac{\sigma_p^2}{\sigma_q^2} - 1)\frac{X(t)^2}{2T} + \mu X(t) - \frac{1}{2}\mu^2\frac{\sigma_q^2}{(\gamma-1)\sigma_p^2 + \sigma_q^2}t}{((\gamma - 1) + \frac{t}{T})\sigma_p^2 + (1 - \frac{t}{T})\sigma_q^2}\right) \quad (3.5)$$

se stochastickým vývojem

$$dV(t) = \frac{(\frac{\sigma_p^2}{\sigma_q^2} - 1)X(t) + \mu T}{((\gamma - 1)T + t)\sigma_p^2 + (T - t)\sigma_q^2} V(t) dX(t).$$

Důkaz. Důkaz je spíše technického rázu, ale pro úplnost ho uvedeme. Hustota výnosů jsou podle pravděpodobnostní míry \mathbb{P} a \mathbb{Q} :

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_p^2 T}} \exp\left(-\frac{(x - \mu T)^2}{2\sigma_p^2 T}\right),$$

$$q(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_q^2 T}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma_q^2 T}\right).$$

Nejdříve spočteme integrál (upravíme na hustotu normálního rozdělení):

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left(\frac{p(x)}{q(x)}\right)^{\frac{1}{\gamma}} q(x) dx &= \int_{\Omega} \left(\frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_p^2 T}} \exp\left(-\frac{(x - \mu T)^2}{2\sigma_p^2 T}\right)}{\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_q^2 T}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma_q^2 T}\right)}\right)^{\frac{1}{\gamma}} \frac{\exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma_q^2 T}\right)}{\sqrt{2\pi\sigma_q^2 T}} dx \\ &= \int_{\Omega} \left(\frac{\sigma_q}{\sigma_p}\right)^{\frac{1}{\gamma}} \exp\left(-\frac{(x - \mu T)^2 \sigma_q^2 - x^2(1 - \gamma)\sigma_p^2}{2\gamma\sigma_p^2\sigma_q^2 T}\right) \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_q^2 T}} dx \\ &= \left(\frac{\sigma_q}{\sigma_p}\right)^{\frac{1}{\gamma}} \sqrt{\frac{\gamma\sigma_p^2}{\sigma_q^2 - (1 - \gamma)\sigma_p^2}} \exp\left(-\frac{\mu^2 T^2 \sigma_q^2 - \frac{\mu^2 T^2 \sigma_q^4}{\sigma_q^2 - (1 - \gamma)\sigma_p^2}}{2\gamma\sigma_p^2\sigma_q^2 T}\right) \times \\ &\times \int_{\Omega} \sqrt{\frac{\sigma_q^2 - (1 - \gamma)\sigma_p^2}{2\pi\gamma\sigma_p^2\sigma_q^2 T}} \exp\left(-\frac{\left(x - \frac{\mu T \sigma_q^2}{\sigma_q^2 - (1 - \gamma)\sigma_p^2}\right)^2}{2\frac{\gamma\sigma_p^2\sigma_q^2 T}{\sigma_q^2 - (1 - \gamma)\sigma_p^2}}\right) dx \\ &= \left(\frac{\sigma_q}{\sigma_p}\right)^{\frac{1}{\gamma}} \sqrt{\frac{\gamma\sigma_p^2}{\sigma_q^2 - (1 - \gamma)\sigma_p^2}} \exp\left(-\frac{\mu^2 T^2 \sigma_q^2 - \frac{\mu^2 T^2 \sigma_q^4}{\sigma_q^2 - (1 - \gamma)\sigma_p^2}}{2\gamma\sigma_p^2\sigma_q^2 T}\right). \end{aligned}$$

Pak $V(T)$ je dáno vzorcem:

$$\begin{aligned}
V(T) &= V(0) \cdot \frac{\left(\frac{p(X(T))}{q(X(T))}\right)^{\frac{1}{\gamma}}}{\int_{\Omega} \left(\frac{p(x)}{q(x)}\right)^{\frac{1}{\gamma}} q(x) dx} \\
&= V(0) \frac{\left(\frac{\sigma_q}{\sigma_p}\right)^{\frac{1}{\gamma}} \exp\left(-\frac{(X(T)-\mu T)^2}{2\gamma\sigma_p^2 T} + \frac{X(T)^2}{2\gamma\sigma_q^2 T}\right)}{\left(\frac{\sigma_q}{\sigma_p}\right)^{\frac{1}{\gamma}} \sqrt{\frac{\gamma\sigma_p^2}{\sigma_q^2 - (1-\gamma)\sigma_p^2}} \exp\left(-\frac{\mu^2 T^2 \sigma_q^2 - \frac{\mu^2 T^2 \sigma_q^4}{\sigma_q^2 - (1-\gamma)\sigma_p^2}}{2\gamma\sigma_p^2 \sigma_q^2 T}\right)} \\
&= V(0) \sqrt{\frac{(\gamma-1)\sigma_p^2 + \sigma_q^2}{\gamma\sigma_p^2}} \times \\
&\times \exp\left(\frac{\sigma_p^2 - \sigma_q^2}{2\gamma\sigma_p^2 \sigma_q^2 T} X(T)^2 + \frac{\mu}{\gamma\sigma_p^2} X(T) - \frac{1}{2} \frac{\mu^2}{\gamma\sigma_p^2} \frac{\sigma_q^2}{(\gamma-1)\gamma_p^2 + \sigma_q^2} T\right)
\end{aligned} \tag{3.6}$$

Hodnota $V(t)$ v čase t je dána vztahem $V(t) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[V(T)|X(t) = x]$:

$$\begin{aligned}
u(t,x) &= \int_{-\infty}^{\infty} V(0) \sqrt{\frac{(\gamma-1)\sigma_p^2 + \sigma_q^2}{\gamma\sigma_p^2}} \times \\
&\times \exp\left(\frac{\sigma_p^2 - \sigma_q^2}{2\gamma\sigma_p^2 \sigma_q^2 (T-t)} y^2 + \frac{\mu}{\gamma\sigma_p^2} y - \frac{1}{2} \frac{\mu^2}{\gamma\sigma_p^2} \frac{\sigma_q^2}{(\gamma-1)\gamma_p^2 + \sigma_q^2} (T-t)\right) \times \\
&\times \frac{\exp\left(-\frac{(y-x)^2}{2\sigma_q^2 (T-t)}\right)}{\sqrt{2\pi\sigma_q^2 (T-t)}} dy.
\end{aligned}$$

Po upravení dostaneme řešení $V(t)$ ve tvaru:

$$\begin{aligned}
V(t) &= V(0) \sqrt{\frac{(\gamma-1)\sigma_p^2 + \sigma_q^2}{\left(\left(\gamma-1\right) + \frac{t}{T}\right)\sigma_p^2 + \left(1 - \frac{t}{T}\right)\sigma_q^2}} \times \\
&\times \exp\left(\frac{\left(\frac{\sigma_p^2}{\sigma_q^2} - 1\right)\frac{X(t)^2}{2T} + \mu X(t) - \frac{1}{2}\mu^2 \frac{\sigma_q^2}{(\gamma-1)\sigma_p^2 + \sigma_q^2} t}\right).
\end{aligned}$$

Poslední část věty dostaneme z:

$$u_x(t,x) = V(0) \frac{\left(\frac{\sigma_p^2}{\sigma_q^2} - 1\right)x + \mu T}{\left(\left(\gamma-1\right)T + t\right)\sigma_p^2 + (T-t)\sigma_q^2} u(t,x),$$

pak pro stochastický vývoj tedy platí

$$dV(t) = \frac{\left(\frac{\sigma_p^2}{\sigma_q^2} - 1\right)X(t) + \mu T}{\left(\left(\gamma-1\right)T + t\right)\sigma_p^2 + (T-t)\sigma_q^2} V(t) dX(t).$$

□

3.4 Mean Reversion

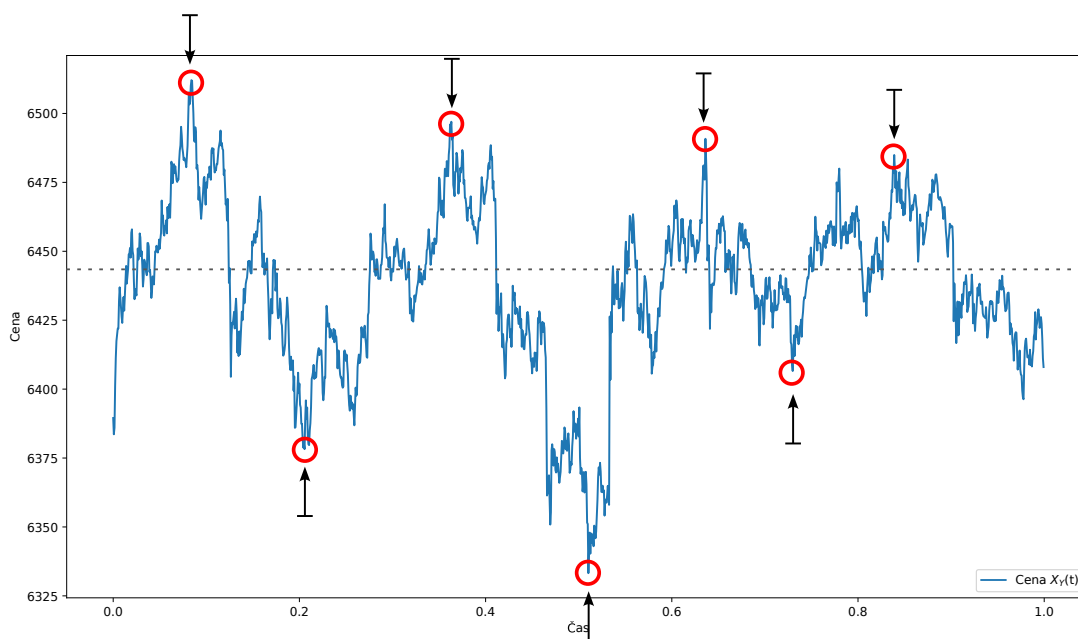
Mean reversion je termín z financí, jehož předpoklad je, že cena aktiva bude mít v průběhu času tendenci konvergovat k průměrné hodnotě. V praxi cena nesplňuje přesně matematický model ceny uvedený v 1.2 a pokud se cena drží častěji u nějaké střední hodnoty, tak matematicky to znamená, že parametry z předchozí sekce zvolíme jako $\mu = 0$, $\gamma = 1$ (logaritmická užitková funkce) a $\sigma_p < \sigma_q$.

Při volbě těchto parametrů se vzorce (3.6) a (3.5) zjednoduší na:

$$V(T) = V(0) \sqrt{\frac{\sigma_q^2}{\sigma_p^2}} \exp\left(\frac{(\sigma_p^2 - \sigma_q^2)X(T)^2}{2\sigma_p^2\sigma_q^2 T}\right),$$

$$V(t) = V(0) \sqrt{\frac{\sigma_q^2}{\frac{t}{T}\sigma_p^2 + (1 - \frac{t}{T})\sigma_q^2}} \exp\left(\frac{\left(\frac{\sigma_p^2}{\sigma_q^2} - 1\right) \frac{X(t)^2}{2}}{\frac{t}{T}\sigma_p^2 + (1 - \frac{t}{T})\sigma_q^2}\right).$$

Na obrázku 3.1 je vidět cena, která opakovaně klesá a následně roste - tedy pohybuje se kolem nějaké své střední hodnoty. Zajímavě vypadají hedging pozice



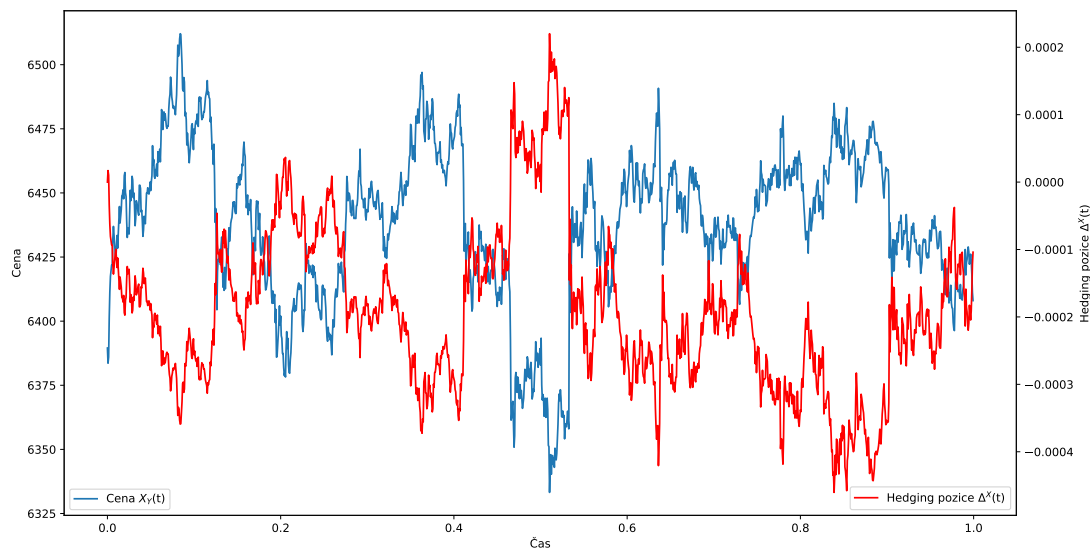
Obrázek 3.1: Ukázka myšlenky mean reversion.

$\Delta^X(t)$, které mají tvar:

$$\Delta^X(t) = u_x^Y(t, X(t)) = V(t) \left(\frac{\left(\frac{\sigma_p^2}{\sigma_q^2} - 1\right) X(t)}{\frac{t}{T}\sigma_p^2 + (1 - \frac{t}{T})\sigma_q^2} \right) \quad (3.7)$$

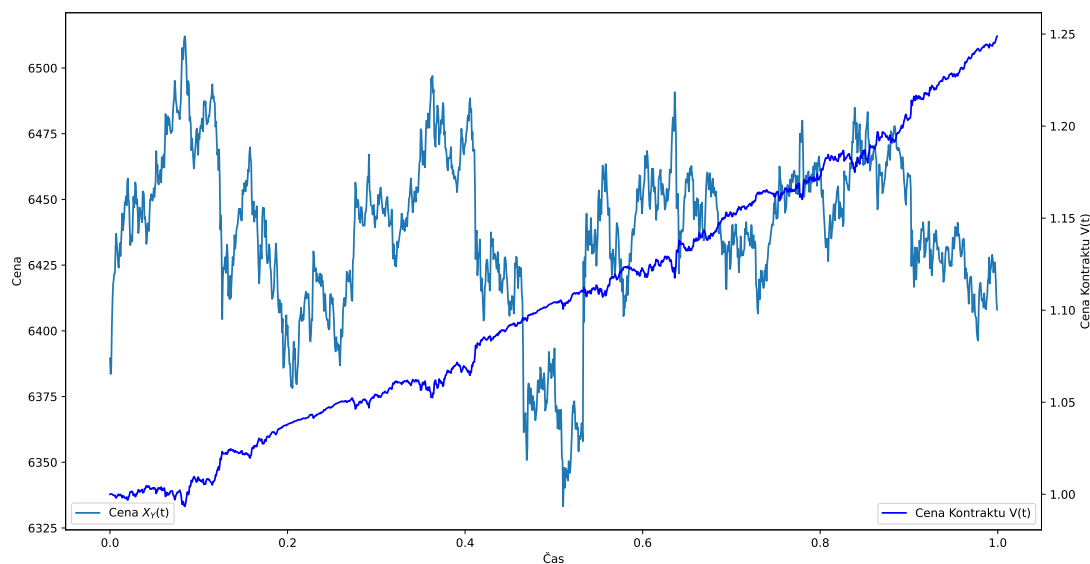
Na obrázku 3.2 je zobrazena cena $X_Y(t)$ a hedging pozice $\Delta^X(t)$. Můžeme si všimnout, že pokud cena $X_Y(t)$ roste, tak hedging pozice $\Delta^X(t)$ klesá, tedy máme

prodávat. A obráceně, pokud cena $X_Y(t)$ klesla, hedging pozice $\Delta^X(t)$ vzrostla, tedy máme kupovat.



Obrázek 3.2: Ukázka hedging pozice $\Delta^X(t)$ pro mean reversion. Cena $X_Y(t)$ pochází z kurzu kryptoměny BTC/USD.

Pro stejný vývoj ceny se ještě podíváme na cenu kontraktu $V(t)$, ta podle očekávání roste, jelikož cena $X_Y(t)$ opakovaně roste a klesá.



Obrázek 3.3: Ukázka vývoje ceny kontraktu $V(t)$ u mean reversion.

4. Spojitost s Bayesovskou statistikou

Následující text je založen na Vecer (2020). V předchozí sekci jsme předpokládali pravděpodobnostní míru trhu \mathbb{Q} a nějakého agenta s jeho pravděpodobnostní mírou \mathbb{P} . Nyní nebudeme uvažovat pravděpodobnostní míru trhu \mathbb{Q} , ale budeme uvažovat pouze agenty s jejich pravděpodobnostními mírami. V takovémto případě hraje roli pravděpodobnostní míry \mathbb{Q} rozdělení \mathbb{M} , které je ekvilibriem pravděpodobnostních měr agentů.

Budeme se zabývat logaritmickou užítkovou funkcí, výsledkem bude spojitost s Bayesovskou statistikou. Předpokládáme, že trh je tvořen agenty $u \in \mathcal{S}$, kde \mathcal{S} může být konečná i nekonečná. Každý agent maximalizuje svoji logaritmickou užítkovou funkci, s kapitálem $B(u)$ a svým názorem na cenu $p^u(x)$. Dále ještě předpokládáme, že celkový kapitál trhu $B(M) = \int B(u)du$ je konečný.

4.1 Ekvilibrium

Uvažujme následující logaritmickou užítkovou funkci $U(x) = \log\left(1 + \frac{x}{B}\right)$, kde parametr B představuje kapitál agenta. Podle věty 2 snadno dostaneme

$$I(x) = \frac{1}{x} - B$$

a proto

$$V^{(p,q)}(x) = \frac{1}{\lambda} \frac{p(x)}{q(x)} - B.$$

Z podmínky $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[V] = 0$ dostaneme $\lambda = \frac{1}{B}$. Celkem tedy dostaneme optimální řešení ve tvaru

$$V^{(p,q)}(x) = B \cdot \left(\frac{p(x)}{q(x)} - 1 \right). \quad (4.1)$$

Arrow-Debreu security se nachází v ekvilibriu m , jestliže celkový realizovaný optimální zisk pro všechny možné ceny x je roven nule:

$$\int V^{(p^u,m)}(x)du = 0.$$

Následující věta říká, že rozdělení ekvilibria je vlastně kombinací jednotlivých rozdělení agentů.

Věta 7 (Rozdělení ekvilibria). *Hustota ekvilibria $m(x)$ je dáno následovně*

$$m(x) = \int \left(\frac{B(u)}{B(M)} \right) \cdot p^u(x)du,$$

kde

$$B(M) = \int B(u)du$$

je celkový kapitál trhu.

Důkaz. Optimální výplata pro logaritmickou užítkovou $\log\left(1 + \frac{x}{B}\right)$ funkci je podle 4.1:

$$V^{(p^u, m)}(x) = B(u) \left(\frac{p^u(x)}{m(x)} - 1 \right).$$

Hustota ekvilibria $m(x)$ splňuje pro cenu x :

$$\begin{aligned} \int V^{(p^u, m)}(x) du &= \int B(u) \left(\frac{p^u(x)}{m(x)} - 1 \right) du \\ &= \frac{1}{m(x)} \int B(u) p^u(x) du - \int B(u) du \\ &= \left(\frac{1}{B(M)} \int B(u) p^u(x) du \right)^{-1} \int B(u) p^u(x) du - B(M) \\ &= B(M) - B(M) = 0. \end{aligned}$$

□

Ekvilibrium $m(x)$ je vážený průměr jednotlivých hustot $p^u(x)$ agentů, kde váhy jsou jejich kapitál $B(u)$.

Nyní ukážeme spojitost s Bayesovskou statistikou. Předpokládejme, že všichni agenti začínají s kapitálem $B(\theta) = f(\theta)$ splňující $B(M) = \int B(\theta) = \int B(\theta) d\theta = 1$. Každý agent předpokládá rozdělení na náhodnou veličinu X - věrohodnostní funkci

$$p^\theta(x) = f(x|\theta).$$

Kapitál $B(\theta) = f(\theta)$ odpovídá apriornímu rozdělení. Ekvilibrium je podle věty 7 dáno

$$m(x) = f(x) = \int f(x|\theta) f(\theta) d\theta,$$

což je nepodmíněné rozdělení náhodné veličiny. Z příkladu 3 víme, že očekávaný užitek pro logaritmickou užítkovou funkci optimálního výplaty V je Kullback-Leiblerova divergence:

$$\mathbb{E}^{f(x|\theta)} [U(V)] = \int f(x|\theta) \log \left(\frac{f(x|\theta)}{f(x)} \right) dx = D_{KL}(f(\cdot|\theta) || f(\cdot)).$$

Předpokládejme, že náhodná veličina X realizuje hodnotu x_1 . Výsledný zisk pro agenta θ je pak roven

$$V(\theta, x_1) = f(\theta) \cdot \left(\frac{f(x_1|\theta)}{f(x_1)} - 1 \right).$$

Jeho kapitál nabude novou hodnotu

$$B(\theta, x_1) = B(\theta) + V(\theta, x_1) = f(\theta) + f(\theta) \cdot \left(\frac{f(x_1|\theta)}{f(x_1)} - 1 \right) = \frac{f(x_1, \theta)}{f(x_1)} = f(\theta|x_1),$$

což je aposteriorní rozdělení θ . Protože trh je obsazen agenty, kteří maximalizují logaritmickou užítkovou funkci, tak tvoří Bayesovský update. Můžeme opakovat

postup a přidávat další realizace x_2, x_3, x_4, \dots náhodné veličiny X , což vede ke klasickým Bayesovským odhadům. Protože Bayesovská statistika je zkoumána, tak mnoho výsledků a vlastností je již dobře známo. Bayesovská statistika se především zajímá o aposteriorní rozdělení, ale v ekonomii a financích je také zájem studovat vývoj ekvilibria v čase a jeho limitní chování.

Vývoj ekvilibria v čase vypadá následovně. První update ekvilibria je jednoduše

$$f(x|x_1) = \int f(x|\theta)f(\theta|x_1)d\theta,$$

tedy podmíněné rozdělení náhodné veličiny X za podmínky x_1 . Rozdělení $f(x|\theta)$ zůstává stejné bez ohledu na realizovaná data, pouze váhy (kapitál) se mění. V limitě ekvilibrium konverguje k

$$f(x|x_1, x_2, \dots) = \int f(x|\theta)f(\theta|x_1, x_2, \dots)d\theta.$$

Tabulka 4.1 znázorňuje vztah mezi obchodní procedurou a Bayesovskou statistikou.

Obchodní Procedura	Bayesovská Statistika
Podíl na trhu	Apriorní rozdělení
Agentův názor na rozdělení	Věrohodnostní funkce
Ekvilibrium	Nepodmíněné rozdělení
Podíl na trhu + zisk	Aposterioorní rozdělení

Tabulka 4.1: Vztah mezi obchodní procedurou a Bayesovskou statistikou.

Příklad 7 (Bayesovský update). *Na tomto příkladu ukážeme Bayesovský update. Předpokládáme normální rozdělení (používáme notaci $\mu = \theta$)*

$$f(x|\mu) \sim N(\mu, \sigma),$$

kapitál má normální rozdělení

$$B(\mu) \sim N(\mu_0, \sigma_0).$$

Rozdělení ekvilibria je také normální

$$f(x) = \int f(x|\mu)f(\mu)d\mu \sim N\left(\mu_0, \sqrt{\sigma^2 + \sigma_0^2}\right),$$

což je nepodmíněné rozdělení náhodné veličiny X . Očekávaný užitek zisku V je Kullback-Leiblerova divergence:

$$\mathbb{E}^{f(x|\theta)} [U(V)] = D_{KL}(f(\cdot|\theta)||f(\cdot)) = \frac{1}{2} \log \left(1 + \frac{\sigma_0^2}{\sigma^2}\right) + \frac{(\mu - \mu_0)^2 + \sigma^2}{2(\sigma^2 + \sigma_0^2)} - \frac{1}{2}.$$

Rozdělení zisku je rovno

$$V(\mu, x_1) = f(\mu) \cdot \left(\frac{f(x_1|\mu)}{f(x_1)} - 1\right)$$

a kapitál bude mít novou hodnotu

$$B(\mu, x_1) = B(\mu) + V(\mu, x_1) = f(\mu|x_1) \sim N\left(\frac{1}{\frac{1}{\sigma_0^2} + \frac{1}{\sigma^2}} \cdot \left(\frac{\mu_0}{\sigma_0^2} + \frac{x_1}{\sigma^2}\right), \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\sigma_0^2} + \frac{1}{\sigma^2}}}\right).$$

Rozdělení ekvilibria se změní na

$$f(x|x_1) = \int f(x|\mu, x_1)f(\mu|x_1)d\mu \sim N\left(\frac{1}{\frac{1}{\sigma_0^2} + \frac{1}{\sigma^2}} \cdot \left(\frac{\mu_0}{\sigma_0^2} + \frac{x_1}{\sigma^2}\right), \sqrt{\sigma^2 + \frac{1}{\frac{1}{\sigma_0^2} + \frac{1}{\sigma^2}}}\right).$$

Tuto proceduru můžeme opakovat, po n realizacích bude mít kapitál rozdělení

$$B(\mu, x_1, \dots, x_n) = f(\mu, x_1, \dots, x_n) \sim N\left(\frac{1}{\frac{1}{\sigma_0^2} + \frac{n}{\sigma^2}} \cdot \left(\frac{\mu_0}{\sigma_0^2} + \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{\sigma^2}\right), \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\sigma_0^2} + \frac{n}{\sigma^2}}}\right)$$

a ekvilibrium bude mít rozdělení

$$f(x|x_1, \dots, x_n) \sim N\left(\frac{1}{\frac{1}{\sigma_0^2} + \frac{n}{\sigma^2}} \cdot \left(\frac{\mu_0}{\sigma_0^2} + \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{\sigma^2}\right), \sqrt{\sigma^2 + \frac{1}{\frac{1}{\sigma_0^2} + \frac{n}{\sigma^2}}}\right).$$

Ekvilibrium pak konverguje k

$$f(x, x_1, x_2, \dots) \sim N(\bar{X}_\infty, \sigma),$$

kde

$$\bar{X}_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i.$$

4.2 Rozšíření na spojitý čas

Výsledky z předchozí části můžeme rozšířit na spojitý čas. Uvažujme rizikové aktivo S s normálními přírůstky

$$dX(t) = \frac{dS(t)}{S(t)}$$

a parametry μdt a $\sigma\sqrt{dt}$:

$$dX(t) \sim N(\mu dt, \sigma\sqrt{dt}).$$

Dále ještě předpokládejme, že počáteční rozdělení agentova kapitálu je

$$B^\mu(t=0, x=X(0)) = f(\mu) \sim N(\mu_0, \sigma_0),$$

kde B^μ značí kapitál agenta, který předpokládá, že skutečný drift je μ . Předpokládáme, že $X(0) = 0$. Opakováním výpočtu z příkladu 7 dostaneme, že agentův kapitál v čase t je

$$B^\mu(t, X(t)) = N\left(\frac{1}{\frac{1}{\sigma_0^2} + \frac{t}{\sigma^2}} \cdot \left(\frac{\mu_0}{\sigma_0^2} + \frac{X(t)}{\sigma^2}\right), \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\sigma_0^2} + \frac{t}{\sigma^2}}}\right),$$

což odpovídá aposteriornímu rozdělení parametru μ . To je známý výsledek z Chernoff (1961). Kapitál agenta je tvořen obchodováním Arrow-Debreu securities, což plyne z věty 2. Trh tvořen normálními přírůstkami je úplný (úplný ve smyslu, že všechny možné výplaty mohou být dosaženy obchodováním pouze s procesem $X(t)$), proto stejné výsledky mohou být dosaženy pozicemi v přírůstcích $dX(t)$. Tento výsledek vývoje kapitálu plyne z Itovova vzorce.

Věta 8 (SDE pro Aposteriorní rozdělení: Normální rozdělení.). *Stochastická diferenciální rovnice pro vývoj aposteriorního rozdělení splňuje*

$$dB^\mu(t, X(t)) = B^\mu(t, X(t)) \cdot \frac{\mu - e(t)}{\sigma^2} \cdot (dX(t) - e(t)dt),$$

kde

$$e(t) = \frac{1}{\frac{1}{\sigma_0^2} + \frac{t}{\sigma^2}} \cdot \left(\frac{\mu_0}{\sigma_0^2} + \frac{X(t)}{\sigma^2} \right)$$

je průměr aposteriorního rozdělení.

Důkaz. Plyne z Itovova vzorce

$$dB^\mu(t, X(t)) = B_t^\mu(t, X(t))dt + B_x^\mu(t, X(t))dX(t) + \frac{1}{2}B_{xx}^\mu(t, X(t))(dX(t))^2.$$

□

Ještě poznamenejme, protože platí $\mathbb{E}^{\mathbb{M}}[dX(t)] = e(t)dt$, kde \mathbb{M} představuje pravděpodobnostní míru ekvilibria, tak vývoj aposteriorního rozdělení $B^\mu(t, X(t))$ je martingal vzhledem k míře $\mathbb{P}^{\mathbb{M}}$ pro všechny volby parametru μ .

Věta 8 ukazuje spojitost mezi aposteriorním rozdělením a Mertonovým portfoliem. Mertonův problém může být interpretován jako hledání optimálního rozdělení zisku, jestliže agent předpokládá, že trh má drift $\mu - r$:

$$dX(t) = \frac{de^{-rt}S(t)}{e^{rt}S(t)} = (\mu - r)dt + \sigma dW(t)$$

vzhledem k míře \mathbb{P} , ale trh nepředpokládá drift

$$dX(t) = \frac{de^{-rt}S(t)}{e^{rt}S(t)} = \sigma dW(t)$$

vzhledem k míře \mathbb{Q} . Optimální pozicí v přírůstcích je

$$\frac{\mu - r}{\sigma^2},$$

což je výsledek, který jsme odvodili v (3.4). Pro srovnání, vývoj aposteriorního rozdělení jako výsledek spojitého updatu, investujeme zlomek

$$\frac{\mu - e(t)}{\sigma^2}$$

do přírůstků trhu $dX(t)$, což je téměř stejné až na to, že drift r je nahrazen ekvilibriem $e(t)$. To je důsledkem jiné volby pravděpodobnostní míry trhu \mathbb{Q} .

5. Numerické výsledky

5.1 Volatilita

Jelikož důležitým faktorem ve financích hraje volatilita, budeme se jí chvíli zabývat. Následující text je založen na Cipra (1986). Volatilita uvažovaná jako směrodatná odchylka je základní mírou rizikovosti finančních aktiv. Charakteristické znaky volatility jsou například shlukování volatility (větší (resp. menší) výkyvy v dané finanční řadě lze očekávat spíše po větších (resp. menších) předchozích výkyvech), pákový efekt (tj. tendenci volatility zvětšit se více po cenovém poklesu než po cenovém nárůstu stejné velikosti) a spíše spojitý vývoj bez výrazných skoků.

Pro testování teorie budeme používat volatilitu, kterou odhadneme za konkrétní období (volatilita za poslední den, týden atd.), ale ta v praxi není známa, proto pro simulaci obchodování volíme možnost předpovídat volatilitu na základě historických dat.

Odhadem volatility přes nějaké historické období (délka k) budeme uvažovat směrodatnou odchylku:

$$\hat{\sigma}_t^2 = \frac{1}{k-1} \sum_{\tau=t-k}^{t-1} (y_\tau - \hat{\mu}_t)^2, \quad (5.1)$$

kde

$$\hat{\mu}_t = \frac{1}{k} \sum_{\tau=t-k}^{t-1} y_\tau. \quad (5.2)$$

Pro náš případ budeme uvažovat období jeden den, kde máme k dispozici minutové svíčky z obchodních dní, celkem tedy 1440 svíček pro jeden den (v datech se však vyskytují díry, budeme tedy uvažovat jenom ty dny, kde je dostatek dat). Pro odhad volatility však budeme používat pětiminutové svíčky, jelikož nejsou tak zašumělé a odhady se zdají být lepší. Navíc ještě uvažujeme logaritmické výnosy časové řady, můžeme předpokládat, že $\hat{\mu}_t = 0$, protože používáme vysokou frekvenci měření.

Základním modelem, kterým se budeme zabývat je model GARCH. U modelu GARCH se předpokládá, že volatilita závisí na svých zpožděných hodnotách.

Definice 9 (GARCH(m,s)). Model GARCH(m,s) je definován následovně:

$$\begin{aligned} y_t &= \mu_t + e_t, \\ e_t &= \sigma_t \varepsilon_t, \\ \sigma_t^2 &= \alpha_0 + \sum_{i=1}^m \alpha_i e_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^s \beta_j \sigma_{t-j}^2, \end{aligned}$$

kde $\varepsilon_t \sim iid(0,1)$, $\alpha_0 > 0$, $\alpha_i \geq 0$, $\beta_j \geq 0$ a $\sum_{i=1}^{\max\{m,s\}} (\alpha_i + \beta_i) < 1$ (klademe $\alpha_i = 0$ pro $i > m$ a $\beta_i = 0$ pro $i > s$).

Poslední nerovnost v omezeních na parametry je postačující podmínkou pro existenci rozptylu

$$var(e_t) = \frac{\alpha_0}{1 - \sum_{i=1}^{\max\{m,s\}} (\alpha_i + \beta_i)}.$$

Velkým handicapem modelu GARCH je neschopnost modelovat asymetrické chování, kdy kladné a záporné odchylky e_t mohou mít odlišný vliv na volatilitu (viz pákový efekt). Existuje mnoho modifikací, my budeme uvažovat modifikaci EGARCH, kterou již budeme používat pro naše potřeby předpovídání volatilitu.

Definice 10 (EGARCH(m,s,n)). Model EGARCH(m,s,n) je definován následovně:

$$\begin{aligned} y_t &= \mu_t + e_t, \\ e_t &= \sigma_t \varepsilon_t, \\ \ln \sigma_t^2 &= \alpha_0 + \sum_{i=1}^m \alpha_i \left| \frac{e_{t-i}}{\sigma_{t-i}} \right| + \sum_{j=1}^s \beta_j \ln \sigma_{t-j}^2 + \sum_{k=1}^n \gamma_k \frac{e_{t-k}}{\sigma_{t-k}}. \end{aligned}$$

Tento zápis volatilitu má výhodu, že podmínky nezápornosti odhadovaných parametrů jsou nyní irelevantní a pákový efekt už není kvadratický, ale je nyní exponenciální. Asymetrie nastává, když $\gamma_k \neq 0$ pro nějaké zpožděné k (speciálně pro $\gamma_k < 0$ nastává pákový efekt).

Ještě zbývá určit hodnoty parametrů m , s a n . K problému identifikace modelu EGARCH(m,s,n) pro danou časovou řadu zde přistoupíme jako k problému odhadu parametrů m , s a n na základě optimalizace kritéria AIC (Akaike information criterion):

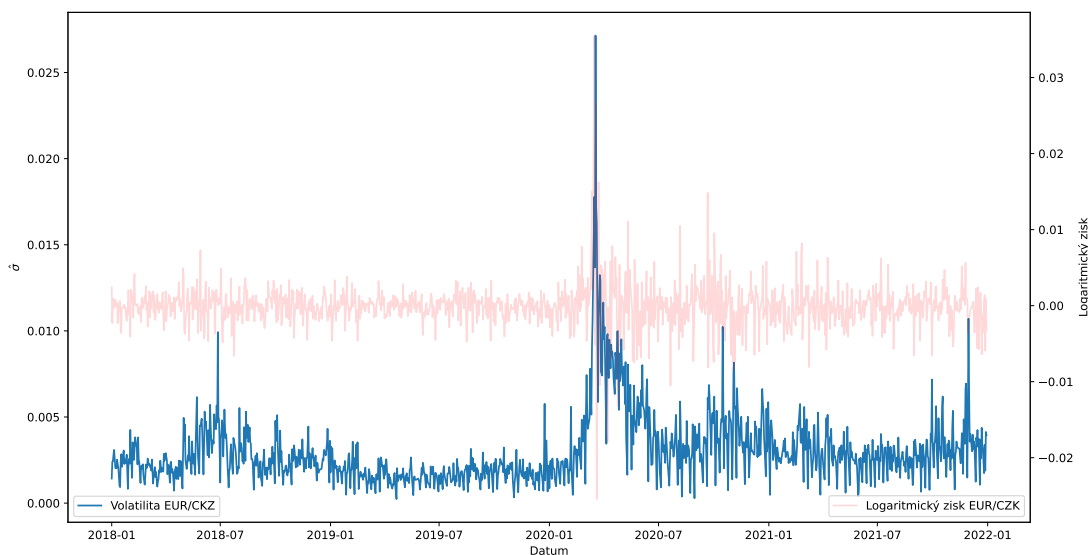
$$(\hat{m}, \hat{s}, \hat{n}) = \arg \min_{m,s,n} \ln L + \frac{2(m + s + n + 1)}{N},$$

kde L je maximalizovaná věrohodnost pro daný model a N je délka časové řady. Maximální hodnoty parametrů m , s a n jsme omezili na 5. Nejlepší model (pro kurz EUR/CZK, kterým se budeme zabývat později) pak vychází jako EGARCH(1,3,4). Finální model má tedy tvar

$$\begin{aligned} \ln \sigma_t^2 &= \alpha_0 + \alpha_1 \left| \frac{e_{t-1}}{\sigma_{t-1}} \right| + \beta_1 \ln \sigma_{t-1}^2 + \beta_2 \ln \sigma_{t-2}^2 + \beta_3 \ln \sigma_{t-3}^2 \\ &+ \gamma_1 \frac{e_{t-1}}{\sigma_{t-1}} + \gamma_2 \frac{e_{t-2}}{\sigma_{t-2}} + \gamma_3 \frac{e_{t-3}}{\sigma_{t-3}} + \gamma_4 \frac{e_{t-4}}{\sigma_{t-4}}. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Odhadnuté parametry zde neuvádíme, jelikož pro odhad volatilitu používáme okno o posledních 200 dní (aby jsme nepoužívali data, která nejsou v daný okamžik známá), tedy pro každý den trénujeme jiný model.

Na obrázku 5.1 je vidět odhadnutá volatilita pro kurz EUR/CZK za období 1.1.2018 - 31.12.2021, se kterým budeme dále ještě pracovat. Pro odhad volatilitu používáme vzorec (5.1).



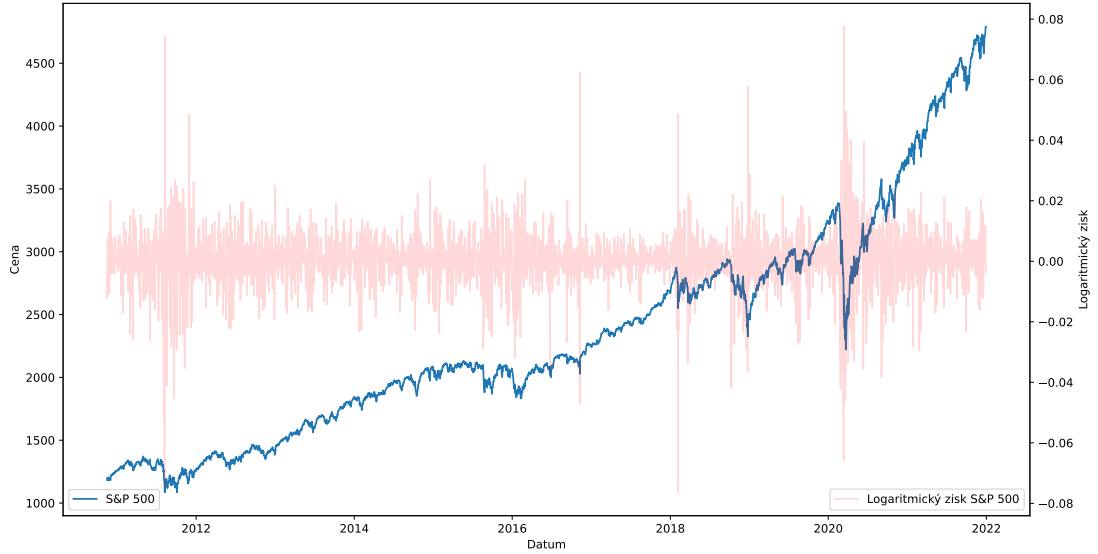
Obrázek 5.1: Volatilita kurzu EUR/CZK.

5.2 Index S&P 500

5.2.1 Data

Jako akciový titul, na kterém budeme testovat teorii Mertonova problému, jsme si vybrali S&P 500. S&P 500 je akciový index skládající se z 500 největších obchodovaných akcí na burze v USA. Akcie mají zastoupení v indexu podle tržního podílu (ke dni 13.4.2022 mají největší podíl společnosti Apple Inc. s 6.99%, Microsoft Corporation s 5.68% a Amazon.com Inc. s 3.55%). S&P 500 patří k nejdůležitějším akciovým indexům světa a počátky sahají až do roku 1923, my se však budeme zabývat novodobější historií a to v období 1.1.2010 až 31.12.2021.

Na obrázku 5.2 je vidět vývoj ceny S&P 500 a taktéž jeho logaritmické zisky. Nejnížší hodnota v uvažovaném období nastala 4.10.2011 s hodnotou 1068, nejvyšší hodnota je 4807.7, které nastalo 30.12.2021.



Obrázek 5.2: Vývoj ceny a logaritmické zisky pro index S&P 500.

V tabulce 5.1 jsou shrnuty základní informace o logaritmických ziscích, kde N značí počet dnů, kde jsou k dispozici data.

	Průměr	Minimum	Maximum	n
S&P 500	0.0005	-0.0764	0.0775	3450

Tabulka 5.1: Základní informace ohledně logaritmických zisků S&P 500.

5.2.2 Odhad driftu

Na těchto datech budeme testovat Mertonův problém. Z vývoje ceny na obrázku 5.2 je patrný rostoucí trend. Průměrný drift logaritmických zisků za období 1.1.2010 až 31.12.2021 je $\mu = 0.00047$. Nyní odhadneme drift podle optimální výplaty Mertonova problému. Podle věty 5 je optimální výplata

$$V(T) = V(0) \exp \left(\frac{\mu}{\gamma \sigma^2} X(T) - \frac{1}{2} \left(\frac{\mu}{\gamma \sigma} \right)^2 T \right).$$

Pro statistické testování vždy počáteční hodnotu kontraktu nastavíme na hodnotu 1, tedy $V(0) = 1$. Uvažujme logaritmickou užítkovou funkci, tedy $\gamma = 1$, dále interval $[0, T]$ bude představovat jeden den, kde čas, ve kterém se obchoduje přeskálujeme na hodnoty do intervalu $[0, 1]$ kvůli snadnější implementaci. Zbývá nám určit hodnoty volatility σ_i pro jednotlivé dny. K dispozici máme minutové svíčky z obchodních dnů, tak volatilitu konkrétního dne odhadneme podle vzorce (5.1). Konečný kapitál je podle (2.2):

$$V^{(p,a)}(x_1, \dots, x_n) = V(0) \cdot L = \exp \left(\sum_{i=1}^n \left[\frac{\mu x_i}{\sigma_i^2} - \frac{\mu^2 T}{2\sigma_i^2} \right] \right).$$

Logaritmická věrohodnost je

$$\ell = \sum_{i=1}^n \left[\frac{\mu x_i}{\sigma_i^2} - \frac{\mu^2 T}{2\sigma_i^2} \right].$$

Z toho dostaneme jednoduše maximálně věrohodný odhad pro μ :

$$\frac{\partial \ell}{\partial \mu} = \sum_{i=1}^n \left[\frac{x_i}{\sigma_i^2} - \frac{\mu T}{\sigma_i^2} \right] = 0 \Rightarrow \hat{\mu} = \frac{\sum_{i=1}^n \frac{x_i}{\sigma_i^2}}{\sum_{i=1}^n \frac{T}{\sigma_i^2}}.$$

K výpočtu intervalu spolehlivosti spočítáme ještě Fisherovu míru informace:

$$J(\mu) = -\mathbf{E} \left[\frac{1}{n} \frac{\partial^2 \ell}{\partial \mu^2} \right] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{T}{\sigma_i^2}.$$

Z věty o asymptotické normalitě maximálně věrohodnostních odhadů platí

$$\sqrt{n}(\hat{\mu} - \mu) \xrightarrow{d} N \left(0, \frac{1}{J(\mu)} \right).$$

Dostáváme tedy po upravení asymptotický konfidenční interval o pokrytí $1 - \alpha$ ve tvaru

$$\left(\hat{\mu} - \frac{u \left(1 - \frac{\alpha}{2} \right)}{\sum_{i=1}^n \frac{T}{\sigma_i^2}}, \hat{\mu} + \frac{u \left(1 - \frac{\alpha}{2} \right)}{\sum_{i=1}^n \frac{T}{\sigma_i^2}} \right),$$

kde $u(\alpha)$ je kvantil normálního rozdělení. Pro index S&P 500 dostáváme následující výsledky (volíme $\alpha = 0.05$) shrnuté v tabulce 5.2.

	$\hat{\mu}$	Dolní Odhad	Horní Odhad
S&P 500	0.00059	0.00046	0.00071

Tabulka 5.2: Maximálně věrohodný odhad pro drift μ indexu S&P 500.

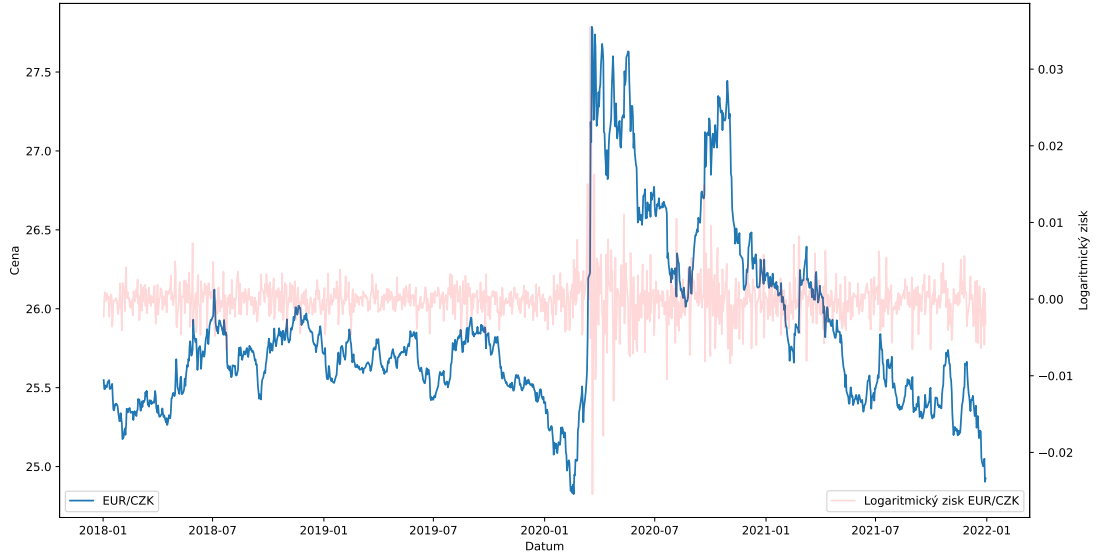
Vidíme, že odhad $\hat{\mu}$ je velmi původnímu odhadu - průměru logaritmických zisků. Dále konfidenční interval nepokrývá nulu, tedy můžeme tvrdit, že skutečný drift $\mu > 0$.

5.3 Kurz EUR/CZK

5.3.1 Data

Data na kterých budeme testovat teorii mean reversion ze sekce (3.4), jsme zvolili směnný kurz EUR/CZK. K dispozici máme minutové svíčky (v datech se však vyskytují díry, kde data chybějí) od 1.1.2018 do 31.12.2021. Takto vysokofrekvenční data používáme kvůli tomu, že budeme chtít zreplikovat kontrakty pouze obchodováním ceny kurzu EUR/CZK (ne pouze z teoretického hlediska), tudíž potřebujeme co nejjemnější data.

Na obrázku 5.3 je zobrazen graf kurzu EUR/CZK za období 2018-2021. Tento graf nevykazuje známky nějakého trendu. V polovině března roku 2020 si můžeme všimnout silného nárůstu ceny, který byl způsoben koronavirovými opatřeními. Dne 16.3.2020 bylo zakázáno létání Evropanů do USA, dále americké sazby byly sníženy o celý procentní bod až na nulu, zatímco v České republice byla ve stejnou dobu oznámena celoplošná karanténa. Minimum nastalo 2020-02-17 s hodnotou 24.7794 a maximum nastalo krátce poté 2020-03-23 s hodnotou 27.8234.



Obrázek 5.3: Historický vývoj ceny kurzu EUR/CZK.

5.3.2 Digitální Opce

Jelikož podle grafu na obrázku 5.3 to vypadá, že se ceny drží v nějakém pásu, tak nejdříve otestujeme zda digitální opce z příkladu 1 nevykazuje nějakou statistickou divergenci, tedy zda ceny končí častěji v nějakém intervalu než předpokládá geometrický Brownův proces. Uvažujeme kontrakt s výplatou

$$V(T) = \mathbb{I}(L \leq X_Y(T) \leq U) \cdot Y(T),$$

tedy kontrakt, který vyplatí jednu jednotku, pokud konečná cena $X_Y(T)$ skončí v intervalu $[L, U]$ a 0 jinak. Podle příkladu 1 stojí tento kontrakt v čase $t = 0$

$$V(T) = N(d_-(U)) - N(d_-(L)).$$

Ještě musíme odhadnout hodnoty volatility σ_i pro jednotlivé dny a určit parametry U a L . K dispozici máme minutové svíčky z obchodních dnů, tak volatilitu konkrétního dne odhadneme podle vzorce (5.1). Parametry U a L určíme tak, aby pravděpodobnost

$$\mathbb{P}^Y [(L \leq X_Y(T) \leq U)] = \frac{1}{2}.$$

Přibližně tedy

$$\begin{aligned} L &= X_Y(0) \cdot \exp(-0.67 \cdot \sigma), \\ U &= X_Y(0) \cdot \exp(0.67 \cdot \sigma). \end{aligned}$$

Náhodná veličina $V(T)$ má alternativní rozdělení s parametrem p . Označme realizované výplaty jako V_1, \dots, V_n . Pak bodovým odhadem je

$$\hat{p}_n = \bar{V}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n V_i.$$

Chceme-li testovat, že konečná cena $X_Y(T)$ končí v intervalu $[L, U]$ častěji než $\frac{1}{2}$, tak testujeme následující hypotézu:

$$H_0 : p = \frac{1}{2}, \quad H_1 : p > \frac{1}{2}.$$

Testová statistika je

$$T_n = \sqrt{n} \frac{\hat{p}_n - \frac{1}{2}}{\sqrt{\hat{p}_n(1 - \hat{p}_n)}},$$

která má asymptoticky normální rozdělení $N(0,1)$. Hypotézu H_0 zamítneme právě tehdy, když $T_n > u(1 - \alpha)$. V tabulce 5.3 jsou shrnuty výsledky testu.

	Průměr \bar{V}_n	Rozptyl	T_n -statistika	p -hodnota	n
EUR/CZK	0.649	0.228	10.464	<0.001	1130

Tabulka 5.3: Výsledky hypotézy pro digitální opci.

Na základě testu tedy striktně zamítáme hypotézu H_0 ve prospěch alternativy H_1 (na hladině $\alpha = 0.05$). Odhadnutá pravděpodobnost $\hat{p}_n \approx 0.649$ je tedy statisticky vyšší než teoretických $\frac{1}{2}$, kterou předpokládá Brownův proces. Cena směnného kurzu EUR/CZK se tedy skutečně drží častěji v nějakém pásu.

Nyní zkusíme zreplicovat cenu kontraktu $V(t)$ pomocí portfolia $P(t)$, tedy cenu kontraktu získáme pouze obchodováním ceny kurzu EUR/CZK. Jelikož chceme simulovat nákup a prodej aktiva EUR/CZK co nevěrohodněji, tak nebudeme používat data, která nejsou v konkrétním čase ještě známá. Musíme tedy predikovat volatilitu z historických dat. Pro predikci volatility o jeden den vpřed tedy budeme používat model EGARCH(1,4,3), jehož explicitní tvar je popsán v (5.3). Podle věty 1 a příkladu 1 je tvar hedging pozice

$$\Delta^X(t) = \frac{\phi(d_-(L)) - \phi(d_-(U))}{x\sigma\sqrt{T-t}},$$

$$\Delta^Y(t) = N(d_+(U)) - N(d_+(L)) - \frac{\phi(d_+(L)) - \phi(d_+(U))}{x^2\sigma\sqrt{T-t}}.$$

Obchodování proběhne následovně: každou minutu přikoupíme (nebo prodáme) tolik, aby jsme drželi přesně $\Delta^X(t)$ a $\Delta^Y(t)$. Jelikož se předpokládá spojitě obchodování a obchodování provádíme pouze každou minutu, tak vzniká nějaké odchýlení od předpokládané ceny kontraktu $V(t)$. Obrázek 5.4 zobrazuje přesnou teoretickou cenu kontraktu $V(t)$ a pro srovnání hodnotu portfolia $P(t)$, které je tvořeno obchodováním pouze ceny kurzu EUR/CZK. Vidíme, že grafy jsou velmi podobné. K největším rozdílům dochází pokud se cena kurzu nehýbe, ve skutečnosti tedy nemůžeme měnit hodnotu portfolia $P(t)$.



Obrázek 5.4: Obchodování ceny kurzu EUR/CZK - digitální opce.

Nyní máme náhodnou veličinu $P(T)$, tedy konečnou hodnotu portfolia. Znovu označme realizované výplaty jako P_1, \dots, P_n . Teoreticky mají mít výplaty $P(T)$ alternativní rozdělení, jelikož ale dochází k odchylkám (kterou můžeme například pozorovat i na obrázku 5.4, kde jsme obchodováním dospěli ke konečné hodnotě přibližně 1.1, místo teoretických 1), tak mohou nabývat teoreticky jakýkoliv hodnot. Použijeme proto obecný jednovýběrový t -test. Počáteční hodnotu portfolia $P(0)$ vždy nastavíme na hodnotu 1 (začínáme obchodovat s jednou jednotkou), testujeme tedy následující hypotézu:

$$H_0 : \mathbb{E}P(T) = 1, \quad H_1 : \mathbb{E}P(T) > 1.$$

Testová statistika je

$$T_n = \sqrt{n} \frac{\bar{P}_n - \frac{1}{2}}{S_n},$$

kde

$$S_n^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (P_i - \bar{P}_n)^2$$

je výběrový rozptyl. Testová statistika T_n má asymptoticky normální rozdělení $N(0,1)$. Podobně hypotézu H_0 zamítneme právě tehdy, když $T_n > u(1 - \alpha)$. V tabulce 5.4 jsou shrnuty výsledky testu.

	Průměr \bar{P}_n	Rozptyl	T_n -statistika	p -hodnota	n
EUR/CZK	1.518	1.649	13.617	<0.001	1130

Tabulka 5.4: Výsledky testu - obchodování ceny kurzu EUR/CZK - digitální opce.

Na základě testu tedy striktně zamítáme hypotézu H_0 ve prospěch alternativy (na hladině $\alpha = 0.05$).

5.3.3 Mean Reversion

Pro kurz EUR/CZK zřejmě bude platit i mean reversion, to plyne jak z obrázku 5.3 (protože se graf drží v nějakém pásu), tak i z předchozího testu, kdy odhadnutá pravděpodobnost byla mnohem vyšší než předpokládaná pravděpodobnost. Podle věty 6 je cena kontraktu

$$V(T) = V(0) \sqrt{\frac{\sigma_q^2}{\sigma_p^2}} \exp\left(\frac{(\sigma_p^2 - \sigma_q^2)X(T)^2}{2\sigma_p^2\sigma_q^2 T}\right).$$

Počáteční hodnotu kontraktu znovu nastavíme na hodnotu 1. Zbývá odhadnout parametry volatility σ_p a σ_q . Odhadnutou volatilitu zvolíme následovně

$$\begin{aligned}\hat{\sigma}_q &= \text{odhad pomocí vzorce (5.1)}, \\ \hat{\sigma}_p &= 0.71\hat{\sigma}_q.\end{aligned}$$

Volba $\hat{\sigma}_p = 0.71\hat{\sigma}_q$ je zvolena z následujícího důvodu: při snížení volatility na $0.71\hat{\sigma}_q$ přibližně platí, že odhad pravděpodobnosti:

$$\mathbb{P}^Y [(L \leq X_Y(T) \leq U)]$$

je přibližně $\frac{1}{2}$. Chceme testovat následující hypotézu:

$$H_0 : \mathbb{Q} \text{ je správně} \quad H_1 : \mathbb{P} \text{ je správně}$$

Jestli realizovaný profit $V^{(p,q)}(x_1, \dots, x_n)$ je statisticky významně vyšší než $V(0)$, tak zamítneme hypotézu H_0 ve prospěch alternativy H_1 . Konečný kapitál je náhodná veličina a podle (2.2) platí:

$$V^{(p,q)}(X_1, \dots, X_n) = V(0) \cdot L = V(0) \cdot \prod_{i=1}^n \frac{p(X_i)}{q(X_i)}.$$

Potřebujeme odvodit rozdělení náhodné veličiny $V^{(p,q)}(X_1, \dots, X_n)$. Jelikož platí

$$\mathbb{P}\left(\prod_{i=1}^n \frac{p(X_i)}{q(X_i)} \leq c\right) = \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^n \ln\left(\frac{p(X_i)}{q(X_i)}\right) \leq \ln(c)\right),$$

tak můžeme použít centrální limitní větu na součet logaritmů konečných výplat $V(T)$. Budeme tedy následující testovat následující hypotézu:

$$H_0 : \mathbb{E} \ln(V(T)) = 0 \quad H_1 : \mathbb{E} \ln(V(T)) > 0$$

K dispozici máme realizované výplaty V_1, \dots, V_n , testová statistika má tvar

$$T_n = \frac{\sum_{i=1}^n \ln(V_i)}{\sqrt{n}S_n}$$

kde

$$S_n^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (\ln(V_i) - \overline{\ln(V)}_n)^2$$

je výběrový rozptyl. Testová statistika T_n má asymptoticky normální rozdělení $N(0,1)$. Hypotézu H_0 zamítneme právě tehdy, když $T_n > u(1 - \alpha)$. V tabulce 5.5 jsou uvedeny výsledky pro data ze směnného kurzu EUR/CZK.

	Průměr	Rozptyl	T_n -statistika	p -hodnota	n
EUR/CZK	0.065	0.193	4.987	<0.001	1130

Tabulka 5.5: Výsledky hypotézy pro mean reversion.

Na základě testu tedy striktně zamítáme hypotézu H_0 ve prospěch alternativy (na hladině $\alpha = 0.05$) a tedy pravděpodobnostní míra \mathbb{P} je správně.

Nyní znovu zkusíme zreplikovat cenu kontraktu $V(t)$ pomocí portfolia $P(t)$, tedy cenu kontraktu získáme pouze obchodováním ceny kurzu EUR/CZK. Znovu pro předpověď volatility budeme používat model EGARCH popsaný (5.3). Podle věty 1 a vzorce 3.7 je tvar hedging pozice pro mean reversion

$$\Delta^X(t) = V(t) \left(\frac{\left(\frac{\sigma_p^2}{\sigma_q^2} - 1 \right) X(t)}{\frac{t}{T}\sigma_p^2 + \left(1 - \frac{t}{T}\right)\sigma_q^2} \right).$$

Testujeme následující hypotézu:

$$H_0 : \mathbb{E} \ln(P(T)) = 0 \quad H_1 : \mathbb{E} \ln(P(T)) > 0$$

Pro testování znovu použijeme testovou statistiku

$$T_n = \frac{\sum_{i=1}^n \ln(P_i)}{\sqrt{n}S_n},$$

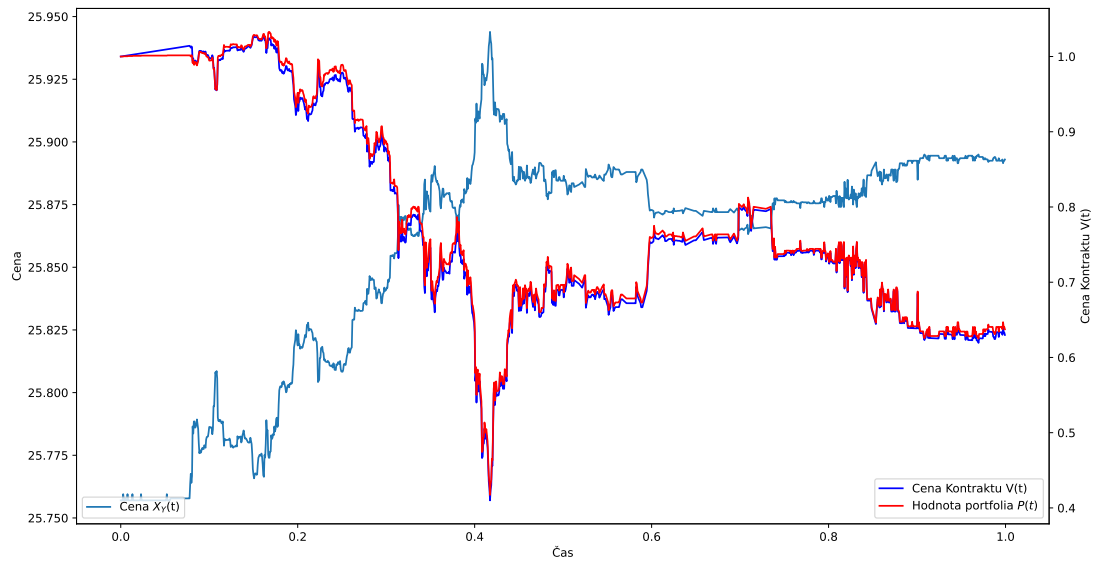
kde P_1, \dots, P_n jsou konečné hodnoty portfolia v čase T , S_n je jejich výběrový rozptyl. V tabulce 5.6 jsou shrnuty výsledky.

	Průměr	Rozptyl	T_n -statistika	p -hodnota	n
EUR/CZK	0.149	0.268	9.723	<0.001	1130

Tabulka 5.6: Výsledky testu - obchodováním ceny kurzu EUR/CZK - mean reversion

Na základě testu tedy striktně zamítáme hypotézu H_0 ve prospěch alternativy H_1 (na hladině $\alpha = 0.05$). Obchodováním směnného kurzu EUR/CZK podle metody mean reversion jsme tedy získaly statisticky významný zisk.

Na obrázku 5.5 je vidět cena, která během dne víceméně roste. Protože mean reversion předpokládá návrat ke střední hodnotě, což zde nenastává, tak hodnota kontraktu taktéž klesá. Na obrázku je taktéž graf hodnoty portfolia $P(t)$, které je tvořeno obchodováním pouze ceny kurzu EUR/CZK. V tomto případě se téměř neliší od předpokládané hodnoty $V(t)$.



Obrázek 5.5: Srovnání hodnoty portfolia $P(t)$ a ceny kontraktu $V(t)$ pro mean reversion.

Závěr

V první kapitole jsme popsali cenu z pohledu matematiky. Uvedli jsme geometrický Brownův proces, kterým jsme modelovali cenu. Uvedli jsme větu o hedgingu, neboli zajišťování, kterou jsme ilustrovali na dvou příkladech.

Ve druhé kapitole jsme našli optimální výplatu pro obecnou užitkovou funkci. Dospěli jsme k výsledku, že pro logaritmickou užitkovou funkci je výsledkem věrohodnostní podíl, který můžeme využít ke statistickému testování. Dále jsme ukázali spojitost s Kellyho kritériem.

Ve třetí kapitole jsme představili Mertonův problém, který jsme nejdříve vyřešili klasickým způsobem pomocí lineárních parciálních diferenciálních rovnic. Pro srovnání jsme ho vyřešili znovu pomocí optimální výplaty, dospěli jsme ke stejnému výsledku, ale univerzálnější metodou. Dále jsme Mertonův problém rozšířili o rozdílném předpokladu na volatilitu, jejímž speciálním případem je mean reversion. V další kapitole jsme ukázali spojitost s Bayesovskou statistikou.

V poslední kapitole jsme testovali uvedenou teorii na skutečných datech o to konkrétně na indexu S&P 500 a směnném kurzu EUR/CZK. Konstruovali jsme i portfolio pomocí simulace obchodováním. Ve všech případech jsme dospěli k statisticky významnému výsledku.

Seznam použité literatury

- CHERNOFF, H. (1961). Sequential tests for the mean of a normal distribution. in proceedings of the fourth berkeley symposium on mathematical statistics and probability. pages Volume 1, pp. 79–91. University of California Press.
- CIPRA, T. (1986). Analýza časových řad s aplikacemi v ekonomii.
- PRÁŠKOVÁ, Z. (2004). Základy náhodných procesů ii.
- VECER, J. (2011). Stochastic finance: A numeraire approach. URL <https://doi.org/10.1201/9781439812525>.
- VECER, J. (2020). Optimal distributional trading gain: Generalizations of merton's portfolio problem with implications to bayesian statistics. URL <https://ssrn.com/abstract=3616661>.
- VECER, J. (June 2, 2020). Kelly criterion, state price density equilibrium and bayesian statistics. URL <https://ssrn.com/abstract=3532237>.

Seznam obrázků

1.1	Ukázka Brownova procesu s vlastnostmi $\sigma = 1$, a $X_Y(0) = 1$, $t \in [0,1]$ a jeho korespondující geometrický Brownův proces.	7
1.2	Ukázka digitální opce. Vidíme, že konečná cena $X_Y(T)$ skončila v intervalu $[L,U]$ a tedy konečná cena kontraktu $V(T)=1$	11
1.3	Ukázka kontraktu, který vyplácí maximum.	13
3.1	Ukázka myšlenky mean reversion.	26
3.2	Ukázka hedging pozice $\Delta^X(t)$ pro mean reversion. Cena $X_Y(t)$ pochází z kurzu kryptoměny BTC/USD.	27
3.3	Ukázka vývoje ceny kontraktu $V(t)$ u mean reversion.	27
5.1	Volatilita kurzu EUR/CZK.	35
5.2	Vývoj ceny a logaritmické zisky pro index S&P 500.	36
5.3	Historický vývoj ceny kurzu EUR/CZK.	38
5.4	Obchodování ceny kurzu EUR/CZK - digitální opce.	40
5.5	Srovnání hodnoty portfolia $P(t)$ a ceny kontraktu $V(t)$ pro mean reversion.	43

Seznam tabulek

2.1	Pravděpodobnosti výsledku zápasu podle měř \mathbb{Q} , \mathbb{P}^1 a \mathbb{P}^2	19
2.2	Optimální výplaty - logaritmická užítková funkce $\gamma = 1$	19
2.3	Optimální výplaty - mocninná užítková funkce $\gamma = \frac{1}{2}$	20
4.1	Vztah mezi obchodní procedurou a Bayesovskou statistikou.	30
5.1	Základní informace ohledně logaritmických zisků S&P 500.	36
5.2	Maximálně věrohodný odhad pro drift μ indexu S&P 500.	37
5.3	Výsledky hypotézy pro digitální opci.	39
5.4	Výsledky testu - obchodování ceny kurzu EUR/CZK - digitální opce.	40
5.5	Výsledky hypotézy pro mean reversion.	42
5.6	Výsledky testu - obchodováním ceny kurzu EUR/CZK - mean reversion	42

A. Přílohy

A.1 Zdrojové Kódy

Příložená příloha obsahuje zdrojové kódy. Kódy pro simulaci, grafických výstupů a testování teorie jsou naprogramovány v jazyce Python.