Posudek oponenta diplomové práce

Kompaktifikace topologických prostorů
Tereza Tížková

Jedná se o druhou verzi práce se skoro stejným obsahem, takže mohu úvodní část minulého posudku zopakovat:
Obsahem práce je zkoumání kompaktifikací tichonovských prostorů X, na které lze spojitě rozšířit všechny homeomorfizmy prostoru X, tj. tzv. H-kompaktifikací. Takovou kompaktifikací je vždy Čechova-Stoneova kompaktifikace $\beta(X)$ a v případě, že X je lokálně kompaktní, i jednobodová kompaktifikace $\alpha(X)$. Otázkou je, zda existují další H-kompaktifikace daného prostoru X. Autorka se zabývá klasickými metrizovatelnými separabilními prostory a jejich mocninami ($\mathbb{N}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^\omega$) s výsledky převzatými z literatury. Novým výsledkem se zdá být případ $X = \mathbb{Q}^\omega$: je dokázáno, že X má jedinou H-kompaktifikaci. Důkaz je sice jednoduchý, ale šlo o to si všimnout, že ze dvou různých známých tvrzení plyne uvedený výsledek, což už triviální zdaleka být nemusí. Oproti předchozí verzi byla vypuštěna poslední kapitola o kategoriích H-kompaktifikací.

Bohužel mohu opakovat i většinu obecných připomínek z první verze. I když některé nedostatky z první verze se v druhé verzi nevyskytují (některé ale zůstaly), objevily se nové. Nebudu sepisovat formální nedostatky jako v minulém posudku, jsou časté. Závažnější nedostatky jsou ve skladbě práce a v některých důkazech. Sestavení práce je někdy nelogické.

Podle mého názoru není jednoduché rozhodnout o uznání této diplomové práce.

Konkrétní připomínky.

Začnu připomínkou, která mohla být už k předešlé verzi práce, ale nyní je (vzhledem ke konstrukci βX) závažnější. V části o svazových vlastnostech kompaktifikací a v následující části o existenci βX, je jedno podstatné opomenutí. Kompaktifikace daného prostoru tvoří vlastní třídu a nikoli množinu, jak se v práci tvrdí. Musí se definovat ekvivalence kompaktifikací a z každé třídy ekvivalence vybrat jeden prvek. Pak už dostaneme množinu, což plyne z toho, že se pracuje v Hausdorffových prostorech. Není tu ani důkaz, ani odkaz, prostě ani zmínka. Bez toho nelze Čechovu-Stoneovu kompaktifikaci βX sestrojit způsobem použitým ve Větě 27. V konstrukci βX se tomu dá vyhnout použitím vnoření X do mocniny $[0, 1]$ (Tichonov).

Nyní zopakuji jednu připomínku z minulého posudku, na kterou autorka nereagovala. Týká se svazových vlastností kompaktifikací. Na mou poznámku, že z Věty 21 (používám číslování nové verze), kterou autorka dokazuje, plyne ihned Věta 19 (kterou celou nedokazuje), vůbec nereagovala.a nechala vše při starém. Navíc v jejím důkazu Věty 19 podstatná část uvedena není a je tu jen odkaz na jiný zdroj - zcela zbytečně. Ač jsem navrhoval i jednoduchý přístup k důkazu Tvrzení 22 (které van Douwen uvádí jako cvičení pro čtenáře), používá svůj starý složitější postup. Navíc z 22 plyne ihned Tvrzení 20, které složitěji dokazuje pomocí algeber spojitých funkcí.

Teprve po uvedených větách se dokazuje existence βX ve Větě 27. Částečně ale existence plyne z Věty 21, protože úplný horní polosvaz má největší prvek a stačí ukázat (jednoduše), že má rozšiřovací vlastnost. Důkaz věty 27 má nepochopitelný druhý odstavec. Zřejmě se předpokládá existence βX a dokazuje se, že má vlastnost βX. Nevím, zda si autorka všimla, že v další části důkazu vlastně opakuje důkaz Věty 21.

Věta 26 o diagonálním zobrazení byla použita už v důkazu Věty 21 (tedy opět nelogické pořadí výsledků). Navíc chybí ve druhém řádku dvě čárky, které činí formulaci jinou, než má být.

Tvrzení 30 dokazovala autorka sama, van Douwen pouze o tvrzení píše, že je to jednoduchý důsledek jeho dvou jiných vět. Důkaz je v podstatě správně, i když se v něm najde několik nevhodných míst.

Ve 3.odstavci je nesmyslně psáno: *Observe that for any $x \in \mathbb{R}$ there is a map $f : x \to -x$.* V dalším postupu je nejvhodnější hned ukázat, že nárůsty (remainders) $\mathbb{R}_+$ a $\mathbb{R}_-$ v $\gamma\mathbb{R}$ jsou disjunktní (to je v 5.odstavci, přesně se to ale nedokazuje) a rovnají se nárůstům v jejich β-obalu (to tu ukázáno je). Nyní už je triviální ukázat, že $\mathbb{R}$ je C^*-vnořené v $\gamma\mathbb{R}$. Bylo dobré připomenout, že automorfizmy $\mathbb{R}_+$ a $\mathbb{R}_-$ zobrazují 0 na 0 (to se tu používá).

Opakování připomínky k minulé verzi: V Definici 35 je definován součin topologických prostorů, který je však používán ve všech předchozích kapitolách. Byl velký problém přesunout tuto definici na začátek práce? Stejně tak bylo vhodnější mít popsány potřebné vlastnosti βX pohromadě na začátku a nemít je rozházené od začátku do konce práce.

Na začátku 2.4 se píše, že $\mathbb{N}$ má jen dvě H-kompaktifikace. Není tu zmínka proč, ale zato následují celkem zbytečné poznámky o $\beta\mathbb{N}$ a $\alpha\mathbb{N}$. Myslím, že pokud je práce věnovaná H-kompaktifikacím, podrobnosti o těchto kompaktifikacích $\mathbb{N}$ by tu měly být. Navíc to není složité.

V 38 je definován pojem silně nuldimenzionálních prostorů pomocí totální nesouvislosti. Tento pojem se používá už v tvrzení 34, ale jako oddělování nulových množin. Nenašel jsem zmínku, že je to totéž. Není to jednoduché ukázat, ale odkaz by stačil.

Část 4.1 uvádí několik charakteristických vlastností βX, vzatých z knihy Gillamana a Jerisona. Potřebuje pouze jedinou (už dříve v práci), a to oddělování nulových množin. V důkazu příslušné Věty 73 není uveden důkaz implikace $2 \Rightarrow 3$, jak je napsáno, ale důkaz opačné implikace. Zbývající část této poslední kapitoly jsou výsledky Vejnara, Keeslinga a Kennedyové s opsanými důkazy.

Na závěr několik příkladů nevhodných formulací.

Zhruba v polovině str.7 se pojednává o homogenních prostorech. Nejdříve se skoro opakuje špatná formulace z minulé verze .. *if the group of automorphisms admits a topology, we get a topological group.* Takovýchto nepřesných nematematických „úvah" je v práci hodně, hned v dalším odstavci je další: *Spaces with large number of automorphisms have their specioal name – homogeneous spaces.* Platí samozřejmě jen opak. Pokračuje se Definicí 12: *The above mentioned notion of a homogeneouis space is defined as follows.* V další části definice je definováno homogenní zobrazení, není nic řečeno o homogenním prostoru. V následujícím odstavci je ale formulace *In some literature, a homogeneous space is also defined as …* a následuje správná definice, která se opakuje v Definici 62.

Následující část o jednobodových kompaktifikacích má podobné nedostatky jako v dřívější verzi. První věta Definice 28 nemá dobrou formulaci: *For a locally compact space X, denote the topology of X by τ_X and define the topology on a compact space αX the following way:….* Lokálně kompaktní prostor je definován až v následující části definice. Co je αX za množinu je popsáno také později. V definici nelze psát, že jde o kompaktní prostor, to se musí ukázat po definici topologie, ukázáno to tu není (přičemž je to podstatné pro práci).

K důkazu Věty 29 mám dvě připomínky. Od van Douwena převzala autorka fakt, že stačí ukázat disjunktnost uzávěru v kompaktifikaci dvou disjunktních uzavřených množin a odkazuje se na větu, kde se ale používají nulové (zero) množiny. Asi bylo vhodné připomenout, že v případě metrických prostorů je to totéž. Druhá připomínka je opakováním z minulého posudku a týká se diskrétních souborů. Po definici diskrétního souboru se píše o konstrukci diskrétních souborů $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ a u obou se zbytečně znovu přidává popis diskrétního souboru.

Miroslav Hušek
KMA

30.8.2022