MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ FAKULTA
Univerzita Karlova

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Eliška Povolná

Hlad po bonusu v pojištění motorových vozidel

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí bakalářské práce: RNDr. Lucie Mazurová, Ph.D.
Studijní program: Finanční matematika
Studijní obor: Finanční matematika

Praha 2022

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracovala samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů. Tato práce nebyla využita k získání jiného nebo stejného titulu.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V .... dne ....

Podpis autora

Děkuji vedoucí bakalářské práce RNDr. Lucii Mazurové, Ph.D. za cenné rady a připomínky k práci a rodině a přátelům za podporu ve studiu.

Název práce: Hlad po bonusu v pojištění motorových vozidel

Autor: Eliška Povolná

Katedra: Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí bakalářské práce: RNDr. Lucie Mazurová, Ph.D., Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Abstrakt:

Práce se zabývá analýzou systémů bonus-malus používaných v pojištění motorových vozidel k úpravě výše pojistného v závislosti na počtu škod hlášených řidičem. Zaměřuje se na matematický popis jevu nazývaného „hlad po bonusu“, kdy řidič raději neuplatní nárok na pojistné plnění, aby nebyl pro následující období zařazen do bonusové třídy s vyšším pojistným. Práce popisuje na zvoleném modelu postup pro volbu optimální retence za použití Lemairova algoritmu. V praktické části je algoritmus implementován v softwaru a jsou vypočteny hodnoty pro systém založený na podmínkách jedné české pojišťovny.

Klíčová slova: bonus-malus, hlad po bonusu, lemairův algoritmus

Title: Bonus hunger in motor insurance

Author: Eliška Povolná

Department: Department of Probability and Mathematical Statistics

Supervisor: RNDr. Lucie Mazurová, Ph.D., Department of Probability and Mathematical Statistics

Abstract: The thesis deals with the analysis of bonus-malus systems used in motor insurance to adjust the amount of the premium depending on the number of claims reported by the driver. It focuses on the mathematical description of a phenomenon called bonus hunger, where a driver prefers not to claim a claim in order not to be placed in a bonus class with a higher premium for the following period. The thesis describes the procedure for choosing the optimal retention using Lemaire's algorithm on the chosen model. In the practical part, the algorithm is implemented in software and values are calculated for a system based on the conditions of one Czech insurance company.

Keywords: bonus-malus, bonus hunger, lemaire algorithm

Obsah

Úvod

V pojištění odpovědnosti motorových vozidel jsou pojistníci rozdělováni do tarifních tříd pomocí základních informací o řidiči a vozidle. Po tomto prvotním, neboli apriorním rozdělení bývá pojistné dále upravováno pomocí systému bonus-malus. V tomto systému je výše pojistného každý rok upravována pomocí přirážek (malusů) a slev (bonusů) podle počtu škod nahlášených řidičem v minulém roce, případně podle počtu měsíců beze škod.

Výsledná výše pojistného se stanovuje relativně vůči pojistnému v základní úrovni, do které jsou zařazováni noví pojistníci. Ve většině systémů však pojistné nezáleží na výši těchto škod. Při nízké výši škody tedy řidiči neuplatňují nárok na pojistné plnění, aby nebyli pro následující období zařazeni do bonusové třídy s vyšším pojistným. Tento jev se nazývá „hlad po bonusu".

Cílem této práce je matematicky popsat tento jev na zjednodušeném modelu. Práce popisuje algoritmus pro volbu optimální retence, neboli hranice mezi tím, kdy je pro řidiče výhodné nárok na pojistné plnění uplatnit a kdy není. Tento algoritmus je implementován v softwaru a jsou vypočteny hodnoty optimální retence ve zjednodušeném systému s předem danými parametry založeném na podmínkách jedné české pojišťovny. Diskutován je vliv stávající bonusové třídy na hodnotu optimální retence a také vliv počtu již nahlášených nehod v současném roce.

Práce je rozdělena na tři kapitoly. V první kapitole je zaveden použitý model pro počet a výši škod. Ve druhé kapitole je popsán teoreticky systém bonus-malus, jev zvaný hlad po bonusu a Lemairův algoritmus pro volbu optimální retence. Ve třetí kapitole byly spočítány teoretické hodnoty optimální retence s pomocí algoritmu implementovaného v programu Wolfram Mathematica.

1. Model pro počet a výši škod

V této kapitole se budeme věnovat základním principům pojištění motorových vozidel a zavedeme model pro počet a výši škod. Definice a značení budou vycházet z práce Denuita a kol. (Denuit a kol., 2007)

1.1 Tarifní třídy a proměnné

Pro stanovení pojistného bývají pojistníci rozdělováni do rizikových tříd, ve kterých všichni pojistníci patřící do stejné třídy platí stejné pojistné. Pro pojišťovnu je důležité, aby toto rozdělení co nejvíce odpovídalo reálnému riziku pojistníků - aby byly tarifní třídy co nejvíce homogenní a bylo možné vytvořit realitě odpovídající model s jednotným rozdělením počtů a výší škod. Apriorní klasifikace bývá dosahováno podle tarifních proměnných - základních informací o pojistnících (v pojištění vozidel například věk řidiče, technické parametry vozidla) s pomocí zobecněných lineárních modelů. Pro takové třídy lze poté odhadovat počty a výše škod s pomocí vhodných statistických modelů.

V této práci budeme uvažovat pouze jednu základní tarifní třídu se stejnými tarifními proměnnými, pro kterou zavedeme model pro počet a výši škod a později zavedeme také stupnici bonus-malus. V této třídě mají všichni pojistníci stanovené stejné apriorní, základní pojistné.

Základní pojistné může být dále upravováno stanovením relativního pojistného r, takže pojistníci platí $r\%$ násobek základního pojistného. V této práci bude relativní pojistné záviset na počtu nahlášených škod.

1.2 Model pro počet škod

Počet škod řidiče během roku označíme N. Jedná se o náhodnou veličinu. Pro počet škod používají Denuit a kol. (2007) i Park a kol. (2018) poissonovský model. V této práci budeme předpokládat, že roční počet škod i-tého řidiče má Poissonovo rozdělení s náhodným parametrem Λ.

Pravděpodobnost, že řidič nahlásí právě n škod za předpokladu, že náhodný parametr $\Lambda = \lambda$ tedy bude

$$\mathsf{P}(N = n|\Lambda = \lambda) = \frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda}, n = 0, 1, \ldots \tag{1.1}$$

Primární rozdělení Λ je rozdělení gama s hustotou běžně definovanou pro parametry $a > 0$, $p > 0$ jako

$$f(x|a,p) = \frac{a^p}{\Gamma(p)}x^{p-1}e^{-ax}\mathbb{I}_{(0,\infty)}(x), x \in \mathcal{R}.$$

reparametrizovanou podle střední hodnoty $p/a = \xi$ a $p = \nu$ jako

$$f(y|\xi,\nu) = \frac{1}{\Gamma(\nu)}\Big(\frac{\nu}{\xi}\Big)^{\nu}y^{\nu-1}exp\Big(-\frac{y\nu}{\xi}\Big)\mathbb{I}_{(0,\infty)}(y), y \in \mathcal{R}. \tag{1.2}$$

Toto rozdělení má tedy střední hodnotu ξ a rozptyl ξ^2/ν.

Za těchto podmínek je nepodmíněné rozdělení počtu škod N_i i-tého řidiče negativně binomické. Pravděpodobnostní funkci odvodíme jako

$$\mathsf{P}(N=n)=\int_0^\infty \frac{y^n}{n!}e^{-y}f(y)\mathsf{d}y, n=0,1,\ldots$$

kde $f(y)$ je hustota primárního gama rozdělení a tedy

$$\mathsf{P}(N=n)=\frac{1}{\Gamma(\nu)n!}\Big(\frac{\nu}{\xi}\Big)^\nu\int_0^\infty y^{n+\nu-1}exp\Big(-\frac{y\nu}{\xi}-y\Big)\mathsf{d}y.$$

Použijeme substituci

$$z=y\Big(\frac{\nu}{\xi}+1\Big),\mathsf{d}y=\frac{\xi}{\xi+\nu}\mathsf{d}z, y=\frac{\xi}{\xi+\nu}z$$

a nyní získáme

$$\begin{aligned}\mathsf{P}(N=n)&=\frac{1}{\Gamma(\nu)n!}\Big(\frac{\nu}{\xi}\Big)^\nu\int_0^\infty\Big(\frac{\xi}{\xi+\nu}z\Big)^{n+\nu-1}exp(-z)\frac{\xi}{\xi+\nu}\mathsf{d}z\\&=\frac{1}{\Gamma(\nu)n!}\Big(\frac{\nu}{\xi}\Big)^\nu\Big(\frac{\xi}{\xi+\nu}\Big)^{n+\nu}\underbrace{\int_0^\infty z^{n+\nu-1}exp(-z)\mathsf{d}z}_{\Gamma(\nu+n)}\end{aligned}$$

A navíc jelikož $n!=\Gamma(n+1)$, můžeme hustotu zapsat jako

$$f(n|\xi,\nu)=\frac{\Gamma(\nu+n)}{\Gamma(\nu)\Gamma(n+1)}\Big(\frac{\xi}{\nu+\xi}\Big)^n\Big(\frac{\nu}{\nu+\xi}\Big)^\nu, n=0,1,\ldots$$

Což je hustota negativně binomického rozdělení se střední hodnotou ξ a rozptylem $\xi+\xi^2/\nu$.

Jelikož se však většina práce bude zabývat popisem chování jednoho konkrétního řidiče, bude pro modelování ročního počtu škod používáno Poissonovo rozdělení s daným parametrem jako v 1.1.

1.3 Model pro výši škod

Jelikož v našem modelu pojistníci nahlašují pojišťovně jen některé škody v závislosti na jejich výši, budeme potřebovat také model pro výši škod, neboli škodní severitu. Jen s jeho pomocí budeme moci rozlišovat škody nahlášené a nenahlášené, jelikož pravděpodobnost nahlášení škody záleží na její výši.

Denuit a kol. (2007) používá logaritmicko-normální rozdělení pro škodní severitu. Oproti tomu Park a kol. (2018) používá regresní model založený na gama rozdělení a inverzním normálním rozdělení. My použijeme gama rozdělení reparametrizované stejně jako v 1.2. Parametr ξ tedy bude odpovídat odhadnutelné střední hodnotě výše škody a parametr ν bude určen tak, aby měla výsledná funkce vhodnou šikmost a rozptyl. Budeme také předpokládat, že počet a výše škod jsou na sobě nezávislé.

2. Hlad po bonusu v BMS

V této kapitole se budeme věnovat teoretickému popisu systémů bonus - malus a jevu zvanému hlad po bonusu. Definice a značení budou opět vycházet z práce Denuita a kol. (Denuit a kol., 2007)

2.1 Systém bonus - malus

Rozdělení pojistníků do tarifních tříd podle tarifních proměnných nedokáže zohlednit mnoho důležitých faktorů a výsledné rizikové třídy jsou stále poměrně heterogenní. Systémy bonus-malus jsou využívány pro další homogenizaci tříd především v pojištění odpovědnosti z provozu vozidla. Tyto systémy penalizují pojištěnce odpovědné za jednu nebo více nehod přirážkami (malusy) k pojistnému a odměňují pojištěnce kteří nehlásí žádné nehody slevami (bonusy). Podle počtu škodních událostí se poté každoročně upravuje výše pojistného. Tyto systémy mají za cíl lépe vyhodnocovat individuální rizika.

V praxi se bonus-malus stupnice skládá z konečného počtu úrovní, z nichž každá má své vlastní relativní pojistné. Noví pojistníci jsou zařazeni na určitou úroveň. Po každém roce se posouvají nahoru nebo dolů podle pravidel přechodu a podle počtu jejich pojistných událostí. Pojistné se poté určí jako součin relativního pojistného přiřazeného současné úrovni pojistníka na škále a základního pojistného v jeho tarifní třídě podle jeho pozorovatelných charakteristik.

2.1.1 Příklady systémů

Pojišťovny implementují různé systémy bonusů a malusů. Systémy mají $s + 1$ úrovní číslovaných 0 až s. Novému pojistníkovi je přiřazena určitá úroveň. Roky bez nehod jsou odměňovány posunem níže a škody jsou penalizovány posunem výše.

Uvedeme si příklady dvou základních systémů, které lze modifikovat různými počty tříd, volbou počáteční třídy a přechodovými pravidly.

Systém -1/Top

Jednou z nejjednodušších možností BMS je systém -1/Top (viz Tabulka 2.1). V tomto systému jsou řidiči ohodnocováni podle počtu let bez nehod. V případě nahlášené nehody řidič ztratí všechny bonusy a je zařazen do nejnižší úrovně. Námi uvažovaný systém má 6 úrovní číslovaných 0 až 5 a řidiči začínají na úrovni 5.

Systém -1/+2

Další možností BMS je systém -1/+2 (viz Tabulka 2.2). Námi uvažovaný systém má opět 6 úrovní číslovaných 0 až 5, kde řidiči začínají na úrovni 5. Pokud řidič nenahlásí žádné škody, posune se o jednu úroveň níže. Za každou nahlášenou škodu se naopak posune o 2 úrovně výše. Pokud tedy bylo nahlášeno $n_t > 0$ škod v roce t, pojistník se posune o $2n_t$ úrovní výše.

Současná třída	**Budoucí třída při** **0** **nahlášených**	**≥ 1** **nehodách**
0	0	5
1	0	5
2	1	5
3	2	5
4	3	5
5	4	5

Tabulka 2.1: Pravidla přechodu pro systém -1/Top.

Současná třída	**Budoucí třída při** **0** **nahlášených**	**1** **nehodách**	**2**	**≥ 3**
0	0	2	4	5
1	0	3	5	5
2	1	4	5	5
3	2	5	5	5
4	3	5	5	5
5	4	5	5	5

Tabulka 2.2: Pravidla přechodu pro systém -1/+2.

Druhý uvedený systém zobecníme pro definici přechodové funkce. Pojistníci se za každý rok bez nehody posouvají o úroveň níže. Za každou nehodu se naopak posunou o a úrovní výše. Pokud počet nehod v uplynulém roce označíme k, pak nová úroveň řidiče na úrovni ℓ v systému bude

$$T_k(l) = \begin{cases} max(\ell - 1, 0) & \text{k} = 0; \\ min(\ell + ak, s) & \text{k} > 0. \end{cases}$$

Jelikož sankce v systému bonus-malus jsou nezávislé na výši škody, pojistník se při každé nehodě rozhoduje, zda se mu pojistnou událost vyplatí či nevyplatí nahlásit, aby se vyhnul zvýšení pojistného. Levné pojistné události, jejichž nahlášení by způsobilo vůči výši škody příliš velké zvýšení platby pojistného, racionální pojistník nebude hlásit. Tomuto jevu se říká „hlad po bonusu“.

Běžně pojistné modely předpokládají, že počet a výše škod jsou na sobě nezávislé. Při zavedení systému bonus-malus ale může být i při platnosti této nezávislosti pro skutečné nehody počet nahlášených škod závislý na pravidlech tohoto systému a tedy také na výši škody. V práci odvodíme hranici optimální retence: pokud výše škody klesne pod tuto hranici, pak by racionální pojistník neměl nehodu hlásit. Pokud tuto hranici překročí, měl by ji racionální pojistník nahlásit.

2.2 Optimální retence

Předpokládáme, že se řidič racionálně rozhodne a škodu nahlásí, pouze pokud překročí hranici optimální retence. Optimální retence se spočítá porovnáním dvou současných hodnot: ztráty v příštích letech plynoucí z navýšeného pojistného a ztráty za předpokladu, že řidič škodu nenahlásí. Optimální retence je výše škod, pro kterou se tyto hodnoty rovnají.

2.2.1 Nenahlášené škody

Jelikož jsou v našem systému hlášeny pouze škody překračující hranici optimální retence, liší se skutečná škodní frekvence od škodní frekvence pojistné události pozorované pojišťovnou. Cena placená pojistníky se navíc neskládá pouze z placeného pojistného, ale také z plateb za nenahlášené nehody.

Nechť $rl(\ell, \lambda)$ je optimální retence pojistníka s očekávanou roční škodní frekvencí λ na úrovni ℓ na škále bonus-malus.

Uvažujme pojistníka na úrovni ℓ. Předpokládejme, že tento pojistník způsobil nehodu se škodou x v čase t, $0 \leq t \leq 1$. Pokud f je funkce hustoty pravděpodobnosti výše škody (v této práci hustota gamma rozdělení), pak pravděpodobnost $p_\ell(\lambda)$, že pojistník na úrovni ℓ nenahlásí škodu pojišťovně je stejná jako pravděpodobnost, že škoda nepřekročí hranici optimální retence, tedy

$$p_\ell(\lambda) = \int_{y=0}^{rl(\ell,\lambda)} f(y)dy.$$

nebo také

$$p_\ell(\lambda|\xi,\nu) = \int_{y=0}^{rl(\ell,\lambda)} \frac{1}{\Gamma(\nu)}\Big(\frac{\nu}{\xi}\Big)^{\nu} y^{\nu-1} exp\Big(-\frac{y\nu}{\xi}\Big)dy.$$

Pravděpodobnost, že tento pojistník s očekávanou škodní frekvencí λ nahlásí právě k nehod pojišťovně během jednoho roku značíme $\overline{q_\ell}(k|\lambda)$. Označíme jako X počet nahlášených škod, N počet všech škod. Potom pravděpodobnost, že bude z h skutečných nehod nahlášeno právě k nehod je dána binomickým rozdělením s pravděpodobnostní funkcí

$$P(X = k|N = h) = \binom{h}{k}(1 - p_\ell(\lambda))^k (p_\ell(\lambda))^{h-k}, k = 0,1, \dots ,h.$$

Proto pravděpodobnost, že bude nahlášeno k nehod bude podle věty o úplné pravděpodobnosti

$$\overline{q_\ell}(k|\lambda) = \sum_{h=k}^{\infty} P(N = h)P(X = k|N = h),$$

a tedy

$$\overline{q_\ell}(k|\lambda) = \sum_{h=k}^{\infty} P(N = h)\binom{h}{k}(1 - p_\ell(\lambda))^k (p_\ell(\lambda))^{h-k}.$$

Počet všech škod má Poissonovo rozdělení se střední hodnotou λ, tedy

$$\overline{q_\ell}(k|\lambda) = \sum_{h=k}^{\infty} \exp(-\lambda)\frac{\lambda^h}{h!}\binom{h}{k}(1 - p_\ell(\lambda))^k (p_\ell(\lambda))^{h-k}, k = 0,1, \dots$$

Průměrný počet nehod nahlášených pojišťovně pojistníkem na úrovni ℓ, značený $\overline{\lambda_\ell}$, je dán výrazem

$$\overline{\lambda_\ell} = \sum_{k=0}^{\infty} k\overline{q_\ell}(k|\lambda).$$

Jedná se o očekávanou škodní frekvenci, která je nižší než λ o střední hodnotu ročního počtu škod s výší nepřekračující hranici optimální retence.

Očekávaná výše škody, za předpokladu, že nepřekročí hranici optimální retence a tedy nebude hlášena, tedy očekávané výdaje pojistníka na úrovni ℓ na nenahlášenou škodu nyní budou pro $rl(\ell, \lambda) > 0$

$$\mu_\ell(\lambda) = \frac{1}{p_\ell(\lambda)} \int_{y=0}^{rl(\ell,\lambda)} yf(y)d(y).$$

Pokud $rl(\ell, \lambda) = 0$, tedy pojistník nahlašuje všechny škody, pak je tato hodnota rovna nule.

Pojistník bude tedy za každé období kvůli nenahlášeným škodám průměrně platit $\mu_\ell(\lambda)(\lambda - \overline{\lambda_\ell})$, čili průměrnou výši nenahlášené škody vynásobenou průměrnou frekvencí nenahlášených škod.

2.2.2 Současná hodnota nákladů pojistníka

Pojistné placené na začátku roku dle stupnice bonus-malus označíme b_ℓ. Je určené základním pojistným c stejným pro všechny uvažované pojistníky a relativním pojistným r_ℓ specifickým dle úrovně ℓ na stupnici bonus-malus. Předpokládejme, že nehody jsou rovnoměrně rozmístěné v průběhu roku, v průměru se tedy stávají v polovině roku. Pak průměrný roční náklad pojistníka na úrovni ℓ je součtem placeného pojistného a průměrné ceny zaplacené za nenahlášené nehody diskontované diskontním faktorem v do začátku roku, tedy pokud $rl(\ell, \lambda) > 0$, tak

$$\overline{CT}(rl(\ell, \lambda)) = b_\ell + v^{\frac{1}{2}} \mu_\ell(\lambda)(\lambda - \overline{\lambda_\ell}).$$

Pokud $rl(\ell, \lambda) = 0$, tedy pojistník hlásí všechny škody, je tato hodnota rovna b_ℓ.

Nechť $V_\ell(\lambda)$ je současná hodnota všech budoucích plateb pojistníka s roční očekávanou škodní frekvencí λ na úrovni ℓ. Pak získáme rekurzivní vzorec

$$V_\ell(\lambda) = \overline{CT}(rl(\ell, \lambda)) + v \sum_{k=0}^{\infty} \overline{q_\ell}(k|\lambda) V_{T_k(\ell)}(\lambda), \ell = 0, 1, \ldots, s. \tag{2.1}$$

2.2.3 Racionální rozhodnutí pojistníka

Uvažovaný pojistník, který způsobil nehodu v čase t se škodou x, má nyní dvě možnosti:

1. Pojistník škodu nenahlásí a současná hodnota jeho nákladů bude

$$v^{-t}\overline{CT}(rl(\ell, \lambda)) + x + v^{1-t} \sum_{k=0}^{\infty} \overline{q_\ell}(k|\lambda(1-t)) V_{T_{k+m(\ell)}}(\lambda)),$$

kde m je počet již nahlášených škod v posledním roce.

Jelikož předpokládáme rovnoměrné rozmístění škod během roku, střední hodnota počtu škod od času t do konce roku bude $\lambda(1-t)$ a proto je pravděpodobnost nahlášení právě k škod do konce roku rovna $\overline{q_\ell}(k|\lambda(1-t))$.

2. Pojistník škodu nahlásí a současná hodnota jeho nákladů bude

$$v^{-t}\overline{CT}(rl(\ell,\lambda)) + v^{1-t}\sum_{k=0}^{\infty}\overline{q_\ell}(k|\lambda(1-t))V_{T_{k+m+1}(\ell)}(\lambda)).$$

Retenční hranice $rl(\ell,\lambda)$ je výše škody x, při které je pojistník nerozhodný mezi těmito možnostmi, tedy kdy se tyto hodnoty rovnají. Optimální hodnota $x = rl(\ell,\lambda)$ tedy bude řešením rovnice

$$\begin{aligned} v^{-t}\overline{CT}(rl(\ell,\lambda)) + rl(\ell,\lambda) + v^{1-t}\sum_{k=0}^{\infty}\overline{q_\ell}(k|\lambda(1-t))V_{T_{k+m}(\ell)}(\lambda)) \\ = v^{-t}\overline{CT}(rl(\ell,\lambda)) + v^{1-t}\sum_{k=0}^{\infty}\overline{q_\ell}(k|\lambda(1-t))V_{T_{k+m+1}(\ell)}(\lambda)), \end{aligned}$$

ze které lze vyjádřit

$$rl(\ell,\lambda) = v^{1-t}\sum_{k=0}^{\infty}\overline{q_\ell}(k|\lambda(1-t))\Big(V_{T_{k+m+1}(\ell)}(\lambda) - V_{T_{k+m}(\ell)}(\lambda)\Big) \tag{2.2}$$

pro $\ell = 0,1,\ldots,s$.

2.2.4 Lemairův algorimus

Rovnice 2.1 a 2.2 umožňují určit hladinu optimální retence. Řešení však nelze jednoduše vyjádřit. Výpočet současné hodnoty V_ℓ využívá hodnotu optimální retence a výpočet optimální retence $rl(\ell,\lambda)$ využívá současné hodnoty. Pro určení hranice optimální strategie používají Denuit a kol. (2007, str. 253) i Park a kol. (2018) iterativní Lemairův algoritmus.

(1) Začněme od $rl^{[0]}(\ell,\lambda) = 0$ pro $\ell = 0,\ldots,s$, což odpovídá strategii nahlašování všech nehod pojišťovně. Nyní lze získat ze soustavy rovnic 2.1 první iteraci současných hodnot, vektor $\boldsymbol{V}^0(\lambda)$ se složkami $V_\ell(\lambda)$ pro všechny úrovně ℓ stupnice bonus-malus, odpovídající počáteční strategii. Pro jednotlivé složky vektoru bude platit

$$V_\ell(\lambda) = b_\ell + v\sum_{k=0}^{\infty}\exp -\lambda\frac{\lambda^k}{k!}V_{T_k(\ell)}(\lambda)$$

$\ell = 0,1,\ldots,s$.

Z rovnic 2.2 lze získat vylepšenou strategii

$$rl^{[1]}(\ell,\lambda) = v^{1-t}\sum_{k=0}^{\infty}\exp(-(1-t)\lambda)\frac{((1-t)\lambda)^k}{k!}\Big(V_{T_{k+m+1}(\ell)}(\lambda) - V_{T_{k+m}(\ell)}(\lambda)\Big),$$

$\ell = 0,1,\ldots,s$.

(2) Do soustavy rovnic 2.1 dosaďme získaná $rl^{[1]}(\ell, \lambda)$ pro získání nákladů této nové strategie. Tato cena bude nižší než cena původní strategie.

Novou cenu dosaďme do rovnic 2.2, čímž získáme vylepšenou strategii $rl^{[2]}(\ell, \lambda)$, $\ell = 0, 1, \ldots, s$..

(3) Pokračujme stejně až do konvergence k optimálnímu řešení s minimálními náklady.

Optimální retenci lze tedy získat postupnou iterací řešení soustav rovnic. Pro výpočet současné hodnoty nákladů $V_\ell(\lambda)$ použijeme hodnotu $rl(\ell, \lambda)$. Pro výpočet nové hladiny optimální retence použijeme vždy takto nově získané současné hodnoty.

Výsledná hodnota záleží na současné úrovni ℓ, na diskontním faktoru v, na roční očekávané škodní frekvenci λ a parametrech rozdělení výše škod ξ a ν, na čase t, kdy se stala nehoda a na počtu nehod m již nahlášených v tomto roce. Závislost na čase t není příliš silná. Ačkoliv nehody na konci roku budou mít retenční hranici mírně vyšší, je možné jen s malou změnou výsledku výpočet zjednodušit volbou $t = 0$ a tedy $m = 0$ jako Denuit a kol. (2007) nebo volbou $t = 1$ jako Park a kol. (2018).

Algoritmus pracuje s předpokladem, že pojistné bude pojistník platit navždy. Tento předpoklad není reálný. Avšak diskontní faktor snižuje vliv vzdálených plateb dostatečně na to, aby byly i s tímto předpokladem výsledky užitečné. Při volbě $v = 0{,}9$ je uvažováno pouze 0,5% ceny po 50 letech. Diskontní faktor navíc můžeme záměrně zvolit vyšší, než jaká by byla tržní úroková míra, a tím dále snížit význam budoucích plateb s ohledem na to, že se nemusejí uskutečnit.

3. Praktická část

V praktická části zvolíme vhodný bonus-malus systém a další předpoklady modelů, pomocí kterých spočítáme hodnoty optimální retence v závislosti na úrovni v systému. Tato část byla vypracována podle postupu, který ve své práci používá Park a kol. (2018).

3.1 Uvažovaný bonus-malus systém

V České republice je bonus-malus systém upraven zákonem č. 168/1999 Sb. o pojištění odpovědnosti z provozu vozidla. Tento zákon stanovuje, že *„při sjednávání výše pojistného v pojistné smlouvě zohlední pojistitel celkový předcházející škodný průběh pojištění odpovědnosti pojistníka, a to slevou na pojistném v případě bezeškodního průběhu pojištění nebo přirážkou k pojistnému v případě výplaty pojistného plnění z pojištění odpovědnosti"*. Dále uvádí, že *„způsob stanovení výše pojistného předloží pojistitel ke kontrole České národní bance na její písemné vyžádání, a to včetně statistických údajů, na kterých je způsob stanovení výše pojistného založen"* .

Pojišťovny si tedy implementují vlastní systémy bonusů a malusů. Řidiči nejsou posuzováni přímo podle úrovní v tomto systému, ale je jim počítána bezeškodní doba v měsících. Sčítají se všechny celé bezeškodní měsíce a pokud dojde k pojistné události, je řidiči od bezeškodní doby odečtena určitá doba, různá pro jednotlivé pojišťovny. Získaná bezeškodní doba se dá přenášet mezi pojišťovnami, takže i při změně pojištění zůstanou řidičům nasbírané bonusy nebo malusy.

Některé tyto systémy jsou dostupné v podmínkách pojišťoven na internetu. Pro tuto práci byl vybrán systém pojišťovny Uniqa dostupný v jejích pojistných podmínkách. (UNIQA pojišťovna, 2019) Tento systém má 21 tříd, z toho jedna základní, 10 bonusových a 10 malusových. Za každou pojistnou událost, kde vznikla pojišťovně povinnost hradit škodu, je řidiči odečteno od bezeškodní doby 36 měsíců. Systém včetně relativního pojistného jednotlivých tříd je znázorněn v Tabulce 3.1.

Abychom mohli používat zavedené číslování, byl systém přečíslován v posledním sloupci hodnotami ℓ, kde úroveň s nejvyšším bonusem byla označena 0 a úroveň s nejvyšším malusem byla označena 20.

Mezi jednotlivými úrovněmi je vždy 12 měsíců. Tento systém tedy můžeme mírně zjednodušit na systém -1/+3 a pracovat s ním takto, jelikož většinou bude platit, že za každý rok bez nehody se řidič posune v našem číslování o jednu úroveň níže a za způsobenou pojistnou událost o 3 úrovně výše. Přechodová funkce tedy bude mít tvar

$$T_k(l) = \begin{cases} max(l-1,0) & \text{k} = 0; \\ min(l+3k,s) & \text{k} > 0. \end{cases} \tag{3.1}$$

Bezeškodní doba v měsících	**Třída**	**% z pojistného**	s
120 a více	B10	50 %	0
108 až 119	B9	55 %	1
96 až 107	B8	60 %	2
84 až 95	B7	65 %	3
72 až 83	B6	70 %	4
60 až 71	B5	75 %	5
48 a 59	B4	80 %	6
36 až 47	B3	85 %	7
24 až 35	B2	90 %	8
12 až 23	B1	95 %	9
0 až 11	Z	100 %	10
-12 až -1	M1	110 %	11
-24 až -13	M2	120 %	12
-36 až -25	M3	130 %	13
-48 až -37	M4	140 %	14
-60 až -49	M5	150 %	15
-72 až -61	M6	160 %	16
-84 až -73	M7	170 %	17
-96 až -85	M8	180 %	18
-108 až -97	M9	190 %	19
-109 a méně	M10	200 %	20

Tabulka 3.1: Systém bonus-malus pojišťovny Uniqa včetně relativního pojistného a přečíslování hodnotami s.

3.2 Výpočet optimální retence

Pro výpočet hranice optimální retence byl po zvolení vhodných parametrů implementován Lemairův algoritmus v programu Wolfram Mathematica.

3.2.1 Předpoklady

Jak bylo již uvedeno v kapitole 1, budeme uvažovat poissonovský model počtu škod a gama rozdělení výše škod. Jelikož uvažujeme rozhodování jednoho konkrétního řidiče, můžeme stanovit jedno konkrétní λ. Budeme uvažovat $\lambda = 0{,}1$. Gama rozdělení požaduje navíc další dva parametry.

Pokud uvažujeme pro jednoduchost ryzí pojistné, pak pojistné bude rovno pojistnému základní úrovně vynásobenému relativním pojistným třídy řidiče na škále bonus malus, značeno $b(l) = c{*}r_\ell$, kde $c = \lambda{*}\xi$. Pokud ryzí pojistné základní úrovně stanovíme jako $c = 1$, můžeme parametr ξ odvodit jako $\xi = 1/\lambda = 10$. Zbývá nám tedy pouze parametr ν, který byl zvolen jako $\nu = 2$.

Jelikož nemáme data z České republiky pro objektivní určení průměrné výše škod, můžeme počítat optimální retenci relativně k základnímu pojistnému, podobně jako Jean Lemaire A.S.A. (1998). Toto řešení je také obecnější a umožňuje rychlý výpočet pro jakékoliv hodnoty základního pojistného. Takový výpočet je možný díky platnosti následujícího tvrzení.

Tvrzení 1. *Za předpokladu, že výše škod má gama rozdělení s parametry ν a ξ definované jako v 1.2 a počet škod má Poissonovo rozdělení s parametrem λ jako v 1.1, platí pro průměrný roční náklad pojistníka $\overline{CT}(rl(\ell,\lambda))$, optimální retenci $rl(\ell,\lambda)$ a libovolnou nenulovou konstantu c*

$$\overline{CT}(c * rl(\ell,\lambda)|c\xi,\nu) = c * \overline{CT}(rl(\ell,\lambda)|\xi,\nu).$$

Důkaz. Jelikož platí

$$\overline{CT}(rl(\ell,\lambda)) = c * r_\ell + v^{\frac{1}{2}}\mu_\ell(\lambda)(\lambda - \overline{\lambda_\ell}),$$

stačí nám dokázat, že podmíněná střední hodnota výše škody, tedy $\mu_\ell(\lambda)$, s podmínkou $X < c{*}rl(\ell,\lambda)$, je při rozdělení škod $\Gamma(c\xi,\nu)$ rovna c-násobku podmíněné střední hodnoty výše škody za podmínky $X < rl(\ell,\lambda)$ a při rozdělení $\Gamma(\xi,\nu)$.

Na to stačí dokázat, že pokud $X \sim \Gamma(\xi,\nu)$, pak $cX \sim \Gamma(c\xi,\nu)$.

$$P(cX \leq x) = P(X \leq \frac{x}{c}) = \int_0^{\frac{x}{c}} f(y)dy = \int_0^{\frac{x}{c}} \frac{1}{\Gamma(\nu)}\Big(\frac{\nu}{\xi}\Big)^{\nu} y^{\nu-1} exp\Big(-\frac{y\nu}{\xi}\Big)dy.$$

Použijeme substituci $z = cy$, $y = \frac{1}{c}z$, $dy = \frac{1}{c}dz$, takže dále bude výraz roven

$$\int_0^{x} \frac{1}{\Gamma(\nu)}\Big(\frac{\nu}{\xi}\Big)^{\nu} \frac{z}{c}^{\nu-1} exp\Big(-\frac{z\nu}{c\xi}\Big)\frac{1}{c}dz = \int_0^{x} \frac{1}{\Gamma(\nu)}\Big(\frac{\nu}{c\xi}\Big)^{\nu} z^{\nu-1} exp\Big(-\frac{z\nu}{c\xi}\Big)\frac{1}{c}dz,$$

což je integrál hustoty $\Gamma(c\xi,\nu)$ od 0 do x a tedy $cX \sim \Gamma(c\xi,\nu)$.

□

Uvažujme řidiče, který právě způsobil nehodu v čase t se škodou x. Pro jednoduchost budeme stejně jako Park a kol. (2018) uvažovat, že je tato nehoda poslední nehodou řidiče v tomto roce a tedy $t = 1$. Tento předpoklad dovoluje úpravu vzorce 2.2 pro optimální retenci na jednodušší

$$rl(\ell, \lambda) = V_{T_{m+1}(\ell)}(\lambda) - V_{T_m(\ell)}(\lambda).$$

Úroková míra byla stanovena na hodnotu $i = 0{,}1$, diskontní faktor tedy bude $v = 1/(1+i) \doteq 0.909$. Optimální retence bude spočítána pro několik hodnot m, tedy počtu předchozích nehod v tomto roce.

3.2.2 Implementace

Daný bonus-malus systém byl v programu Wolfram Mathematica definován jako seznam relativních pojistných, kde index seznamu určuje úroveň a hodnotou je relativní pojistné. Úrovně systému byly v programu přeznačeny na $\ell+1$, jelikož Mathematica používá indexování od 1.

Jednotlivé vzorce pro $T_k(\ell)$, $p_\ell(\lambda)$, $q_\ell(k|\lambda)$, $\overline{\lambda}_\ell$, $\mu_\ell(\lambda)$, $V_\ell(\lambda)$ a $rl(\ell, \lambda)$ byly implementovány jako funkce. Mathematica nabízí funkce přímo pro výpočet sum, integrálů a soustav rovnic. Program tedy kromě stanovení parametrů a definic rovnic již obsahuje pouze jeden while cyklus ve funkci

```
calculation[lambda_, xi_, nu_, m_, d_, a_, baseP_, SYSTEM_].
```

Tato funkce používá zadané parametry λ, ξ, ν, m, v, a a pojistné c základní úrovně ($baseP$), a iterativně upravuje hodnoty současných hodnot a retenční hranice, dokud není hodnota $rl(\ell, \lambda)$ po zaokrouhlení na 5 desetinných míst stejná jako v předchozí iteraci. To znamená, že bylo nalezeno optimální řešení.

Program vypisuje seznam právě dosažených hodnot optimální retence pro každou iteraci, aby bylo možné sledovat průběh výpočtu. Poslední vypsaný seznam hodnot je optimální řešení.

Při výpočtu V_ℓ se sčítají pouze hodnoty k vedoucí k různé konečné úrovni. Pokud pojistník způsobí dostatek nehod pro přiřazení do nejnižší úrovně z jakékoliv jiné, je na tomto počtu nehod, značeném k_{max}, suma ukončena a současná hodnota poslední úrovně je přičtena vynásobena pravděpodobností $1 - \sum_{k=0}^{k_{max}} P(K = k)$.

Algoritmus je napsán obecně a umožňuje různé volby parametrů λ, ν nebo ξ, různé hodnoty m, úrokových měr, i různá přechodová pravidla systému s různými relativními pojistnými. Lze zadat také hodnotu základního pojistného pro výpočet konkrétních, absolutních hodnot optimální retence. Omezením je formulace systému ve tvaru $-1/+a$ a výpočet pouze pro poslední nehodu řidiče v tomto roce, tedy v čase $t = 1$.

3.3 Výsledky

Tabulka 3.2 zobrazuje výsledné hodnoty optimální retence pro všechny úrovně systému bonus-malus a pro počet v tomto roce již nahlášených nehod m roku rovný nule až dvěma. Vynásobením hodnot základním pojistným c tarifní třídy uvažovaného pojistníka bychom získali konkrétní výše škod.

Třída	ℓ	Optimální retence pro		
		$m = 0$	$m = 1$	$m = 2$
B10	0	0,3887	0,8203	1,1415
B9	1	0,6217	0,9334	1,2418
B8	2	0,8262	1,0390	1,3894
B7	3	1,0064	1,1409	1,5762
B6	4	1,1666	1,2415	1,7939
B5	5	1,3139	1,3885	1,9826
B4	6	1,4530	1,5714	2,1336
B3	7	1,5872	1,7820	2,2468
B2	8	1,7684	1,9634	2,3267
B1	9	1,9845	2,1155	2,3303
Z	10	2,2262	2,2381	2,2739
M1	11	2,4862	2,3298	2,1705
M2	12	2,7028	2,3391	1,4150
M3	13	2,8788	2,2832	0,6935
M4	14	3,0170	2,1781	0
M5	15	3,0683	1,4196	0
M6	16	3,0502	0,6956	0
M7	17	2,9756	0	0
M8	18	2,1816	0	0
M9	19	1,4237	0	0
M10	20	0,6979	0	0

Tabulka 3.2: Výsledné hodnoty optimální retence vyjádřené relativně k základnímu pojistnému pro různé hodnoty počtu již nahlášených nehod m.

Příklad. Předpokládejme, že základní pojistné dané tarifní třídy bylo stanoveno na 3000 Kč. Hladina optimální retence se nachází maximálně na 3,0683-násobku ročního pojistného. Pro pojistníka v této tarifní třídě je tedy výhodné hlásit jakékoliv škody převyšující 9205 Kč, podle jeho úrovně v systému a počtu již nahlášených pojistných událostí někdy i škody nižší. Naopak škody nižší než 3000 Kč $*$ 0,3887 = 1166 Kč se mu vyplatí hlásit pouze v případě, že již v tomto roce nahlásil dostatek nehod na to, aby skončil příští rok v nejvyšší možné třídě.

Konvergence k optimálnímu řešení byla u všech výpočtů velice rychlá. Již výpočet první iterace se od výsledku lišil pouze v jednotkách procent. Pro dosažení hodnot stejných po zaokrouhlení na 5 desetinných míst byly dostačující 4 iterace. Když mělo být dosaženo hodnot, které Mathematica vyhodnotí jako sobě rovné, bylo třeba několik desítek iterací.

Můžeme si všimnout, že nejvýše mají tuto hranici třídy malusové kromě několika posledních. Je to z toho důvodu, že malusy navyšují pojistné rychleji než bonusy. Nejvyšší třídy však mají nízké hladiny optimální retence. Tito řidiči mají totiž vysokou pravděpodobnost, že v těchto vysokých třídách zůstanou i v příštích letech.

V případě, že řidič již nahlásil v tomto roce dostatek nehod pro přesun do nejhorší třídy, může dále nahlásit jakoukoliv další nehodu, jelikož se mu to na pojistném neprojeví, jeho optimální retence je tedy nulová. Toto je jeden z rozdílů našeho zjednodušení na -1/+3 oproti systému bezeškodní doby. Pokud totiž řidič nahlásí další nehodu, do bezeškodní doby se mu započítá vždy. V našem systému se další nehoda v nejnižší třídě již neprojeví.

Hodnoty pro různé počáteční hodnoty m jsou si podobné, řidič se při nějakém počtu již nahlášených nehod chová podobně jako kdyby rok začínal již ve třídě $min(\ell+3m, s)$. Hodnoty pro $m = 1$ a $m = 2$ jsou stejné, jen posunuté. Vypočtené hodnoty se mírně liší nejspíše kvůli zaokrouhlovací chybě při numerickém výpočtu. Hodnoty pro $m = 0$ jsou ale jiné, jelikož v tomto případě má řidič ještě možnost kromě různé úrovně malusu získat bonus a tedy je jeho ztráta při nahlášení pojistné události vyšší. Z toho důvodu jsou hodnoty optimální retence vyšší než by byly pouze posunuté hodnoty.

Nízké hodnoty se kromě tříd s nejvyšší přirážkou nachází také u nejnižších tříd s nejvyšším bonusem. V těchto třídách má řidič vysokou pravděpodobnost, že se i přes nahlášenou škodu brzy dostane do nejvyšší třídy s maximálním bonusem.

Závěr

Cílem práce bylo popsat jev zvaný hlad po bonusu a postup pro volbu optimální retence včetně výpočtu pro zvolený systém. Práce nejprve zvolila model pro popis systému povinného ručení, kde počet škod má Poissonovo rozdělení a jejich výše má gamma rozdělení.

Pro výpočet úrovně optimální retence byl zvolen Lemairův algoritmus, který byl implementován v programu Wolfram Mathematica. Tato implementace umožňuje efektivní výpočet optimální retence pro různé hodnoty jednotlivých parametrů a různé bonus-malus systémy.

Byl určen konkrétní bonus-malus systém včetně parametrů založený na systému pojišťovny Uniqa. Systém byl mírně zjednodušen, jelikož zavedený teoretický model nepracuje s bezeškodní dobou jako české systémy pojištění, ale s přechodovým pravidlem založeným pouze na počtu škod v daném roce. Pro tento systém byly také zvoleny konkrétní hodnoty parametrů. Výsledkem výpočtu jsou hodnoty optimální retence v závislosti na momentální úrovni v systému bonus-malus a na počtu nahlášených nehod dříve v tomto roce.

Pokud pojistník v současném roce nahlásil již alespoň jednu nehodu, pak se systém chová pro každý počet již nahlášených nehod stejně, ale je posunutý o tři třídy níže za každou již nahlášenou nehodu. Proto výpočet proběhl jen pro počet nehod již nahlášených v tomto roce rovný nule až dvěma.

Bylo zjištěno, že nejnižší hodnotu optimální retence mají nejvyšší (malusové) a nejnižší (bonusové) třídy. V případě, že pojistník již nějaké škody v současném roce nahlásil, je hodnota optimální retence pro nejvyšší třídy dokonce nulová. To je v případě, kdy pojistník již způsobil tolik nehod, že bez ohledu na další bude příští rok zařazen do nejvyšší třídy. V takovém případě se mu již vyplatí nahlásit jakoukoliv škodu.

Naopak nejvyšší hodnoty optimální retence jsou převážně v nižších malusových třídách, při vyšším počtu již nahlášených nehod kolem základní třídy. Například řidiči, který ještě v tomto roce nenahlásil žádnou nehodu a nyní se nachází ve třídě M4 až M6 se nevyplatí hlásit škody i ve výši trojnásobku svého pojistného.

Seznam použité literatury

Denuit, M., Marechal, X., Pitrebois, S. a Walhin, J. (2007). *Actuarial Modelling of Claim Counts: Risk Classification, Credibility and Bonus-Malus Systems.* Wiley, Chichester. ISBN 978-0-470-02677-9.

Jean Lemaire A.S.A., P. (1998). Bonus-malus systems. *North American Actuarial Journal*, **2**(1), 26–38.

Park, S. C., Kim, J. H. a Ahn, J. Y. (2018). Does hunger for bonuses drive the dependence between claim frequency and severity? *Insurance: Mathematics and Economics*, **83**, 32–46.

UNIQA pojišťovna, a. s. (2019). Všeobecné pojistné podmínky pojištění odpovědnosti za újmu způsobenou provozem vozidla (pov) - zvláštní část. Dostupné z: `https://www.uniqa.cz/documents/uniqa_dokumenty/produkty/podnikatele/produktove-dokumenty/firemni-vozidla/vseobecne-pojistne-podminky-povinneho-ruceni-eu43631e-ucz_pov_19-platne-od-1.4.2019.pdf`. [Online; cit. 11. 7. 2022].

Česko (2021). § 3b odst. 2 zákona č. 168/1999 sb., o pojištění odpovědnosti za škodu způsobenou provozem vozidla a o změně některých souvisejících zákonů (zákon o pojištění odpovědnosti z provozu vozidla). Dostupné z: `https://www.zakonyprolidi.cz/cs/1999-168`. [Online; cit. 11. 7. 2022].

Seznam tabulek