MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ FAKULTA
Univerzita Karlova

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Ondřej Brichta

Vlastnost stínování v numerických metodách pro parciální diferenciální rovnice

Katedra numerické matematiky

Vedoucí bakalářské práce: doc. RNDr. Václav Kučera, Ph.D.
Studijní program: Matematika
Studijní obor: Obecná matematika

Praha 2022

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval(a) samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů. Tato práce nebyla využita k získání jiného nebo stejného titulu.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V .... dne ....

Podpis autora

Rád bych poděkoval svému vedoucímu panu doc. RNDr. Václavu Kučerovi, Ph.D. za jeho trpělivý přístup a četné podnětné rady, které podstatně přispěly k podobě této práce. Dále bych rád poděkoval Bc. Marcele Piptové za cennou pomoc při sazbě textu a Ing. Martině Brichtové za pomoc při jazykové korektuře textu.

Název práce: Vlastnost stínování v numerických metodách pro parciální diferenciální rovnice

Autor: Ondřej Brichta

Katedra: Katedra numerické matematiky

Vedoucí bakalářské práce: doc. RNDr. Václav Kučera, Ph.D., Katedra numerické matematiky

Abstrakt: Předkládaná práce se zabývá stínováním v numerických metodách pro parciální diferenciální rovnice. Cíle této práce jsou prostudovat problematiku stínování v případě lineárního zobrazení, vhodně upravit standardní metody pro účely zmíněné aplikace a aplikovat vybudovanou teorii na vícekrokové metody. V úvodní přehledové části se nejprve zaměříme na studium standardní teorie stínování, formulujeme základní tvrzení a ukážeme vztah kontraktivity a stínování. Dále nalezneme charakterizaci stínovací vlastnosti pro lineární zobrazení. Následně vhodně adaptujeme stínovací teorii, aby byla umožněna aplikace ve vícekrokových numerických metodách. Příslušnou aplikaci potom vysvětlujeme na příkladu Dufortova-Frankelova schématu. V závěru práce uvádíme poznámky k vyšetřování stínování v obecných vícekrokových metodách a poznámky o vztahu stínování a stability.

Klíčová slova: pseudotrajektorie, stínování, kontrakce, diskretizace

Title: Shadowing property of numerical methods for partial differential equations

Author: Ondřej Brichta

Department: Department of Numerical Mathematics

Supervisor: doc. RNDr. Václav Kučera, Ph.D., Department of Numerical Mathematics

Abstract: This thesis is focused on the shadowing property of numerical methods for partial differential equations. The goals of this thesis are the application of shadowing theory to the case of linear maps, modification of standard techniques for the purpose of this application and the application of the adapted theory to multistep schemes. In the introductory overview, we first focus on a study of the standard shadowing theory, then we formulate basic statements and prove a relationship between a conctractivity and shadowing. Afterwards we find the characterization of the shadowing property for linear maps. In the next sections, we adapt definitions of the shadowing theory to requirements of multistep methods. As an example, we apply the adapted theory to the Dufort-Frankel scheme in the third chapter. At the end of this thesis, remarks on shadowing in general multistep methods and remarks on a relationship between the shadowing property and stability are presented.

Keywords: pseudotrajectory, shadowing, contraction, discretization

Obsah

Úvod **2**

1 Teorie stínování **4**
1.1 Základní pojmy z teorie stínování 4
1.2 Hyperbolicita a Stínovací lemma 10
1.3 Stínování pseudotrajektorie lineárního zobrazení 12
1.3.1 Spektrální poloměr 13
1.3.2 Stínovací vlastnost lineárního zobrazení se spektrem ležícím uvnitř jednotkového kruhu 15
1.3.3 Stínování lineárního zobrazení s hyperbolickou maticí . . . 15

2 Zobecněné stínování **18**
2.1 Kladné stínování 18
2.2 Stínování kladných trajektorií 19
2.3 Zobecněné stínování 22

3 Aplikace stínování v metodách pro numerické řešení parciálních diferenciálních rovnic **25**
3.1 Stínování Dufortova-Frankelova schématu 25
3.1.1 Přesné řešení úlohy (3.1) 25
3.1.2 Dufortovo-Frankelovo schéma 26
3.1.3 Spektrum matice Ψ 27
3.1.4 Dufortovo-Frankelovo schéma má zobecněnou kladnou stínovací vlastnost 31
3.2 Obecné poznámky k vyšetřování stínovací vlastnosti 31
3.2.1 Obecná úloha 31
3.2.2 Numerické schéma 31
3.2.3 Spektrum matice Ψ 32
3.2.4 Stínování a stabilita jednokrokového schématu 33

Závěr **35**

Seznam použité literatury **36**

A Přílohy **38**
A.1 Dufortovo-Frankelovo schéma 38

Úvod

Ve vědě i technické praxi je v současné době hojně využívána výpočetní technika. Vzhledem ke značným nákladům experimentů se numerické modelování stalo nedílnou součástí celé řady vědeckotechnických disciplín, např. numerické simulace plazmatu, proudění kolem křídel letadel, předpovědi počasí atd. Obzvláště poslední zmiňovaná aplikace je však extrémně citlivá na přesnost výpočtů. Vyvstává proto přirozená otázka, jestli lze těmto modelům věřit. Odpovídají vůbec výsledky výpočtů provedených v aritmetice s konečnou přesností matematicky přesným řešením numerických metod? Předkládaná práce ukazuje, že otázky podobného charakteru jsou relevantní již v případě lineárních modelů.

Než se pustíme do samotné matematické teorie, uvědomme si, jak je nakládáno s reálnými čísly v paměti výpočetní techniky. Tato problematika je podrobněji rozebrána například v knihách (Higham, 1999) a (Golub a Van Loan, 2013).

Libovolný hardware pracuje pouze s určitou podmnožinou reálných čísel, jelikož každému číslu je přiřazen pouze konečný počet bitů. Tuto množinu označme F. Uvažujme funkci (algoritmus) f, která má jeden reálný vstup a jeden reálný výstup. Zvolme nějaká inicializační data $x_0 \in \mathbb{R}$. Z důvodu zaokrouhlovacích chyb v konečné aritmetice nám výpočetní technika pro tento vstup nevrátí přesnou hodnotu $f(x_0)$, ale jenom přibližný výsledek $\mathrm{fl}(f)(x_0) \in F$ (přičemž fl(f) značí, že jednotlivé operace obsažené ve funkci f se vyhodnocují se zaokrouhlovacími chybami). Dalším zdrojem chyb je například numerické vyhodnocení některých operací (o metodách pro vyhodnocení viz (Press a kol., 2007)). Pokud budeme provádět výpočet rekurentní posloupnosti $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$, $x_{n+1} = \mathrm{fl}(f)(x_n)$, potom v $n-$tém kroku obdržíme obecně nenulovou hodnotu δ_n danou vztahem $\delta_n = f(x_n) - \mathrm{fl}(f)(x_n) = f(x_n) - x_{n+1}$. Z povahy výpočtu se dá očekávat, že existuje $\delta > 0$ splňující nerovnost

$$\forall n \in \mathbb{N}_0 : \quad |\delta_n| \leq \delta.$$

Tento jednoduchý příklad motivuje definici pojmu *kladná pseudotrajektorie*, kterou formálně zavedeme ve druhé kapitole.

Odpovědi na výše uvedené otázky potom získáme, pokud vyšetříme tzv. *stínovací vlastnost*. Pokud má funkce f tuto vlastnost, potom v blízkosti každé nepřesně vypočtené pseudotrajektorie (za předpokladu, že tato nepřesnost není příliš velká) existuje přesná trajektorie zobrazení f.

Nechť $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ je difeomorfismus. Klasický výsledek teorie stínování říká, že za předpokladu existence tzv. *hyperbolické množiny* zobrazení f, má toto zobrazení zaručenu stínovací vlastnost na okolí této hyperbolické množiny. Hyperbolická množina je $f-$invariantní množinou takovou, že pro každý prvek p této množiny existuje rozklad $\mathbb{R}^d$ na takový direktní součet dvou podprostorů, že v jednom se f lokálně chová jako kontrakce (tzn. lineární zobrazení dané Jacobiho maticí v bodě p se chová jako kontrakce) a ve druhém se naopak jako lokální kontrakce chová f^{-1}. Tento výsledek byl dokázán D. V. Anosovem v roce 1970. Další důkaz byl nalezen R. Bowenem v roce 1975. Oba tyto přístupy jsou poměrně technické a nad rámec tohoto textu. Čtenář je nalezne např. v (Pilyugin, 2006). V této práci přeneseme myšlenku definice hyperbolické množiny na lineární zobrazení a těmi se potom budeme zabývat.

Cílem této práce je čtenáře seznámit se základními definicemi a výsledky klasické teorie stínování. Dále se zaměříme na analýzu stínování v lineárních systémech. Nakonec se pokusíme na základě této analýzy formulovat kritéria stínování v numerických schématech pro evoluční parciální diferenciální rovnice.

Práce je rozdělena do tří hlavních kapitol. V první kapitole bude čtenář seznámen se základními definicemi a vztahy z obecné teorie stínování. Bude zde studováno stínování kontraktivních zobrazení. Na závěr této kapitoly pomocí speciální normy dokážeme, že lineární zobrazení má stínovací vlastnost právě tehdy, když spektrum příslušné matice neprotíná komplexní jednotkovou kružnici. Problematika těchto kapitol je dále rozebírána v pracích (Pilyugin, 2006)(Bernardes a kol., 2016)(Ombach, 1993)(Irwin, 2001).

Ve druhé kapitole se zaměříme na stínování kladných trajektorií, které se více přibližují posloupnostem generovaným numerickými schématy. Dále zformulujeme a dokážeme výsledky analogické s větami z první kapitoly. Na závěr této kapitoly potom rozšíříme pojmy kladného stínování tak, aby se jimi dala postihnout i vícekroková schémata. Důkazy této kapitoly jsou inspirovány článkem J. Ombacha (Ombach, 1993) a knihou (Pilyugin, 2006).

V závěrečné třetí kapitole se zaměříme na aplikaci teorie stínování v metodách pro numerické řešení parciálních diferenciálních rovnic. Konkrétně se budeme zabývat metodou konečných diferencí. Pokusíme se zjistit, za jakých podmínek můžeme ve výpočtech přibližného řešení těmito metodami stínování předpokládat.

Problematikou stínování v metodách pro parciální diferenciální rovnice se zabývá poslední kapitola v knize (Pilyugin, 2006). Zde je však řešena otázka, pro jaké generické nelinearity má příslušný difeomorfismus stínovací vlastnost, přičemž lineární část difeomorfismu je pevně daná. Na rozdíl od této práce je zde uvažováno pouze jednokrokové schéma.

1. Teorie stínování

1.1 Základní pojmy z teorie stínování

V této sekci zavedeme základní pojmy teorie stínování, které v dalších kapitolách vhodně rozšíříme. V následujících definicích budeme předpokládat, že (X,ρ) je metrický prostor a $f : X \to X$ je zobrazení. Všechny tři definice lze nalézt například v úvodní kapitole (Pilyugin, 2006) nebo v článku (Bernardes a kol., 2016).

Prvním důležitým pojmem je trajektorie.

Definice 1. Trajektorií *zobrazení* f *nazveme libovolnou posloupnost* $\{y_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \in X^{\mathbb{Z}}$ *splňující pro každé* $n \in \mathbb{Z}$

$$y_{n+1} = f(y_n).$$

V úvodu byl zmíněn problém zaokrouhlovacích chyb. Ten lze matematicky zachytit pomocí pojmu *pseudotrajektorie.*

Definice 2. *Nechť* $\delta > 0$, $\delta-$pseudotrajektorií *zobrazení* f *nazveme posloupnost* $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \in X^{\mathbb{Z}}$ *takovou, že pro každé* $n \in \mathbb{Z}$

$$\rho(f(x_n), x_{n+1}) \leq \delta.$$

Nyní jsme připraveni na uvedení hlavní definice teorie stínování.

Definice 3. *Nechť* $Y \subseteq X$. *Řekneme, že zobrazení* f *má* stínovací vlastnost *na metrickém prostoru* (Y,ρ), *pokud pro každé* $\varepsilon > 0$ *existuje* $\delta > 0$ *takové, že pro každou* $\delta-$*pseudotrajektorii* $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \in Y^{\mathbb{Z}}$ *existuje přesná trajektorie* $\{y_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ *splňující pro každé* $n \in \mathbb{Z}$ *nerovnost*

$$\rho(x_n,y_n) \leq \varepsilon.$$

Pokud $Y = X$, *říkáme zkráceně, že zobrazení* f *má stínovací vlastnost.*

Budeme říkat, že trajektorie $\{y_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ z výše uvedené definice stínuje pseudotrajektorii $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$.

V literatuře (např. v (Bernardes a kol., 2016)) je k nalezení řada podobných pojmů. Například tzv. *lipschitzovská stínovací vlastnost* nebo *limitní stínovací vlastnost.* V našem výkladu se však pro jednoduchost omezíme pouze na stínovací vlastnost uvedenou v předchozí definici.

Uveďme nyní příklad zobrazení na $\mathbb{R}$ majícího stínovací vlastnost. Tento příklad byl převzat z (Pilyugin, 2006).

Příklad. Nechť $f(x) = x + x^2\mathrm{sgn}(x)$. Ukažme, že tato funkce má stínovací vlastnost na množině $Y = \langle -1,1\rangle$. Nejprve zvolme libovolné $\varepsilon \in (0,1)$. K tomuto ε zvolme reálné číslo $\delta > 0$ tak, že $\delta < \frac{\varepsilon^2}{2}$. Nechť $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \in Y^{\mathbb{Z}}$ je libovolná $\delta-$pseudotrajektorie.

Nyní dokážeme, že pro každé $k \in \mathbb{Z}$ platí $|x_k| \leq \varepsilon$. Pro spor předpokládejme, že existuje $k \in \mathbb{Z}$, pro které $|x_k| > \varepsilon$. Nejprve uvažujme případ, kdy $x_k > \varepsilon > 0$.

Potom z definice pseudotrajektorie máme $|x_{k+1} - f(x_k)| \leq \delta$. Z této nerovnosti plyne

$$x_{k+1} \geq x_k + x_k^2 - \frac{\varepsilon^2}{2} > x_k + \frac{\varepsilon^2}{2}.$$

Potom $x_{k+1} > \varepsilon$ a indukcí se snadno ukáže, že pro každé přirozené číslo l platí nerovnost $x_{k+l} > x_k + l\frac{\varepsilon^2}{2}$. Je pak snadno vidět, že $\lim_{l\to\infty} x_{k+l} = \infty$. Posloupnost $\{x_{k+l}\}_{l=1}^{\infty}$ tedy opustí množinu Y, což je spor s předpokladem, že celá tato posloupnost v této množině leží. Podobně se ukáže případ pro $x_k < -\varepsilon$.

Dokázali jsme tedy, že pro všechna $n \in \mathbb{Z}$ je $|x_n| \leq \varepsilon$. Jelikož identicky nulová posloupnost je přesnou trajektorií dané funkce, je každá $\delta-$pseudotrajektorie ležící v Y stínována přesnou trajektorií sestávající ze samých nul.

♣

V (Pilyugin, 2006) je rovněž uveden tento jednoduchý příklad zobrazení bez stínovací vlastnosti.

Příklad. Uvažujme jednotkovou kružnici $\mathcal{S}^1$ v $\mathbb{R}$. Tuto kružnici můžeme popsat zobrazením $\gamma : \langle 0,1) \to \mathcal{S}^1$ daným předpisem $\gamma(t) = (\cos(2\pi t),\sin(2\pi t))$. Budeme uvažovat metrický prostor $(\mathcal{S}^1,\rho)$, kde $\rho(x,y) = \frac{l(x,y)}{2\pi}$ a kde $l(x,y)$ značí délku nejkratšího oblouku s krajními body x a y (v případě, že $x = y$, položíme $l(x,y)$ rovno nule). Snadno se dá přesvědčit, že se opravdu jedná o metriku.

Zvolme libovolné $\delta > 0$. Uvažujme identické zobrazení $\mathrm{Id} : \mathcal{S}^1 \to \mathcal{S}^1$ a posloupnost $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \in (\mathcal{S}^1)^{\mathbb{Z}}$, $x_n = \gamma(t_n)$, kde

$$\forall n \in \mathbb{Z}: \;\; t_{n+1} = t_n + \frac{\delta}{2} \pmod 1,$$

přičemž $t_0 = 0$. Platí

$$\forall n \in \mathbb{Z} : \rho(\mathrm{Id}(x_n),x_{n+1}) = \rho(x_n,x_{n+1}) = \frac{l(x_n,x_{n+1})}{2\pi} \leq |t_{n+1} - t_n| \leq \frac{\delta}{2} \leq \delta.$$

Je proto zřejmé, že posloupnost $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ je $\delta-$pseudotrajektorie identického zobrazení.

Snadno se potom učiní následující pozorování. Pokud zvolíme například $\varepsilon = \frac{1}{3}$, bude pro každé $0 < \delta < \frac{2}{3}$ existovat $\delta-$pseudotrajektorie s dostatečně rovnoměrným pokrytím kružnice (popsaná výše uvedenou konstrukcí), že pro libovolnou přesnou trajektorii $\{y_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \in (\mathcal{S}^1)^{\mathbb{Z}}$ (která je ve skutečnosti rovna konstantní posloupnosti určené jedním bodem $y \in \mathcal{S}^1$) bude existovat $n \in \mathbb{Z}$ takové, že $\rho(x_n,y_n) = \rho(x_n,y) > \frac{1}{3}$.

♣

Předešlý příklad ukazuje, že stínovací vlastnost nemůže být apriori očekávána u každého zobrazení, je tedy zajímavé ji studovat. Na konci této kapitoly dokonce nalezneme charakterizaci stínovací vlastnosti pro lineární zobrazení.

Než ve výkladu postoupíme, formulujme některá základní tvrzení, která budeme dále potřebovat.

Následující tvrzení nám umožní vícedimenzionální problém rozložit na méně-dimenzionální podúlohy.

Lemma 1. *(Ombach, 1993) Nechť (X,ρ) a (Y,σ) jsou dva metrické prostory, $f: X \to X$ a $g: Y \to Y$ jsou zobrazení na těchto prostorech a $(X \times Y,\tau)$ je metrický prostor s metrikou danou předpisem*

$$\forall (x_1,y_1),(x_2,y_2) \in X \times Y: \ \ \tau((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = \sqrt{\rho(x_1,x_2)^2 + \sigma(y_1,y_2)^2}.$$

Nechť $f \times g : X \times Y \to X \times Y$ je zobrazení dané předpisem

$$(f \times g)(x,y) = (f(x),g(y))$$

pro každé $(x,y) \in X \times Y$. Potom $f \times g$ má stínovací vlastnost právě tehdy, když f a g mají stínovací vlastnost.

Důkaz. „$\Rightarrow$“ Zvolme $\varepsilon > 0$ a k němu nalezněme $\tilde{\delta}$ z definice stínovací vlastnosti pro zobrazení $f \times g$. Dále označme $\delta = \frac{\tilde{\delta}}{\sqrt{2}}$. Nechť nyní $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \in X^{\mathbb{Z}}$ (resp. $\{\tilde{x}_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \in Y^{\mathbb{Z}}$) značí libovolnou $\delta-$pseudotrajektorii zobrazení f (resp. zobrazení g). Potom pro všechna $n \in \mathbb{Z}$ platí

$$\tau((f \times g)(x_n,\tilde{x}_n), (x_{n+1},\tilde{x}_{n+1})) = \sqrt{\rho(f(x_n),x_{n+1})^2 + \sigma(g(\tilde{x}_n),\tilde{x}_{n+1})^2} \leq \tilde{\delta}.$$

Dostáváme tak, že posloupnost $\{(x_n,\tilde{x}_n)\}_{n\in\mathbb{Z}} \in (X \times Y)^{\mathbb{Z}}$ je $\tilde{\delta}-$pseudotrajektorie zobrazení $f \times g$. Z definice stínovací vlastnosti potom plyne existence přesné trajektorie $\{(y_n,\tilde{y}_n)\}_{n\in\mathbb{Z}} \in (X \times Y)^{\mathbb{Z}}$ zobrazení $f \times g$ takové, že

$$\forall n \in \mathbb{Z}: \ \ \tau((x_n,\tilde{x}_n),(y_n,\tilde{y}_n)) \leq \varepsilon.$$

Z rovnosti $(f \times g)(y_n,\tilde{y}_n) = (y_{n+1},\tilde{y}_{n+1})$ snadným rozepsáním plyne, že posloupnost $\{y_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \in X^{\mathbb{Z}}$ (resp. $\{\tilde{y}_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \in Y^{\mathbb{Z}}$) je přesná trajektorie zobrazení f (resp. g). Z nerovností

$$\tau((x_n,\tilde{x}_n),(y_n,\tilde{y}_n)) \geq \sigma(\tilde{x}_n,\tilde{y}_n)$$

a

$$\tau((x_n,\tilde{x}_n),(y_n,\tilde{y}_n)) \geq \rho(x_n,y_n)$$

potom pro každé $n \in \mathbb{Z}$ plyne $\rho(x_n,y_n) \leq \varepsilon$ (resp. $\sigma(\tilde{x}_n,\tilde{y}_n) \leq \varepsilon$).

„$\Leftarrow$“ Nechť $\varepsilon > 0$. Definujme $\tilde{\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$. K tomuto číslu nalezněme δ_1 z definice stínovací vlastnosti pro zobrazení f a δ_2 z definice stínovací vlastnosti pro zobrazení g. Dále označme $\delta = \min\{\delta_1,\delta_2\}$. Pro libovolnou $\delta-$pseudotrajektorii $\{(x_n,\tilde{x}_n)\}_{n\in\mathbb{Z}} \in (X \times Y)^{\mathbb{Z}}$ zobrazení $f \times g$ dostaneme

$$\delta_1 \geq \delta \geq \tau((f \times g)(x_n,\tilde{x}_n),(x_{n+1},\tilde{x}_{n+1})) \geq \rho(f(x_n),x_{n+1})$$

a

$$\delta_2 \geq \delta \geq \tau((f \times g)(x_n,\tilde{x}_n),(x_{n+1},\tilde{x}_{n+1})) \geq \sigma(g(\tilde{x}_n),\tilde{x}_{n+1}).$$

Zjišťujeme tak, že $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \in X^{\mathbb{Z}}$ (resp. $\{\tilde{x}_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \in Y^{\mathbb{Z}}$) je δ_1-pseudotrajektorie pro zobrazení f (resp. δ_2-pseudotrajektorie pro zobrazení g). Potom tedy existují přesné trajektorie $\{y_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \in X^{\mathbb{Z}}$ a $\{\tilde{y}_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \in Y^{\mathbb{Z}}$ zobrazení f a g takové, že

$$\forall n \in \mathbb{Z}: \ \ \rho(x_n,y_n) \leq \tilde{\varepsilon}, \ \sigma(\tilde{x}_n,\tilde{y}_n) \leq \tilde{\varepsilon}.$$

Jelikož posloupnost $\{(y_n,\tilde{y}_n)\}_{n\in\mathbb{Z}} \in (X \times Y)^{\mathbb{Z}}$ je přesnou trajektorií zobrazení $f \times g$ splňující nerovnost

$$\forall n \in \mathbb{Z}: \;\; \tau((x_n,\tilde{x}_n),(y_n,\tilde{y}_n)) = \sqrt{\rho(x_n,y_n)^2 + \sigma(\tilde{x}_n,\tilde{y}_n)^2} \leq \sqrt{2}\tilde{\varepsilon} = \varepsilon,$$

máme tuto implikaci dokázanou.

□

Lemma 2. *(Ombach, 1993) Nechť (X,ρ) je metrický prostor a $f : X \to X$ je homeomorfismus, který je stejnoměrně spojitý a má stejnoměrně spojitou inverzi f^{-1}. Potom f má stínovací vlastnost právě tehdy, když f^{-1} má stínovací vlastnost.*

Důkaz. „⇒“ Zvolme libovolné $\varepsilon > 0$. Nalezneme $\tilde{\delta} > 0$ z definice stínovací vlastnosti pro zobrazení f. K tomuto $\tilde{\delta}$ nalezneme $\delta > 0$ z definice stejnoměrné spojitosti zobrazení f takové, že pro každá $x,y \in X$ splňující nerovnost $\rho(x,y) < \delta$ platí $\rho(f(x),f(y)) < \tilde{\delta}$.

Zvolme nyní $\delta-$pseudotrajektorii $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \in X^{\mathbb{Z}}$ zobrazení f^{-1}. Z nerovnosti $\rho(f^{-1}(x_n),x_{n+1}) < \delta$, $n \in \mathbb{Z}$, pak plyne nerovnost

$$\rho(x_n,f(x_{n+1})) = \rho(f(f^{-1}(x_n)),f(x_{n+1})) < \tilde{\delta}.$$

Pokud provedeme přeznačení $\tilde{x}_n = x_{-n}$, můžeme psát $\rho(f(\tilde{x}_n),\tilde{x}_{n+1}) < \tilde{\delta}$. Posloupnost $\{\tilde{x}_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \in X^{\mathbb{Z}}$ je tedy $\tilde{\delta}-$pseudotrajektorií zobrazení f. Potom existuje přesná trajektorie $\{\tilde{y}_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \in X^{\mathbb{Z}}$ zobrazení f vyhovující nerovnosti $\rho(\tilde{x}_n,\tilde{y}_n) \leq \varepsilon$, $n \in \mathbb{Z}$. Pokud definujeme $y_{-n} = \tilde{y}_n$, $n \in \mathbb{Z}$, bude $\{y_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \in X^{\mathbb{Z}}$ přesnou trajektorií zobrazení f^{-1} vyhovující nerovnosti $\rho(x_n,y_n) \leq \varepsilon$, $n \in \mathbb{Z}$.

„⇐“ Tato implikace plyne z předchozí implikace prohozením rolí funkcí f a f^{-1}.

□

Následující tvrzení říká, že lipschitzovsky spojitá deformace jednoho zobrazení na jiné zachovává stínovací vlastnost. Tato deformace se formalizuje pomocí pojmu *topologická konjugace*, který nyní definujeme.

Definice 4. *(Irwin, 2001) Nechť (X,ρ) a (Y,σ) jsou metrické prostory. Zobrazení $f : X \to X$ a $g : Y \to Y$ nazveme* topologicky konjugovaná*, pokud existuje homeomorfismus $h : X \to Y$ takový, že $h \circ f = g \circ h$.*

Lemma 3. *[(Pilyugin, 2006), Lemma 3.2.1] Nechť (X,ρ) a (Y,σ) jsou metrické prostory a $f : X \to X$ a $g : Y \to Y$ jsou topologicky konjugovaná zobrazení skrze homeomorfismus $h : X \to Y$. Dále předpokládejme, že h i h^{-1} jsou lipschitzovsky spojitá zobrazení. Potom má f stínovací vlastnost právě tehdy, když tuto vlastnost má g.*

Důkaz. „⇒“ Nechť h je lipschitzovsky spojité zobrazení s lipschitzovskou konstantou L a h^{-1} je lipschitzovsky spojité zobrazení s lipschitzovskou konstantou $\tilde{L}$. Zvolme libovolné číslo $\varepsilon > 0$ a označme $\tilde{\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{L}$. K tomuto $\tilde{\varepsilon}$ nalezněme $\tilde{\delta} > 0$ z definice stínovací vlastnosti zobrazení f a označme $\delta = \frac{\tilde{\delta}}{\tilde{L}}$.

Nechť $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \in Y^{\mathbb{Z}}$ je $\delta-$pseudotrajektorie g. Zaveďme označení

$$\forall n \in \mathbb{Z}: \;\; \tilde{x}_n = h^{-1}(x_n),$$

potom platí nerovnosti

$$\forall n \in \mathbb{Z}: \ \ \rho(f(\tilde{x}_n),\tilde{x}_{n+1}) = \rho((h^{-1} \circ h \circ f \circ h^{-1})(x_n),h^{-1}(x_{n+1})) \leq$$
$$\leq \tilde{L}\sigma((h \circ f \circ h^{-1})(x_n),x_{n+1}) = \tilde{L}\sigma(g(x_n),x_{n+1}) \leq \delta\tilde{L} = \tilde{\delta}.$$

Posloupnost $\{\tilde{x}_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ je tedy $\tilde{\delta}-$pseudotrajektorie zobrazení f. Existuje proto přesná trajektorie $\{\tilde{y}_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \in X^{\mathbb{Z}}$ zobrazení f vyhovující nerovnosti $\rho(\tilde{x}_n,\tilde{y}_n) \leq \tilde{\varepsilon}$, $n \in \mathbb{Z}$.

Nyní definujeme $y_n = h(\tilde{y}_n)$. Jelikož

$$g(y_n) = (h \circ f \circ h^{-1} \circ h)(\tilde{y_n}) = (h \circ f)(\tilde{y_n}) = h(\tilde{y}_{n+1}) = y_{n+1},$$

dostáváme tak přesnou trajektorii zobrazení g splňující nerovnosti

$$\forall n \in \mathbb{Z}: \ \ \sigma(x_n,y_n) = \sigma(h(\tilde{x}_n),h(\tilde{y}_n)) \leq L\rho(\tilde{x}_n,\tilde{y}_n) \leq L\tilde{\varepsilon} = \varepsilon.$$

Tím je důkaz této implikace dokončen.

„$\Leftarrow$“ Důkaz této implikace plyne z již dokázané části záměnou g za f a h za h^{-1}.

$\square$

Zobrazení z definice stínovací vlastnosti operuje na nějakém předem zvoleném metrickém prostoru. Snadným důsledkem Lemmatu 3 je fakt, že při přechodu od jedné metriky k jiné ekvivalentní metrice se stínovací vlastnost zachovává. Nezáleží tudíž na tom, vůči které ekvivalentní metrice tuto vlastnost dokážeme.

Lemma 4. *Nechť (X,ρ) a (X,σ) jsou metrické prostory s ekvivalentními metrikami (to znamená, že existují konstanty $C_1,C_2 > 0$ takové, že pro každé $x,y \in X$ platí nerovnosti $C_1\rho(x,y) \leq \sigma(x,y) \leq C_2\rho(x,y)$). Potom $f : X \to X$ má stínovací vlastnost na (X,ρ) právě tehdy, když má f stínovací vlastnost na (X,σ).*

Důkaz. Pokud dokážeme, že identické zobrazení $\mathrm{Id} : (X,\rho) \to (X,\sigma)$ je lipschitzovsky spojitý homeomorfismus, jehož inverzní zobrazení je též lipschitzovsky spojité, potom je dle Lemmatu 3 důkaz ukončen, neboť f, které je chápáno jako zobrazení nad (X,ρ), je skrze identitu topologicky konjugované se zobrazením f nad (X,σ).

Je zřejmé, že identické zobrazení je bijekce. Díky ekvivalenci metrik platí

$$\forall x,y \in X: \ \ \sigma(\mathrm{Id}(x),\mathrm{Id}(y)) = \sigma(x,y) \leq C_2\rho(x,y).$$

Identické zobrazení je tedy lipschitzovsky spojité s lipschitzovskou konstantou C_2. Podobně se nahlédne lipschitzovská spojitost Id^{-1} s lipschitzovsou konstantou $\frac{1}{C_1}$.

$\square$

V poslední části této sekce dokážeme, že postačující podmínkou pro stínovací vlastnost je kontraktivita zobrazení. Důkaz této věty bude založen na Banachově větě o pevném bodě, proto jí zde bez důkazu připomeňme (důkaz viz např. (Kopáček, 2015)).

Věta 5 (Banachova věta o pevném bodě)**.** *Nechť* (X,ρ) *je úplný metrický prostor a* $f : X \to X$ *je kontrakce. Potom* f *má v* X *právě jeden pevný bod.*

V důkazu navíc použijeme následující lemma.

Lemma 6. *Nechť* (X,ρ) *je úplný metrický prostor,* $\varepsilon > 0$ *je libovolné a* $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \in X^{\mathbb{Z}}$*. Pokud definujeme množinu*

$$E_\varepsilon = \{\{y_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \in X^{\mathbb{Z}}; \rho(x_n,y_n) \le \varepsilon, n \in \mathbb{Z}\}$$

s metrikou

$$S(\{y_n\}_{n\in\mathbb{Z}},\{z_n\}_{n\in\mathbb{Z}}) = \sup\{\rho(y_n,z_n); n \in \mathbb{Z}\},$$

potom je metrický prostor (E_ε,S) *úplný.*

Důkaz. Nechť $\{\{y_n^i\}_{n\in\mathbb{Z}}\}_{i=1}^{\infty} \in E_\varepsilon^{\mathbb{N}}$ je cauchyovská posloupnost v (E_ε,S). Zvolme $\xi > 0$ a nalezněme $l_0 \in \mathbb{N}$ tak, že pro každé $i,j \ge l_0$ je

$$S(\{y_n^i\}_{n\in\mathbb{Z}},\{y_n^j\}_{n\in\mathbb{Z}}) < \xi. \tag{1.1}$$

Potom z definice metriky S plyne, že pro každé $i,j \ge l_0$ a pro všechna $n \in \mathbb{Z}$ je $\rho(y_n^i,y_n^j) < \xi$. Jelikož (X,ρ) je úplný, existuje pro každé $n \in \mathbb{Z}$ takové $y_n \in X$, že $\lim_{i\to\infty} \rho(y_n^i,y_n) = 0$. Dále platí odhad

$$\forall n \in \mathbb{Z}: \ \ \rho(x_n,y_n) \le \rho(y_n^i,y_n) + \rho(y_n^i,x_n) \le \rho(y_n^i,y_n) + \varepsilon.$$

Protože tento odhad platí nezávisle na i, plyne z vlastností limity následující nerovnost

$$\forall n \in \mathbb{Z}: \ \ \rho(x_n,y_n) = \lim_{i\to\infty} \rho(x_n,y_n) \le \lim_{i\to\infty} \rho(y_n^i,y_n) + \varepsilon = \varepsilon.$$

Dostáváme tak, že posloupnost $\{y_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ náleží do prostoru E_ε.

Nyní jen stačí dokázat, že posloupnost $\{\{y_n^i\}_{n\in\mathbb{Z}}\}_{i=1}^{\infty}$ konverguje v metrice S k $\{y_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$. Z nerovnosti $|\rho(y_n^i,y_n^j) - \rho(y_n^i,y_n)| \le \rho(y_n^j,y_n)$ (která je snadným důsledkem trojúhelníkové nerovnosti), limity $\lim_{j\to\infty} \rho(y_n^j,y_n) = 0$, vlastností limit a nerovnosti (1.1) potom plyne, že $\rho(y_n^i,y_n) = \lim_{j\to\infty} \rho(y_n^i,y_n^j) \le \xi$ pro všechna $i \ge l_0$. Přechodem k supremu přes všechna $n \in \mathbb{Z}$ obdržíme pro každé $i \ge l_0$ nerovnost $S(\{y_n^i\}_{n\in\mathbb{Z}},\{y_n\}_{n\in\mathbb{Z}}) \le \xi$. Tím je úplnost metrického prostoru (E_ε,S) dokázána.

□

Nyní můžeme dokázat větu převzatou z článku (Ombach, 1993).

Věta 7. *Buď* (X,ρ) *úplný metrický prostor a zobrazení* $f : X \to X$ *kontrakce. Potom* f *má stínovací vlastnost.*

Důkaz. Z předpokladu plyne existence konstanty $0 < C < 1$ takové, že

$$\forall x,y \in X: \ \ \rho(f(x),f(y)) \le C\rho(x,y).$$

Zvolme nyní libovolné $\varepsilon > 0$ a označme $\delta = (1 - C)\varepsilon$. Nechť $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \in X^{\mathbb{Z}}$ je libovolná $\delta-$pseudotrajektorie. Pro tuto pseudotrajektorii definujeme pomocnou množinu

$$E_\varepsilon = \{\{y_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \in X^{\mathbb{Z}}; \rho(x_n,y_n) \le \varepsilon, n \in \mathbb{Z}\}$$

a metriku na této množině danou vztahem

$$S(\{y_n\}_{n\in\mathbb{Z}},\{z_n\}_{n\in\mathbb{Z}}) = \sup\{\rho(y_n,z_n); n \in \mathbb{Z}\}.$$

Podle Lemmatu 6 je metrický prostor (E_ε,S) úplný.

Nyní na prostoru (E_ε,S) definujeme zobrazení $\psi : E_\varepsilon \to X^{\mathbb{Z}}$ předpisem

$$\forall i \in \mathbb{Z}: \quad (\psi(\{y_n\}_{n\in\mathbb{Z}}))_i = f(y_{i-1}).$$

Pro libovolné $l \in \mathbb{Z}$ díky trojúhelníkové nerovnosti platí

$$\begin{aligned}\rho((\psi(\{y_n\}_{n\in\mathbb{Z}}))_l,x_l) &= \rho(f(y_{l-1}),x_l) \le \rho(f(y_{l-1}),f(x_{l-1})) + \rho(f(x_{l-1}),x_l) \le \\ &\le C\rho(y_{l-1},x_{l-1}) + \delta \le C\varepsilon + \varepsilon - C\varepsilon = \varepsilon.\end{aligned}$$

Dostáváme tak, že $\mathrm{Rng}\psi \subseteq E_\varepsilon$.

Snadno se ukáže, že ψ je kontrakce na prostoru (E_ε,S). Pro libovolnou dvojici posloupností $\{y_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ a $\{z_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ z E_ε platí

$$\begin{aligned}&S(\psi(\{y_n\}_{n\in\mathbb{Z}}),\psi(\{z_n\}_{n\in\mathbb{Z}})) = \sup\{\rho(f(y_{n-1}),f(z_{n-1})); n \in \mathbb{Z}\} = \\ &\sup\{\rho(f(y_n),f(z_n)); n \in \mathbb{Z}\} \le C\sup\{\rho(y_n,z_n); n \in \mathbb{Z}\} = \\ &= CS(\{y_n\}_{n\in\mathbb{Z}},\{z_n\}_{n\in\mathbb{Z}}).\end{aligned}$$

Z Banachovy věty o pevném bodě potom plyne, že existuje právě jedna posloupnost $\{y_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \in E_\varepsilon$ taková, že $\psi(\{y_n\}_{n\in\mathbb{Z}}) = \{y_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$. Po rozepsání této rovnosti zjistíme, že se jedná o přesnou trajektorii zobrazení f splňující nerovnost z definice stínovací vlastnosti.

□

1.2 Hyperbolicita a Stínovací lemma

Na úvod této sekce přijměme označení, které budeme dále používat. Nechť $M \in \mathbb{C}^{d\times d}$, *lineárním zobrazením* $f : \mathbb{C}^d \to \mathbb{C}^d$ *daným maticí* M chápeme zobrazení definované předpisem $f(x) = Mx$. Nechť f je bijekce a $n \in \mathbb{N}_0$ je libovolné, potom f^0 definujeme jako identické zobrazení, $f^{n+1} = f^n \circ f$ a $f^{-n-1} = f^{-n} \circ f^{-1}$. Pokud $f : \mathbb{C}^d \to \mathbb{C}^d$ je diferencovatelné zobrazení, potom diferenciál tohoto zobrazení v bodě $p \in \mathbb{C}^d$ budeme značit $Df(p)$ a budeme jej chápat, jako lineární zobrazení dané Jacobiho maticí

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(p) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_d}(p) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_d}{\partial x_1}(p) & \dots & \frac{\partial f_d}{\partial x_d}(p) \end{pmatrix}.$$

V této sekci se zaměříme na hyperbolické množiny a hyperbolická lineární zobrazení. Po definici hyperbolické množiny bude následovat formulace klasického výsledku z teorie stínování, tzv. Stínovacího lemmatu, a uvedení ilustračního příkladu. Myšlenku tohoto ilustračního příkladu však použijeme k motivování samotného pojmu hyperbolické množiny.

Uvažujme matici

$$A = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -1 & 1 \end{pmatrix}. \tag{1.2}$$

V příkladu níže se přesvědčíme o existenci dvou lineárně nezávislých vektorů v_1 a v_2 v prostoru $\mathbb{R}^2$ takových, že lineární zobrazení f dané maticí A se na podprostoru generovaném vektorem v_1 chová jako kontraktivní zobrazení. Stejně tomu je v případě zobrazení f^{-1} definovaného maticí A^{-1} na lineárním obalu vektoru v_2. Lineární obaly těchto vektorů tvoří $A-$invariantní prostory, jejichž direktní součet je roven celému prostoru $\mathbb{R}^2$.

Podobnou vlastnost lze lokálně studovat také u nelineárních difeomorfismů v bodech jisté invariantní množiny. Od matic zobrazení potom musíme přejít k diferenciálům těchto difeomorfismů. Bude nás zajímat, jestli lze celý prostor rozložit na direktní součet dvou invariantních podprostorů, kdy na jednom z nich se difeomorfismus (resp. jeho jistá iterativní kompozice) chová lokálně jako kontrakce a na druhém se inverzní zobrazení k tomuto difeomorfismu (resp. jeho jistá iterativní kompozice) také lokálně chová jako kontrakce.

Nyní tuto intuici formalizujme. Nechť $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ je difeomorfismus. Na $\mathbb{R}^d$ budeme uvažovat euklidovskou normu. Následující definice je převzata z (Pilyugin, 2006) (viz Sekce 1.2)

Definice 5. *Nechť $K \subseteq \mathbb{R}^d$ je kompaktní $f-$invariantní množina, pro kterou existuje systém lineárních podprostorů $S(p)$, $U(p)$ prostoru $\mathbb{R}^d$ parametrizovaný prvkem $p \in K$ splňujících pro každý prvek p rovnosti*

$$\begin{aligned} &S(p) \oplus U(p) = \mathbb{R}^d, \\ &Df(p)(U(p)) = U(f(p)), \\ &Df(p)(S(p)) = S(f(p)), \end{aligned}$$

kde $Df(p)(U(p))$ (resp. $Df(p)(S(p))$ značí obraz podprostoru $U(p)$ (resp. podprostoru $S(p)$) v lineárním zobrazení $Df(p)$. Takovou množinu K nazveme hyperbolickou množinou difeomorfismu f, *pokud existují konstanty $C > 0$, $\lambda_0 \in (0,1)$ takové, že pro každý prvek p platí nerovnosti*

$$\begin{aligned} &\forall v \in S(p) \quad \forall m \in \mathbb{N}_0 : \quad \|Df^m(p)v\| \leq C\lambda_0^m \|v\|, \\ &\forall v \in U(p) \quad \forall m \in \mathbb{N}_0 : \quad \left\|Df^{-m}(p)v\right\| \leq C\lambda_0^m \|v\|. \end{aligned} \tag{1.3}$$

Množina $S(p)$ (resp. $U(p)$) se nazývá *stabilní* (resp. *nestabilní*) *prostor* příslušející prvku $p \in K$ (Spoto a Milani, 2015)(Irwin, 2001).

Než se pustíme do ilustrace této definice na konkrétním příkladu, formulujeme obecnou větu z teorie stínování trajektorií difeomorfismů. Tato věta je obecně známa pod názvem Stínovací lemma (Spoto a Milani, 2015)(Pilyugin, 2006).

Věta 8. *Nechť $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ je difeomorfismus a $K \subseteq \mathbb{R}^d$ je jeho hyperbolická množina. Potom existuje okolí O množiny K, na kterém má difeomorfismus f stínovací vlastnost.*

Důkaz Věty 8 je nad rámec tohoto textu, proto jej nebudeme uvádět, spolu se zněním věty je však k nalezení např. v (Pilyugin, 2006). Nyní exaktně rozeberme motivační příklad a prostudujme hyperbolickou množinu lineárního zobrazení s maticí A.

Příklad. Uvažujme lineární zobrazení $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$ definované maticí (1.2). Matice A je regulární, jedná se proto o difeomorfismus. Tato matice má vlastní čísla

$\lambda_1 = \frac{1}{2}$ a $\lambda_2 = 2$. Příslušné vlastní vektory jsou $v_1 = (1{,}2)^T$ a $v_2 = (-1{,}1)^T$ (jsou to vektory zmiňované v úvodní motivaci).

Dokážeme, že hyperbolická množina K je rovna kompaktní (omezené a uzavřené) množině $\{(0{,}0)^T\}$. Postupně ověříme jednotlivé požadavky z definice. Snadno se nahlédne, že $f(K) = K$ (bod $(0{,}0)^T$ je pevným bodem zobrazení f). Dále pro $p = (0{,}0)^T$ definujme $S(p) = \operatorname{span}\{v_1\}$ a $U(p) = \operatorname{span}\{v_2\}$ (tedy stabilní a nestabilní prostor příslušející prvku p). Protože vektory v_1 a v_2 jsou zřejmě lineárně nezávislé, platí $S(p) \oplus U(p) = \mathbb{R}^2$. Je zřejmé, že $Df(p) = f$ (diferenciál chápeme jako lineární zobrazení, které je v případě f dáno maticí A). Protože prostory $S(p)$ a $U(p)$ nezávisí na volbě p, platí $Df(p)(U(p)) = f(U(p)) = U(p) = U(f(p))$ a $Df(p)(S(p)) = f(S(p)) = S(p) = S(f(p))$.

Nyní stačí ověřit platnost nerovností (1.3). Jelikož $f^m(x{,}y) = A^m(x,y)^T$ (podobně $f^{-m}(x{,}y) = \left(A^{-1}\right)^m (x,y)^T$), platí dle definice vlastního čísla a vlastního vektoru

$$
\begin{aligned}
&\forall v \in S(p) \quad \forall m \in \mathbb{N}_0: \quad \|Df^m(p)v\| = \|A^m v\| = \lambda_1^m \|v\| = \frac{1}{2^m}\|v\|, \\
&\forall v \in U(p) \quad \forall m \in \mathbb{N}_0: \quad \left\|Df^{-m}(p)v\right\| = \left\|\left(A^{-1}\right)^m v\right\| = \lambda_2^{-m}\|v\| = \frac{1}{2^m}\|v\|
\end{aligned}
\tag{1.4}
$$

Množina K je proto hyperbolickou množinou zobrazení f s $C = 1$ a $\lambda_0 = \frac{1}{2}$.

♣

Hlavním poselstvím tohoto příkladu je, že v případě lineárních zobrazení nás při vyšetřování hyperbolických množin zajímá rozložení spektra matic těchto zobrazení. Přesněji řečeno, je potřeba, aby spektra matic neprotínala jednotkovou kružnici umístěnou do počátku komplexní roviny. Kdyby například platilo, že $\lambda_1 = 1$, pro každé $v \in S(p)$ bychom potom dostali $\|Df^m(p)v\| = \|A^m v\| = \lambda_1^m \|v\| = \|v\|$. Neexistovalo by tedy $\lambda_0 < 1$ z definice hyperbolické množiny vyhovující první z nerovností (1.3). Poznamenejme, že pro lineární zobrazení s pevným bodem p platí ekvivalence mezi hyperbolicitou množiny $\{p\}$ a prázdným průnikem spektra s jednotkovou kružnicí (Pilyugin, 2006)(Bernardes a kol., 2016). Problematika hyperbolických lineárních zobrazení je podrobně rozebírána v (Irwin, 2001).

Definice 6. *Lineární zobrazení $f : \mathbb{C}^d \to \mathbb{C}^d$ dané maticí A (resp. matici A) nazveme* hyperbolickým *(resp.* hyperbolickou*), pokud spektrum $\sigma(A)$ této matice neprotíná jednotkovou kružnici umístěnou do počátku komplexní roviny.*

Matice, které budeme v této práci uvažovat, budou reálné. Pro naše úvahy jsou však potřeba celá spektra těchto matic, proto je výhodné tyto úvahy provádět nad komplexními čísly.

1.3 Stínování pseudotrajektorie lineárního zobrazení

V případě lineárních zobrazení se dá příslušná teorie stínování budovat pomocí elementárních metod lineární algebry a funkcionální analýzy. V této sekci dokážeme tvrzení, že lineární zobrazení je hyperbolické právě tehdy, když má stínovací vlastnost. Myšlenka důkazu první implikace je převzata z článku (Ombach, 1993), důkaz je však rozebrán do všech detailů. Důkaz druhé implikace je potom k nalezení v (Pilyugin, 2006).

Nebude-li řečeno jinak, budeme uvažovat metrický prostor $\mathbb{C}^d$ s metrikou indukovanou euklidovskou normou.

1.3.1 Spektrální poloměr

V úvodu této sekce zaveďme pojem spektrální poloměr matice a formulujme základní tvrzení.

Definice 7. *(Tebbens a kol., 2012) Nechť* $A \in \mathbb{C}^{d\times d}$. Spektrálním poloměrem matice A *nazveme nezáporné reálné číslo* $\varrho(A)$ *dané předpisem*

$$\varrho(A) = \max\{|\lambda|; \lambda \in \sigma(A)\}.$$

Snadno nahlédneme, že matice se spektrálním poloměrem ostře menším než jedna je hyperbolická. Mezi konvergencí trajektorie lineárního zobrazení a spektrálním poloměrem je úzký vztah.

Věta 9. *(Tebbens a kol., 2012) Nechť pro matici* $A \in \mathbb{C}^{d\times d}$ *platí* $\varrho(A) < 1$, *potom* $\lim_{n\to\infty} A^n = 0$ *(pro libovolnou maticovou normu* $\|.\|$ *díky její spojitosti platí* $\lim_{n\to\infty} \|A^n\| = 0$*).*

Důsledkem této věty je jednoduchý vztah pro spektrální poloměr, který bude náplní následující věty.

Věta 10. *(Tebbens a kol., 2012) Nechť* $A \in \mathbb{C}^{d\times d}$ *je libovolná matice a* $\|.\|$ *je libovolná multiplikativní maticová norma (např. libovolná maticová norma generovaná nějakou vektorovou normou), potom platí*

$$\varrho(A) = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|A^n\|}. \tag{1.5}$$

Tato dvě tvrzení nyní využijeme k důkazu následující věty (tvrzení o existenci speciální ekvivalentní metriky je převzato z (Irwin, 2001), důkaz však uvedeme jiný).

Věta 11. *Nechť* $A \in \mathbb{C}^{d\times d}$ *je matice splňující* $\varrho(A) < 1$. *Potom existuje translačně invariantní metrika* θ *na* $\mathbb{C}^d$ *taková, že lineární zobrazení dané maticí* A *je v této metrice kontraktivní a metrický prostor* $(\mathbb{C}^d,\theta)$ *je úplný.*

Důkaz. Pro nulovou matici platí tvrzení triviálně (hledanou metrikou je euklidovská metrika), předpokládejme proto A nenulovou. Nechť $\|.\|$ značí libovolnou maticovou normu generovanou vektorovou normou $\|.\|$ takovou, že $(\mathbb{C}^d, \|.\|)$ je Banachův prostor. Z Věty 9 plyne existence $n_0 \in \mathbb{N}$ takového, že $\|A^{n_0}\| < 1$. Zvolme $\eta > 0$ tak, že $\eta \|A^{n_0}\| \in (\varrho(A),1)$. Definujeme zobrazení $\theta : \mathbb{C}^d \times \mathbb{C}^d \to \langle 0,\infty)$ předpisem

$$\theta(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\|A^n(x-y)\|}{\|A^{n_0}\|^n \eta^n}. \tag{1.6}$$

Dokažme, že toto zobrazení je dobře definované. Jednotlivé členy řady (1.6) jsou nezáporné. Dále platí odhady

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{\|A^n(x-y)\|}{\|A^{n_0}\|^n\,\eta^n}} \le \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{\|A^n\|}\,\sqrt[n]{\|x-y\|}}{\|A^{n_0}\|\,\eta} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{\|A^n\|}}{\|A^{n_0}\|\,\eta}.$$

Podle Věty 10 je $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\|A^n\|} = \varrho(A)$. Potom

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{\|A^n(x-y)\|}{\|A^{n_0}\|^n\,\eta^n}} \le \frac{\varrho(A)}{\|A^{n_0}\|\,\eta} < 1.$$

Dle Cauchyova odmocninového kritéria pro konvergenci číselných řad s nezápornými členy je tudíž řada v definici vztahu (1.6) konvergentní pro libovolnou dvojici $x,y \in \mathbb{C}^d$.

Nyní musíme ověřit, že zobrazení θ je opravdu metrikou. Zřejmě platí $\theta \ge 0$ na $\mathbb{C}^d \times \mathbb{C}^d$. Z definice θ snadno plyne

$$0 \le \|x-y\| \le \|x-y\| + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\|A^n(x-y)\|}{\|A^{n_0}\|^n\,\eta^n} = \theta(x,y)$$

pro všechna $x,y \in \mathbb{C}^d$. Z rovnosti $\theta(x,y) = 0$ tak plyne $x = y$. Opačná implikace je triviální. Symetrie metriky je důsledkem rovnosti $\|A^n(x-y)\| = \|A^n(y-x)\|$. Již stačí ověřit jenom trojúhelníkovou nerovnost. Ta plyne z aplikace trojúhelníkové nerovnosti v jednotlivých členech řady

$$\begin{aligned}\theta(x,z) &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\|A^n(x-z)\|}{\|A^{n_0}\|^n\,\eta^n} \le \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\|A^n(x-y)\| + \|A^n(y-z)\|}{\|A^{n_0}\|^n\,\eta^n} \le \\ &\le \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\|A^n(x-y)\|}{\|A^{n_0}\|^n\,\eta^n} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\|A^n(y-z)\|}{\|A^{n_0}\|^n\,\eta^n} = \theta(x,y) + \theta(y,z),\end{aligned}$$

kde $x,y,z \in \mathbb{C}^d$. Metrika θ je zřejmě translačně invariantní. Pro každé $x,y,z \in \mathbb{C}^d$ totiž platí

$$\theta(x+z,y+z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\|A^n(x+z-y-z)\|}{\|A^{n_0}\|^n\,\eta^n} = \theta(x,y).$$

Kontraktivita lineárního zobrazení daného maticí A se dokáže snadno pomocí posunutí indexů (to je také důvod, proč byla hledána metrika ve formě nekonečné řady)

$$\begin{aligned}\theta(Ax,Ay) &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\|A^{n+1}(x-y)\|}{\|A^{n_0}\|^n\,\eta^n} = \|A^{n_0}\|\,\eta\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\|A^{n+1}(x-y)\|}{\|A^{n_0}\|^{n+1}\,\eta^{n+1}} = \\ &= \|A^{n_0}\|\,\eta\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\|A^n(x-y)\|}{\|A^{n_0}\|^n\,\eta^n} \le \|A^{n_0}\|\,\eta\left(\|x-y\| + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\|A^n(x-y)\|}{\|A^{n_0}\|^n\,\eta^n}\right) = \\ &= \|A^{n_0}\|\,\eta\theta(x,y).\end{aligned}$$

Protože $\|A^{n_0}\|\,\eta < 1$, jedná se o kontrakci.

Pro libovolná $x,y \in \mathbb{C}^d$ dále platí odhady

$$\|x-y\| \le \theta(x,y) \le \left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\|A^n\|}{\|A^{n_0}\|^n\,\eta^n}\right)\|x-y\|. \tag{1.7}$$

Metrika θ je proto ekvivalentní s metrikou indukovanou normou $\|.\|$. Jelikož je prostor $(\mathbb{C}^d, \|.\|)$ Banachův prostor, je díky této ekvivalenci úplný také prostor $(\mathbb{C}^d,\theta)$.

$\square$

Hlavní výhodou předchozího důkazu je, že nemá jenom existenční charakter, ale dává explicitní návod na konstrukci metriky θ, která bude v dalším výkladu hrát podstatnou roli.

1.3.2 Stínovací vlastnost lineárního zobrazení se spektrem ležícím uvnitř jednotkového kruhu

Již začíná být zřejmá důležitost požadavku, aby spektrum matice leželo uvnitř jednotkového kruhu. Nyní zformulujeme důsledek Věty 7 pro lineární zobrazení s touto vlastností.

Věta 12. *Nechť $A \in \mathbb{C}^{d\times d}$ je matice taková, že $\varrho(A) < 1$. Potom má lineární zobrazení f dané touto maticí stínovací vlastnost na metrickém prostoru $\mathbb{C}^d$.*

Důkaz. Dle Věty 11 a Věty 7 má zobrazení f stínovací vlastnost v prostoru $(\mathbb{C}^d,\theta)$. Jelikož metrika indukovaná euklidovskou normou je dle nerovnosti (1.7) ekvivalentní s metrikou θ, plyne z Lemmatu 4, že f má stínovací vlastnost také vzhledem k euklidovské metrice.

$\square$

1.3.3 Stínování lineárního zobrazení s hyperbolickou maticí

Nyní máme vybudovány všechny hlavní dílčí výsledky potřebné k důkazu věty o stínování pseudotrajektorie lineárního zobrazení s hyperbolickou maticí. Myšlenka důkazu, který uvedeme, pochází z článku (Ombach, 1993). Nejprve však uveďme jedno pomocné tvrzení.

Lemma 13. *Nechť $A \in \mathbb{C}^{d\times d}$. Potom je lineární zobrazení f dané maticí lipschitzovsky spojité (speciálně je také stejnoměrně spojité).*

Důkaz. Předpokládejme, že matice A je nenulová (pro nulovou to platí triviálně). Zvolme $x,y \in \mathbb{C}^d$, potom z vlastností spektrální maticové normy plyne odhad

$$\|f(x) - f(y)\| = \|A(x-y)\| \leq \|A\| \, \|x-y\| \, .$$

Tím máme dokázanou lipschitzovskou spojitost. Stejnoměrná spojitost se dokáže též přímočaře. Zvolme $\varepsilon > 0$ a označme $\delta = \frac{\varepsilon}{\|A\|}$. Potom pro každé $x,y \in \mathbb{C}^d$, $\|x-y\| < \delta$, plyne z výše uvedené nerovnosti

$$\|f(x) - f(y)\| = \|A(x-y)\| \leq \|A\| \, \|x-y\| < \|A\| \, \delta = \varepsilon.$$

$\square$

Budeme užívat následující označení

$$A \oplus B = \begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix},$$

kde A a B jsou matice.

Nechť $A \in \mathbb{C}^{d\times d}$ je hyperbolická. Pro tuto matici potom existuje Jordanův rozklad $A = V(J^{>1} \oplus J^{<1})V^{-1}$, kde $J^{>1} = J_1^{>1} \oplus J_2^{>1} \oplus \ldots \oplus J_p^{>1}$ a $J^{<1} = J_1^{<1} \oplus J_2^{<1} \oplus \ldots \oplus J_q^{<1}$, přičemž $J_i^{<1}$ značí Jordanovy bloky odpovídající vlastním číslům ležícím uvnitř jednotkového kruhu v počátku komplexní roviny a $J_i^{>1}$ značí Jordanovy bloky odpovídající vlastním číslům ležícím vně tohoto kruhu. Vzhledem k tomu, že Jordanovy bloky jsou čtvercové matice, budou čtvercové také matice $J^{>1}$ a $J^{<1}$. Pro jednoduchost budeme značit $J = J^{>1} \oplus J^{<1}$.

Zřejmě platí, že lineární zobrazení f_A dané maticí A je topologicky konjugované s lineárním zobrazením f_J daným maticí J. Pokud totiž f_V je lineární zobrazení určené maticí V, potom díky Lemmatu 13 je f_V (dokonce lipschitzovsky) spojitý homeomorfismus, jeho inverzní zobrazení je také (dokonce lipschitzovsky) spojitý homeomorfismus a platí, že $f_A = f_V \circ f_J \circ f_{V^{-1}} = f_V \circ f_J \circ f_V^{-1}$. Dle Lemmatu 3 tedy stačí dokázat stínovací vlastnost u zobrazení f_J, tato vlastnost se potom topologickou konjugací zachová.

Bez újmy na obecnosti tedy budeme vyšetřovat pouze zobrazení dané maticí $J^{>1} \oplus J^{<1}$. Označme lineární zobrazení daná maticemi $J^{<1}$ a $J^{>1}$ jako $f_{J^{<1}}$ a $f_{J^{>1}}$. Potom se snadno přesvědčíme, že $f_J = f_{J^{>1}} \times f_{J^{<1}}$. Dle Lemmatu 1 má tedy f_A stínovací vlastnost právě tehdy, když mají tuto vlastnost současně obě zobrazení $f_{J^{<1}}$ a $f_{J^{>1}}$.

Jelikož matice $J^{>1}$ má nenulová vlastní čísla, je tato matice regulární. Příslušné zobrazení $f_{J^{>1}}$ je proto homeomorfismus. Navíc je dle Lemmatu 13 stejnoměrně spojité se stejnoměrně spojitou inverzí. Podle Lemmatu 2 má $f_{J^{>1}}$ stínovací vlastnost právě tehdy, když $f_{J^{>1}}^{-1} = f_{(J^{>1})^{-1}}$ má stínovací vlastnost.

Důležitým pozorováním je to, že spektrum matice $(J^{>1})^{-1}$ leží uvnitř jednotkového kruhu umístěného do počátku komplexní roviny. Závěrem této série úvah je zjištění, že pokud mají zobrazení $f_{(J^{>1})^{-1}}$ a $f_{J^{<1}}$ stínovací vlastnost, potom má stínovací vlastnost také f_A. My však díky Větě 12 víme, že tato zobrazení stínovací vlastnost mají. Dokázali jsem tedy jednu implikaci následující klíčové věty.

Věta 14. *Matice $A \in \mathbb{C}^{d\times d}$ je hyperbolická právě tehdy, když lineární zobrazení f_A dané touto maticí má stínovací vlastnost.*

Důkaz. (Pilyugin, 2006) Dokážeme chybějící implikaci. Předpokládejme, že matice A má vlastní číslo λ takové, že $|\lambda| = 1$ (tedy matice A není hyperbolická). Dle Lemmat 13 a 3 můžeme bez újmy na obecnosti předpokládat matici A v Jordanově kanonickém tvaru $J \oplus R$ (viz postup výše), kde

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & \lambda \end{pmatrix}$$

je Jordanův blok odpovídající vlastnímu číslu λ a R je podmatice obsahující zbylé Jordanovy bloky. Označme rozměr matice J jako r.

Zvolme nyní pevné $\delta > 0$ a sestrojme posloupnost $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \in (\mathbb{C}^d)^{\mathbb{Z}}$ takovou, že $x_{n,r+1} = x_{n,r+2} = \ldots x_{n,d} = 0$, $x_{n,r} = n\lambda^n\delta$ a $x_{n,1}, x_{n,2}, \ldots, x_{n,r-1}$ vyhovují vztahům

$$\forall n \in \mathbb{Z} \ \forall i \in \{1, 2, \dots, r-1\}: \ \ x_{n+1,i} = \lambda x_{n,i} + x_{n,i+1}.$$

Potom pro každé $n \in \mathbb{Z}$ platí

$$Ax_n - x_{n+1} = \begin{pmatrix} \lambda x_{n,1} + x_{n,2} \\ \vdots \\ \lambda x_{n,i} + x_{n,i+1} \\ \vdots \\ \lambda x_{n,r-1} + x_{n,r} \\ n\lambda^{n+1}\delta \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_{n+1,1} \\ \vdots \\ x_{n+1,i} \\ \vdots \\ x_{n+1,r-1} \\ (n+1)\lambda^{n+1}\delta \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -\lambda^{n+1}\delta \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Potom platí

$$\|Ax_n - x_{n+1}\| = \left|\lambda^{n+1}\delta\right| = \delta.$$

Posloupnost $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ je tudíž $\delta-$pseudotrajektorie.

Nyní ukážeme, že tuto pseudotrajektorii nelze stínovat přesnou trajektorií. Uvažujme libovolnou trajektorii $\{y_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$. Potom pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $y_n = A^n y_0$. Pak snadným rozepsáním této rovnosti zjistíme, že $y_{n,r} = \lambda^n y_{0,r}$. Jelikož $x_{n,r} = n\lambda^n\delta$, platí tento odhad

$$\forall n \in \mathbb{Z}: \ \ \|x_n - y_n\| \geq |\lambda^n(n\delta - y_{0,r})| = |n\delta - y_{0,r}|.$$

Protože člen na pravé straně roste pro n jdoucí do nekonečna nade všechny meze, bude pro libovolné $\varepsilon > 0$ vždy existovat $\tilde{n} \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq \tilde{n}: \ \ \|x_n - y_n\| > \varepsilon.$$

Zobrazení s maticí A tedy nemá stínovací vlastnost.

□

2. Zobecněné stínování

Dosud jsme se zabývali obecnými výsledky teorie stínování. Nyní je na čase se začít zaměřovat na konkrétní aplikace, totiž stínování přibližných řešení parciálních diferenciálnách rovnic získaných pomocí metody konečných diferencí za použití výpočetní techniky. K tomuto účelu je však vhodné zavést nové pojmy, které se více hodí k této aplikaci. V následující sekci uvedeme definice, které zohledňují skutečnost, že časový vývoj řešení má počátek v konkrétním konečném čase. Pokud tedy trajektorie vzniklé numerickými schématy popisují časový vývoj tohoto systému, je vhodné je indexovat přirozenými čísly. Naše nové definice také musí reflektovat fakt, že numerická schémata mohou ke konstrukci přibližného řešení na jedné časové hladině využívat již vypočtené hodnoty z předchozích časových hladin.

Při tvorbě numerických schémat pro nehomogenní problém (tedy problém popsaný parciální diferenciální rovnicí s nenulovou pravou stranou) vznikají předpisy, které závisí na aktuální časové hladině. Je tedy potřeba vhodně upravit i chápání příslušných abstraktních modelů, aby se v každém kroku výpočtu vhodně adaptovaly. Těmito modely jsou právě trajektorie a pseudotrajektorie. V první kapitole jsme tyto pojmy chápali jako statické iterace jednoho zobrazení. Nyní je však výhodné v každé iteraci použít jiné zobrazení.

2.1 Kladné stínování

Začneme definicemi základních pojmů. Pro každé $m \in \mathbb{N}_0$ označme $\mathbb{N}_m = \{k; k \in \mathbb{N}_0, k \geq m\}$.

Definice 8. *Nechť $(X, \|.\|)$ je normovaný lineární prostor, $m \in \mathbb{N}_0$ a $\{f_n\}_{n=m}^{\infty}$, $f_n : X \to X$, je posloupnost zobrazení.* Kladnou trajektorií *posloupnosti zobrazení $\{f_n\}_{n=m}^{\infty}$ nazveme posloupnost $\{y_n\}_{n=m}^{\infty} \in X^{\mathbb{N}_m}$ splňující pro každé $n \in \mathbb{N}_m$ předpis*

$$y_{n+1} = f_n(y_n).$$

Definice 9. *Nechť $(X, \|.\|)$ je normovaný lineární prostor, $m \in \mathbb{N}_0$, $\{f_n\}_{n=m}^{\infty}$, $f_n : X \to X$, je posloupnost zobrazení a $\delta > 0$ je libovolné.* Kladnou $\delta-$pseudotrajektorií *posloupnosti zobrazení $\{f_n\}_{n=m}^{\infty}$ nazveme posloupnost $\{x_n\}_{n=m}^{\infty} \in X^{\mathbb{N}_m}$ splňující pro každé $n \in \mathbb{N}_m$ nerovnost*

$$\|f_n(x_n) - x_{n+1}\| \leq \delta.$$

Definice 10. *Nechť $(X, \|.\|)$ je normovaný lineární prostor, $m \in \mathbb{N}_0$ a $\{f_n\}_{n=m}^{\infty}$, $f_n : X \to X$, je posloupnost zobrazení. Řekneme, že posloupnost $\{f_n\}_{n=m}^{\infty}$ má* kladnou stínovací vlastnost, *pokud pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ taková, že pro každou kladnou $\delta-$pseudotrajektorii $\{x_n\}_{n=m}^{\infty} \in X^{\mathbb{N}_m}$ této posloupnosti existuje kladná trajektorie $\{y_n\}_{n=m}^{\infty} \in X^{\mathbb{N}_m}$ taková, že pro každé $n \in \mathbb{N}_m$ platí nerovnost*

$$\|x_n - y_n\| \leq \varepsilon.$$

Tyto definice byly inspirovány články (Bernardes a kol., 2016) a (Ombach, 1993). Pokud bude v další kapitole z kontextu jasné, o jaký typ trajektorie, pseudotrajektorie nebo stínování se jedná, nebudeme přídavné jméno *kladný* uvádět.

2.2 Stínování kladných trajektorií

Důkaz analogie Věty 12 lze v případě kladného stínování provést přímo, není potřeba využívat Větu 7. Tento důkaz zde uvedeme. Nechť spektrum matice $A \in \mathbb{C}^{d\times d}$ leží uvnitř jednotkového kruhu se středem v počátku komplexní roviny a $m \in \mathbb{N}_0$. Vzhledem k našemu cílovému využití budeme důkaz provádět pro konkrétní funkční posloupnost. Uvažujme posloupnost zobrazení $\{f_n\}_{n=m}^{\infty}$ s předpisy

$$f_n(x) = Ax + b_n, \tag{2.1}$$

kde $x \in \mathbb{C}^d$ a $\{b_n\}_{n=m}^{\infty} \in (\mathbb{C}^d)^{\mathbb{N}_m}$ je libovolná posloupnost. Dokážeme, že tato posloupnost zobrazení má kladnou stínovací vlastnost.

Věta 15. *Nechť $A \in \mathbb{C}^{d\times d}$ je taková, že $\varrho(A) < 1$. Potom má posloupnost zobrazení $\{f_n\}_{n=m}^{\infty}$ s předpisy (2.1) kladnou stínovací vlastnost.*

Důkaz. [myšlenka tohoto důkazu pochází z (Ombach, 1993)] Zvolme libovolné $\varepsilon > 0$. Nechť n_0 a η jsou stejné jako v důkazu Věty 11 a konstanta C je dána vztahem

$$C = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\|A^n\|}{\|A^{n_0}\|^n \eta^n}.$$

Potom platí ekvivalence metriky θ a metriky indukované euklidovskou normou (rovněž viz důkaz Věty 11)

$$\forall x,y \in \mathbb{C}^d : \quad \|x - y\| \leq \theta(x,y) \leq C \|x - y\|.$$

Nalezneme nyní $\delta > 0$ tak, že

$$\frac{C\delta}{1 - \eta \|A^{n_0}\|} \leq \varepsilon.$$

Nechť $\{x_n\}_{n=m}^{\infty} \in (\mathbb{C}^d)^{\mathbb{N}_m}$ je libovolná kladná $\delta-$pseudotrajektorie. Zvolme libovolné $y_m \in \mathbb{C}^d$ vyhovující nerovnosti

$$\|x_m - y_m\| \leq \delta.$$

Pak díky ekvivalenci metrik platí nerovnost $\theta(x_m,y_m) \leq C\delta$. Sestrojme nyní kladnou trajektorii $\{y_n\}_{n=m}^{\infty} \in X^{\mathbb{N}_m}$ s počáteční hodnotou y_m. Z trojúhelníkové nerovnosti a Věty 11 potom plyne

$$\begin{aligned}
&\theta(x_{m+1},y_{m+1}) = \theta(x_{m+1},f_m(y_m)) \leq \theta(x_{m+1},f_m(x_m)) + \theta(f_m(x_m),f_m(y_m)) = \\
&= \theta(x_{m+1},f_m(x_m)) + \theta(Ax + b_m,Ay_m + b_m) = \theta(x_{m+1},f_m(x_m)) + \theta(Ax_m,Ay_m) \leq \\
&\leq C\delta + \eta \|A^{n_0}\| \theta(x_m,y_m) \leq C\delta + C\delta\eta \|A^{n_0}\|,
\end{aligned}$$

kde ve třetí rovnosti byla využita translační invariance metriky θ. Podobně pomocí indukce obdržíme pro každé $l \in \mathbb{N}_m$ nerovnost

$$\theta(x_l,y_l) \leq \delta C \sum_{j=0}^{l-m} \eta^j \|A^{n_0}\|^j \leq \delta C \sum_{j=0}^{\infty} \eta^j \|A^{n_0}\|^j = \frac{C\delta}{1 - \eta \|A^{n_0}\|} \leq \varepsilon.$$

Druhá nerovnost platí, jelikož sčítáme kladná čísla. Poslední rovnost je důsledkem známého vzorce pro součet geometrické řady (stále platí $\eta \|A^{n_0}\| < 1$). Kladná stínovací vlastnost potom plyne z ekvivalence metrik.

□

Poznamenejme, že předchozí důkaz dává návod, jak přesnou kladnou trajektorii stínující danou kladnou pseudotrajektorii nalézt.

Podobně jako v teorii stínování pro lineární zobrazení platí následující věta.

Věta 16. *Nechť $A \in \mathbb{C}^{d\times d}$. Pokud existuje vlastní číslo λ matice A takové, že $|\lambda| = 1$, potom posloupnost zobrazení $\{f_n\}_{n=m}^{\infty}$ s předpisy (2.1) nemá kladnou stínovací vlastnost.*

Než tuto větu dokážeme, uveďme následující lemma.

Lemma 17. *Nechť $(X, \|.\|_1)$ a $(Y, \|.\|_2)$ jsou normované lineární prostory a $f : X \to X$ a $g : Y \to Y$ jsou topologicky konjugovaná zobrazení skrze homeomorfismus $h : X \to Y$. Dále předpokládejme, že h i h^{-1} jsou lipschitzovsky spojitá zobrazení. Potom má f kladnou stínovací vlastnost právě tehdy, když tuto vlastnost má g.*

Důkaz. Identický s důkazem Lemmatu 3.

□

Důkaz. [Důkaz Věty 16] Myšlenka tohoto důkazu je stejná jako v důkazu Věty 14. Dle Lemmat 13 a 17 můžeme bez újmy na obecnosti předpokládat matici A v Jordanově kanonickém tvaru $J \oplus R$, kde

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda \end{pmatrix}$$

je Jordanův blok odpovídající vlastnímu číslu λ a R je podmatice obsahující zbylé Jordanovy bloky. Označme rozměr matice J jako r.

Nyní zvolíme libovolné $\delta > 0$ a sestrojíme speciální kladnou $\delta-$pseudotrajektorii $\{x_n\}_{n=m}^{\infty} \in (\mathbb{C}^d)^{\mathbb{N}_m}$. Nejprve sestrojme člen x_m. Prvky $x_{m,1}, \dots, x_{m,r-1}$ zvolíme libovolně, $x_{m,r} = \delta$ a $x_{m,r+1}, \dots, x_{m,d}$ položíme rovny nule. Pro každé $k \in \mathbb{N}$ potom definujeme

$$x_{m+k,i} = \lambda x_{m+k-1,i} + x_{m+k-1,i+1} + b_{m+k-1,i}, \;\; i = 1, 2, \dots, r-1.$$

Dále položíme

$$x_{m+k,r} = (k+1)\delta\lambda^k + \sum_{i=0}^{k-1} \lambda^{k-i-1} b_{m+i,r}$$

a

$$\begin{pmatrix} x_{m+k,r+1} \\ \vdots \\ x_{m+k,d} \end{pmatrix} = \sum_{i=0}^{k-1} R^{k-1-i} \begin{pmatrix} b_{m+i,r+1} \\ \vdots \\ b_{m+i,d} \end{pmatrix}.$$

Pro takto sestrojenou kladnou pseudotrajektorii platí následující rovnost

$$Ax_{m+k} + b_{m+k} = \begin{pmatrix} \lambda x_{m+k,1} + x_{m+k,2} + b_{m+k,1} \\ \vdots \\ \lambda x_{m+k,i} + x_{m+k,i+1} + b_{m+k,i} \\ \vdots \\ (k+1)\delta\lambda^{k+1} + \sum_{i=0}^{k-1} \lambda^{k-i} b_{m+i,r} + b_{m+k,r} \\ z_{m+k+1} \end{pmatrix},$$

kde

$$z_{m+k+1} = \sum_{i=0}^{k-1} R^{k-i} \begin{pmatrix} b_{m+i,r+1} \\ \vdots \\ b_{m+i,d} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{m+k,r+1} \\ \vdots \\ b_{m+k,d} \end{pmatrix}.$$

Užitím výše uvedených definičních vztahů dostáváme

$$Ax_{m+k} + b_{m+k} = \begin{pmatrix} x_{m+k+1,1} \\ \vdots \\ x_{m+k+1,r-1} \\ -\delta\lambda^{k+1} + x_{m+k+1,r} \\ x_{m+k+1,r+1} \\ \vdots \\ x_{m+k+1,d} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -\delta\lambda^{k+1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + x_{m+k+1}.$$

Z této rovnosti a předpokladu $|\lambda| = 1$ již snadno plyne následující rovnost

$$\forall k \in \mathbb{N}_0 : \ \|f_{m+k}(x_{m+k}) - x_{m+k+1}\| = \left|-\delta\lambda^{k+1}\right| = \delta.$$

Ověřili jsme tak, že posloupnost $\{x_n\}_{n=m}^{\infty}$ je kladnou $\delta-$pseudotrajektorií. Nyní ukážeme, že neexistuje přesná kladná trajektorie, která by tuto kladnou pseudotrajektorii stínovala. Zvolme $y_m \in \mathbb{C}^d$ libovolné, tím dostáváme kladnou trajektorii $\{y_{m+k}\}_{k=0}^{\infty}$ danou předpisy $y_{m+k+1} = Ay_{m+k} + b_{m+k}$. Rozepsáním těchto rovností zjistíme, že

$$y_{m+k,r} = \lambda^k y_{m,r} + \sum_{i=0}^{k-1} \lambda^{k-1-i} b_{m+i,r}.$$

Potom platí odhad

$$\begin{aligned} \forall k \in \mathbb{N}_0 : \ & \|x_{m+k} - y_{m+k}\| \geq |x_{m+k,r} - y_{m+k,r}| = \\ = & \left|(k+1)\delta\lambda^k + \sum_{i=0}^{k-1} \lambda^{k-i-1} b_{m+i,r} - \lambda^k y_{m,r} - \sum_{i=0}^{k-1} \lambda^{k-1-i} b_{m+i,r}\right| = \\ = & \left|(k+1)\delta - y_{m,r}\right|. \end{aligned}$$

Protože člen na pravé straně nerovnosti pro k jdoucí do nekonečna roste nade všechny meze, bude pro libovolné $\varepsilon > 0$ vždy existovat $\tilde{k} \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\forall k \in \mathbb{N}, k \geq \tilde{k} : \ \|x_{m+k} - y_{m+k}\| > \varepsilon.$$

Posloupnost zobrazení $\{f_n\}_{n=m}^{\infty}$ s předpisy (2.1) proto nemá kladnou stínovací vlastnost.

□

2.3 Zobecněné stínování

V případě $N-$krokových schémat budou jednotlivé členy trajektorií záviset na předchozích N prvcích trajektorií. V následujícím zobecníme již definované pojmy na tento případ.

Nechť je dán normovaný lineární prostor $(X, \|.\|)$, $N \in \mathbb{N}$ a posloupnost zobrazení $\{\varphi_n\}_{n=N-1}^{\infty}$, $\varphi_n : X^N \to X$. Nyní můžeme přejít k zobecnění pojmů kladné trajektorie a kladné pseudotrajektorie.

Definice 11. Zobecněnou kladnou trajektorií *posloupnosti* $\{\varphi_n\}_{n=N-1}^{\infty}$ *se nazývá posloupnost* $\{x_n\}_{n=0}^{\infty} \in X^{\mathbb{N}_0}$ *taková, že*

$$\forall n \in \mathbb{N}_{N-1}: \quad x_{n+1} = \varphi_n(x_{n-N+1}, \dots, x_n). \tag{2.2}$$

Nechť $\delta > 0$. Zobecněnou kladnou $\delta-$pseudotrajektorií *posloupnosti* $\{\varphi_n\}_{n=N-1}^{\infty}$ *se nazývá posloupnost* $\{x_n\}_{n=0}^{\infty} \in X^{\mathbb{N}_0}$ *taková, že*

$$\forall n \in \mathbb{N}_{N-1}: \quad \|\varphi_n(x_{n-N+1}, \dots, x_n) - x_{n+1}\| \leq \delta. \tag{2.3}$$

V obou případech se předpokládají předem známé hodnoty $x_0, x_1, \dots, x_{N-1} \in X$.

Množinu X^N nyní vybavme normou $\|.\|_{\oplus}$ (v této kapitole budeme normu na součinu normovaných lineárních prostorů značit pomocí indexu $\oplus$, v následující kapitole budeme tento symbol vynechávat, pokud bude z kontextu jasné, na jakém prostoru normu uvažujeme) definovanou vztahem

$$\forall (x_1, \dots, x_N)^T \in X^N: \ \left\|(x_1, \dots, x_N)^T\right\|_{\oplus} = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} \|x_i\|^2}. \tag{2.4}$$

Prvky množiny X^N budeme chápat jako vektory s N složkami. Základní výsledek teorie normovaných lineárních prostorů říká, že $(X^N, \|.\|_{\oplus})$ je rovněž normovaným lineárním prostorem (Netuka, 2014). K účelům této sekce zaveďme následující značení. Nechť $\{x_n\}_{n=0}^{\infty} \in X^{\mathbb{N}_0}$, potom

$$U_n = (x_{n-N+1}, \dots, x_n)^T \tag{2.5}$$

pro každé číslo $n \in \mathbb{N}_{N-1}$. Dále definujme posloupnost zobrazení $\{\Phi_n\}_{n=N-1}^{\infty}$, $\Phi_n : X^N \to X^N$ předpisem

$$\Phi_n(y_1, y_2, \dots, y_N) = (y_2, y_3, \dots, \varphi_n(y_1, \dots, y_N))^T. \tag{2.6}$$

Tvar tohoto zobrazení popisuje standardní postup pro přechod od vícekrokových numerických metod k jednokrokovým (viz následující kapitola).

Lemma 18. *Pokud je posloupnost* $\{x_n\}_{n=0}^{\infty} \in X^{\mathbb{N}_0}$ *zobecněnou kladnou trajektorií* $\{\varphi_n\}_{n=N-1}^{\infty}$, *potom posloupnost* $\{U_n\}_{n=N-1}^{\infty}$ *je kladná trajektorie posloupnosti* $\{\Phi_n\}_{n=N-1}^{\infty}$ *v klasickém smyslu.*

Důkaz. Důkaz se provede přímým dosazením do Φ_n. Pro všechna $n \geq N-1$ platí $\Phi_n(U_n) = (x_{n-N+2}, \dots, \varphi_n(x_{n-N+1}, \dots, x_n))^T = (x_{n-N+2}, \dots, x_{n+1})^T = U_{n+1}$. □

V následujícím lemmatu zformulujeme vztah mezi zobecněnou kladnou pseudotrajektorií a kladnou pseudotrajektorií.

Lemma 19. *Nechť $\delta > 0$. Posloupnost $\{x_n\}_{n=0}^{\infty} \in X^{\mathbb{N}_0}$ je zobecněnou kladnou $\delta-$pseudotrajektorií posloupnosti $\{\varphi_n\}_{n=N-1}^{\infty}$ právě tehdy, když posloupnost $\{U_n\}_{n=N-1}^{\infty}$ sestavená dle schématu (2.5) je kladná $\delta-$pseudotrajektorie posloupnosti $\{\Phi_n\}_{n=N-1}^{\infty}$ definované vztahem (2.6).*

Důkaz. Z definice $\{\Phi_n\}_{n=N-1}^{\infty}$ a $\{U_n\}_{n=N-1}^{\infty}$ plyne, že pro každé $n \in \mathbb{N}_{N-1}$

$$\|\Phi_n(U_n) - U_{n+1}\|_{\oplus} = \left\| \begin{pmatrix} x_{n-N+2} \\ \vdots \\ \varphi_n(x_{n-N+1}, \dots, x_n) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_{n-N+2} \\ \vdots \\ x_{n+1} \end{pmatrix} \right\|_{\oplus} =$$

$$= \left\| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ x_{n+1} - \varphi_n(x_{n-N+1}, \dots, x_n) \end{pmatrix} \right\|_{\oplus} = \|\varphi_n(x_{n-N+1}, \dots, x_n) - x_{n+1}\| .$$

Z toho okamžitě plyne dokazovaná ekvivalence.

□

Následuje definice zobecněné stínovací vlastnosti.

Definice 12. *Řekneme, že posloupnost zobrazení $\{\varphi_n\}_{n=N-1}^{\infty}$, $\varphi_n : X^N \to X$, má* zobecněnou kladnou stínovací vlastnost, *pokud pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že pro každou zobecněnou kladnou $\delta-$pseudotrajektorii $\{x_n\}_{n=0}^{\infty} \in X^{\mathbb{N}_0}$ existuje zobecněná kladná trajektorie $\{y_n\}_{n=0}^{\infty} \in X^{\mathbb{N}_0}$ posloupnosti zobrazení $\{\varphi_n\}_{n=N-1}^{\infty}$ taková, že*

$$\forall n \in \mathbb{N}_0 : \ \ \|y_n - x_n\| \leq \varepsilon.$$

Následující lemma dává do souvislosti zobecněnou kladnou stínovací vlastnost s kladnou stínovací vlastností v klasickém smyslu.

Lemma 20. *Pokud má posloupnost $\{\Phi_n\}_{n=N-1}^{\infty}$ definovaná vztahem (2.6) kladnou stínovací vlastnost, potom má posloupnost $\{\varphi_n\}_{n=N-1}^{\infty}$ zobecněnou kladnou stínovací vlastnost.*

Důkaz. Nejprve připomeňme, co znamená, že $\{\Phi_n\}_{n=N-1}^{\infty}$ má kladnou stínovací vlastnost. Nechť je dáno $\varepsilon > 0$, k němu podle předpokladu nalezneme $\delta > 0$ tak, že pro každou kladnou $\delta-$pseudotrajektorii $\{U_n\}_{n=N-1}^{\infty}$, $U_n \in X^N$, existuje přesná kladná trajektorie $\{V_n\}_{n=N-1}^{\infty}$, $V_n \in X^N$ taková, že pro každé $n \in \mathbb{N}_{N-1}$ platí nerovnost $\|U_n - V_n\|_{\oplus} \leq \varepsilon$.

Zvolme zobecněnou kladnou $\delta-$pseudotrajektorii $\{x_n\}_{n=0}^{\infty} \in X^{\mathbb{N}_0}$ posloupnosti $\{\varphi_n\}_{n=N-1}^{\infty}$. Potom z Lemmatu 19 plyne, že posloupnost $\{U_n\}_{n=N-1}^{\infty}$ definovaná vztahem (2.5) je kladnou $\delta-$pseudotrajektorií systému $\{\Phi_n\}_{n=N-1}^{\infty}$. Potom existuje kladná trajektorie $\{V_n\}_{n=N-1}^{\infty}$, $V_n \in X^N$, splňující výše uvedenou nerovnost. Rozepsáním rovnosti $V_{n+1} = \Phi_n(V_n)$ dostaneme

$$(V_{n+1,1}, V_{n+1,2}, \dots, V_{n+1,N})^T = (V_{n,2}, V_{n,3}, \dots, V_{n,N-1}, \varphi_n(V_{n,1}, \dots, V_{n,N}))^T .$$

Porovnáním složek získáme rovnosti

$$V_{n+1,1} = V_{n,2}, V_{n+1,2} = V_{n,3}, \dots, V_{n+1,N} = \varphi_n(V_{n,1}, \dots, V_{n,N}) .$$

Nyní definujme posloupnost $\{y_n\}_{n=0}^{\infty} \in X^{\mathbb{N}_0}$ takto:

$$
\begin{aligned}
&y_0 = V_{N-1,1}, y_1 = V_{N-1,2}, \dots, y_{N-1} = V_{N-1,N} \\
&\forall n \in \mathbb{N}_0, n \geq N : \quad y_n = V_{n,N}.
\end{aligned}
$$

Jelikož pro každé celé číslo $n \geq N-1$ platí nerovnosti

$$
\varepsilon \geq \left\| U_n - V_n \right\|_{\oplus} = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} \left\| x_{n-N+i} - V_{n,i} \right\|^2} \geq \left\| x_n - V_{n,N} \right\| = \left\| x_n - y_n \right\|,
$$

je posloupnost $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ hledanou zobecněnou kladnou trajektorií stínující zobecněnou kladnou pseudotrajektorii $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$.

□

V následující kapitole budeme studovat stínování trajektorií získaných pomocí explicitních numerických schémat, která jsou ve tvaru (2.2). Lemmata 19 a 20 nám umožňují vyšetřovat zobecněné pseudotrajektorie metodami klasické teorie stínování aplikované na konkrétní realizaci systému $\{\Phi_n\}_{n=N-1}^{\infty}$.

3. Aplikace stínování v metodách pro numerické řešení parciálních diferenciálních rovnic

Tato kapitola je zaměřena na aplikaci teorie stínování, která byla náplní předchozích dvou kapitol. Náš postup bude nejprve motivován konkrétním příkladem. Jako vhodný problém nám poslouží Dufortovo-Frankelovo schéma pro úlohu jednorozměrného vedení tepla.

V další sekci budou uvedeny obecné poznámky k vyšetřování zobecněné kladné stínovací vlastnosti v případě obecné diskretizace smíšené úlohy (úlohy zahrnující jak okrajové, tak počáteční podmínky) pro lineární evoluční parciální diferenciální rovnici na prostoročasové oblasti $\Omega = (0,1) \times \mathbb{R}^+$ pomocí metody konečných diferencí.

Přesná řešení vícekrokových numerických schémat můžeme chápat jako jejich zobecněné kladné trajektorie. V takovém případě má potom smysl na tato schémata aplikovat poznatky z předchozí kapitoly.

3.1 Stínování Dufortova-Frankelova schématu

Celou kapitolu uveďme příkladem aplikace teorie stínování. Provedeme analýzu Dufortova-Frankelova schématu pro rovnici jednorozměrného vedení tepla, tedy pro úlohu s cílem nalézt $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$, $\Omega = (0,1) \times \mathbb{R}^+$, vyhovující podmínkám

$$\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f \text{ v } \Omega \\ &u(x,0) = u^0(x), x \in \langle 0,1 \rangle, \\ &u(0,t) = u(1,t) = 0, t \in \mathbb{R}^+, \end{aligned} \tag{3.1}$$

kde $f : \Omega \to \mathbb{R}$ je daná funkce a $u^0 : \langle 0,1 \rangle \to \mathbb{R}$ je daná počáteční podmínka kompatibilní s okrajovými podmínkami. Více o úloze vedení tepla je k dispozici například v (Evans, 2010) nebo (Morton a Mayers, 2005).

3.1.1 Přesné řešení úlohy (3.1)

Specifikujme nejprve funkci u^0. Předpokládejme, že se jedná o funkci, kterou lze rozvinout do sinové Fourierovy řady

$$u^0(x) = \sum_{m=1}^{\infty} a_m \sin(\pi m x),$$

kde pro každé $m \in \mathbb{N}$ platí

$$a_m = 2 \int_0^1 u^0(x) \sin(\pi m x) \mathrm{d}x.$$

Dále budeme uvažovat jenom takové funkce u^0, pro které je

$$\sum_{m=1}^{\infty} |a_m| < \infty.$$

Obecné řešení úlohy (3.1) s identicky nulovou pravou stranou lze nalézt metodou separace proměnných. Toto řešení má tvar (Morton a Mayers, 2005)

$$u(x,t) = \sum_{m=1}^{\infty} a_m e^{-m^2\pi^2 t} \sin(\pi m x). \tag{3.2}$$

3.1.2 Dufortovo-Frankelovo schéma

Pro numerické výpočty není vzorec (3.2) příliš vhodný (například bychom museli počítat Fourierovy koeficienty, více viz (Morton a Mayers, 2005)). Přesné řešení úlohy (3.1) však můžeme aproximovat pomocí metody konečných diferencí (Morton a Mayers, 2005).

Nejprve provedeme diskretizaci uzávěru prostoročasového válce $\overline{\Omega} = \langle 0,1 \rangle \times \mathbb{R}_0^+$, na kterém naší úlohu uvažujeme. Prostorový interval $\langle 0,1 \rangle$ rozdělme na J částí o stejné délce $h = \frac{1}{J}$ (tzv. prostorový diskretizační krok). Dále zvolme $\tau > 0$ (tzv. časový diskretizační krok). Uzávěr $\overline{\Omega}$ tak pokryjeme dvourozměrnou diskretizační sítí, jejíž uzly budou mít tvar $(jh,n\tau)$, kde $j \in \{0,1,\ldots,J\}$ a $n \in \mathbb{N}_0$.

Parciální derivace se potom aproximují diferenčními podíly. Tím původní spojitá rovnice získá diskrétní tvar, ze kterého lze počítat aproximace hodnot přesného řešení v uzlech sítě na určité časové hladině pomocí přibližných hodnot z předchozích časových hladin. Hodnoty $u(jh,n\tau)$ přesného řešení v uzlu $(jh,n\tau)$ aproximujeme hodnotami, které budeme značit U_j^n. Hodnoty aproximace řešení v hraničních uzlech určíme přímo pomocí počátečních a okrajových podmínek.

Konkrétních tvarů schémat pro jednu rovnici je více. My budeme pracovat s dvoukrokovým explicitním Dufortovým-Frankelovým schématem. Připomeňme, že schéma se nazve dvoukrokové, pokud k výpočtu přibližných hodnot řešení na jedné časové hladině využívá (již vypočtené nebo zadané) hodnoty na předchozích dvou časových hladinách. Schéma se nazve explicitní, pokud každou hodnotu aproximace řešení na jedné časové hladině lze nezávisle na ostatních hodnotách na této hladině vypočítat pomocí hodnot z předchozích časových hladin. Odvození Dufortova-Frankelova schématu bude provedeno v Příloze A.1, zde však uvedeme pouze výsledek (Yang a Ralescu, 2021)(Morton a Mayers, 2005)

$$U_j^{n+1} = \frac{\nu}{1+\nu}\left(U_{j+1}^n + U_{j-1}^n\right) + \frac{1-\nu}{1+\nu} U_j^{n-1} + \frac{2\tau}{1+\nu} f_j^n, \tag{3.3}$$

kde $j \in \{1,2,\ldots,J-1\}$, $n \in \mathbb{N}$, $f_j^n = f(jh,n\tau)$ a $\nu = \frac{2\tau}{h^2} > 0$. Volbu parametru ν budeme dále specifikovat. Zaveďme následující značení

$$U^n = \begin{pmatrix} U_1^n \\ \vdots \\ U_{J-1}^n \end{pmatrix},$$

přičemž vektor U^0 je dán počáteční podmínkou. V našich úvahách budeme pro jednoduchost uvažovat, že známe také hodnoty na první časové hladině, tedy vektor U^1. Schéma lze pomocí tohoto značení zapsat v maticovém tvaru

$$U^{n+1} = \frac{\nu}{1+\nu} A U^n + \frac{1-\nu}{1+\nu} I U^{n-1} + F^n, \tag{3.4}$$

kde

$$F^n = \frac{2\tau}{1+\nu} \begin{pmatrix} f_1^n \\ f_2^n \\ \vdots \\ f_{J-1}^n \end{pmatrix},$$

matice $A \in \mathbb{R}^{(J-1)\times(J-1)}$ má tento tvar

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

a $I \in \mathbb{R}^{(J-1)\times(J-1)}$ je jednotková matice.

Pro Dufortovo-Frankelovo schéma přepsané do maticového tvaru (3.4) má smysl uvažovat pojmy, jako je zobecněná kladná trajektorie, zobecněná kladná pseudotrajektorie, popřípadě zobecněná kladná stínovací vlastnost ve smyslu definic ze Sekce 2.3. V této sekci jsme uvažovali přechod k posloupnosti funkcí $\{\Phi_n\}$. Pro studium zobecněné kladné stínovací vlastnosti zobrazení (3.4) je tedy potřeba zavést konkrétní realizaci této posloupnosti. Definujme proto posloupnost zobrazení $\Psi_n : \mathbb{R}^{2J-2} \to \mathbb{R}^{2J-2}$ daných pro každé $n \in \mathbb{N}$ předpisem

$$\forall x \in \mathbb{R}^{2J-2} : \quad \Psi_n(x) = \Psi x + \begin{pmatrix} 0_{J-1} \\ F^n \end{pmatrix}, \tag{3.5}$$

kde 0_{J-1} značí sloupcový nulový vektor s $J-1$ složkami a Ψ je bloková matice mající tvar

$$\Psi = \begin{pmatrix} O & I \\ \frac{1-\nu}{1+\nu} I & \frac{\nu}{1+\nu} A \end{pmatrix}, \tag{3.6}$$

kde O, resp. I značí nulový blok řádu $J-1$, resp. jednotkovou matici řádu $J-1$. Numerické schéma (3.3) získá potom podobu

$$\begin{pmatrix} U^n \\ U^{n+1} \end{pmatrix} = \Psi_n \left(\begin{pmatrix} U^{n-1} \\ U^n \end{pmatrix} \right), \tag{3.7}$$

kde $n \in \mathbb{N}$. Výše popsaná metoda představuje standardní postup při přechodu od vícekrokových schémat k jednokrokovým (Strikwerda, 2004).

3.1.3 Spektrum matice Ψ

Jak bylo ukázáno v předchozích kapitolách, pro studium chování posloupnosti zobrazení (3.5) je potřeba znát spektrum matice Ψ. To nalezneme pomocí přesného řešení problému (3.3) pro homogenní úlohu (3.1) (tedy za předpokladu, že

f je identicky rovno nule). Hodnoty přesného řešení v uzlech diskretizační sítě jsou dle rovnosti (3.2) dány vztahem

$$u(jh,n\tau) = \sum_{m=1}^{\infty} a_m \left(e^{-m^2\pi^2\tau}\right)^n \sin(\pi mjh).$$

Snadným výpočtem se ukáže, že funkce $u_m(x,t) = e^{-m^2\pi^2 t}\sin(\pi mx)$, $m \in \mathbb{N}$, splňují parciální diferenciální rovnici v úloze (3.1). Tyto vzorce nás vedou k myšlence hledat řešení diferenční rovnice (3.3) s nulovým posledním členem na pravé straně ve tvaru $U_j^n = (\lambda(m))^n\sin(\pi mjh)$ pro vhodné λ (Morton a Mayers, 2005). Pokud tento vztah dosadíme do (3.3), úpravou (a aplikací známé goniometrické identity $\sin(x+y)+\sin(x-y) = 2\sin(x)\cos(y)$) dostaneme kvadratickou rovnici

$$(\lambda(m))^2 = \frac{2\nu}{1+\nu}\cos(\pi mh)\lambda(m) + \frac{1-\nu}{1+\nu},$$

jejíž řešení jsou

$$\lambda_\pm(m) = \frac{\nu}{1+\nu}\cos(\pi mh) \pm \sqrt{\frac{\nu^2\cos^2(\pi mh)+1-\nu^2}{(1+\nu)^2}}. \tag{3.8}$$

Jednotlivá řešení diferenční rovnice (3.4) s $F^n = 0$ pro každé $n \in \mathbb{N}$ se tedy mohou napsat takto

$$U^n(m) = (\lambda(m))^n \begin{pmatrix} \sin(\pi mh) \\ \sin(2\pi mh) \\ \vdots \\ \sin((J-1)\pi mh) \end{pmatrix},$$

kde $m \in \mathbb{Z}$. Potom ze vztahu (3.7) plyne

$$\Psi \begin{pmatrix} U^{n-1}(m) \\ U^n(m) \end{pmatrix} = \lambda(m) \begin{pmatrix} U^{n-1}(m) \\ U^n(m) \end{pmatrix}. \tag{3.9}$$

Z této rovnosti vyplývá, že vektor na pravé straně je vlastním vektorem matice Ψ a číslo $\lambda(m)$ je její vlastní číslo příslušející tomuto vlastnímu vektoru. Dále je zřejmé, že m se nesmí rovnat celočíselným násobkům J, neboť uvažujeme pouze nenulové vlastní vektory. Zatím však nevíme, jestli lze tímto způsobem generovat kompletní spektrum matice Ψ.

Z vlastností funkce kosinus plyne, že stačí uvažovat pouze $m = 1, 2, \ldots, J-1$. Předpokládejme, že pro všechny tyto hodnoty m je

$$\nu \neq \frac{1}{\sin(m\pi h)}.$$

Potom bude diskriminant v (3.8) nenulový. Nalezněme nyní množiny $K_\nu, Z_\nu \subseteq \{1, 2, \ldots, J-1\}$ takové, že

$$\nu^2\cos^2(\pi mh) + 1 - \nu^2 < 0$$

pro každé $m \in Z_\nu$ a

$$\nu^2\cos^2(\pi mh) + 1 - \nu^2 > 0$$

pro každé $m \in K_\nu$. Potom díky (3.12) platí $Z_\nu \cup K_\nu = \{1, 2, \ldots, J-1\}$ a $Z_\nu \cap K_\nu = \emptyset$. Pokud je $Z_\nu \neq \emptyset$, úpravou předchozích vztahů se snadno nahlédne

$$\forall m \in Z_\nu : \nu > \frac{1}{\sin(m\pi h)} > 1.$$

Pokud tedy $m \in Z_\nu$, potom

$$\lambda_\pm(m) = \frac{\nu}{1+\nu}\cos(\pi m h) \pm i\sqrt{-\frac{\nu^2\cos^2(\pi m h) + 1 - \nu^2}{(1+\nu)^2}}$$

a jejich absolutní hodnoty jsou

$$|\lambda_\pm(m)| = \sqrt{\frac{\nu - 1}{1+\nu}} < 1.$$

Pro případ, kdy $K_\nu \neq \emptyset$ a $m \in K_\nu$, zaveďme pomocné funkce

$$\begin{aligned} g_1(x) &= \frac{\nu}{1+\nu}x + \sqrt{\frac{\nu^2x^2 + 1 - \nu^2}{(1+\nu)^2}}, \\ g_2(x) &= \frac{\nu}{1+\nu}x - \sqrt{\frac{\nu^2x^2 + 1 - \nu^2}{(1+\nu)^2}} \end{aligned} \tag{3.10}$$

pro $x \in (-1{,}1)$. V následujícím lemmatu prostudujeme průběhy těchto funkcí.

Lemma 21. *Pro $\nu < 1$ jsou funkce g_1 a g_2 na intervalu $(-1{,}1)$ spojité prosté a platí, že $g_1((-1{,}1)) \cap g_2((-1{,}1)) = \emptyset$. Pro $\nu > 1$ jsou tyto funkce rovněž spojité prosté na intervalech $\left(-1, -\sqrt{1 - 1/\nu^2}\right)$ a $\left(\sqrt{1 - 1/\nu^2}{,}1\right)$ a*

$$\bigcap_{i=1}^{2} g_i\left(\left(-1, -\sqrt{1-1/\nu^2}\right) \cup \left(\sqrt{1-1/\nu^2}{,}1\right)\right) = \emptyset. \tag{3.11}$$

Navíc pro všechna ν platí, že $|g_{1,2}(\pm 1)| \leq 1$.

Důkaz. Nejprve rozebereme případ, kdy $\nu < 1$. Spojitost obou funkcí je zřejmá. Dále platí, že

$$g'_{1,2}(x) = \frac{\nu}{1+\nu} \pm \frac{\nu^2 x}{1+\nu}\sqrt{\frac{1}{\nu^2x^2 - \nu^2 + 1}}.$$

Snadnou manipulací se dá ukázat, že $g'_{1,2} > 0$ na intervalu $(-1{,}1)$ pro všechny hodnoty $\nu \in (0{,}1)$. Funkce jsou ostře rostoucí, tedy jsou prosté. Protože $g_1(1) = 1$, $g_1(-1) = \frac{1-\nu}{1+\nu} < 1$, $g_2(1) = \frac{\nu-1}{1+\nu} \in (-1{,}0)$ a $g_2(-1) = -1$, snadno nahlédneme, že $g_1((-1{,}1)) \cap g_2((-1{,}1)) = \emptyset$.

Nyní budeme diskutovat případ, kdy $\nu > 1$. Spojitost na jednotlivých intervalech ze znění lemmatu je zřejmá. Pomocí výše uvedených derivací se snadnou manipulací opět ukáže, že g_1 je ostře klesající na intervalu $\left(-1, -\sqrt{1-1/\nu^2}\right)$ a ostře rostoucí na intervalu $\left(\sqrt{1-1/\nu^2}{,}1\right)$. U funkce g_2 to platí obráceně. Funkce jsou proto na těchto intervalech prosté. Navíc platí, že

$$g_1(-\sqrt{1-1/\nu^2}) = g_2(-\sqrt{1-1/\nu^2})$$

a

$$g_1(\sqrt{1-1/\nu^2}) = g_2(\sqrt{1-1/\nu^2}).$$

Z monotonie obou funkcí potom plyne rovnost (3.11).

□

Kdyby $\nu = 1$, nebyly by funkce $g_{1,2}$ prosté a výše uvedené obrazy by měly neprázdné průniky. Budeme proto pro jednoduchost uvažovat, že

$$\nu \notin \left\{ \frac{1}{\sin(m\pi h)}; m = 1,2,\ldots,J-1 \right\} \cup \{1\}. \tag{3.12}$$

Jelikož $\lambda_+(m) = g_1(\cos(m\pi h))$ a $\lambda_-(m) = g_2(\cos(m\pi h))$, dle Lemmatu 21 jsou hodnoty $|\lambda_\pm(m)|$ pro každé přirozené číslo m různé od celočíselného násobku J ostře menší než 1. Nyní máme vše připravené k formulaci věty o spektru matice Ψ.

Věta 22. *Spektrum $\sigma(\Psi)$ matice Ψ dané vztahem (3.6) je pro libovolné $\nu \in (0,\infty)$ splňující (3.12) rovno*

$$\sigma(\Psi) = \{\lambda_+(m); m = 1,2,\ldots,J-1\} \cup \{\lambda_-(m); m = 1,2,\ldots,J-1\}, \tag{3.13}$$

kde čísla $\lambda_\pm(m)$ jsou dány vztahy (3.8). Dále platí, že spektrum leží uvnitř jednotkové kružnice umístěné v počátku komplexní roviny (matice Ψ je tedy hyperbolická).

Důkaz. Druhou část tvrzení jsme již dokázali. Zbývá jen ověřit rovnost (3.13). Inkluze $\supseteq$ je zřejmá ze vztahu (3.9). K důkazu celé věty proto stačí ukázat pouze obrácenou inkluzi. Rozebereme opět dva případy.

Pokud leží m v množině Z_ν, mají čísla $\lambda_\pm(m)$ nenulové imaginární části. Jelikož je funkce kosinus prostá na intervalu $(0,\pi)$, liší se pro různá m reálné části čísel $\lambda_+(m)$. Stejné pozorování platí v případě reálných částí čísel $\lambda_-(m)$. Pro jednotlivá $m \in Z_\nu$ tvoří dvojice $\lambda_+(m)$ a $\lambda_-(m)$ komplexně sdružené páry. Počet různých hodnot, kterých mohou nabývat čísla $\lambda_+(m)$ a $\lambda_-(m)$, je tudíž roven mohutnosti množiny Z_ν.

Jestliže $m \in K_\nu$, odpovídá tento případ situaci s pomocnými funkcemi g_1 a g_2. Jak bylo řečeno v Lemmatu 21, jsou tyto funkce prosté a obrazy množiny $\left(-1, -\sqrt{1-1/\nu^2}\right) \cup \left(\sqrt{1-1/\nu^2}, 1\right)$ (kam náleží také hodnoty $\cos(m\pi h)$) jsou disjunktní (viz rovnost (3.11)). Počet různých hodnot, kterých mohou nabývat čísla $\lambda_+(m)$ a $\lambda_-(m)$, je roven mohutnosti množiny K_ν.

Dohromady platí, že mohutnost množiny

$$\{\lambda_+(m); m = 1,2,\ldots,J-1\} \cup \{\lambda_-(m); m = 1,2,\ldots,J-1\}$$

je rovna $2J-2$. Podle známého tvrzení z lineární algebry má matice Ψ (chápaná jako matice nad $\mathbb{C}$) právě $2J-2$ vlastních čísel včetně algebraických násobností. Vzhledem k rovnosti (3.9) tak musí platit (3.13).

□

3.1.4 Dufortovo-Frankelovo schéma má zobecněnou kladnou stínovací vlastnost

Naše úsilí můžeme shrnout do následující věty

Věta 23. *Posloupnost zobrazení $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$, která jsou dána předpisy*

$$\varphi_n(x,y) = \frac{\nu}{1+\nu}Ay + \frac{1-\nu}{1+\nu}Ix + F^n,$$

má za podmínky (3.12) zobecněnou kladnou stínovací vlastnost.

Důkaz. Věta 22 říká, že $\varrho(\Psi) < 1$. Z Věty 15 tak plyne, že posloupnost (3.5) má kladnou stínovací vlastnost. Potom dle Lemmatu 20 má posloupnost ze znění této věty zobecněnou kladnou stínovací vlastnost.

□

Z tohoto příkladu můžeme učinit závěr, že hodnoty λ nerozhodují pouze o stabilitě Dufortova-Frankelova schématu (Strikwerda, 2004), ale také se pomocí nich dá dokázat, že toto schéma má zobecněnou kladnou stínovací vlastnost.

3.2 Obecné poznámky k vyšetřování stínovací vlastnosti

3.2.1 Obecná úloha

Uvažujme obecnou smíšenou úlohu pro lineární evoluční parciální diferenciální rovnici na oblasti $\Omega = (0,1) \times \mathbb{R}^+$ s homogenními okrajovými podmínkami pro neznámou funkci $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial t} = Lu + f, \text{ v } \Omega \\ &B_b u = 0, \quad \text{na}\{0,1\} \times \mathbb{R}_0, b = 1,2,\dots,K \\ &u(x,0) = u^0(x), x \in (0,1), \end{aligned} \tag{3.14}$$

kde L je lineární diferenciální operátor obsahující parciální derivace podle proměnné x až do řádu r a konstantní koeficienty, B_b jsou lineární diferenciální operátory okrajových podmínek a u^0 a f jsou zadané funkce.

3.2.2 Numerické schéma

Při diskretizaci úlohy pomocí metody konečných diferencí budeme postupovat stejně jako v případě problému vedení tepla. Množinu $\overline{\Omega}$ nejprve pokryjeme diskretizační sítí s prostorovým krokem $h = \frac{1}{J}$, $J \in \mathbb{N}$, a časovým krokem $\tau \in (0,\infty)$. Dále provedeme diskretizaci dané úlohy, přičemž přesné hodnoty řešení v uzlech $(jh,n\tau)$, $j = 0, 1, \dots, J$ a $n \in \mathbb{N}_0$, aproximujeme hodnotami U_j^n. Nyní předpokládejme, že jsme touto diskretizací získali $N-$krokové numerické schéma ve tvaru:

$$U^{n+1} = \sum_{l=1}^{N} A_l U^{n-N+l} + F^n, n \geq N-1, \tag{3.15}$$

kde $U^n = (U_0^n, \ldots, U_J^n)$, U_j^n je aproximace přesného řešení v uzlu $(jh, n\tau)$ a A_l, $l = 1, \ldots, N$, jsou lineární diferenční operátory. Tyto operátory nezávisí na n, neboť předpokládáme, že operátor L nezávisí na čase. Operátory A_l však mohou záviset na pozici jejich aplikace, a to z toho důvodu, že do těchto operátorů zahrneme také diskretizace okrajových podmínek. Rozsah hodnot j a tvar operátorů se potom v blízkosti hranic budou lišit. Pro $j = 0, 1, \ldots, J$ a $l = 1, \ldots, N$ můžeme psát:

$$(A_l U^n)_j = \sum_{k \in \mathcal{O}(j)} a_{jk}^l U_{k+j}^n,$$

kde $\mathcal{O}(j) \subseteq \{-j, -j+1, \ldots, J-j\}$. Vektor $F^n \in \mathbb{R}^{J+1}$ vznikl diskretizací pravé strany rovnice a jsou v něm zahrnuty známé hodnoty řešení určené z okrajových podmínek. Předpokládejme, že známe hodnoty $U^0, U^1, \ldots, U^{N-1}$.

Analogicky jako v případě Dufortova-Frankelova schématu přejdeme ke konkrétní realizaci pomocné posloupnosti zobrazení (2.6) ze druhé kapitoly. V tomto případě budou mít jednotlivá zobrazení tvar

$$\forall n \in \mathbb{N}_{N-1} \ \forall x \in \mathbb{R}^{NJ+N}: \ \ \Psi_n(x) = \Psi x + \tilde{F}^n,$$

kde matice $\Psi \in \mathbb{R}^{(NJ+N)\times(NJ+N)}$ je ve tvaru

$$\Psi = \begin{pmatrix} O & I & O & \ldots & O & O \\ O & O & I & \ldots & O & O \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ O & O & O & \ldots & O & I \\ A_1 & A_2 & A_3 & \ldots & A_{N-1} & A_N \end{pmatrix},$$

kde I je jednotková matice řádu $J+1$ a O je nulová matice řádu $J+1$ a vektor $\tilde{F}^n$ je dán vztahem

$$\tilde{F}^n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ F^n \end{pmatrix},$$

přičemž tento vektor má vhodný rozměr.

Pokud pro každé přirozené číslo $n \geq N-1$ zavedeme označení

$$Z^n = \begin{pmatrix} U^{n-N+1} \\ U^{n-N+2} \\ \vdots \\ U^n \end{pmatrix},$$

získá schéma (3.15) tvar

$$Z^{n+1} = \Psi Z^n + \tilde{F}^n, n \geq N-1.$$

3.2.3 Spektrum matice Ψ

Věta 15 nám opět dává kritérium pro zjištění zobecněné kladné stínovací vlastnosti. Přesněji řečeno, stačí vyšetřit spektrum matice Ψ. Tato matice se nazývá companion matice a studiu spektra této matice se věnuje například článek (Higham a Tisseur, 2003).

Nechť $y \in \mathbb{R}^{NJ+N}$ je vlastní vektor matice Ψ příslušející vlastnímu číslu λ. Tento vektor má následující strukturu

$$y = (y_1, y_2, \dots, y_N)^T,$$

kde $y_1, y_2, \dots, y_N \in \mathbb{R}^{J+1}$. Rozepsáním vztahu $\Psi y = \lambda y$ obdržíme

$$\begin{aligned} y_2 &= \lambda y_1, \\ y_3 &= \lambda y_2, \\ &\vdots \\ y_N &= \lambda y_{N-1}, \\ \sum_{l=1}^{N} A_l y_l &= \lambda y_N. \end{aligned}$$

Po úpravě tak dostáváme

$$\left(\sum_{l=1}^{N} \lambda^{l-1} A_l - \lambda^N I \right) y_1 = 0,$$

kde I je jednotková matice řádu $J+1$. Známým faktem z lineární algebry je to, že platí

$$\operatorname{Ker} \left(\sum_{l=1}^{N} \lambda^{l-1} A_l - \lambda^N I \right) \neq \emptyset$$

právě tehdy, když

$$\det \left(\sum_{l=1}^{N} \lambda^{l-1} A_l - \lambda^N I \right) = 0.$$

Řešením této polynomiální rovnice potom získáme prvky spektra.

V praxi však řešení této rovnice může představovat problém (už samotné nalezení polynomu může být komplikované). Proto je lepší použít některý z odhadů na rozložení spektra. Tato problematika je intenzivně studována a je rozebírána například v již zmiňovaném článku (Higham a Tisseur, 2003).

3.2.4 Stínování a stabilita jednokrokového schématu

Na tomto místě učiňme jedno zajímavé pozorování plynoucí z teorie stínování kladných pseudotrajektoií pro případ obecné jednokrokové metody. V takovém případě má numerické schéma dle (3.15) tvar $U^{n+1} = AU^n + F^n$.

Uvažujme například spektrální maticovou normu. Numerické schéma nazveme *stabilní*, pokud platí, že pro libovolné $t_f > 0$ existuje konstanta $K > 0$ taková, že $\|A^n\| < K$ pro každé $n \in \mathbb{N}$ splňující nerovnost $n\tau < t_f$ (Morton a Mayers, 2005). Uvažujme $t_f \to \infty$. Je zřejmé, že pokud je metoda stabilní, potom

$$\varrho(A) \leq 1. \tag{3.16}$$

Kdyby tomu tak nebylo, potom by existovalo vlastní číslo μ a příslušný vlastní vektor v, $\|v\| = 1$ takové, že $|\mu| > 1$. Platí nerovnost (Tebbens a kol., 2012)

$$\|Av\| \leq \|A\| \, \|v\| .$$

Pomocí této nerovnosti dostáváme následující odhad

$$|\mu|^n = |\mu|^n \|v\| = \|A^n v\| \leq \|A^n\| \|v\| = \|A^n\| ,$$

ze kterého plyne, že $\lim_{n\to\infty} \|A^n\| = \infty$. Schéma by tedy nebylo stabilní. Podmínka (3.16) však umožňuje případ, kdy existují vlastní čísla ležící na jednotkové kružnici. To ovšem znamená, že schéma může být stabilní a současně nemá kladnou stínovací vlastnost, jak plyne z Věty 16.

Závěr

V předložené práci jsme si kladli za cíl vytvořit ucelený výklad teorie stínování zejména pro lineární zobrazení. Dále jsme se zabývali aplikací této teorie v numerických metodách pro parciální diferenciální rovnice.

V první kapitole byly uvedeny standardní definice trajektorie, pseudotrajektorie a stínovací vlastnosti. Dále byly popsány základní výsledky potřebné k budování lineárního případu. Bylo zde také pomocí Banachovy věty o pevném bodě ukázáno, že kontraktivita zobrazení implikuje stínovací vlastnost. Následovala přehledová část o obecném stínování difeomorfismů na okolí hyperbolických množin. Z této teorie aplikované na lineární zobrazení přirozeně vyplynul pojem hyperbolické matice. Dále následovala sekce týkající se stínování lineárních zobrazení. Na rozdíl od postupů uvedených v literatuře zde byla explicitně sestrojena speciální norma, která byla použita v důkazu ekvivalence hyperbolicity a stínovací vlastnosti lineárních zobrazení. Hlavním krokem důkazu bylo rozložení lineárního zobrazení na dvě složky, kdy jedna byla kontraktivní ve speciální normě a druhá měla ve zmíněné normě kontraktivní inverzi.

Ve druhé kapitole byly definovány základní pojmy kladného stínování, které se více hodí pro aplikace v numerické matematice. Dále zde byly dokázány analogické věty o vztahu rozložení spektra lineárních zobrazení a kladné stínovací vlastnosti. Na závěr této kapitoly byly zobecněny pojmy klasického stínování tak, aby se daly použít pro analýzu vícekrokových metod.

Třetí kapitola byla převážně věnována příkladu analýzy zobecněné kladné stínovací vlastnosti dvoukrokového Dufortova-Frankelova schématu. K tomu byla použita metoda stejná pro vyšetřování stability tohoto schématu založená na hledání řešení schématu ve formě Fourierových modů. Na závěr této kapitoly byly uvedeny obecné poznámky k vyšetřování zobecněné kladné stínovací vlastnosti u vícekrokových metod. Fourierovská analýza se v tomto případě ukázala jako nepraktické řešení. V poslední sekci bylo ukázáno, že stabilita jednokrokového schématu ještě neimplikuje zobecněnou kladnou stínovací vlastnost.

Zdá se, že celá teorie popsaná v této práci by měla být rozšířitelná na analýzu numerických schémat pro Cauchyovy úlohy. Technika použitá k analýze spektra Dufortova-Frankelova schématu by měla být teoreticky použitelná i na určování bodových spekter lineárních diferenčních operátorů. Zde by se využila podobná myšlenka, jako při von Neumannově analýze stability.

Předmětem dalšího zkoumání by měl být vliv podobných patologických pseudotrajektorií jako v důkazu Věty 16 na praktické numerické výpočty. Tím by byly otázky kladené v úvodu částečně zodpovězeny.

Seznam použité literatury

Bernardes, N. C., Cirilo, P. R., Darji, U. B., Messaoudi, A. a Pujals, E. R. (2016). Expansivity and shadowing in linear dynamics. doi: 10.48550/ARXIV.1612.02921. URL `https://arxiv.org/abs/1612.02921`.

Evans, L. C. (2010). *Partial differential equations*, volume 19. American Mathematical Soc.

Golub, G. a Van Loan, C. (2013). *Matrix Computations*. Johns Hopkins Studies in the Mathematical Sciences. Johns Hopkins University Press. ISBN 9781421407944. URL `https://books.google.cz/books?id=X5YfsuCWpxMC`.

Higham, N. J. (1999). *Notes on Accuracy and Stability of Algorithms in Numerical Linear Algebra*. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg. ISBN 978-3-662-03972-4. doi: 10.1007/978-3-662-03972-4_2. URL `https://doi.org/10.1007/978-3-662-03972-4_2`.

Higham, N. J. a Tisseur, F. (2003). Bounds for eigenvalues of matrix polynomials. *Linear Algebra and its Applications*, **358**(1), 5–22. ISSN 0024-3795. doi: https://doi.org/10.1016/S0024-3795(01)00316-0. URL `https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0024379501003160`.

Irwin, M. C. (2001). *Smooth dynamical systems*, volume 17. World Scientific.

Kopáček, J. (2015). *Matematická analýza nejen pro fyziky 2*. MatfyzPress. ISBN 978-80-7378-282-5.

Morton, K. W. a Mayers, D. F. (2005). *Numerical Solution of Partial Differential Equations: An Introduction*. Cambridge University Press, 2 edition. doi: 10.1017/CBO9780511812248.

Netuka, I. (2014). *Základy moderní analýzy*. MatfyzPress. ISBN 978-80-7378-277-1.

Ombach, J. (1993). The simplest shadowing. *Annales Polonici Mathematici*, **58**(3), 253–258.

Pilyugin, S. (2006). *Shadowing in Dynamical Systems*. Lecture Notes in Mathematics. Springer Berlin Heidelberg. ISBN 9783540484295. URL `https://books.google.cz/books?id=NRN8CwAAQBAJ`.

Press, W. H., Teukolsky, S. A., Vetterling, W. T. a Flannery, B. P. (2007). *Numerical recipes 3rd edition: The art of scientific computing*. Cambridge university press.

Spoto, F. a Milani, A. (2015). Shadowing lemma and chaotic orbit determination. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, **124**(3), 295–309. doi: 10.1007/s10569-015-9667-7. URL `https://doi.org/10.1007%2Fs10569-015-9667-7`.

STRIKWERDA, J. (2004). *Finite difference schemes and partial differential equations, 2nd ed.* ISBN 978-08-9871-567-5.

TEBBENS, J., HNETYNKOVA, I., PLEŠINGER, M., STRAKOŠ, Z. a TICHÝ, P. (2012). *Analýza metod pro maticové výpočty. Základní metody.* MatfyzPress. ISBN 978-80-7378-201-6.

YANG, X. a RALESCU, D. A. (2021). A Dufort–Frankel scheme for one-dimensional uncertain heat equation. *Mathematics and Computers in Simulation (MATCOM)*, **181**(C), 98–112. doi: 10.1016/j.matcom.2020.09. URL https://ideas.repec.org/a/eee/matcom/v181y2021icp98-112.html.

A. Přílohy

A.1 Dufortovo-Frankelovo schéma

V této příloze odvodíme Dufortovo-Frankelovo schéma pro úlohu jednorozměrného vedení tepla (3.1). Uvažujme pokrytí $\overline{\Omega}$ diskretizační sítí s prostorovým krokem $h = \frac{1}{J}$, $J \in \mathbb{N}$, a časovým krokem $\tau > 0$.

Mějme uzly sítě ve tvaru $(x_j,t_n) = (jh,n\tau)$, $j \in 0, 1, \ldots, J$, $n \in \mathbb{N}_0$. Hodnotu přesného řešení u rovnice v těchto uzlech aproximujeme hodnotami U_j^n. Pro malé h a τ potom můžeme derivace ve vnitřních uzlových bodech (tedy v uzlech s $j = 1, 2, \ldots, J-1$ a $n \in \mathbb{N}$) nahradit diferenčními podíly takto

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_j,t_n) \approx \frac{u(x_{j-1},t_n) - (u(x_j,t_{n-1}) + u(x_j,t_{n+1})) + u(x_{j+1},t_n)}{h^2}$$

a

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x_j,t_n) \approx \frac{u(x_j,t_{n+1}) - u(x_j,t_{n-1})}{2\tau}.$$

Pokud označíme $f_j^n = f(x_j,t_n)$, potom díky rovnici (3.1) pro vnitřní uzlové body platí

$$f_j^n = \frac{\partial u}{\partial t}(x_j,t_n) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_j,t_n) \approx$$
$$\approx \frac{u(x_j,t_{n+1}) - u(x_j,t_{n-1})}{2\tau} - \frac{u(x_{j-1},t_n) - (u(x_j,t_{n-1}) + u(x_j,t_{n+1})) + u(x_{j+1},t_n)}{h^2}.$$

Hodnoty U_j^n potom budeme počítat pomocí vztahu

$$\frac{U_j^{n+1} - U_j^{n-1}}{2\tau} - \frac{U_{j-1}^n - \left(U_j^{n-1} + U_j^{n+1}\right) + U_{j+1}^n}{h^2} = f_j^n.$$

Úpravou dostaneme

$$U_j^{n+1} = \frac{\nu}{1+\nu}\left(U_{j-1}^n + U_{j+1}^n\right) + \frac{1-\nu}{1+\nu}U_j^{n-1} + \frac{2\tau}{1+\nu}f_j^n,$$

kde $\nu = \frac{2\tau}{h^2}$. Výsledné schéma má potom tvar

$$\begin{aligned}
&\forall j \in \{0, 1, 2, \ldots, J\} : \ U_j^0 := u^0(jh),\\
&\forall n \in \mathbb{N} : \ U_0^n, \ U_J^n = 0,\\
&\forall n \in \mathbb{N} \ \forall j \in \{1, 2, \ldots, J-1\} :\\
&U_j^{n+1} = \frac{\nu}{1+\nu}\left(U_{j-1}^n + U_{j+1}^n\right) + \frac{1-\nu}{1+\nu}U_j^{n-1} + \frac{2\tau}{1+\nu}f_j^n.
\end{aligned}$$

Odvození a další vlastnosti tohoto schématu jsou k nalezení v např. v (Strikwerda, 2004).