MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ
FAKULTA
Univerzita Karlova

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Lucie Kundratová

Významné věty afinní geometrie

Matematický ústav UK

Vedoucí bakalářské práce: doc. RNDr. Zbyněk Šír, Ph.D.
Studijní program: Obecná matematika

Praha 2022

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval(a) samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů. Tato práce nebyla využita k získání jiného nebo stejného titulu.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V .... dne ....

Podpis autora

Děkuji svému vedoucímu doc. RNDr. Zbyňku Šírovi, Ph.D. za poskytnutí zajímavého tématu práce s hodně obrázky, cenné rady a ukázání správného směru, když bylo potřeba. Také děkuji své rodině za podporu.

Název práce: Významné věty afinní geometrie

Autor: Lucie Kundratová

Ústav: Matematický ústav UK

Vedoucí bakalářské práce: doc. RNDr. Zbyněk Šír, Ph.D., Matematický ústav UK

Abstrakt: V této práci se seznámíme s pojmy a nástroji afinní geometrie. To jsou zejména barycentrické souřadnice, afinní zobrazení a dělicí poměr. Ty pak použijeme k dokázání afinních vět. K Menelaově větě uvidíme vícero důkazů. Dále ukážeme Menelaovu větu z Cevovy a naopak. Uvedeme projektivní tvrzení, ze kterých obě věty plynou. Nakonec se budeme zabývat překladem Menelaových Sférik z latiny a spletitou historií Menelaovy věty.

Klíčová slova: afinní geometrie Menelaova Cevova Sphaerica

Title: Important theorems of affine geometry

Author: Lucie Kundratová

Institute: Mathematical Institute of Charles University

Supervisor: doc. RNDr. Zbyněk Šír, Ph.D., Mathematical Institute of Charles University

Abstract: In this thesis we will study the concepts and tools of affine geometry. They are mainly the barycentric coordinates, affine transformation and ratio. These will be used to prove some affine theorems. We will see many proofs of Menelaus' theorem. Next, we will prove Menelaus' theorem from Ceva's theorem and also the other way around. Projective claims from which both theorems follow will be stated. Finally we will focus on the translation of Menelaus' Sphaerics from latin and on the complicated history of Menelaus' theorem.

Keywords: affine geometry Menelaus Ceva Sphaerica

Obsah

Úvod

Geometrie je tradiční disciplína zkoumaná nepřetržitě od zrodu matematiky. Modernější afinní geometrie navazuje na obyčejnou středoškolskou geometrii, avšak oprostí se od skalárního součinu. Nevyužívá kolmost, úhly ani délky, zbydou tak poměry obsahů, dělicí poměr. Máme k dispozici afinní soustavu souřadnic a v trojúhelníku lze výhodně vyjadřovat body v barycentrických souřadnicích. Všechny afinní vlastnosti jsou zachovány afinními zobrazeními. Každé dva trojúhelníky lze na sebe zobrazit afinitou. Afinní geometrie zavede jen málo pojmů a tím se zpřehlední. Tyto pojmy jsou pak zachovávány více zobrazeními, čímž se vše zjednoduší.

Výsledkem je teorie disponující mocnými analytickými nástroji. Důkazem lukrativity budiž zájem Alberta Einsteina, který porovnává dva důkazy Menelaovy věty v diskuzi o eleganci důkazů [2].

Metodami afinní geometrie lze dokázat některá afinní tvrzení, známá již dříve. Jednou z nejstarších a nejslavnějších afinních vět je věta Menelaova o poměrech v trojúhelníku a trojici kolineárních bodů na jeho stranách. Menelaus byl Řek žijící v 1. století našeho letopočtu. Ve svém díle Sfériky větu poprvé publikoval ve sférické verzi. V 17. století si jí všimnul i italský matematik Ceva a doplnil ji duální Cevovou větou. Těmito dvěma větami se budeme hlavně zabývat.

V práci navazuji na předmět Geometrie 1. V první kapitole jsem uvedla definice a věty z afinní geometrie, vesměs známé z tohoto předmětu, které jsem upravila pro potřeby práce. Doplnila jsem i další tvrzení z literatury, která jsou později potřeba, a to například Větu 18 či popis stejnolehlosti Definice 16. Dokázala jsem užitečné Lemma 23 o zobecnění dělicího poměru a Lemma 26 o obsazích. Také jsem zavedla pojmy projektivní geometrie vhodné pro sjednocující důkaz Cevovy a Menelaovy věty.

Ve druhé kapitole se již podíváme na důkazy. Zkoumané věty jsou čistě afinní, lze je tedy dokázat pouze afinními prostředky. Cílem mé práce je shromáždit množství důkazů, doplnit některé kroky, důkazy zpřesnit a převést je do afinního jazyka. V této kapitole jsem nejprve uvedla důkazy Menelaovy věty, pak věty Cevovy. Dokázala Menelaovu větu z Cevovy a naopak. Jako poslední uvádím zastřešující projektivní tvrzení, ze kterých obě věty plynou.

Součástí mé práce je také historický kontext Menelaovy věty. Traduje se [14], že první publikací Menelaovy věty je první tvrzení ve třetí knize Menelaových Sférik. Menelaus byl Řek, avšak řecký originál se nedochoval. Existují arabské, hebrejské a latinské překlady[1], nicméně arabsky ani hebrejsky neumím. Ve třetí kapitole se nachází můj vlastní překlad věty a důkazu z latiny. Poté následuje krátké shrnutí historie věty a překladů (je velmi spletitá).

Mým přínosem je zpracování tématu do jednotného celku. Mimo jiné jsem řádně definovala použité pojmy, a uvedla tvrzení. Nalezla jsem různé důkazy afinních vět (v práci se nachází celkem sedm důkazů Menelaovy věty), které jsem doplnila a upřesnila, některé (např. Důkaz 2.1.1 a Důkaz 2.1.1) jsem novými důkazy převedla do čistě afinní podoby umožňující případné zobecnění, dokázala

[1] A také anglický překlad Hermiz [10] toho arabského, který však nemá obrázky.

jsem pomocná lemmata. Samostatně jsem přeložila historický pramen z latiny a okomentovala. Shrnula jsem vývoj Menelaovy věty. Celá práce je navíc doplněna mými vlastními obrázky.

1. Afinní geometrie v rovině

V této kapitole zavedu potřebné značení, pojmy a uvedu věty[1]. Navazuji na přednášku Geometrie 1 a ze skript Šír [24] čerpám definice a věty. Některá tvrzení jsou doplněna z knihy Brannan, Esplen a Gray [8], kde se zabývají afinní geometrií pouze v rovině $\mathbb{R}^2$. Dalším zdrojem jsou také učebnice Boček a Sekanina [6] a Boček a Sekanina [7].

Nejprve obecně zavedeme afinní prostor, následně se omezíme již jen na $\mathbb{R}^2$.

1.1 Afinní prostor

Definice 1. *Nechť V je vektorový prostor dimenze n nad tělesem T. Neprázdnou množinu A spolu se zobrazením $\oplus : A \times V \to A$ nazveme* afinním prostorem *se zaměřením V jestliže*

1. $\forall \mathbf{u},\mathbf{v} \in V, \forall X \in A : (X \oplus \mathbf{u}) \oplus \mathbf{v} = X \oplus (\mathbf{u} + \mathbf{v})$
2. $\forall X, Y \in A, \exists! \mathbf{v} \in V : X \oplus \mathbf{v} = Y$, *tento vektor značíme* $\mathbf{v} = Y \ominus X$.

Prvky A nazýváme body *afinního prostoru. Dimenzi afinního prostoru definujeme jako dimenzi jeho zaměření.*

Místo $\oplus$ budeme psát obyčejné $+$ a místo $\ominus$ budeme psát $-$.

Příklad 2. Nechť $V = \mathbb{R}^2$ aritmetický vektorový prostor a $A = \mathbb{R}^2$ uspořádané dvojice čísel z $\mathbb{R}$. Definujme $+ : A \times V \to A$ jako

$$[x,y] + (v_x, v_y)^T = [x + v_x, y + v_y]$$

pro každé $[x,y] \in \mathbb{R}^2$ bod a $\mathbf{v} = (v_x, v_y)^T \in \mathbb{R}^2$ vektor. Jedná se o afinní prostor dimenze 2, který nazýváme *afinní rovina* a značíme $\mathbb{R}^2$ (pokud nehrozí záměna s vektorovým prostorem $\mathbb{R}^2$).

Definice 3. Soustavou souřadnic *v afinním prostoru $\mathbb{R}^2$ rozumíme trojici $S = (P, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$, kde $P \in A$ je bod nazývaný* počátek *a $B = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$ je báze $\mathbb{R}^2$. Pro libovolný bod $X \in \mathbb{R}^2$ definujeme jeho souřadnice v soustavě S vztahem*

$$[X]_S = [X - P]_B.$$

Jedná se tedy o jednoznačně určenou dvojici skalárů $(t_1, t_2)^T$ takovou, že

$$X = P + t_1\mathbf{u}_1 + t_2\mathbf{u}_2.$$

Příklad 4. V afinní rovině $\mathbb{R}^2$ máme kanonickou soustavu souřadnic $P = [0,0]$, $\mathbf{u}_1 = (1,0)$, $\mathbf{u}_2 = (0,1)$.

[1] Uvádím jen to bezprostředně nezbytné k práci v následujících kapitolách. Případné další souvislosti čtenář již zná z přednášky geometrie, nebo je nalezne v některé z citovaných učebnic.

Definice 5. *Pro libovolné body $B_1, \dots B_k$ v afinním prostoru A a koeficienty $c_1, \dots c_k \in T$ splňující $c_1 + c_2 + \cdots + c_k = 1$ definujeme* afinní kombinaci $\sum_{i=1}^{k} c_i B_i$ *jako bod*

$$P + \sum_{i=1}^{k} c_i(B_i - P), \tag{1.1}$$

kde P je libovolný bod a výraz (1.1) *na jeho volbě nezáleží.*

Definice 6. *O libovolných bodech $B_1, \dots B_k$ v afinním prostoru A řekneme, že jsou* v obecné poloze, *pokud vektory $(B_2 - B_1), (B_3 - B_1), \dots, (B_k - B_1)$ jsou lineárně nezávislé.*

Definujme nyní barycentrické souřadnice podle [24, Definice a Lemma 3.9].

Věta 7. *V afinní rovině $\mathbb{R}^2$ mějme tři body B_1, B_2, B_3 v obecné poloze. Pak lze každý bod $X \in \mathbb{R}^2$ vyjádřit právě jedním způsobem jako afinní kombinaci těchto bodů*

$$X = c_1 B_1 + c_2 B_2 + c_3 B_3, \qquad \textit{kde } c_1 + c_2 + c_3 = 1.$$

Posloupnost bodů $Z = (B_1,B_2,B_3)$ nazýváme barycentrická soustava souřadnic *a trojici skalárů $(c_1, c_2, c_3)^T$ nazýváme barycentrické souřadnice bodu X.*

Příklad 8. Když zvolíme za barycentrickou soustavu souřadnic $\triangle ABC$ v afinní rovině $\mathbb{R}^2$, platí

$$A = (1,0,0),$$
$$B = (0,1,0),$$
$$C = (0,0,1).$$

Z toho lze určit například souřadnice těžiště $T = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$.

Následují tři věty hovoří o vyjádřeních přímky v afinní rovině, definici přímky pomocí podprostoru lze nalézt v [24, Definice 3.17], nebudeme ji používat. Věty jsou speciálními případy Vět po řadě 3.13, 3.16 a 3.15 ze [24].

Věta 9 (Parametrické vyjádření přímky)**.** *Nechť $A \in \mathbb{R}^2$ je libovolný bod afinní roviny a $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{o}\}$ libovolný vektor. Pak množina*

$$A + LO\{\mathbf{v}\}$$

je přímka a každou přímku lze takto vyjádřit.

Věta 10 (Rovnicové vyjádření přímky)**.** *V afinní rovině $\mathbb{R}^2$ lze každá přímka p vyjádřit v kanonických souřadnicích jako $y = kx + q$ pro nějaké $k, q \in \mathbb{R}$.*

Věta 11 (Bodové vyjádření přímky)**.** *V afinní rovině $\mathbb{R}^2$ je množina všech afinních kombinací různých bodů A a B přímka, nazýváme ji* přímkou AB.

Poznámka. Na přímce AB, platí, že každý bod $X \in AB$ lze jednoznačně vyjádřit jako $X = (1 - \lambda)A + \lambda B$ pro nějaké $\lambda \in \mathbb{R}$. V rovině, při barycentrické soustavě (A, B, C) pak tedy body na přímce AB mají souřadnice $(1 - \lambda, \lambda, 0)$ pro dané $\lambda \in \mathbb{R}$.

Pokud je $\lambda \geq 0$ i $1 - \lambda \geq 0$, je bod X konvexní kombinací bodů A a B. V takovém případě říkáme, že *leží na úsečce AB*, a nastane to tedy právě tehdy, když $\lambda \in [0,1]$.

Definice 12. *Pro $A, B \in \mathbb{R}^2$ body afinní roviny a $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{o}\}$ jsou přímky $A + LO\{\mathbf{u}\}$ a $B + LO\{\mathbf{v}\}$* rovnoběžné, *pokud $LO\{\mathbf{u}\} = LO\{\mathbf{v}\}$.*

Definice 13. *Mějme afinní prostory A, B se zaměřeními V, W nad stejným tělesem T. Řekneme, že zobrazení $f : A \to B$ je* afinní, *jestliže zachovává afinní kombinace, tedy jestliže pro libovolné body $B_1, \ldots, B_k \in A$ a koeficienty $c_1, \ldots, c_k \in T$ splňující $c_1 + c_2 + \cdots + c_k = 1$ platí*

$$f\left(\sum_{i=1}^{k} c_i B_i\right) = \sum_{i=1}^{k} c_i f\left(B_i\right).$$

Pak pro něj definujeme asociovaný homomorfismus $\bar{f} \colon V \to W$ *předpisem*

$$\bar{f}(\mathbf{v}) = f(X + \mathbf{v}) - f(X),$$

kde $X \in A$ je libovolný bod (a definice na jeho volbě nezáleží).

Pokud je afinní zobrazení bijektivní, se nazývá afinita.

Další věta ze skript [24] charakterizuje afinity v rovině.

Věta 14. *Zobrazení $f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ je afinitou právě tehdy, když má tvar*

$$f(X) = \mathbf{A}X + \mathbf{p},$$

kde $\mathbf{A}$ je regulární matice 2×2 a $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^2$ je vektor.

Příklad 15. Příkladem afinit jsou shodnosti. Ty jsou podle [24, Věta 1.4] charakterizovány jako ve Větě 14, přičemž navíc musí matice $\mathbf{A}$ splňovat $\mathbf{A}^T\mathbf{A} = \mathbf{I}_2$, kde $\mathbf{I}_2$ je jednotková matice.

Nyní uvedeme další příklad afinity, stejnolehlost (v Geometrii 1 podrobněji nebyla). Definice dle Bočka a Sekaniny [7, 1.5].

Definice 16. Stejnolehlost o středu $S \in \mathbb{R}^2$ a koeficientu $k \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ *je zobrazení $f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, které každému bodu $X \in \mathbb{R}^2$ přiřadí bod*

$$f(X) = S + k(X - S).$$

Stejnolehlost je afinita. Podle [7, str 31–32] je každý její směr samodružný a to s koeficientem k. Tedy pro každý nenulový vektor $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$ je $\bar{f}(\mathbf{v}) = k\mathbf{v}$. Stejnolehlost má jediný samodružný bod, střed stejnolehlosti S, t.j. $f(S) = S$ a $f(X) \neq S$ pro $X \neq S$. Body X, S a $f(X)$ jsou vždy kolineární. Platí, že stejnolehlost zobrazí přímku p procházející středem S opět na přímku p.

Lze dokonce provést klasifikaci afinit v rovině pomocí počtu samodružných směrů a bodů, nalezneme ji v [7, str. 47].

Následující věta je dle Bočka a Sekaniny [7, Věta 1.1.2]. V [7, Definice 1.1.1] sice definují afinní zobrazení zachováním dělicího poměru, avšak z odstavce za tím již plyne, že je to v rovině ekvivalentní s naším zachováním afinních kombinací.

Věta 17. *Při afinním zobrazení se dvě rovnoběžné přímky zobrazí buď na dvě rovnoběžné přímky, nebo se každá z nich zobrazí do bodu.*

V dalším budou některá tvrzení převzata z Brannan a kol. [8]. Afinita v $\mathbb{R}^2$ je tam definována [8, str. 71] pomocí invertibilní matice a vektoru, což již víme z Věty 14, že je ekvivalentní naší definici.

Dle [8, str. 88] platí následující věta.

Věta 18 (Základní věta afinní geometrie)**.** *Ať A, B, C a A', B', C' jsou dvě trojice bodů v $\mathbb{R}^2$ neležících na přímce. Pak existuje právě jedna afinita $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, že $f(A) = A'$, $f(B) = B'$ a $f(C) = C'$.*

Další definice[2] je klíčová pro formulování Menelaovy a Cevovy věty (definici jsem přeformulovala do $\mathbb{R}^2$, funguje ale nad libovolným tělesem T)

Definice 19. *Mějme tři body A, B, X na přímce v $\mathbb{R}^2$, přičemž $A \neq B$ a $X \neq B$. Pak definujeme* dělicí poměr

$$\frac{AX}{XB} := \lambda,$$

jako jediný skalár, pro který platí $\lambda(B - X) = (X - A)$.

Lemma 20 (Dělicí poměr a afinní souřadnice)**.** *Mějme afinní soustavu souřadnic a body $A = [A_x,A_y]$, $B = [B_x,B_y]$, $X = [X_x,X_y]$, že $A \neq B$ a $X \neq B$. Pak*

$$\frac{AX}{XB} = \frac{X_x - A_x}{B_x - X_x}, \qquad \frac{AX}{XB} = \frac{X_y - A_y}{B_y - X_y},$$

pokud jsou příslušné rozdíly souřadnic ve jmenovatelích nenulové.

Důkaz. Nechť $\frac{AX}{XB} = k$. Pak $(X - A) = k(B - X)$, což vyjádříme v souřadnicích a upravíme

$$[X_x, X_y] - [A_x, A_y] = k([B_x,B_y] - [X_x, X_y])$$
$$[X_x - A_x, X_y - A_y] = [k(B_x - X_x), k(B_y - X_y)]$$

Rovnost bodů platí po souřadnicích, tedy jsme získali $X_x - A_x = k(B_x - X_x)$ a $X_y - A_y = k(B_y - X_y)$. Pokud některý z rozdílů na pravých stranách rovností není rovný 0, můžeme jím příslušnou rovnost vydělit. Q.E.D.

Lemma 21 (Dělicí poměr a barycentrické souřadnice)**.** *Ať leží bod X na přímce AB, $X \neq B$, tedy pro nějaké $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ je $X = (1 - \lambda)A + \lambda B$. Pak*

$$\frac{AX}{XB} = \frac{\lambda}{1 - \lambda}.$$

Důkaz. Platí $(1 - \lambda)A + \lambda B = X = (1 - \lambda)X + (\lambda)X$. Upravíme rovnost na $\lambda(B - X) = (1 - \lambda)(X - A)$, tedy $\frac{AX}{XB} = \frac{\lambda}{1-\lambda}$. Q.E.D.

Poznámka. Z předchozího lemmatu plyne, že pokud leží bod $X (\neq B)$ na úsečce AB, je dělicí poměr $\frac{AX}{XB}$ kladný. Jestliže leží bod X mimo úsečku AB, je záporný.

Příklad 22. Pro stejnolehlost f se středem S a koeficientem k platí rovnost dělicího poměru a −koeficientu stejnolehlosti

$$\frac{f(X)S}{SX} = -k. \tag{1.2}$$

[2] Boček a Sekanina [6, str. 63] mají dělicí poměr definovaný obráceně než my, a to jako $X - A = \lambda(X - B)$, vše jsem převedla do našeho značení.

Nyní uvedeme technické lemma, které jsem samostatně zformulovala a dokázala, bude se nám hodit například v důkazu Menelaovy věty z Cevovy. Intuitivně říká, že nevadí, že „podíl dvou vektorů“ není ve tvaru dělicího poměru. Když jsou všechny zúčastněné body na přímce, lze krátit a se změnou znaménka i prohazovat pořadí bodů.

Lemma 23. *Mějme kolineární body $A, B, C, D \in \mathbb{R}^2$. Označíme $\left(\frac{AB}{CD}\right) := k \in T$, když $B - A = k(D - C)$. Pro kolineární body platí*

1. $\left(\frac{AB}{BC}\right) = \frac{AB}{BC}$, *tj. je to dělicí poměr,*
2. $\left(\frac{AB}{CD}\right) = -\left(\frac{BA}{CD}\right) = -\left(\frac{AB}{DC}\right) = \left(\frac{BA}{DC}\right)$,
3. $\left(\frac{AB}{CD}\right) \cdot \left(\frac{CD}{EF}\right) = \left(\frac{AB}{EF}\right)$ *krácení v součinu.*

Důkaz. 1. Je zřejmé z definice.

2. Nechť $\left(\frac{AB}{CD}\right) = k$, tedy $B - A = k(D - C)$. Potom také $A - B = -k(D - C)$, $B - A = -k(C - D)$ a $A - B = k(C - D)$, což jsou přesně rovnosti poměrů.

3. Když pro $k, l \in T$ je $B - A = k(D - C)$ a $D - C = l(F - E)$, pak dosazením druhého $D - C$ do první rovnosti máme $B - A = kl(F - E)$. Q.E.D.

Věta 24. *Afinity zachovávají dělicí poměr. Přesněji pro afinitu $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a kolineární body $A, B, X \in \mathbb{R}^2$, $A \neq B$, $B \neq X$ platí, že dělicí poměr obrazů je definován a*

$$\frac{f(A)f(X)}{f(X)f(B)} = \frac{AX}{XB}.$$

Definice 25. *Pro trojúhelník ABC v $\mathbb{R}^2$ definujeme jeho* orientovaný obsah *jako*

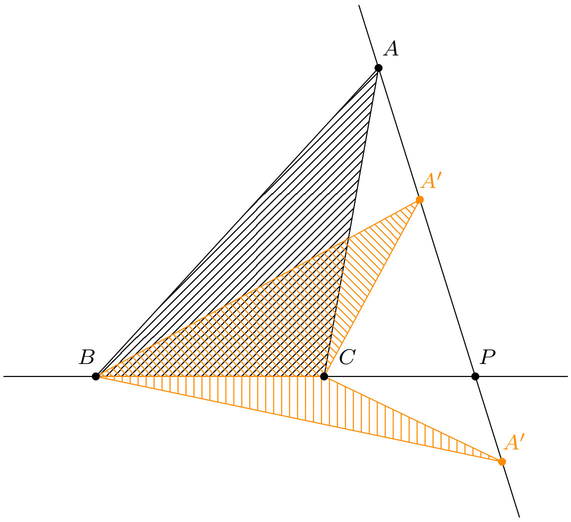
$$S_{ABC} := \frac{1}{2}\det(B - A|C - A).$$

Lemma 26. *Nechť ABC je trojúhelník a bod P leží na přímce BC. Pak pro každý bod A' ležící na přímce AP a různý od P platí*

$$\frac{A'P}{PA} = -\frac{S_{A'BC}}{S_{ABC}}.$$

Lemma pochází ze článku Grunbaum a Shephard [9, vzorec (1)] Jeho zobecněnou verzi z [9, str. 258 dole] jsem nadále upravila, aby obsahovala jen dělicí poměr, jak ho máme definovaný. Důkaz jsem sama provedla jiný než je uvedený (základna je stejná, výšky jsou ve stejném poměru jako AP k AP'), který využíval kolmost. Můj důkaz vychází čistě z definice orientovaného obsahu trojúhelníku a to je afinní pojem.

Důkaz. Označme $k = \frac{A'P}{PA}$, tedy po přenásobení -1 máme $k(P - A) = (A' - P)$ Obsah je definován jako $S_{ABC} = \frac{1}{2}\det(B - A|C - A)$. Vyjádříme $S_{A'BC}$. Když



Obrázek 1.1: Obsahový princip

bude $S_{A'BC} = -kS_{ABC}$, lemma bude dokázáno.

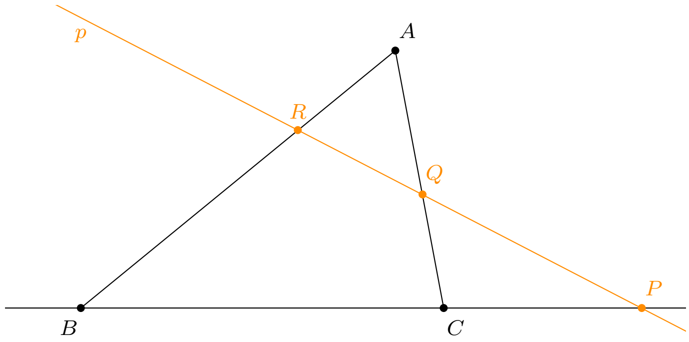
$$
\begin{aligned}
S_{A'BC} =& \frac{1}{2}\det(B - A'|C - A') && (1.3)\\
=& \frac{1}{2}\det((B - P) - (A' - P)|(C - P) - (A' - P)) && (1.4)\\
=& \frac{1}{2}\det((B - P) - k(P - A)|(C - P) - k(P - A)) && (1.5)\\
=& \frac{1}{2}[\det((B - P)|(C - P)) - k\det((B - P)|(P - A)) - \\
& - k\det((P - A)|(C - P)) + k^2\det((P - A)|(P - A))] && (1.6)\\
=& \frac{1}{2}[0 - k\det((B - P)|(P - A)) - k\det((P - A)|(C - P)) + 0] && (1.7)\\
=& \frac{1}{2}[-k\det((B - P)|(C - P)) - k\det((B - P)|(P - A)) - \\
& - k\det((P - A)|(C - P)) - k\det((P - A)|(P - A))] && (1.8)\\
=& -k\frac{1}{2}\det((B - P) - (A - P)|(C - P) - (A - P)) && (1.9)\\
=& -kS_{ABC}.
\end{aligned}
$$

Nejdříve jsme rozepsali definici a dostali (1.3), pak přičetli a odečetli P, (1.4), použili k, (1.5), rozepsali vlastnosti determinantu, (1.6). Jelikož B, C a P leží na přímce, jsou vektory lineárně závislé a determinant je 0. Podobně pro vektor AP, tedy (1.7). Nulu můžeme rozepsat jako nulu přenásobenou konstantou, (1.8). Opět použitím vlastností determinantu poskládáme zpět (1.9). Q.E.D.

Věta 27. *Nechť $Z = (A,B,C)$ tvoří barycentrickou soustavu souřadnic v $\mathbb{R}^2$ a P, Q, R jsou libovolné body $\mathbb{R}^2$. Pak platí, že body P, Q, R leží na přímce právě tehdy když* $\det([P]_Z|[Q]_Z|[R]_Z) = 0$.

Věta 28 (Menelaova)**.** *Nechť $\triangle ABC$ je trojúhelník a přímka p protíná po řadě přímky BC, CA a AB v bodech P, Q, R různých od A, B, C. Potom platí*

$$\frac{AR}{RB} \cdot \frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} = -1. \tag{1.10}$$



Obrázek 1.2: Menelaova věta

Důsledkem Menelaovy věty je následující tvrzení, které bývá označováno jako Paschův axiom[3].

Lemma 29. *Přímka v $\mathbb{R}^2$ neprocházející žádným z bodů A, B, C protíná vnitřky stran (tj. strany bez vrcholů) nedegenerovaného trojúhelníku ABC buď v žádném bodě, nebo ve dvou.*

Důkaz. Součin tří dělicích poměrů je -1, tedy lichý počet z nich je záporný a sudý kladný. Jelikož dělicí poměr $\frac{AX}{XB}$ je kladný, právě když bod X leží uvnitř strany AB, protne přímka strany trojúhelníku ve vnitřních bodech suděkrát. Q.E.D.

1.2 Projektivní geometrie

Uvedu zde některé defince a tvrzení, které následně použijeme ve sjednoceném důkazu Menelaovy a Cevovy věty pomocí projektivní geometrie.

Ze skript [24] jsem vybrala potřebné definice a pojmy a následně je formulovala pouze v reálném dvoudimenzionálním prostoru.

Definice 30. *Mějme vektorový prostor $\mathbb{R}^3$. Množinu všech 1-dimenzionálních podprostorů $\mathbb{R}$ nazveme* projektivní rovinou $\mathbb{P}(\mathbb{R}^3)$, *zkráceně* $\mathbb{P}^2$

$$\mathbb{P}(\mathbb{R}^3) = \mathbb{P}^2 = \{LO\{\mathbf{v}\} \colon \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3, \mathbf{v} \neq \mathbf{0}\}.$$

Prvky této množiny nazýváme projektivní body *a odpovídající vektory* $\mathbf{v}$ *jejich* vektorové zástupce.

Projektivní podprostor dimenze 1 *nazýváme* přímka.

Definice 31. *Mějme vektorový prostor $\mathbb{R}^3$ a projektivní prostor $\mathbb{P}^2$. Libovolnou bázi $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ prostoru $\mathbb{R}^3$ nazveme* soustavou projektivních souřadnic *prostoru $\mathbb{P}^2$. Souřadnicemi bodu $X \in \mathbb{P}^2$ rozumíme uspořádanou trojici skalárů (c_1,c_2,c_3) takovou, že*

$$X = LO\{c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + c_3\mathbf{v}_3\}.$$

Tyto souřadnice jsou dány až na násobek.

[3] Proč je zde tvrzení uvedené uvidíme v 2.3.1

Definice 32. *Mějme projektivní prostor $\mathbb{P}^2$. Každá přímka $\mathbb{P}^1 \subset \mathbb{P}^2$ může být popsána pomocí nenulové lineární formy $l \in \mathbb{R}^3_*$ takto*

$$\mathbb{P}^1 = \{LO\{\mathbf{v}\} \colon \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3, l(\mathbf{v}) = 0, \mathbf{v} \neq \mathbf{0}\}.$$

Toto vyjádření nazýváme rovnicové vyjádření přímky. *Pro libovolné $0 \neq \lambda \in \mathbb{R}$ popisuje λl stejnou přímku. Všechny přímky v prostoru $\mathbb{P}(\mathbb{R}^3)$ tedy odpovídají bodům v duálním projektivním prostoru $\mathbb{P}(\mathbb{R}^3_*)$. Je-li $(\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3)$ soustava projektivních souřadnic, pak duální bázi $(\mathbf{v}_1^*, \mathbf{v}_2^*, \mathbf{v}_3^*)$ nazveme* duální soustavou souřadnic *a příslušné souřadnice označujeme hvězdičkou.*

Ve článku [3] je uvedeno následující kritérium společného průniku přímek.

Věta 33. *Projektivní přímky $\mathbf{u}*$, $\mathbf{v}*$ a $\mathbf{w}*$ se protnou v jednom bodě právě tehdy, když* $\det(\mathbf{u}*, \mathbf{v}*, \mathbf{w}*) = 0$.

Následující věta je z [24, Věta 4.10].

Věta 34. *V projektivním prostoru $\mathbb{P}^2$ mějme dáno čtyři body $X_1, \ldots, X_4$ z nichž žádné tři neleží na jedné přímce. Pak existuje projektivní soustava souřadnic taková, že*

$$\begin{aligned} X_1 &= (1,0,0) \\ X_2 &= (0,1,0) \\ X_3 &= (0,0,1) \\ X_4 &= (1,1,1). \end{aligned}$$

Podle [24, 4.13] platí tato věta.

Věta 35 (Princip duality)**.** *Jestliže v projektivní rovině platí věta, ve které se vyskytují pouze přímky, body, jejich průsečíky, spojení a vlastnost „ležet na“, pak platí i věta duální, t.j. ve které nahradíme přímky body, body přímkami, průsečík spojením, spojení průsečíkem a „ležet na“ nahradíme „procházet“.*

Další definice je ze skript [24, 4.15].

Definice 36. *Mějme v projektivním prostoru $\mathbb{P}^2$ čtyři navzájem různé body A, B, C, D, které leží na jedné projektivní přímce. Nechť $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, $\mathbf{d}$ jsou jejich vektoroví zástupci a nechť platí*

$$\begin{aligned} \mathbf{c} &= \alpha_1\mathbf{a} + \beta_1\mathbf{b} \\ \mathbf{d} &= \alpha_2\mathbf{a} + \beta_2\mathbf{b}. \end{aligned}$$

Pak definujeme dvojpoměr *uspořádané čtveřice bodů $(A,B,C,D) := \frac{\alpha_2\beta_1}{\alpha_1\beta_2}$, kterýžto výraz nezávisí na volbě vektorových zástupců. Pokud $(A, B, C, D) = -1$, čtveřice bodů se nazývá harmonická.*

Následuje definice [24, Definice 4.22] a věty o kanonickém vnoření afinního prostoru [24, 4.25 a 4.34].

Definice 37. *Zobrazení* $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{P}(\mathbb{R}^3)$ *zadané předpisem*

$$\Phi(x, y) = LO\{(x, y, 1)\}$$

se nazývá kanonické vnoření *aritmetického afinního prostoru do aritmetického projektivního prostoru.* $\mathbb{P}(\mathbb{R}^3)$ *se pak nazývá* kanonickým projektivním rozšířením *nebo též* zúplněním *afinního prostoru* $\mathbb{R}^2$*. Přiřazení* $(x,y) \to (x_1, x_2, 1)$ *je zároveň vyjádřením* Φ *vůči kanonickým afinním souřadnicím* $\mathbb{R}^2$ *a kanonickým homogenním souřadnicím* $\mathbb{P}(\mathbb{R}^3)$*.*

Věta 38. *Nechť* $\mathbb{P}^2 = \mathbb{P}(\mathbb{R}^3)$ *je kanonickým projektivním rozšířením afinního prostoru* $\mathbb{R}^2$*, pak* $\mathbb{P}^2 = \Phi(\mathbb{R}^2) \cup \mathbb{P}^1$*, kde* $\mathbb{P}^1$ *je přímka s homogenní rovnicí* $x_3 = 0$*, tedy se souřadnicemi* $(0,0,1)^*$*. Tato přímka se nazývá* nevlastní přímka*, označuje se* p_∞ *a její body se nazývají* nevlastní body*. 0statní přímky* $\mathbb{P}^2$ *se nazývají* vlastní.

Věta 39. *Mějme v projektivně rozšířené rovině* $\mathbb{R}^2$ *různé body* A*,* B*,* C*,* D *ležící na jedné přímce. Pak pro dvojpoměr a dělicí poměry platí*

$$(A, B, C, D) = \frac{\frac{AC}{CB}}{\frac{AD}{DB}} = \frac{AC}{CB} \cdot \frac{BD}{DA}.$$

Dále, pokud je D *nevlastní, tak*

$$(A, B, C, D) = -\frac{AC}{CB}.$$

2. Důkazy Menelaovy a Cevovy věty

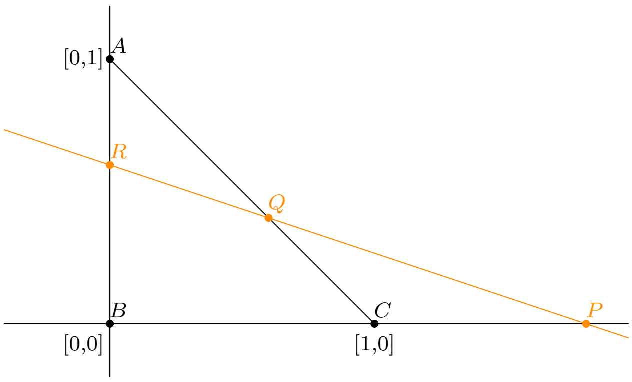
2.1 Menelaova věta

2.1.1 Důkazy

Jedná se o jednu z hlavních částí mé práce. Shromáždila, rozvedla a doplnila jsem různé důkazy Menelaovy věty a některé uvedla do souladu s afinní geometrií. Konkrétně Důkaz 2 jsem sama provedla pomocí barycentrických souřadnic, v Důkazu 3 jsem odstranila kolmice a místo podobnosti trojúhelníků použila stejnolehlost. V Důkazu 4 jsem použila samostatně afinně dokázané Lemma 26 a dbala jsem na zachování správné orientace. Pro Důkaz 5 jsem použila stejnolehlost.

Důkaz 1. Myšlenka dle Brannan a kol. [8, str. 99] (rozepsala jsem některé kroky).

Mějme libovolný $\triangle A'B'C'$. Z Věty 18 plyne, že existuje právě jedna afinita, která zobrazuje $A' \mapsto A = [0,1]$, $B' \mapsto B = [0,0]$, $C' \mapsto C = [1,0]$. Víme z Věty 24, že afinity zachovávají dělicí poměr, takže stačí větu dokázat pro $\triangle ABC$.



Obrázek 2.1: K důkazu Menelaovy věty

Přímka p má v kanonických afinních souřadnicích rovnici $y = kx + q$ (podle Věty 10). Pro koeficienty platí, že $k \in \mathbb{R} \setminus \{0, -1\}$, neboť p není rovnoběžná se žádnou stranou, a $q \in \mathbb{R} \setminus \{0,1,-k\}$, neboť p neprochází vrcholy trojúhelníku. Zjistíme souřadnice bodů P, Q, R (z toho, že na p leží, musí jejich souřadnice rovnici splňovat). Zároveň P leží na ose x, Q na přímce AC a R na ose y. Tedy

- P: dosadíme $y = 0$ a získáme $P = \left[-\frac{q}{k}, 0\right]$,
- R: dosadíme $x = 0$, což dá $R = [0, q]$,
- Q: máme $y = -x+1$, tedy řešíme $-x+1 = kx+q$, vyjádříme x a dostaneme $Q = \left[\frac{1-q}{k+1}, \frac{k+q}{k+1}\right]$.

Nyní už jen zbývá vyjádřit dané poměry. Dle Lemmatu 20 stačí porovnat jednu netriviální souřadnici. Body A, R, B leží na y-ose, tedy porovnáme y souřadnici

$$\frac{AR}{RB} = \frac{R_y - A_y}{B_y - R_y} = \frac{q-1}{0-q} = \frac{1-q}{q}.$$

U bodů na x ose porovnáme jejich x-ové souřadnice

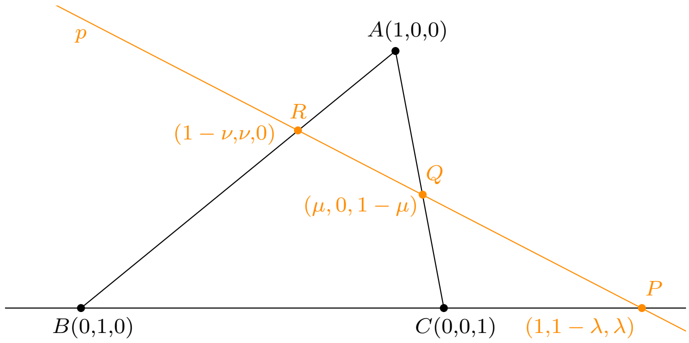
$$\frac{BP}{PC} = \frac{P_x - B_x}{C_x - P_x} = \frac{-\frac{q}{k} - 0}{1 - \left(-\frac{q}{k}\right)} = \frac{-q}{k+q}.$$

Pro body na přímce s rovnicí $y+x=1$ si můžeme vybrat, porovnáme třeba x-ové

$$\frac{CQ}{QA} = \frac{Q_x - C_x}{A_x - Q_x} = \frac{\frac{1-q}{k+1} - 1}{0 - \frac{1-q}{k+1}} = \frac{k+q}{1-q}.$$

Vidíme, že se zlomky zkrátí a zbyde -1. Q.E.D.

Důkaz 2. Tento důkaz jsem provedla sama, ve skriptech [24, Věta 3.30] a v [8] jsou podobné, mírně delší.



Obrázek 2.2: Menelaova věta barycentrickými souřadnicemi

Nechť body P, Q, R leží na jedné přímce. Zvolíme soustavu barycentrických souřadnic $Z = (A,B,C)$. Jelikož body P, Q, R leží po řadě na přímkách BC, CA a AB mimo body A, B, C, podle poznámky za Větou 11 mají pro nějaké $\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$ barycentrické souřadnice

$$P = (0,1-\lambda,\lambda), \qquad Q = (\mu, 0, 1-\mu), \qquad R = (1-\nu, \nu, 0).$$

Podle Věty 27 leží P, Q, R na jedné přímce právě tehdy, když

$$\begin{vmatrix} 0 & \mu & 1-\nu \\ 1-\lambda & 0 & \nu \\ \lambda & 1-\mu & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Spočítáním determinantu zjistíme, že je to právě tehdy, když

$$\lambda\mu\nu + (1-\lambda)(1-\mu)(1-\nu) = 0.$$

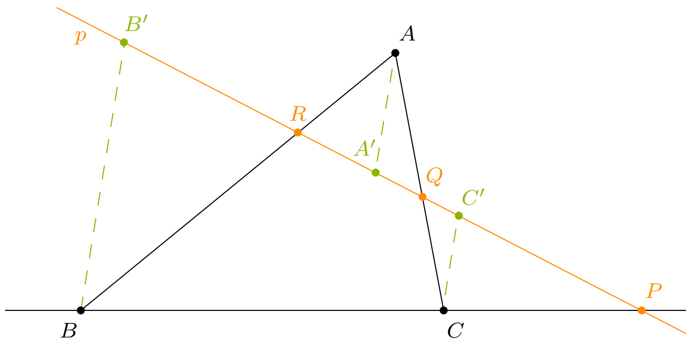
Což je díky tomu, že $\lambda, \mu, \nu \neq 1$, ekvivalentní

$$\frac{\lambda}{1-\lambda}\frac{\mu}{1-\mu}\frac{\nu}{1-\nu} = -1.$$

To je již podle Lemmatu 21 výraz z Menelaovy věty. Q.E.D.

Tento důkaz z Russell [17, str. 7] používá spuštění kolmic. To však obecně v afinní geometrii nelze udělat, neboť nemáme skalární součin, který by určoval kolmost vektorů. Nicméně se ukazuje, že kolmice nejsou potřeba, stačí libovolné vzájemně rovnoběžné přímky protínající p, které nejsou rovnoběžné se stranami trojúhelníku. Upravila jsem tedy důkaz a také používám čistě afinní argumentaci pomocí stejnolehlosti (její existence je zmíněna v Bogomolny [4, Proof 2]).

Důkaz 3. Body A, B, C veďme rovnoběžné přímky tak, aby nebyly rovnoběžné s p ani s žádnou z přímek stran trojúhelníku $\triangle ABC$, a označme jejich průniky s p po řadě A', B', C'. (Rovnoběžnost je afinní vlastnost, viz Definice 12.)



Obrázek 2.3: K důkazu pomocí přímek

Mějme stejnolehlost f_R se středem v R a koeficientem k, která zobrazuje bod A na bod B. Stejnolehlost, jakožto afinní zobrazení, dle Věty 17 přímku AA' zobrazí na její rovnoběžku procházející bodem B, což je přímka BB'. Také $f_R(p) = p$, neboť p prochází středem R. Proto platí $f_R(A') = f_R(AA' \cap p) = f_R(AA') \cap f_R(p) = BB' \cap p = B'$. Z čehož, v kombinaci s tím, že f_R je stejnolehlost, plyne dle vzorce (1.2) rovnost dělicího poměru a $-k$. Jelikož $\bar{f}(v) = kv, \forall v \in \mathbb{R}^2$, platí i druhá rovnost následujícího

$$\frac{AR}{RB} = -k = \frac{AA'}{B'B}.$$

Stejně také existuje stejnolehlost zobrazující $\triangle AQA'$ na $\triangle CQC'$, čímž dostaneme

$$\frac{CQ}{QA} = \frac{CC'}{A'A}.$$

A naposledy $\triangle BPB'$ na $\triangle CPC'$, z čehož plyne

$$\frac{BP}{PC} = \frac{BB'}{C'C}.$$

Součinem tří požadovaných poměrů dostáváme

$$\frac{AR}{RB}\frac{CQ}{QA}\frac{BP}{PC} = \frac{AA'}{B'B}\frac{CC'}{A'A}\frac{BB'}{C'C} = -1.$$

A to bylo možné zkrátit díky Lemmatu 23.

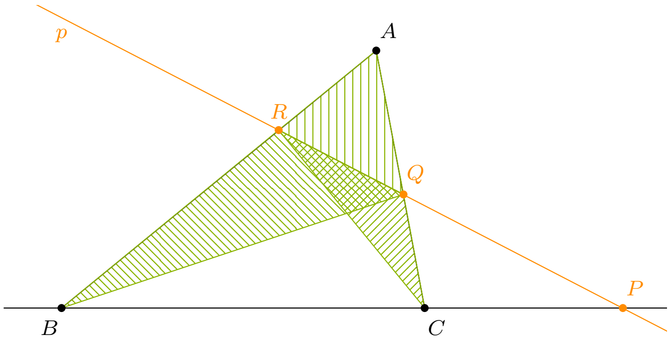
Q.E.D.

Poznámka. Pomocí stejnolehlosti f_R můžeme získat také rovnost $\frac{AR}{RB} = \frac{A'R}{RB'}$. Součinem s analogickými výrazy pro P a Q dostaneme z Menelaovy věty

$$\frac{A'R}{RB'}\frac{C'Q}{QA'}\frac{B'P}{PC'} = -1.$$

Můžeme si tuto skutečnost představit jako skládání $f_P \circ f_R = (f_Q)^{-1}$ stejnolehlostí s koeficienty $-\frac{A'R}{RB'}$ a $-\frac{B'P}{PC'}$, přičemž koeficient výsledné stejnolehlosti bude jejich součinem.

Další důkaz bude proveden pomocí obsahů. Postupujeme dle Grunbaum a Shephard [9], kde jsem poměry délek nahradila za dělicí poměry.



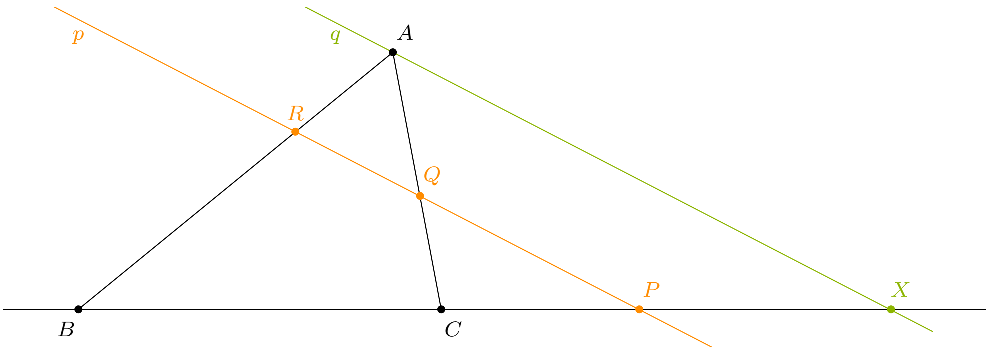
Obrázek 2.4: Důkaz Menelaovy věty principem obsahů

Důkaz 4. Použijeme lemma 26 na trojúhelníky se základnou RQ a přímku p. Postupně dostaneme pro A a B, že $\frac{AR}{RB} = -\frac{S_{ARQ}}{S_{BRQ}}$, pro B a C máme $\frac{BP}{PC} = -\frac{S_{BRQ}}{S_{CRQ}}$, pro C a A je $\frac{CQ}{QA} = -\frac{S_{CRQ}}{S_{ARQ}}$. Rovnosti vynásobíme a všechny obsahy trojúhelníků se vykrátí, čímž zbyde součin poměrů roven mínus jedné. Takto:

$$\frac{AR}{RB}\frac{BP}{PC}\frac{CQ}{QA} = (-1)^3 \frac{S_{ARQ}}{S_{BRQ}}\frac{S_{BRQ}}{S_{CRQ}}\frac{S_{CRQ}}{S_{ARQ}} = -1. \qquad \text{Q.E.D.}$$

Nyní dokážeme Menelaovu větu pomocí rovnoběžky. Myšlenku jsem převzala ze stránky Bogomolny [4].

Důkaz 5. Veďme bodem A rovnoběžku q s přímkou p. Přímka q protne přímku BC nějakém bodě, neboť p a BC nejsou rovnoběžné. Označme ho X.



Obrázek 2.5: Důkaz Menelaovy věty pomocí rovnoběžky

Poznamenejme, že stejnolehlost zobrazuje přímky procházející středem samy na sebe.

Označme f_B stejnolehlost se středem v B zobrazující A na R. Potom, dle Věty 17 se p zobrazí q a také $f_B(X) = P$. Tedy existuje $k \in \mathbb{R}$, že $A-B = k(R-B)$ a $X - B = k(P - B)$. Z toho plyne rovnost dělicích poměrů $\frac{AR}{RB} = \frac{XP}{PB}$, jak nyní ukážeme.

$$\begin{aligned} R - A &= (B - A) - (B - R) = k(B - R) - (B - R) = (k - 1)(B - R) \\ P - X &= (B - X) - (B - P) = k(B - P) - (B - P) = (k - 1)(B - P). \end{aligned}$$

Oba vektory na levé straně jsou stejným násobkem vektorů na pravé straně, tedy dělicí poměry jsou stejné.

Obdobně získáme $\frac{AQ}{QC} = \frac{XP}{PC}$. Vynásobením těchto dvou rovností dostaneme

$$\frac{AR}{RB}\frac{CQ}{QA} = \frac{XP}{PB}\frac{CP}{PX}.$$

Dále zjevně platí $\frac{XP}{PX} = -1$ a vynásobením obou stran rovnosti výrazem $\frac{BP}{PC}$ dostáváme (1.10). Q.E.D.

Poznámka. V důkazu jsme mohli vést rovnoběžku k p také bodem C (jak je to provedeno například zde [1]) Vedení rovnoběžky bodem B nevypadá tak přímočaře, avšak v lemmatu 47 se ukáže, že se takto věta dokazovala historicky.

Poznámka. Důkaz 5 je uváděn Albertem Einsteinem jako škaredý [2] neboť nevykazuje symetrii, se kterou je formulována sama Menelaova věta.

Za elegantní Einstein považoval důkaz využívající poměry obsahů, mírně komplikovanější než Důkaz 4. Do afinního tvaru by jej nejspíš bylo možné převést vícenásobným použitím Lemmatu 26. Elegantnost spočívá v cyklickém využití všech bodů stejným způsobem.

2.1.2 Opačné tvrzení

Tvrzení 40. *Mějme $\triangle ABC$ a body P, Q, R ležící po řadě na přímkách BC, CA a AB. Pokud platí*

$$\frac{AR}{RB} \cdot \frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} = -1, \tag{2.1}$$

tak body P, Q a R leží na jedné přímce.

Důkaz. Budeme postupovat dle [8]. Nechť platí (2.1) a nechť pro spor přímka RQ protíná přímku BC v bodě $P' \neq P$. Platí, že $P' \neq B, C$, neboť R a Q neleží ve vrcholech $\triangle ABC$.

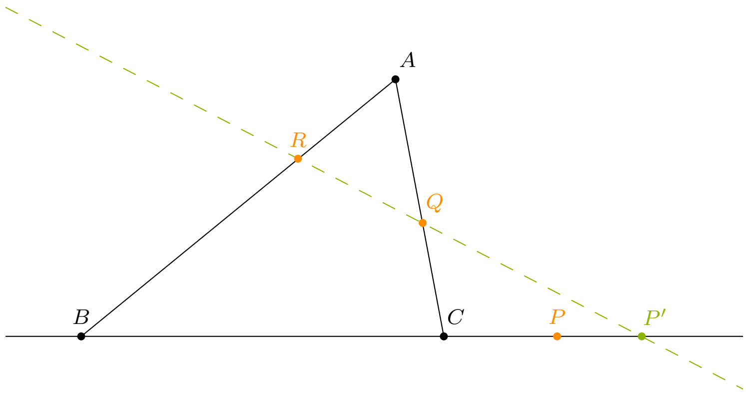
Pak dle Menelaovy věty 28 platí

$$\frac{AR}{RB} \cdot \frac{BP'}{P'C} \cdot \frac{CQ}{QA} = -1. \tag{2.2}$$

Porovnáním obou rovností (2.1) a (2.2) dostaneme

$$\frac{BP}{PC} = \frac{BP'}{PC'}$$

To znamená, že $P = P'$, neboť dělicí poměr (z Definice 19) jednoznačně určuje bod na přímce BC. Spor. Q.E.D.



Obrázek 2.6: Opačná implikace Menelaovy věty

2.1.3 Pokračování

Další důkazy Menelaovy věty Menelaova věta lze dokázat také zavedením rovnice přímky v barycentrických souřadnicích, jak to provádí [1] nebo Schindler a Chen [18]. Ta vychází z Věty 27, jen místo jednoho z bodů obsahuje obecné (x, y, z). Pak se zkonstruuje přímka procházející body Q, R a ověří se, že bod P na ní leží právě tehdy, když (1.10). Výhodou tohoto důkazu je dokázání celé ekvivalence, nicméně je podobný našemu Důkazu 2.

Jinou modifikací uvedených důkazů je ten který provedl Lange [12]. V něm se zvolí libovolná kolmice na přímku p a body A, B, C, P, Q, R se na ni projektují. Pak se využije, že všechny body na přímce p se zobrazí do jednoho bodu.

Důkazů Menelaovy věty existuje celá řada, většinu obvyklých jsem zde uvedla.

Důsledky a zobecnění Menelaova věta je základním geometrickým tvrzením. Jako taková má také důsledky. Lze zobecnit na pentagram, útvar tvořený úhlopříčkami konvexního pětiúhelníku, jak uvádí Hoehn [11]. Také platí pro konvexní n-úhelníky, dle Ó Murchadha [23], a lze zobecnit i pro algebraické křivky místo přímky.

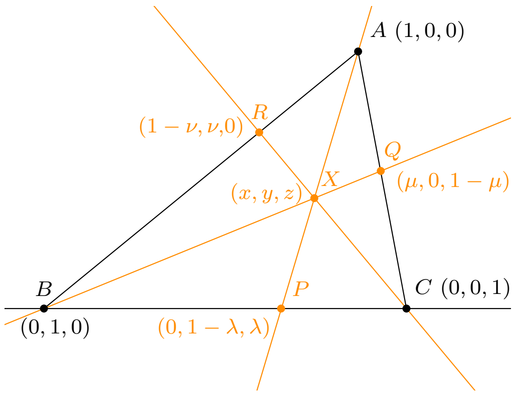
Výrazná zobecnění nad rámec této práce a afinní geometrie, zde uvádím pouze pro ilustraci, že Menelaova věta je stále živé téma. Například Smarandache a Barbu [21] uvádí Menelaovu větu na Poincarého modelu disku. Árpád Kurusa [22] dokazuje ekvivalenci platnosti zobecnění Cevovy a Menelaovy v projektivním metrickém prostoru s tím, že se jedná o Minkowského, hyperbolickou, nebo eliptickou geometrii.

2.2 Cevova věta

Formulace je dle Brannan a kol. [8]. Důkaz jsem provedla sama, ale v [8, str. 107] jsem následně našla podobný s jiným pořadím kroků, kde ale nejdřív protnou jen dvě přímky a až poté zjišťují, jestli jsou další dva body s průsečíkem na přímce. To dovolilo dokázat obě implikace zároveň. Svůj přístup považuji za přehlednější, i když zavedením bodu X vynutíme dokázání opačného tvrzení až posléze.

Věta 41 (Cevova)**.** *Nechť $\triangle ABC$ je trojúhelník a bod X neleží na žádné přímce jeho stran. Nechť $AX \cap BC = P$, $BX \cap AC = Q$ a $CX \cap AB = R$. Pak*

$$\frac{AR}{RB} \cdot \frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} = 1.$$



Obrázek 2.7: Cevova věta

Důkaz 6. Nechť (A,B,C) je barycentrická soustava souřadnic. Platí $A = (1,0,0)$, $B = (0,1,0)$, $C = (0,0,1)$. Jelikož leží na (případně prodloužených) stranách, dle poznámky za Větou 11 můžeme pro P, Q, R najít konstanty $\lambda, \mu, \nu \neq 0{,}1$, že body budou mít souřadnice $P = (0, 1-\lambda, \lambda)$, $Q = (\mu, 0, 1-\mu)$, $R = (1-\nu, \nu, 0)$. Přímky se protnou v bodě X, označíme si $X = (x, y, z)$ pro nějaké dané $x, y, z \in \mathbb{R}$.

Nyní napíšeme podmínky pro to, že AXP, BXQ a CXR jsou přímky. Spočteme determinanty a vyjádříme λ, μ, ν.

$$AXP: \begin{vmatrix} 1 & x & 0 \\ 0 & y & 1-\lambda \\ 0 & z & \lambda \end{vmatrix} = 0 \qquad \lambda y - (1-\lambda)z = 0 \qquad \lambda = \frac{z}{y+z}$$

$$BXQ: \begin{vmatrix} 0 & x & \mu \\ 1 & y & 0 \\ 0 & z & 1-\mu \end{vmatrix} = 0 \qquad \mu z - (1-\mu)x = 0 \qquad \mu = \frac{x}{x+z}$$

$$CXR: \begin{vmatrix} 0 & x & 1-\nu \\ 0 & y & \nu \\ 1 & z & 0 \end{vmatrix} = 0 \qquad \nu x - (1-\nu)y = 0 \qquad \nu = \frac{y}{x+y}.$$

Pro dělicí poměry dle Lemmatu 21 platí $\frac{AR}{RB} = \frac{\nu}{1-\nu}$, vyjádříme ještě $1-\nu = \frac{x+y}{x+y} - \frac{y}{x+y} = \frac{x}{x+y}$ (a cyklicky pro ostatní $1-\lambda = \frac{y}{y+z}$, $1-\mu = \frac{z}{x+z}$). Tedy platí

$$\frac{AR}{RB} \cdot \frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} = \frac{\nu}{1-\nu} \frac{\lambda}{1-\lambda} \frac{\mu}{1-\mu} = \frac{y}{x+y} \frac{x+y}{x} \frac{z}{y+z} \frac{y+z}{y} \frac{x}{x+z} \frac{x+z}{z} = 1.$$

Q.E.D.

V [24, Věta 3.32] je důkaz Cevovy věty proveden pomocí zobrazení vrcholů na body [0,0], [0,1], [1,0] a afinní soustavy souřadnic.

Věta 42 (Obrácená implikace Cevovy věty)**.** *Nechť $\triangle ABC$ je trojúhelník a body P, Q, R leží po řadě na přímkách BC, AC a AB. Pokud*

$$\frac{AR}{RB} \cdot \frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} = 1,$$

tak se přímky AP, BQ a CR protínají v jednom bodě nebo jsou všechny rovnoběžné.

Důkaz. Předpokládejme, že daný součin je 1. Nechť se přímky AP, BQ a CR neprotínají v jednom bodě, ukážeme, že už musí být rovnoběžné[1].

Nechť pro spor nejsou všechny tři přímky AP, BQ a CR rovnoběžné, některé dvě se protnou. Nechť se bez újmy na obecnosti protly přímky BQ a CR. Označme $X \coloneqq BQ \cap CR$ a $P' \coloneqq AX \cap BC$. Jestli $P = P'$, tak se přímky protly všechny tři, tedy musí $P \neq P'$. Pro $\triangle ABC$ a P', Q, R platí Cevova věta 41

$$\frac{AR}{RB} \cdot \frac{BP'}{P'C} \cdot \frac{CQ}{QA} = 1 = \frac{AR}{RB} \cdot \frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA}.$$

Vykrácením dělicích poměrů stejných na levé i pravé straně rovnosti dostaneme $\frac{BP}{PC} = \frac{BP'}{P'C}$. Avšak z poznámky za definicí dělicího poměru odpovídá tento jednoznačně barycentrickým souřadnicím a dle Věty 7 je vyjádření barycentrickými souřadnicemi jednoznačné. Tedy $P = P'$, což je spor. Q.E.D.

2.3 Souvislosti Menelaovy věty a Cevovy věty

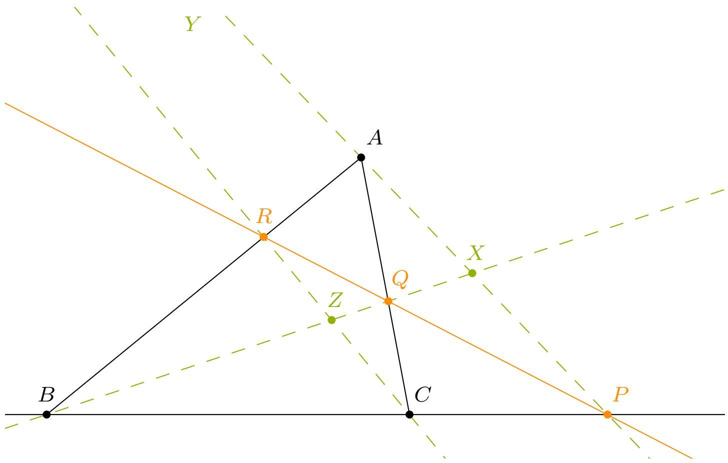
V této sekci nejdříve dokážeme každou z vět pomocí té druhé. V důkazu Věty 42 jsme si mohli všimnout, že zmínka o rovnoběžkách nápadně připomíná projektivní tvrzení. A opravdu, v poslední části této sekce, 2.3.3, uvidíme zastřešující projektivní větu.

2.3.1 Menelaova věta z Cevovy věty

Myšlenka je dle Bogomolny [5], upravila jsem značení a verzi Menelaovy věty. V posledním kroku používám argument, který uvedl Silvester [20].

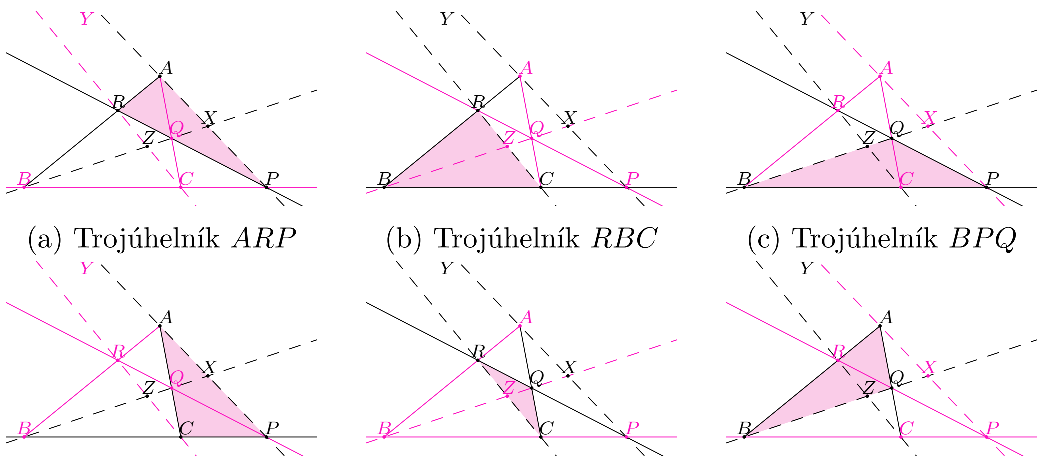
Důkaz 7. Označíme následující průniky přímek spojujících vrchol s jedním z P, Q, R takto: $X \coloneqq BQ \cap AP$, $Y \coloneqq CR \cap AP$, $Z \coloneqq BQ \cap CR$. Situaci znázorňuje obrázek 2.8. Nyní použijeme Cevovu větu 41 na šest různých trojúhelníků. (Postupujeme postupně a volíme trojúhelník, jehož jedna strana je požadovaná úsečka ve výrazu (1.10) z Menelaovy věty – tím se dostane do vzorce druhá část strany.)

[1] Silvester [20] upozornil, že se to musí rozlišit, v Brannan a kol. [8, str. 97] je jen případ, že se protnou. Pak je tam však proveden ještě onen již zmíněný důkaz s ekvivalencí.



Obrázek 2.8: Menelaova věta z Cevovy věty

Trojúhelník	Průsečík cevián	Ceviány	Vztah
$\triangle ARP$	C	AQ, RY, PB	$\frac{AB}{BR} \cdot \frac{RQ}{QP} \cdot \frac{PY}{YA} = 1$
$\triangle RBC$	Q	RP, BZ, CA	$\frac{RA}{AB} \cdot \frac{BP}{PC} \cdot \frac{CZ}{ZR} = 1$
$\triangle BPQ$	A	BR, PX, QC	$\frac{BC}{CP} \cdot \frac{PR}{RQ} \cdot \frac{QX}{XB} = 1$
$\triangle PCA$	R	PQ, CY, AB	$\frac{PB}{BC} \cdot \frac{CQ}{QA} \cdot \frac{AY}{YP} = 1$
$\triangle CQR$	B	CP, QZ, RA	$\frac{CA}{AQ} \cdot \frac{QP}{PR} \cdot \frac{RZ}{ZC} = 1$
$\triangle QAB$	P	QR, AX, BC	$\frac{QC}{CA} \cdot \frac{AR}{RB} \cdot \frac{BX}{XQ} = 1$



(a) Trojúhelník ARP (b) Trojúhelník RBC (c) Trojúhelník BPQ

(d) Trojúhelník PCA (e) Trojúhelník CQR (f) Trojúhelník QAB

Obrázek 2.9: Menelaova věta z Cevovy

Všechny vztahy nyní vynásobíme.

$$\frac{AB}{BR}\frac{RQ}{QP}\frac{PY}{YA}\frac{RA}{AB}\frac{BP}{PC}\frac{CZ}{ZR}\frac{BC}{CP}\frac{PR}{RQ}\frac{QX}{XB}\frac{PB}{BC}\frac{CQ}{QA}\frac{AY}{YP}\frac{CA}{AQ}\frac{QP}{PR}\frac{RZ}{ZC}\frac{QC}{CA}\frac{AR}{RB}\frac{BX}{XQ} = 1$$

Díky lemmatu 23 můžeme všechny dělicí poměry převést na zobecněné se závorkami (1). Ty již smíme krátit (3) a s opačný pořadím bodů jsou rovny -1 dle (2). Tedy CZ a ZC přidají -1, AY a YA přidají -1, PY a YP přidají -1, RZ a

ZR přidají -1, BX a XB přidají -1 a konečně XQ a XQ přidají -1.

Dohromady jsme dostali $(-1)^6$, tedy pravá strana se nezmění, když všechny zvýrazněné členy vykrátíme. Zbyde

$$\left(\frac{AR}{RB}\right)\left(\frac{BP}{PC}\right)\left(\frac{CQ}{QA}\right)\cdot\left(\frac{RA}{BR}\right)\left(\frac{PB}{CP}\right)\left(\frac{QC}{AQ}\right)=1.$$

Díky (2), můžeme změnit pořadí dvojic bodů posledních tří poměrů a výraz zůstane stejný. Navíc, všichni tři součinitelé jsou ve tvaru dělicího poměru, jedná se tedy o dělicí poměry,

$$\left(\frac{AR}{RB}\frac{BP}{PC}\frac{CQ}{QA}\right)^2=1.$$

Hledaný součin je proto buď 1, nebo -1.

Jelikož AP, BQ a CR se neprotínají v jednom bodě ani nejsou všechny vzájemně rovnoběžné, můžeme použít obměnu obrácené implikace Cevovy věty 42 pro trojúhelník ABC, z které plyne, že výraz

$$\frac{AR}{RB}\frac{BP}{PC}\frac{CQ}{QA} \tag{2.3}$$

není roven 1. Musí být tedy roven -1 a důkaz je hotov.

Q.E.D.

Poznámka. Při zdůvodnění, že výraz (2.3) je roven 1 nikoli -1 nastává ve zdroji důkazu [5] problém. Tvrdí se zde, že v rovině $\mathbb{R}^2$ platí, že přímka protíná vnitřky stran (tj. strany bez vrcholů) nedegenerovaného trojúhelníku ABC buď v žádném bodě, nebo ve dvou. To by již stačilo, abychom řekli, že lichý počet činitelů ve výrazu je záporný, a tudíž součin (2.3) je roven -1.
Je však zmíněné tvrzení afinní? Bogomolny [4] se odkazuje na Paschův axiom. Když jsem se pokoušela ho dokázat sama afinně, povedlo se mi to zatím dvakrát. Horší už je, že jsem v průběhu dokázala Menelaovu větu. A z ní to plyne (viz lemma 29). Tedy tvrzení afinní je. Lze ho však dokázat bez Menelaovy věty, či jejího důkazu? Protože použít Menelaovu větu při důkazu Menelaovy věty není vhodné.
Naštěstí jsem našla článek Silvester [20], na který odkazuje Bogomolny [5]. A tam tento zádrhel se znaménkem vyřešili velmi elegantně. Použili obrácenou implikaci Cevovy věty!

2.3.2 Cevova věta z Menelaovy

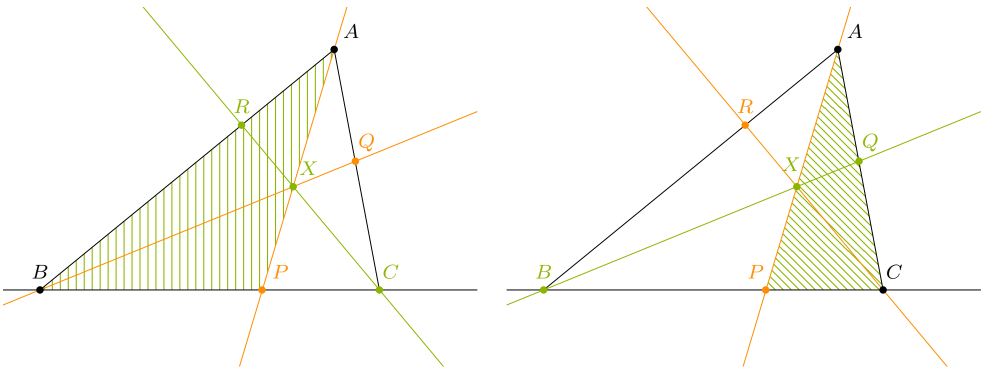
Postupujeme dle Silvestra [20].

Důkaz 8. Použijeme Menelaovu větu 28 na $\triangle ABP$ a na body R, C a X ležící na přímce, mimo vrcholy $\triangle ABP$, čímž máme

$$\frac{AR}{RB}\cdot\frac{BC}{CP}\cdot\frac{PX}{XA}=-1.$$

A ještě na druhý trojúhelník, $\triangle PCA$, a body B, Q, X, pročež dostaneme

$$\frac{PB}{BC}\cdot\frac{CQ}{QA}\cdot\frac{AX}{XP}=-1.$$



(a) Trojúhelník $\triangle ABP$ (b) Trojúhelník $\triangle PCA$

Obrázek 2.10: Cevova věta z Menelaovy – důkaz

Vynásobením těchto dvou rovností, vykrácením BC (což lze z lemmatu 23) a použitím $\frac{PX}{XA} \cdot \frac{AX}{XP} = 1$ získáme

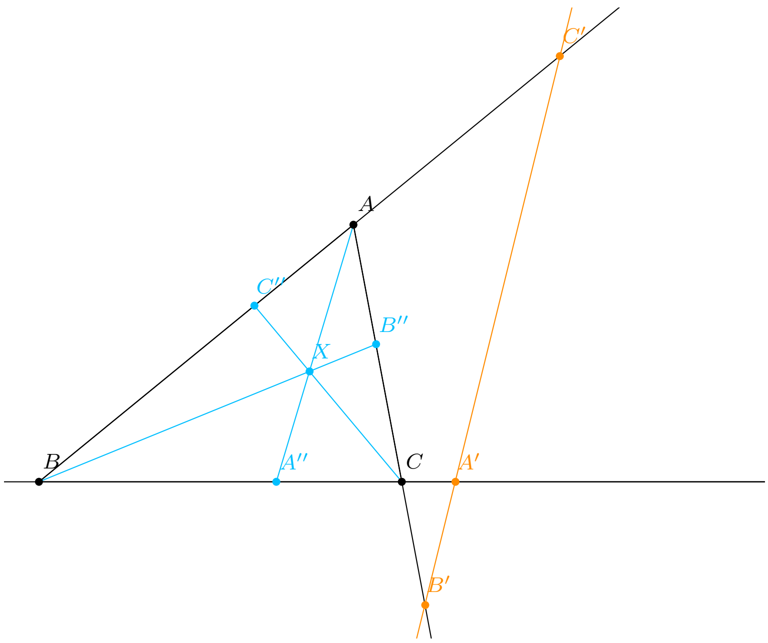
$$\frac{AR}{RB} \cdot \frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} = (-1)^2 = 1.$$

Q.E.D.

2.3.3 Cevova i Menelaova věta díky projektivní geometrii

Tato podsekce má za cíl poskytnout náhled na zastřešující projektivní věty pro Menelaovu i Cevovu větu. Některé kroky pro stručnost přeskočím. Lze je nalézt ve článku Benitez [3], ze kterého zde vycházím.

Důkaz Věty 43 jsem provedla mírně jiný než v [3], kde používají projektivní zobrazení.



Obrázek 2.11: Projektivní věty pro Cevu a Menelaa

Věta 43. *Nechť projektivní body A, B, C nejsou kolineární (tvoří $\triangle ABC$) a neleží na projektivní přímce p. Označme průniky přímek BC, AC, AB s přímkou p po řadě A', B', C'. Dále nechť A'', B'', C'' leží po řadě na přímkách BC, AC, AB mimo vrcholy trojúhelníku. Pak se přímky AA'', BB'' a CC'' protínají v jednom bodě právě tehdy, když*

$$(B,C,A'',A') \cdot (C,A,B'',B') \cdot (A,B,C'',C') = -1.$$

Důkaz. Podle Věty 34 můžeme v duálním projektivním prostoru $\mathbb{P}(\mathbb{R}^3_*)$ zvolit soustavu souřadnic tak, že

$$AB = (0,0,1)^*, \qquad BC = (1,0,0)^*, \qquad CA = (0,1,0)^*, \qquad p = (1,1,1)^*.$$

Nyní spočteme všechny označené body jakožto průniky těchto přímek. Platí

$$A = (1,0,0), \qquad B = (0,1,0), \qquad C = (0,0,1)$$

a

$$A' = (0,-1,1), \qquad B' = (1,0,-1), \qquad C' = (-1,1,0).$$

Jelikož A'' leží na přímce BC, $A'' \neq B, C$, tak $A'' = (0,1,\lambda)$ pro nějaké $\lambda \neq 0$. Nyní můžeme z Definice 36 spočíst dvojpoměr $(B,C,A'',A') = -\lambda$. Ze znalosti A'' také spočteme duální souřadnice přímky $AA'' = (0,-\lambda,1)^*$. Podobně získáme dvojpoměr $(C,A,B'',B') = -\mu$, vyjádření přímky $BB'' = (1,0,-\mu)^*$, dvojpoměr $(A,B,C'',C) = -\nu$ a vyjádření přímky $CC'' = (-\nu,1,0)^*$ pro nějaké $\mu,\nu \neq 0$. Když všechny dvojpoměry vynásobíme, dostaneme

$$(B,C,A'',A') \cdot (C,A,B'',B') \cdot (A,B,C'',C') = -\lambda\mu\nu.$$

Na závěr použijeme Větu 33. Platí, že AA'', BB'' a CC'' se protínají v jednom bodě právě tehdy, když

$$0 = \begin{vmatrix} 0 & -\lambda & 1 \\ 1 & 0 & -\mu \\ -\nu & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 - \lambda\mu\nu.$$

Q.E.D.

Platí i duální věta. Odvození najdeme v [3].

Věta 44. *Nechť $\triangle ABC$ je trojúhelník a X projektivní bod. Označme průniky přímek $BC \cap AX$, $AC \cap BX$, $AB \cap CX$ po řadě A'', B'', C''. Dále nechť A', B', C' leží po řadě na přímkách BC, AC, AB mimo vrcholy trojúhelníku. Pak body A', B' a C' leží na jedné přímce, právě když*

$$(B,C,A'',A') \cdot (C,A,B'',B') \cdot (A,B,C'',C') = -1.$$

Věty 43 a 44 sdílejí následující speciální případ.

Příklad 45. Ať $\triangle ABC$ je trojúhelník a čtveřice projektivních bodů (B,C,A'',A'), (C,A,B'',B'), (A,B,C'',C') jsou harmonické. Potom body A', B', C' leží na jedné přímce právě tehdy, když se přímky AA'', BB'' a CC'' protínají v jednom bodě.

Důkaz. To, že jsou čtveřice harmonické, znamená z definice, že dané dvojpoměry jsou rovny -1. Po vynásobení $(-1) \cdot (-1) \cdot (-1) = -1$, je tedy splněna část podmínky s rovností z Vět 43 a 44. Tedy pro implikaci $\Rightarrow$ jsou splněny předpoklady Věty 43 a přímky se protnou. Pro implikaci $\Leftarrow$ jsou splněny předpoklady Věty 44 a body leží na jedné přímce. Q.E.D.

Vidíme, že obě Věty 43 a 44 mají tvar podmínek i závěru syntakticky podobný Cevově, resp. Menelaově větě. Nyní ukážeme, jak lze afinní věty lehce získat z těchto projektivních.

Důkaz 9. Cevova věty pomocí projektivní geometrie. Nechť P, Q a R jsou body z Věty 41. Použijeme Větu 43, kde volíme p jako nevlastní přímku (a dosazujeme $A'' = P$, $B'' = Q$, $C'' = R$). Označíme A', B', C' průniky přímek BC, AC, AB s p. Zjistíme nyní součin dvojpoměrů ve Větě 43. Dle Věty 39 pro nevlastní „bod D“ máme

$$(B,C,P,A') = -\frac{BP}{PC}, \ (C,A,Q,B') = -\frac{CQ}{QA}, \ (A,B,R,C') = -\frac{AR}{RB}.$$

Dohromady vynásobením dostaneme, že přímky se protínají právě tehdy, když $(-1)^3 \frac{AR}{RB} \cdot \frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} = -1$, což je Cevova věta. Q.E.D.

Důkaz 10. Menelaova věta pomocí projektivní geometrie. Zvolme projektivní bod z Věty 44 jako libovolný bod X mimo přímky stran trojúhelníku. Označme průniky přímek $A'' = BC \cap AX$, $B'' = CA \cap BX$, $C'' = AB \cap CX$. Chceme použít Větu 44, že $A' = P$, $B' = Q$, $C' = R$ leží na přímce právě tehdy, když je následující výraz roven -1.

$$\begin{aligned}(B,C,A'',P) \cdot (C,A,B'',Q) \cdot (A,B,C'',R) &= \frac{BA''}{A''C}\frac{CP}{PB} \cdot \frac{CB''}{B''A}\frac{AQ}{QC} \cdot \frac{AC''}{C''B}\frac{BR}{RA} \\ &= \frac{CP}{PB}\frac{AQ}{QC}\frac{BR}{RA} \\ &= \left(\frac{AR}{RB}\frac{BP}{PC}\frac{CQ}{QA}\right)^{-1}.\end{aligned}$$

Kde jsme nejdřív rozepsali definici dvojpoměru. Ve druhé rovnosti jsme použili výsledek Cevovy věty 41 pro $\triangle ABC$ a body A'', B'', C''.

$$\frac{AC''}{C''B}\frac{BA''}{A''C}\frac{CB''}{B''A} = 1.$$

Ve třetí rovnosti jsme prohodili pořadí krajních bodů v zobecněném dělicím poměru (podle lemmatu 23) a převrátili zlomek ($\frac{1}{-1} = -1$). A dostali jsme přesně, co jsme chtěli. Q.E.D.

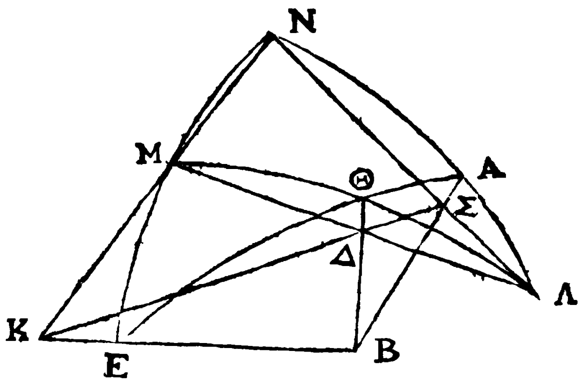
3. Překlad věty z Menelaových Sférik

Menelaova věta, jak je z názvu patrné, bývá přiřazována Menelaovi. Menelaus z Alexandrie byl řecký matematik žijící asi 70 n.l. – 130 n. l. [14] nejdříve v Alexandrii, pak v Římě . Zdroje, např. [14], tvrdí, že Menelaova věta se vyskytuje v jeho knize *Sphaerica* jakožto první tvrzení v Knize III (z celkem tří knih Sférik). Nicméně, původní řecký text se nedochoval. Existují překlady, které jsou spletitě provázány (a některé se také nedochovaly). V této kapitole se budeme zabývat latinským překladem z roku 1758 Menelaus [13]. Následně si také krátce ujasníme souvislosti mezi jednotlivými překlady.

3.1 Menelai Sphaericorum Libri III

Italikou je můj doslovný překlad Menelaových Sférik, latinské verze [13], s občasným nahlédnutím do anglického překladu Hermiz [10].

Věta 46 (PROP. I.). *Nechť jsou na povrchu sféry dva oblouky hlavních kružnic NME a $NA\Lambda$, mezi kterými vedou další dva oblouky $E\Theta A$, $\Lambda\Theta M$ protínající se v bodě Θ: říkám, že sin oblouku AN je k sinu oblouku $A\Lambda$ v poměru složeném z toho, jak se má sin oblouku NE k sinu oblouku EM, a z toho, jak se má sin oblouku $M\Theta$ k sinu oblouku $\Theta\Lambda$.*



Obrázek 3.1: Menelaova věta na sféře, případ 1.

Poznámka (K názvosloví). Pro kružnici s poloměrem r platí, že délka oblouku příslušnému úhlu φ (vyjádřenému v radiánech) je $r\varphi$. Tedy pro jednotkovou kružnici se dá mluvit o sinu úhlu jakožto o sinu oblouku:

$$\sin(\text{„oblouk“}) := \sin(\text{úhel příslušející oblouku}).$$

Když se píše poměr složený z $a : b$ a z $c : d$, myslí se tím součin $(a : b) \cdot (c : d)$.

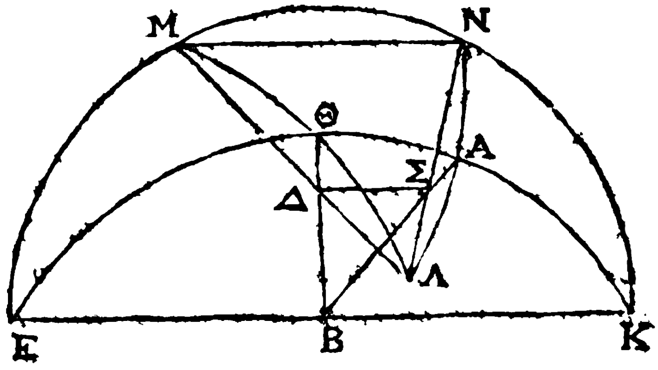
Poznámka. Věta říká

$$\frac{\sin AN}{\sin A\Lambda} = \frac{\sin NE}{\sin EM} \cdot \frac{\sin M\Theta}{\sin \Theta\Lambda}.$$

Můžeme si všimnout, že věta vypadá vskutku jako naše verze Menelaovy věty 28. Kdybychom zapomněli, že jsme na sféře, a uvažovali všechny zmíněné body v rovině a poměry bez sinů, tak při položení $A = \Lambda$, $B = N$, $C = M$, $P = E$, $Q = \Theta$ a $P = A$ jsou výrazy na pravé straně totožné s dvěma našimi poměry, výraz $\frac{AN}{A\Lambda}$ se převedením na druhou stranu rovnosti změní na $\frac{A\Lambda}{AN}$ a vynásobením -1 (aby byl součin roven -1 jako v naší verzi) dostaneme $\frac{\Lambda A}{AN}$, což je přesně náš první dělicí poměr. Tedy zatím to vypadá, že Menelaova verze Menelaovy věty 46 platí i „orientovaně“.

Podíváme se nyní, jak větu dokázal Menelaus. (Poznámky pod čarou jsou mé komentáře vysvětlující matematiku.)

Důkaz. Nechť B je středem koule a spojíme úsečky ΛN, ΛM, MN, EB, & nechť ΘB protne sečnu $M\Lambda$ v Δ, & AB protíná $N\Lambda$ v Σ, & původní $\Delta\Sigma$ je prodloužena aby se protla s přímkou MN v K; & bude bod K v rovině obou kružnic $A\Theta E$, NME. Ale body E, B jsou také v těchto rovinách; pročež KEB bude přímka[1]*. K tomu také bod Σ je v průniku přímek AB, $N\Lambda$, & bod Δ v průniku ΘB, $M\Lambda$; a bod K je na přímce $\Sigma\Delta$; tři body Σ, Δ, K byly v rovině trojúhelníku $N\Lambda M$: bude proto $N\Sigma$ k $\Sigma\Lambda$ v poměru složeném z poměru, který má NK ke KM, & poměru, který má $M\Delta$ ke $\Delta\Lambda$ dle následujícího Lemmatu I (Lemma 47)*[2]*. Ale NK je ke KM tak jako kolmice vedena z bodu N na průměr KEB ke kolmici z bodu M na ten samý, dle Lemmatu II (Lemma 48). Kolmice z bodu N je sinus oblouku EN, & kolmice z bodu M je sinus oblouku ME; tím pádem NK je ke KM jako sinus oblouku NE k sinu oblouku ME. Stejně $N\Sigma$ je k $\Sigma\Lambda$ jako sinus oblouku NA k sinu oblouku $A\Lambda$; & $M\Delta$ je k $\Delta\Lambda$ jako sinus oblouku $M\Theta$ k sinu oblouku $\Theta\Lambda$: proto je sinus oblouku AN k sinu oblouku $A\Lambda$ v poměru složeném z poměru sinu oblouku NE k sinu oblouku ME, & z toho, který má sinus oblouku $M\Theta$ k sinu oblouku $\Theta\Lambda$.*



Obrázek 3.2: Menelaus na sféře, případ 2.

Nyní umístěte přímku $\Delta\Sigma$ rovnoběžně s MN[3]*; & nechť jsou EMN, $E\Theta A$ doplněny na polokružnice, protínající se v K. Proto v obou rovinách ENK, $E\Theta K$ obě přímky $\Sigma\Delta$, MN jsou rovnoběžné, bude také společný průnik těchto rovin, jmenovitě přímka EBK, jakožto samy $\Sigma\Delta$, MN rovnoběžná, a dle 9 XI. Eucl.*

[1] Dvě nerovnoběžné roviny se vždy protínají v přímce a body B, E leží v průniku, tedy tuto přímku určují.

[2] Vida, to vypadá jako obyčejná Menelaova věta v rovině.

[3] Že se $\Delta\Sigma$ a MN neprotnou, tak nemůžeme zavést průsečík K. Toto je druhý možný případ.

uzavřeno.[4]
K tomu také kolmice z bodu N k průměru KEB spuštěná je sinus oblouku EN, který[5] *vzhledem ke stejným rovnoběžkám je kolmicí z M ke stejnému průměru spuštěnou; bude sinus oblouku NE rovný sinu oblouku EM. Právě kvůli rovnoběžkám MN, $\Delta\Sigma$, bude $N\Sigma$ k $\Sigma\Lambda$, nebo sinus oblouku NA k sinu oblouku $A\Lambda$, tak jako $M\Delta$ k $\Delta\Lambda$, tento je, jako sinus oblouku $M\Theta$ k sinu oblouku $\Theta\Lambda$: proto je poměr sinu oblouku NA k sinu oblouku $A\Lambda$ složen z poměru sinu $M\Theta$ k sinu $\Theta\Lambda$ & poměru sinu oblouku NE k sinu oblouku EM; tento poměr, v tomto případě z důvodu, že oblouky EM, NE spolu spojené dají polokružnici, je poměrem rovnosti*[6]
Oběma argumenty bylo ukázáno co lze být dotázáno o poměrech sinů těchto oblouků, pomocí přímek v daných rovinách vzájemně se protínajících. Ale z diagramů, které jsme zde nyní použili, lze ukázat, že sinus oblouku $A\Lambda$ je k sinu oblouku AN v poměru složeném z sinu oblouku $\Lambda\Theta$ k sinu oblouku ΘM, & a z poměru, který má sinus oblouku ME k sinu oblouku EN. Výše bylo ukázáno sinus oblouku AN je k sinu oblouku $A\Lambda$ v poměru složeném z jakého má sinus oblouku $M\Theta$ k sinu oblouku $\Theta\Lambda$ & z kterého má sinus oblouku NE k sinu oblouku EM. Převrácením těchto, poměr sinu oblouku $A\Lambda$ k sinu oblouku AN se skládá z poměru sinu oblouku $\Theta\Lambda$ k sinu oblouku $M\Theta$, & z poměru sinu oblouku ME k sinu oblouku EN. Q.E.D.

Můžeme si všimnout, že ve druhém případě vyšel Menelaovi poměr naopak, tedy -1. V důkazu je to způsobeno tím, že siny orientovaných úhlů $\angle NE$ a $\angle EM$ nejsou stejné, jak píše Menelaus, ale mají opačné znaménko. Z toho lze tedy usoudit, že formulace i důkazy byly provedeny bez orientace a poměry se myslí poměry délek. (Pokud bychom toto opačné znaménko započítali, je tím dokázána i orientovaná verze věty.)

Další text je napsaný v Menelaus [13] kurzívou značící, že ho psal autor překladu, ne Menelaus.

Obsahuje přehled zdrojů, který přeskočíme, podobá se našemu souhrnu v další sekci. V posledním odstavečku se píše o lemmatech, která nás zajímají.

Lemmata jsou ale v knize Hebrejské bez důkazu předpokládána, v Arabské dle metody Ptolemaiovy ukázány, takováto.

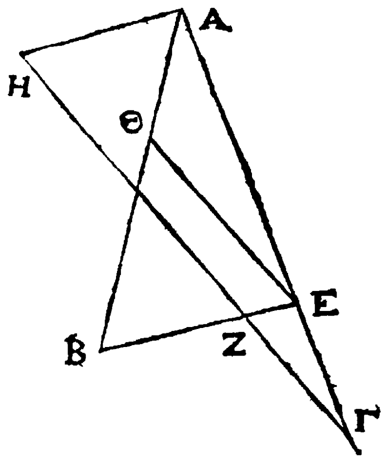
Lemma 47 (Lemma I.)**.** *Když přes dvě přímky AB, $A\Gamma$ protínající se v A jsou vedeny dvě další $\Gamma\Delta$, BE které se protínají v bodě Z: říkám úsečka AE je k $E\Gamma$ v poměru složeném z poměru ΔZ k $Z\Gamma$ & poměru BA k $B\Delta$.*

Důkaz. Skrz A k BE je vedena rovnoběžka AH, protíná onu $\Delta\Gamma$ v H. Nyní protože AH je rovnoběžná s EZ, bude jako AE k $E\Gamma$ také HZ k $Z\Gamma$. Vezměme také střední úsečku $Z\Delta$, poměr HZ k $Z\Gamma$ je složen z poměru, který má HZ k $Z\Delta$, & z toho, který má $Z\Delta$ k $Z\Gamma$. Ale díky rovnoběžkám AH, BZ, bude & ZH k $Z\Delta$

[4] Když máme dvě rovnoběžky ve dvou různých protínajících se rovinách, musí s nimi být přímka průniku rovin rovnoběžná, kdyby nebyla, pronikná obě původní přímky a pak musí být všechny tři přímky v rovině, což neplatí.

[5] ten sinus

[6] Jejich poměr je 1, jsou stejné. Můžeme poměr přidat do součinu.



Obrázek 3.3: Důkaz Menelaovy věty v rovině (tj. Lemma 47)

jako BA k $B\Delta$: proto bude poměr HZ k $Z\Gamma$, jak je AE k $E\Gamma$, složen z poměru, který má BA k $B\Delta$ & z toho, který má ΔZ k $Z\Gamma$.

Tady je lemma už dokázané. To následující je další modifikované znění.

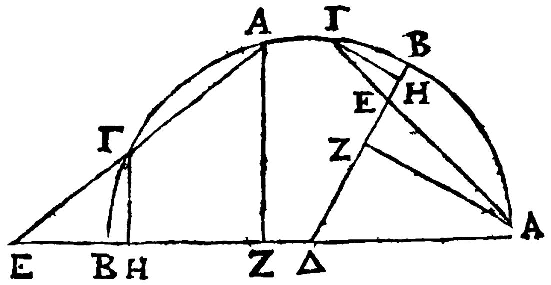
Stejně položeno; říkám také ΓA je k AE v poměru složeném z poměru, který má $\Gamma\Delta$ k ΔZ a poměru, který má ZB k BE.

Buď k $\Gamma\Delta$ položena rovnoběžka $E\Theta$, & kvůli těmto rovnoběžkám, bude ale ΓA k AE jako $\Gamma\Delta$ k $E\Theta$; vzata ΔZ střední, & poměr $\Gamma\Delta$ k AE je složen z toho jaký má $\Gamma\Delta$ k ΔZ & z toho jaký má ΔZ k $E\Theta$. Díky rovnoběžkám pravým ΔZ, ΘE, bude ΔZ k $E\Theta$ jako ZB k BE: proto poměr $\Gamma\Delta$ k $E\Theta$, je jako ΓA k AE, složen je z poměru $\Gamma\Delta$ k ΔZ & poměru ZB k BE. Q.E.D.

Tento důkaz používal také rovnoběžku, jako jeden z našich důkazů, ale nevedla se naším bodem A, nýbrž B (ne Γ, ale skrz A). Musela se také prodloužit jedna z původních přímek (což mi připadá mírně komplikovanější na vymyšlení, musí se dokreslit dvě věci). Ale jinak je myšlenkově důkaz stejný jako náš, použijí se podobné trojúhelníky a věta je dokázána.

Ještě si uvedeme poslední lemma z Menelaa pro úplnost argumentace důkazu Věty 46.

Lemma 48 (Lemma II.). *Jestliže je v kružnici křivka ze středu vedena a libovolný oblouk je rozdělen sečnou: budou části sečny sinům částí oblouků přímo úměrné.*



Obrázek 3.4: K důkazu Lemmatu 48

Důkaz. *Buď ona kružnice $AB\Gamma A$, ve které přetíná libovolný oblouk přímka $A\Gamma$, & ze středu Δ je vedena libovolná přímka ΔB protínající sečnu v E, oblouk právě v B; & jsou spuštěny kolmo k ΔB úsečky AZ, ΓH: říkám AZ je k ΓH, jako je sinus oblouku AB k sinu oblouku ΓB, sice AE k $E\Gamma$.*
Zadruhé když přímky AZ, ΓH jsou kolmice na stejnou ΔB, trojúhelníky AEZ, ΓEH jsou podobné; a tedy vezmu AE k $E\Gamma$ jako AZ k ΓH; & jako sinus oblouku AB k sinu oblouku ΓB. Q.E.D.

3.2 Původ věty

Jelikož jsme se právě přesvědčili, že Menelaova věta v rovině, kterou se zabýváme, a která měla být dokázána ve větě 46, tam technicky vzato dokázána není, jen v zřejmě nepůvodním lemmatu, podíváme se hlouběji na původ této sférické verze.

(Shrnuto dle Sidoli [19].) Sférickým verzím Menelaovy věty budeme říkat souhrnně Věta.

O Menelaově větě se zmiňují Menelaus (žil asi 70 – 140 n. l.) a Ptolemaius (asi 85 – 165 n. l.) dle [14] a [15]. Je pravděpodobné, že ji znal již Hipparchos (190 - 120 př. n. l. dle [16]) jakožto nástroj k výpočtům (toto obhajuje [19]).

Věta má dvě varianty, označované *Konjunkce* a *Disjunkce*, přičemž zde byla prezentována Disjunkce jako 46. Konjunkce je v překladu Menelaus [13] také uvedena, nicméně kurzívou, značící, že v původním textu nebyla. Pokud bychom pro stručnost zachovali značení z 46 (v Menelaus [13] je změněno), tak konjunkce říká

$$\frac{\sin N\Lambda}{\sin NA} = \frac{\sin \Lambda M}{\sin M\Theta} \cdot \frac{\sin E\Theta}{\sin \mathsf{E}\ A}.$$

Můžeme si všimnout, že v našem překladu do češtiny druhá část důkazu Lemmatu I (Lemma 47) odpovídá právě tomu stěžejnímu lemmatu pro konjunkci.

[19] uvádí, že Neugebauer [7] konjunkci označuje jako Menelaovu větu I (a 46 jako Menelaovu větu II).

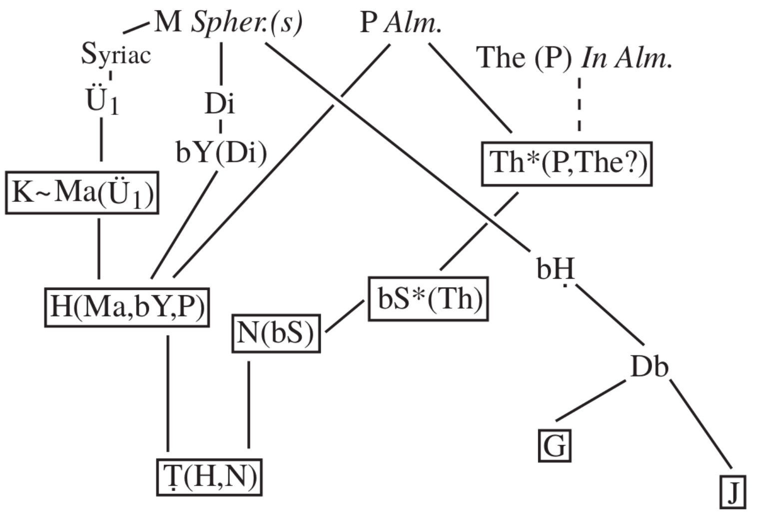
Každá z těchto kombinací se dělí na několik různých geometrických případů, pro disjunkci může přímka MN protnout $\Sigma\Delta$ ve směru E, Λ, nebo být rovnoběžné. Pro konjunkci je 16 možných případů, ale bývá dokazována jako diskunkce.

Také se dají získat různé permutace sinů ve zlomcích.

Překlady Různé verze a překlady pak tyto jemnosti dokazovaly různě podrobně, na základě čehož lze rozborem dopátrat souvislosti mezi nimi. Lze rozlišit přístup astronomický, geometrický a didaktický.

Také lze rozlišovat, zda důkazy používají lemmata (jako jsme viděli Lemma 47 a Lemma 48), nebo se odvolají na obrázek. Pomocí Lemmat dokázal Větu Ptolemaios, bez znalosti Menelaova díla, a následně na ní postavil své metody sférické astronomie. S Ptolemaiovým Almagestem (P *Alm.*) byli obeznámeni někteří tvůrci překladů (viz obrázek 3.5) a promítli jeho přístup do překladu Menelaa.

[7] Neugebauer měl velkou autoritu později se již nikdo nehádal, že by Menelaova věta nebyla přiřazena Menelaovi.



Obrázek 3.5: Překlady a přenos Sphaerik a Menelaovy věty (ilustrační obrázek)

V [19, sekce III] jsou rozebrány dva dochované překlady, H(Ma,b,Y,P) arabsky a G latinsky. H má důkaz věty bez většiny argumentačních detailů, nicméně dle mého názoru matematicky stejný jako v G. H zavedl lemmata v rovině, na kterých důkaz staví. Zdůraznil, že v původním textu nebyla [Dle 19, str. 54]. (A pak se v textu odvolává na obrázek.) G je přibližně stejné jako naše verze, jen místo odkazu na Lemmata se odkazuje na obrázek (a lemmata ani předtím nezavedl).

Vypadá to, že Menelaus považoval techniky shrnuté v lemmatech za součást znalostí pokročilé geometrie. Jednoduše se odkázal na obrázek, a pokračoval dále. Jeho důkaz byl elegantní, pokryl v obecnosti více případů, o kterých se zmínil, že se udělají stejně. Zamýšlel svůj důkaz jako důkaz Disjunkce i Konjunkce, což je to, co lze vyčíst z mírně zmateného závěru našeho překladu.

Použití a postavení Věty Menelaus ji uvedl hned na začátku Knihy III, která se celá zabývá sférickými trojúhelníky dle Sidoli [19], avšak v ní žádné nejsou. Poté ji použil ve čtyřech větách z knihy. Elegance a krátkost jejího důkazu také vypovídají o tom, že byla myšlena jako pouze lemma pro sofistikovanější teorii na sféře.

Byla dostatečně jednoduchá, že Ptolemaios na ní nezávisle vybudoval sférickou astronomii.

Ze zmínek o Hipparchově práci o tématu časů vycházení (hvězd) plyne, že používal metodu alespoň stejně silnou jako je Věta. Ptolemaios ve své shrnující publikaci ty problémy, o kterých víme, že je řešil už Hipparchus, spočetl dvěma způsoby, z nichž jeden je výhradně použitím Věty. Sidoli [19, str. 62] tvrdí, že ukázal, že přesné spočtení vycházejícího bodu eliptiky pro daný čas a polohu není možné jinými starověkými metodami vyřešit, avšak pomocí Věty ano. A Hipparchus toto spočetl pro Egypt, i když bydlel na Rhodu.

Shrnutí Z Menelaova přístupu k Větě plyne, že již byla známa dříve, rovinnou verzi ani samostatně nezmínil, předpokládá, že ji všichni znají. Ze znalosti sférické astronomie to vypadá, že se Věta datuje zpět minimálně až k Hipparchovi.

Závěr

V práci jsem nejprve zavedla a přizpůsobila pojmy známé z přednášky Geometrie 1, doplnila jsem je také z literatury, dokázala pomocná lemmata. Vše jsem následně využila při vyhledání a zpracování různých důkazů Menelaovy věty. Dbala jsem přitom na zachování affinosti důkazů, využívala jsem výlučně pojmy zachovávané afinními zobrazeními. Dokázala jsem také Cevovu větu. Ekvivalence Menelaovy a Cevovy věty vyžádala mnoho obrázků. Nakonec jsem po zopakování projektivní geometrie v 1. kapitole nastínila, jak dokázat Cevovu i Menelaovu větu projektivně.

Velkou výzvu představoval latinský text překladu sférické věty, kde byla Menelaova věta původně publikována. V průběhu jsem zjistila, že Menelaus ji považoval za známou, jen se odkázal na obrázek. Jeho důkaz byl velmi elegantní, v několika slovech nastínil rozbor mnoha případů.

Při zpracování důkazové části mě zaujalo, kolik různých důkazů Menelaovy existuje. Také jsem byla mile překvapena, že pro dokázání jedné afinní věty lze využít téměř jakýkoliv prostředek z přednášky Geometrie 1 a zároveň se skoro všechno tam zmíněné v mé práci opravdu využilo. Můj oblíbený konkrétní moment je závěr důkazu Menelaovy věty z Cevovy, kde po vyčerpávajícím použití šesti Cevových vět zjistíme, že ji stačí použít ještě jednou.

Překlad Menelaových Sférik mi připomínal detektivku, kdy bylo cílem vypátrat, jak to Menelaus udělal. Měli jsme v rukou důkazový materiál ve formě 250 let starého překladu avšak ukázalo se, že tam naše věta vlastně původně neměla být. Následné osvětlení zdroje [19] nám pomohlo vypátrat přesnou pavučinu překladů. Až jsme nakonec zjistili to, co jsme tušili celou dobu. Menelaova věta byla známa již před Menelaem.

Seznam použité literatury

[1] Menelaus' Theorem. Art of Problem Solving. URL https://artofproblemsolving.com/wiki/index.php/Menelaus'_theorem.

[2] Abraham. S. Luchins a Edith. H. Luchins (1990). The Einstein-Wertheimer Correspondence on Geometric Proofs and Mathematical Puzzles. *The Mathematical Intelligencer*, (12), 35–43. URL https://doi.org/10.1007/BF03024003.

[3] Benitez, J. (2007). A unified proof of Ceva and Menelaus' Theorems using projective geometry. *Journal for Geometry and Graphics*, **11**, 39–44. URL https://www.researchgate.net/publication/234714253.

[4] Bogomolny, A. (1999). Menelaus theorem. URL https://www.cut-the-knot.org/Generalization/Menelaus.shtml.

[5] Bogomolny, A. (2001). Menelaus from Ceva. Cut The Knot. URL https://www.cut-the-knot.org/Curriculum/Geometry/MenelausFromCeva.shtml.

[6] Boček, L. a Sekanina, M. (1986). *Geometrie I.* SPN Praha.

[7] Boček, L. a Sekanina, M. (1988). *Geometrie II.* SPN Praha.

[8] Brannan, D., Esplen, M. a Gray, J. (2012). *Geometry.* Cambridge.

[9] Grunbaum, B. a Shephard, G. C. (1995). Ceva, Menelaus, and the Area Principle. *Mathematics Magazine, Vol. 68, No. 4.* URL https://www.jstor.org/stable/2690569.

[10] Hermiz, R. (2015). English Translation of the Sphaerica of Menelaus. mathesis, The California State University. URL http://hdl.handle.net/10211.3/158652.

[11] Hoehn, L. (1993). A Menelaus-type theorem for the pentagram. *Mathematic Magazine*, **66**, 121–123. doi: 10.1080/0025570X.1993.11996096. URL https://doi.org/10.1080/0025570X.1993.11996096.

[12] Lange, M. (2014). Aspects of Mathematical Explanation: Symmetry, Unity, and Salience. *The Philosophical Review*, **123**(4), 503 – 506. URL http://www.jstor.org/stable/44290002.

[13] Menelaus, Edmond Halley, G. C. (1758). *Menelai Sphaericorum Libri III.* Oxonii, Sumptibus academicis. URL https://play.google.com/books/reader?id=Is02AAAAMAAJ&pg=GBS.PA80.

[14] O'Connor, J. J. a Robertson, E. F. (1999). Menelaus Biography. URL https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Menelaus/.

[15] O'Connor, J. J. a Robertson, E. F. (1999). Claudius Ptolemy. URL https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Ptolemy/.

[16] O'Connor, J. J. a Robertson, E. F. (1999). Hipparchus of Rhodes. *MacTutor*. URL https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Hipparchus/.

[17] Russell, J. W. (1893). *An Elementary Treatise on Pure Geometry: With Numerous Examples*. Clarendon Press. URL https://archive.org/details/anelementarytre01russgoog/page/n30/mode/2up.

[18] Schindler, M. a Chen, E. (2012). Barycentric Coordinates in Olympiad Geometry. URL https://web.evanchen.cc/handouts/bary/bary-full.pdf.

[19] Sidoli, N. (2006). The sector theorem attributed to Menelaus. *SCIAMVS*. URL http://individual.utoronto.ca/acephalous/Sidoli_2006.pdf.

[20] Silvester, J. R. (2000). 84.30 Ceva = (Menelaus)^2. *The Mathematical Gazette*, **84**(500), 268–271. ISSN 00255572. URL http://www.jstor.org/stable/3621658.

[21] Smarandache, F. a Barbu, C. (2013). The hyperbolic menelaus theorem in the poincare disc model of hyperbolic geometry. doi: 10.5281/zenodo.30335. URL https://www.researchgate.net/publication/262034867_The_hyperbolic_menelaus_theorem_in_the_poincare_disc_model_of_hyperbolic_geometry.

[22] Árpád Kurusa (2019). Ceva's and Menelaus' theorems in projective-metric spaces. *Journal of Geometry*, **110**. doi: 10.1007/s00022-019-0495-x.

[23] Ó Murchadha, E. (2012). Menelaus' Theorem, Weil Reciprocity, and a Generalisation to Algebraic Curves. Technical report, School of Mathematics,Trinity College,University of Dublin. URL https://www.maths.tcd.ie/research/papers/.

[24] Šír, Z. (2021). Geometrie 1, skripta. URL https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~sir/index.php?stranka=vyuka-20-21.

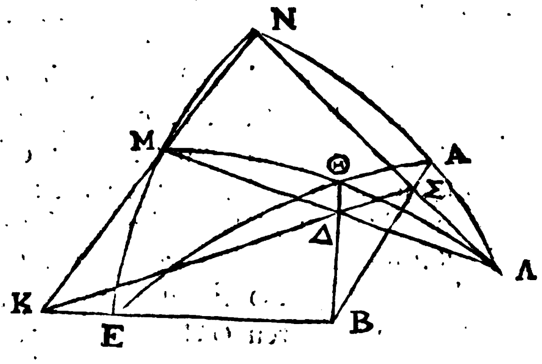
A. Přílohy

A.1 Latinský text Menelai Sphaericorum Lib III. PROP. I. THEOR.

MENELAI ALEXANDRINI SPHÆRICORUM Lib. III.

PROP. I. THEOR.

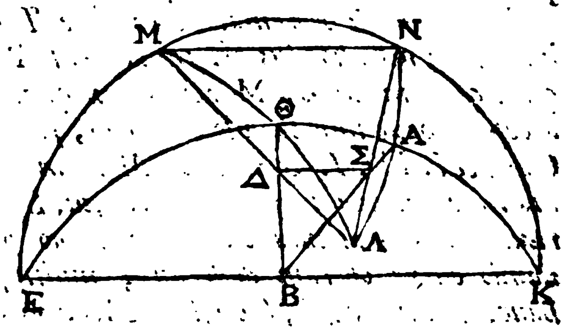
Sint in superficie Sphæræ duo arcus circulorum magnorum, Ν Μ Ε, Ν Α Λ *inter quos ducantur alii duo arcus* Ε Θ Α, Λ Θ Μ *occurrentes invicem in puncto* Θ: *dico sinum arcus* Α Ν *esse ad sinum arcus* Α Λ *in ratione composita ex ea quam habet sinus arcus* Ν Ε *ad sinum arcus* Ε Μ, *& ex ea quam habet sinus arcus* Μ Θ *ad sinum arcus* Θ Α.



Ponatur punctum Β centrum esse Sphæræ, & jungantur rectæ Λ Ν, Λ Μ, Μ Ν, Ε Β, & Θ Β occurrens subtensæ Μ Α in Δ, & Α Β occurrens ipsi Ν Λ in Σ, & ducta Δ Σ producatur usque dum conveniat cum recta Μ Ν producta in Κ; & erit punctum Κ in plano utriusque

utriusque circuli ΑΘΕ, ΝΜΕ. Sed puncta E, B sunt etiam in iisdem planis; quare KEB erit linea recta. Cum autem punctum Σ est in intersectione rectarum ΑΒ, ΝΛ, & punctum Δ in ipsarum ΘΒ, ΜΑ; ac punctum K est in producta ΣΔ: erunt tria puncta Σ, Δ, K in plano trianguli ΝΛΜ: erit igitur ΝΣ ad ΣΛ in ratione composita ex ratione quam habet NK ad KM & ratione quam habet ΜΔ ad ΔΛ, *per sequens Lemma* I. Sed NK est ad KM sicut normalis cadens de puncto N super diametrum KEB ad normalem de puncto M super eandem, *per Lemma* II. Est autem normalis de puncto N sinus arcus EN, & normalis de puncto M est sinus arcus ME; adeoque NK est ad KM ut sinus arcus NE ad sinum arcus ME. Eodem modo patebit ΝΣ esse ad ΣΛ ut sinus arcus ΝΑ ad sinum arcus ΑΛ; & ΜΔ esse ad ΔΛ ut sinus arcus ΜΘ ad sinum arcus ΘΛ: quapropter sinus arcus ΑΝ est ad sinum arcus ΑΛ in ratione composita ex ratione sinus arcus NE ad sinum arcus ME, & ex ea quam habet sinus arcus ΜΘ ad sinum arcus ΘΛ. Q. E. D.

Pone jam rectam ΔΣ parallelam esse ipsi MN; & compleantur semicirculi EMN, EΘΛ, occurrentes invicem ad K. Itaque quoniam in duobus planis ENK, EΘK duæ rectæ ΣΔ, MN parallelæ sunt, erit quoque communis sectio horum planorum, nempe recta EBK, etiam ipsis ΣΔ, MN parallela, *ut ex* 9ni XI. *Eucl. constabit*. Cum autem normalis de puncto N



ad diametrum KEB demissa sinus est arcus EN, cui ob parallelas æqualis est normalis de M ad eandem diametrum demissa; erit sinus arcus NE æqualis sinui ipsius EM. Ob parallelas vero MN, ΔΣ, erit ΝΣ ad ΣΛ, sive sinus arcus ΝΑ ad sinum arcus ΑΛ, sicut ΜΔ ad ΔΛ, hoc est, ut sinus arcus ΜΘ ad sinum ipsius ΘΛ: componitur igitur ratio sinus arcus ΝΑ ad sinum arcus ΑΛ, ex ratione sinus ΜΘ ad sinum ipsius ΘΛ & ratione sinus arcus NE ad sinum arcus EM; quæ quidem ratio, hoc in casu, ubi arcus EM, NE simul sumpti æquantur semicirculo, fit ratio æqualitatis.

Pari argumento demonſtrabitur quicquid peti poſſit de rationibus ſinuum horum arcuum, ope rectarum in dato plano inter ſe convenientium. At ex ipſo diagrammate, quo in præſentiarum uſi ſumus, probari poteſt ſinum arcus ΑΛ eſſe ad ſinum arcus ΑΝ in ratione compoſita ex ratione ſinus arcus ΑΘ ad ſinum arcus ΘΜ, & ex ratione quam habet ſinus arcus ΜΞ ad ſinum arcus ΞΝ. Superius enim demonſtratum eſt ſinum arcus ΑΝ eſſe ad ſinum arcus ΑΛ in ratione compoſita ex ea quam habet ſinus arcus ΜΘ ad ſinum arcus ΘΛ & ex ea quam habet ſinus arcus ΝΞ ad ſinum arcus ΞΜ. Invertendo igitur, ratio ſinus arcus ΑΛ ad ſinum arcus ΑΝ compoſita erit ex ratione ſinus arcus ΘΛ ad ſinum arcus ΜΘ, & ex ratione ſinus arcus ΜΞ ad ſinum arcus ΞΝ. Q. E. D.

SCHOLION.

Vocem נכחות, *qua ſignificat* Hebræus *Interpres ſubtenſam dupli arcus, ſive* τὴν ὑπὸ τὴν διπλῆν τῆς περιφερείας *apud* Ptolemæum, *ubique Sinum reddimus, noſtri ævi Mathematicis morem gerentes, & exemplo uſi Traductoris* Arabis *ſemper vocem* جيب, *hoc eſt* Sinum, *adhibentis. Rationes enim eædem ſunt ſinuum quæ ſubtenſarum duplorum arcuum inter ſe.*

Porro huic Theoremati tota fere Trigonometria Veterum innititur; nec alio uſus eſt fundamento Ptolemæus *in Syntaxi: quod quidem illum à* Menelao, *vix quadraginta annos ſeniore, accepiſſe haud improbabile videbitur, factâ collatione hujus cum Cap. XII. Lib. I. Syntaxeos Mathematicæ. Idem* Arabibus *maxime quoque in pretio fuit, qui, Sphæricorum Triangulorum dimenſurationes ex hoc principio petentes, eidem exornando enixe operam dederunt, multiſque ſcriptis Regulam hanc, quam* القطاع, *hoc eſt* Interſectionis, *dixerunt, elucidare conati ſunt. Unde* Europæi *Mathematici ante aliquot ſecula, cum re nomen etiam à* Mauris *mutuati ſunt, ac de Figurâ* Catha *ſcripta reliquerunt; inter quos eminet* Simon de Bredon Anglus, *circa annum* 1350 Mertonenſis Socius, *cujus de hac re opus in* Bibliotheca Bodleiana *non uno Volumine aſſervatur.*

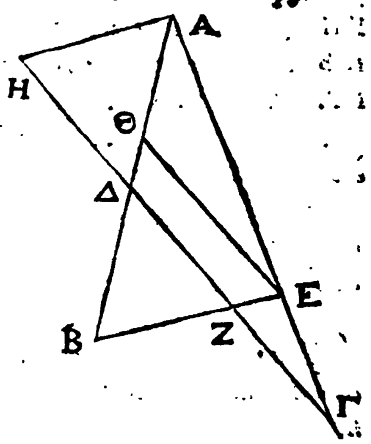
Lemmata autem in Codice Hebræo *abſque demonſtratione aſſumpta, in* Arabico *vero ad modum* Ptolemæi *demonſtrata, ſic ſe habent.*

Lemma

Lemma I.

Si ad duas rectas Α Β, Α Γ *concurrentes in* Α *ducantur duæ aliæ* Γ Δ, Β Ε *sese intersecantes in puncto* Ζ: *dico rectam* Α Ε *esse ad* Ε Γ *in ratione composita ex ratione* Δ Ζ *ad* Ζ Γ *& ratione* Β Α *ad* Β Δ.

Per Α *enim ipsi* Β Ε *parallela ducatur* Α Η, *occurrens ipsi* Δ Γ *productæ in* Η. *Jam quoniam* Α Η *parallela est ipsi* Ε Ζ, *erit ut* Α Ε *ad* Ε Γ *ita* Η Ζ *ad* Ζ Γ. *Sumptâ autem mediâ recta* Ζ Δ, *ratio* Η Ζ *ad* Ζ Γ *componetur ex ratione quam habet* Η Ζ *ad* Ζ Δ, *& ex ea quam habet* Ζ Δ *ad* Ζ Γ. *Sed ob parallelas* Α Η, Β Ζ, *erit &* Ζ Η *ad* Ζ Δ *sicut* Β Α *ad* Β Δ: *ratio igitur* Η Ζ *ad* Ζ Γ, *hoc est* Α Ε *ad* Ε Γ, *componitur ex ratione quam habet* Β Α *ad* Β Δ *& ex ea quam habet* Δ Ζ *ad* Ζ Γ.



Iisdem positis; dico quoque Γ Α *esse ad* Α Ε *in ratione composita ex ratione quam habet* Γ Δ *ad* Δ Ζ *& ex ea quam habet* Ζ Β *ad* Β Ε.

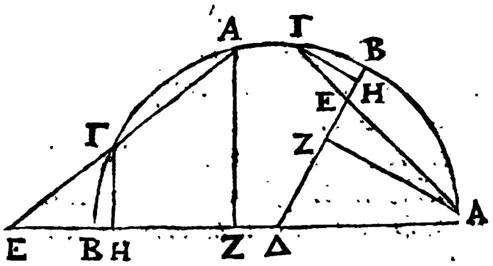
Ipsi Γ Δ *parallela ducatur* Ε Θ, *& ob easdem parallelas, erit, ut* Γ Α *ad* Α Ε *ita* Γ Δ *ad* Ε Θ; *sumatur* Δ Ζ *media, & ratio* Γ Δ *ad* Ε Θ *componetur ex ea quam habet* Γ Δ *ad* Δ Ζ *& ex ea quam habet* Δ Ζ *ad* Ε Θ. *Ob parallelas vero* Δ Ζ, Θ Ε, *erit* Δ Ζ *ad* Ε Θ *sicut* Ζ Β *ad* Β Ε: *ratio igitur* Γ Δ *ad* Ε Θ, *hoc est* Γ Α *ad* Α Ε, *composita est ex ratione* Γ Δ *ad* Δ Ζ *& ratione* Ζ Β *ad* Β Ε. Q. E. D.

Lemma II.

Si in Circulo recta aliqua è centro educta arcum quemlibet ejusque subtensam diviserit: erunt segmenta subtensæ Sinubus segmentorum arcus proportionalia.

Sit enim circulus Α Β Γ Δ, *in quo subtendat arcum aliquem recta* Α Γ, *& de centro* Δ *ducatur utcunque recta* Δ Β *occurrens subtensæ in* Ε, *arcui vero in* Β; *& demittantur normales* *ad* ΔB *rectæ* AZ, ΓH: *dico* AZ *esse ad* ΓH, *hoc est sinus arcus* AB *ad sinum arcus* ΓB, *sicut* AE *ad* EΓ.

Quoniam enim rectæ AZ, ΓH *normales sunt ad eandem* ΔB, *similia erunt triangula* AEZ, ΓEH; *atque adeo ut* AE *ad* EΓ *ita* AZ *ad* ΓH; *& ita sinus arcus* AB *ad Sinum arcus* ΓB. Q. E. D.



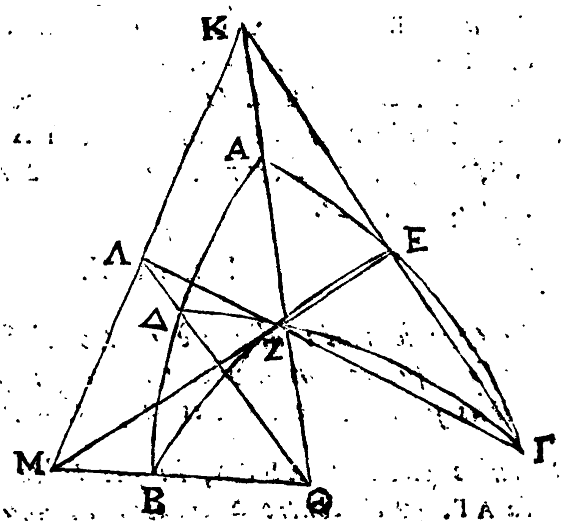
Ac manifestum est eodem modo rem se habere, si recta è centro circuli occurrat subtensæ extra circulum productæ.

His subjungere liceat aliud Theorema, à Ptolemæo *in loco citato usurpatum, & à* Theone Alexandrino *in Commentariis demonstratum: nimirum sequens*

Theorema.

Si ad duos arcus circulorum magnorum AB, AΓ *ducantur duo alii arcus* ΓΔ, BE *sese intersecantes in puncto* Z: *dico sinum arcus* AΓ *esse ad sinum arcus* AE *in ratione composita ex ratione sinus arcus* ΓΔ *ad sinum arcus* ΔZ, *& ex ratione sinus arcus* BZ *ad sinum arcus* BE.

Sit enim Θ *centrum Sphæræ, & jungantur rectæ* ΘA, ΓE *& producantur ad occursum in* K; *itemque rectæ* ΘB, ZE *productæ occurrant ad* M, *pariterque* ΘΔ, ΓZ *productæ conveniunt ad punctum* Λ. *Quoniam itaque tria puncta* K, Λ, M, *sunt in plano trianguli* ΓZE, *quippe in productis ejus lateribus; eademq; sunt etiam in plano circuli* AΔB, *utpote in rectis è centro ejus ductis; manifestum est ea incidere in communem utriusque plani sectionem: ac proinde*



KΛM,