MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ FAKULTA
Univerzita Karlova

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Lucie Wintrová

Matematické paradoxy

Katedra matematické analýzy

Vedoucí bakalářské práce: prof. RNDr. Luboš Pick, CSc., DSc.
Studijní program: Obecná matematika

Praha 2022

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval(a) samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů. Tato práce nebyla využita k získání jiného nebo stejného titulu.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V .... dne ....

Podpis autora

Děkuji vedoucímu práce prof. Pickovi za vypsání tohoto tématu, podnětné konzultace a cenné rady. Dále děkuji své rodině za podporu a pochopení v průběhu studia.

Název práce: Matematické paradoxy

Autor: Lucie Wintrová

Katedra: Katedra matematické analýzy

Vedoucí bakalářské práce: prof. RNDr. Luboš Pick, CSc., DSc., katedra matematické analýzy

Abstrakt: V předložené bakalářské práci se budeme zabývat matematickými paradoxy, především Banachovým-Tarského paradoxem. Ukážeme několik paradoxů týkajících se rozkladů množin, například Sierpińského-Mazurkiewiczův paradox. Dále provedeme konstruktivní důkaz Banachovy-Tarského věty v $\mathbb{R}^3$ s využitím speciální grupy rotací. Nakonec zobecníme pojem ekvirozložitelnosti na spojitou ekvirozložitelnost a dokážeme, že Banachův-Tarského pardox platí i za zpřísněné podmínky spojité ekvirozložitelnosti. Tím zodpovíme de Grootovu otázku.

Klíčová slova: Banachův-Tarského paradox, míra, ekvirozložitelnost, izometrie

Title: Mathematical paradoxes

Author: Lucie Wintrová

Department: Departement of mathematical analysis

Supervisor: prof. RNDr. Luboš Pick, CSc., DSc., departement of mathematical analysis

Abstract: In the presented bachelor thesis we will focus on mathematical paradoxes, especially the Banach-Tarski paradox. We will show several paradoxes concerning decompositions of sets, such as the Sierpiński-Mazurkiewicz paradox. Next, we perform a constructive proof of the Banach-Tarski theorem in $\mathbb{R}^3$ using a special group of rotations. Finally, we generalize the notion of equidecomposability to continuous equidecomposability and prove that the Banach-Tarski pardox holds even under the stricter condition of continuous equidecomposability. This will answer de Groot's question.

Keywords: Banach-Tarski paradox, measure, equidecomposability, isometry

Obsah

Úvod

V této bakalářské práci budeme zkoumat kongruenci a ekvirozložitelnost (jinak též nazývanou kongruence po částech) podmnožin $\mathbb{R}^n$ pro různá $n \in \mathbb{N}$. Zaměříme se především na případy $n \in \{1, 2, 3\}$. V první části práce představíme několik paradoxů souvisejících s neměřitelnými množinami, axiomem výběru a grupou izometrií.

Zkonstruujeme lebesgueovsky neměřitelnou podmnožinu reálných čísel zvanou Vitaliova množina. Dále ukážeme, že jednotková koule bez jednoho bodu je ekvirozložitelná kouli celé. Také představíme Sierpińského-Mazurkiewiczův paradox, který se zabývá rozkladem spočetné množiny na dvě disjunktní podmnožiny takové, že jsou obě ekvirozložitelné množině původní.

V hlavní části práce pak formulujeme a dokážeme Banachův-Tarského paradox. Tato známá věta říká, že lze jednotkovou kouli v $\mathbb{R}^3$ rozložit na konečný počet množin a pomocí izometrií z těchto množin složit dvě jednotkové koule. V důkazu budeme postupovat konstruktivně a rozpracujeme důkazové techniky použité v knize *The Pea and the Sun Paradox*. Zaměříme se především na vybudování speciální grupy rotací, díky které pak nalezneme vhodný rozklad jednotkové koule na pět podmnožin. Z těchto množin pak s využitím rotací této grupy získáme požadované dvě jednotkové koule.

V poslední části práce zobecníme pojem ekvirozložitelnosti na spojitou ekvirozložitelnost. U spojité ekvirozložitelnosti budeme navíc požadovat, aby jednotlivá posouvání a otáčení byla spojitě závislá na čase. Pomocí článku od T. Wilsona z roku 2005 pak ukážeme, že Banachův-Tarského paradox platí i za zpřísněné podmínky spojité ekvirozložitelnosti, a tak zodpovíme *de Grootovu otázku*.

1. Základní pojmy a definice

V úvodní kapitole si připomeneme několik pojmů z teorie grup, teorie množin a teorie míry. Jejich znalost budeme potřebovat v dalších kapitolách, mimo jiné i k samotnému důkazu Banachova-Tarského paradoxu.

1.1 Teorie grup

Definici izometrie získáme ze skript lineární algebry (Barto, 2022), přičemž se místo afinních prostorů omezíme pouze na $\mathbb{R}^n$, protože právě taková zobrazení budeme v této práci používat.

Definice 1 (izometrie)**.** *Nechť $n \in \mathbb{N}$, pak zobrazení $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ nazýváme* izometrie*, pokud zachovává vzdálenosti, tzn. pro libovolné x,$y \in \mathbb{R}^n$ platí*

$$\|x - y\| = \|F(x) - F(y)\|.$$

Symbol $\|\cdot\|$ v tomto případě označuje euklidovskou normu.

V této práci budeme z izometrií využívat pouze *rotace* (*otočení*) a *translace* (*posunutí*).

Z lineární algebry víme, že každou rotaci lze reprezentovat pomocí ortogonální matice, jejíž determinant je roven jedné. Nechť je tedy bod $x \in \mathbb{R}^n, n \in \mathbb{N}$, reprezentován jako n-složkový vektor $\overline{x}$. Rotací bodu x rozumíme vynásobení zleva vektoru $\overline{x}$ příslušnou maticí rotace. Obdobně každou translaci v $\mathbb{R}^n, n \in \mathbb{N}$, lze reprezentovat pomocí n-složkového vektoru. Posunutí bodu x tak můžeme chápat, jako přičtení n-složkového vektoru k $\overline{x}$.

Definice 2 (grupa)**.** Grupou *rozumíme čtveřici $(G, *, ', e)$, kde G je množina, na které jsou definovány binární operace $*$ (tj. zobrazení $G \times G \to G$), unární operace $'$ (tj. zobrazení $G \to G$) a prvek $e \in G$ splňující pro každé $a, b, c \in G$ následující podmínky:*

$$a * (b * c) = (a * b) * c$$
$$a * e = e * a = a$$
$$a * a' = a' * a = e.$$

Věta 1. *Nechť $n \in \mathbb{N}$, pak množina všech izometrií z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^n$ spolu s binární operací „$\circ$“, unární operací „$^{-1}$“ a identickým zobrazením e ($e : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ takové, že $ex = x$ pro všechna $x \in \mathbb{R}^n$) tvoří grupu.*

Toto tvrzení známe z lineární algebry a nebudeme ho tedy dokazovat.

Definice 3 (G-kongruence)**.** *Nechť $n \in \mathbb{N}$, $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ a G je grupa izometrií na $\mathbb{R}^n$. Řekneme, že A, B jsou* G-kongruentní *(značíme $A \cong_G B$), pokud existuje $g \in G$ takové, že $gA = B$.*
Pokud je G grupa všech izometrií na $\mathbb{R}^n$, tj. G je úplná grupa (nebo je grupa jasně určena z kontextu), řekneme, že A, B jsou kongruentní *($A \cong B$).*

Definice 4 (G-ekvirozložitelnost)**.** *Nechť $n \in \mathbb{N}$, $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ a G je grupa izometrií na $\mathbb{R}^n$. Řekneme, že A, B jsou* G-ekvirozložitelné *(značíme $A \sim_G B$), pokud existuje konečná indexová množina I a rozklady $\{A_i\}_{i \in I}$ a $\{B_i\}_{i \in I}$ množin A a B a prvky $g_i \in G$ takové, že pro všechna $i \in I$ platí $g_i A_i = B_i$.* Rozkladem *množiny A budeme rozumět systém po dvou disjunktních množin takový, že A je rovno sjednocení tohoto systému.*
Pokud je G úplná grupa izometrií na $\mathbb{R}^n$ (nebo je grupa jasně určena z kontextu), řekneme, že A, B jsou ekvirozložitelné *($A \sim B$).*

1.2 Teorie množin

Banachův-Tarského paradox je podmíněný platností axiomu výběru. Jeho znění převezmeme z knihy *Teorie množin* (Balcar, 1986).

Axiom (výběru). Nechť $\mathcal{S}$ je systém množin, pak existuje zobrazení $f : \mathcal{S} \to \bigcup \mathcal{S}$ takové, že pro každé $S \in \mathcal{S}, S \neq \emptyset$, platí $f(S) \in S$.

Definice 5. *Řekneme, že množina X* má stejnou mohutnost jako *množina Y, pokud existuje bijekce $X \to Y$.*

Definice 6 (nekonečná množina dle Cantora)**.** *Množina X je* nekonečná *pokud existuje vlastní podmnožina X, která má stejnou mohutnost jako X.*

Definice 7 (spočetná množina)**.** *Řekneme, že množina je* spočetná*, pokud má stejnou mohutnost jako přirozená čísla. Množina je* nespočetná*, pokud je nekonečná a není spočetná.*

1.3 Teorie míry

Definice 8 (σ-algebra)**.** *$\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ je* σ-algebra *na množině X, jestliže*

1. *$\emptyset, X \in \mathcal{A}$,*
2. *$A \in \mathcal{A} \implies X \setminus A \in \mathcal{A}$,*
3. *$A_i \in \mathcal{A}, i \in \mathbb{N} \implies \bigcup_i A_i \in \mathcal{A}$.*

Definice 9 (borelovská σ-algebra)**.** *Buď (X, ρ) metrický prostor a $\mathcal{G}$ systém všech otevřených podmnožin X. Definujme* borelovskou σ-algebru *$\mathcal{B}(X)$ jako nejmenší σ-algebru obsahující $\mathcal{G}$, tedy $\mathcal{B}(X) := \sigma\mathcal{G}$.*

Definice 10 (míra)**.** *Množinová funkce $\mu : \mathcal{A} \to [0,\infty]$ je* míra *na prostoru $(X, \mathcal{A})$, kde X je neprázdná množina a $\mathcal{A}$ je σ-algebra, jestliže*

1. *$\mu(\emptyset) = 0$,*
2. *pokud $A_i \in \mathcal{A}, i \in \mathbb{N}$, jsou po dvou disjunktní, pak $\mu(\bigcup_i A_i) = \sum_i \mu(A_i)$. Tuto vlastnost nazýváme* σ-aditivita*.*

Definice 11. *Symbolem $\mathcal{O}_n$ značme množinu všech omezených otevřených kvádrů v $\mathbb{R}^n$. Objem kvádru $I = (a_1, b_1) \times \cdots \times (a_n, b_n) \in \mathcal{O}_n$ definujme jako*

$$v(I) = (b_1 - a_1) \cdot ... \cdot (b_n - a_n).$$

Definice 12. *Pro množinu $E \subset \mathbb{R}^n$ definujme*

$$\lambda^{n*}(E) = \inf\{\sum_{i=1}^{\infty} v(I_i) : E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i, I_i \in \mathcal{O}_n, i \in \mathbb{N}\}.$$

Řekneme, že množina $E \subset \mathbb{R}^n$ je λ^{n*}-měřitelná, *pokud pro každé $A \subset \mathbb{R}^n$ platí:*

$$\lambda^{n*}(A) = \lambda^{n*}(A \cap E) + \lambda^{n*}(A \setminus E).$$

Množinu všech λ^{n*}-měřitelných množin označme $\mathcal{A}_{\lambda^{n*}}$.

Poznámka. Caratheodoryova věta z TMI2 (Rataj, 2017) nám říká, že $\mathcal{A}_{\lambda^{n*}}$ je σ-algebra, $\lambda^{n*}|\mathcal{A}_{\lambda^{n*}}$ je míra a prostor $(\mathbb{R}^n, \mathcal{A}_{\lambda^{n*}}, \lambda^{n*})$ je úplný.

Ze stejného zdroje získáváme, že $\lambda^{n*}(I) = v(I)$ pro všechna $I \in \mathcal{O}_n$, že $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{A}_{\lambda^{n*}}$ a že míra $\lambda^{n*}|\mathcal{A}_{\lambda^{n*}}$je translačně invariantní.

Definice 13 (Lebesgueova míra)**.** *Míru $\lambda^{n*}|\mathcal{A}_{\lambda^{n*}}$ pak nazvěme* Lebesgueova míra *a značme λ^n.*

2. Paradoxy předcházející Banachovu-Tarského paradoxu

Následující paradoxy jsou inspirovány knihou *The Pea and the Sun Paradox* (Wapner, 2005).

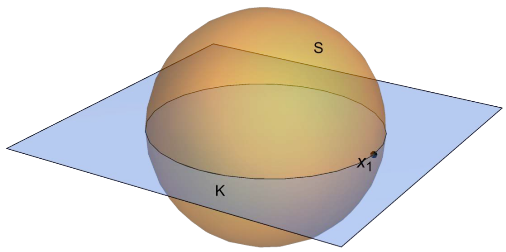
2.1 Posouvání z nekonečna

Díky definici 5 víme, že množiny $A = \{1, 2, 3, \dots\}$ a $B = \{3, 4, 5, \dots\}$ mají stejnou mohutnost, navzdory tomu, že druhá z nich neobsahuje body $\{1,2\}$. Tuto skutečnost nám dokládá bijekce $f : A \to B$, $f(x) = x + 2$. Podobně má reálná polopřímka $C = [0,\infty)$ stejnou mohutnost jako interval $D = [3,\infty)$ i přesto, že jsme odebrali nespočetné množství bodů. Zde použijeme bijekci $g : C \to D$, $f(x) = x + 3$.

V obou předchozích příkladech navíc platí, že jsou množiny kongruentní (a tedy ekvirozložitelné), neboť funkce f a g jsou izometrie. Uveďme nyní složitější příklad ekvirozložitelných množin v $\mathbb{R}^3$.

Chceme ukázat, že jednotková sféra S bez bodu x_1, kde x_1 je libovolný bod z S, je ekvirozložitelná celé sféře S. Jako na obrázku 2.1 volme jednu z kružnic na sféře procházející bodem x_1 a označme ji K. Dále označme p přímku, která prochází počátkem S a je kolmá na rovinu určenou kružnicí K.

Obrázek 2.1: Průnik roviny obsahující bod x_1 se sférou S

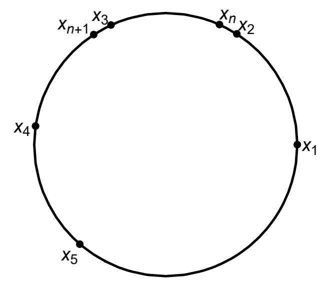


Na K nyní zvolme bod, který je vzdálený o jeden radián v kladném směru a označme jej x_2. Dále vezměme bod x_3, který je od x_2 vzdálený o jeden radián v kladném směru. Tímto postupem zkonstruujeme posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. Některé její členy jsou vyznačeny na obrázku 2.2. Díky tomu, že obvod kružnice je iracionální a délka oblouku mezi jednotlivými body x_n je rovna racionálnímu (dokonce celému) číslu, víme, že $x_m \neq x_n$ pro $m \neq n$.

Nechť A je množina sestávající z prvků této posloupnosti pro $n \geq 2$, pak A je spočetná. Označme dále B množinu všech bodů $S \setminus \{x_1\}$, které neleží v množině A. Pak množina A kongruentní s množinou $C = \{x_1, x_2, x_3, \dots\}$, neboť C získáme rotací A kolem osy p o jeden radián v záporném směru. Pak tedy

$$S \setminus \{x_1\} = A \cup B \sim C \cup B = S.$$

Obrázek 2.2: Některé členy posloupnosti $\{x_n\}$ na kružnici K



Ukažme nyní, že sféra S je ekvirozložitelná sféře $S \setminus H$, kde H je libovolná spočetná podmnožina S. Zvolme přímku p, která prochází počátkem a protíná S v bodech doplňku H. Takovou přímku lze nalézt, neboť H je spočetná. Vezměme všechny roviny, které jsou kolmé na přímku p a procházejí nějakým z bodů množiny H. Těchto rovin je nejvýš spočetně, neboť množina H je spočetná. Průnikem rovin se sférou vznikne spočetně mnoho kružnic a můžeme tedy postupovat podobně jako v případě výše.

Zvolme nyní takový úhel α, že každá rotace o úhel $n\alpha$, pro $n \in \{1, 2, 3, \dots\}$, kolem p zobrazí bod množiny H do $S \setminus H$. Takový úhel opět existuje, neboť máme jen spočetně mnoho úhlů, kterým se musíme vyhnout. Nechť pak A značí množinu, kterou získáme sjednocením všech otočení H kolem osy p o úhly $n\alpha$, $n \in \{1, 2, 3, \dots\}$. Pak A je spočetná a je kongruentní množině $A \cup H$ pomocí rotace kolem p o úhel $-\alpha$. Pak

$$S \setminus H = S \setminus (A \cup H) \cup A \sim S \setminus (A \cup H) \cup A \cup H = S.$$

2.2 Vitaliova neměřitelná množina

V důkazu Banachova-Tarského paradoxu pracujeme s lebesgueovsky neměřitelnými množinami. Právě díky nim jsme schopni docházet k výsledkům, které zdánlivě odporují naší představě o zachovávání objemu. Využíváme totiž toho, že objem lze zkoumat pouze u množin, které jsou lebesgueovsky měřitelné. Jednoduchý příklad lebesgueovsky neměřitelné množiny na reálné přímce sestrojil italský matematik Giuseppe Vitali (1905).

Poznámka. Abychom předešli zbytečnému opakování, budeme v dalším textu psát pouze *měřitelná množina* namísto *lebesgueovsky měřitelná množina.*

Na intervalu $[0, 1]$ definujme relaci $\simeq$ následujícím způsobem: $a \simeq b$, pokud $a - b$ je racionální. Relace $\simeq$ je ekvivalence, neboť pro libovolná $a, b, c \in [0, 1]$ platí:

- $a - a = 0 \in \mathbb{Q}$,
- pokud $a - b = q \in \mathbb{Q}$, pak $b - a = -q \in \mathbb{Q}$,
- pokud $a-b = q_1 \in \mathbb{Q}$ a $b-c = q_2 \in \mathbb{Q}$, pak $a-c = a-b+b-c = q_1+q_2 \in \mathbb{Q}$, neb součet dvou racionálních čísel je racionální.

Interval $[0,1]$ lze tedy rozdělit na třídy ekvivalence tak, že pro libovolné $a \in [0,1]$ máme třídu $[a] = \{b \in [0,1] : a \simeq b\}$. Pak je interval $[0,1]$ sjednocením nespočetně mnoha disjunktních tříd ekvivalence, přičemž každá třída obsahuje spočetně mnoho prvků.

Použitím axiomu výběru zvolme z každé třídy ekvivalence právě jeden prvek. Tuto podmnožinu $[0,1]$ pojmenujme *Vitaliova množina* a značme M. Ukažme, že M je neměřitelná.

Pro každé $q \in \mathbb{Q}$ položme $M_q = \{x + q : x \in M\}$. Množiny M_q jsou tedy posunutími M a jsou po dvou disjunktní (to vyplývá z toho, jak jsme volili množinu M). Pak z toho, jak byla množina M volena, vyplývá

$$\bigcup_{q \in \mathbb{Q}} M_q = \mathbb{R}.$$

Pro spor nyní předpokládejme, že množina M je měřitelná. Pak pro každé číslo $q \in \mathbb{Q}$ platí, že $\lambda(M_q) = \lambda(M)$, neboť se jedná o obraz množiny M při izometrickém zobrazení. Pokud $\lambda(M) = 0$, pak i

$$\lambda(\mathbb{R}) = \lambda(\bigcup_{q \in \mathbb{Q}} M_q) = \sum_{q \in \mathbb{Q}} \lambda(M_q) = 0,$$

a tedy $\lambda([0,1]) = 0$, neboť $[0,1] \subset \mathbb{R}$. To je ovšem spor s definicí 13 Lebesgueovy míry a poznámkou před definicí.

Nechť tedy $\lambda(M) > 0$. Pak ovšem

$$\lambda([0,2]) \geq \lambda(\bigcup_{q \in \mathbb{Q} \cap [0,1]} M_q) = \sum_{q \in \mathbb{Q} \cap [0,1]} \lambda(M_q) = \infty,$$

což je opět spor s definicí 13. Vitaliova množina je tedy neměřitelná, neboť nemá ani nulovou ani kladnou míru.

2.3 Sierpińského-Mazurkiewiczův paradox

Cílem této části bude v prostoru $\mathbb{R}^2$ najít takové množiny E, E_1 a E_2, že

$$E_1 \cup E_2 = E,$$
$$E_1 \cap E_2 = \emptyset,$$
$$E_1 \cong E_2 \cong E.$$

Množiny budeme konstruovat postupem, který předvedli W. Sierpiński a S. Mazurkiewicz na konferenci v Paříži roku 1914 (Mazurkiewicz a Sierpiński, 1914).

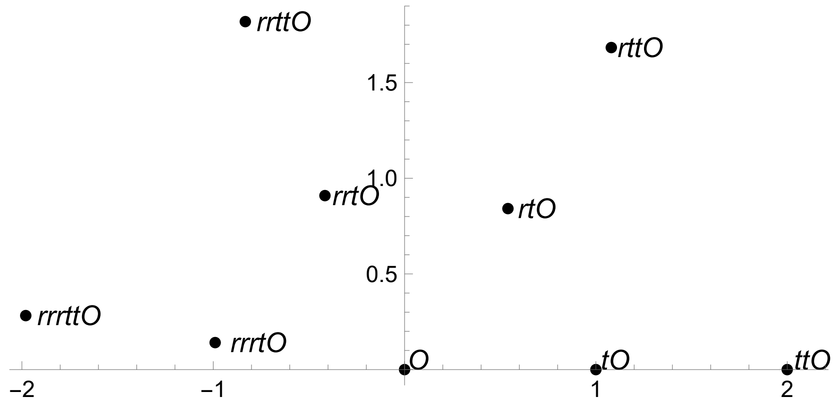
Nechť E sestává z počátku $O = [0,0]$ a bodů, které získáme z O konečným skládáním těchto izometrií:

- translace vpravo o 1, značme t,
- rotace v kladném směru o jeden radián kolem počátku, značme r.

E je zřejmě spočetná množina. Ukažme některé prvky množiny E na obrázku 2.3.

Dále položme $E_1 = tE$ a $E_2 = rE$. Pak zřejmě $E_1 \cong E$, $E_2 \cong E$. Dokažme nyní, že E_1 a E_2 jsou disjunktní a že $E = E_1 \cup E_2$.

Obrázek 2.3: Některé prvky množiny E



Pracujme s prostorem $\mathbb{R}^2$ jako s komplexní rovinou. Pak pro libovolné $z \in \mathbb{C}$ máme $tz = z + 1$ a $rz = ze^i$, kde e značí Eulerovo číslo. Pokud tedy například chceme na bod z aplikovat dvakrát rotaci r, pak translaci t a pak ještě jednou rotaci r, obdržíme:

$$z \to ze^{2i} \to ze^{2i} + 1 \to ze^{3i} + e^i.$$

Každý bod množiny $x \in E$ lze tedy reprezentovat jako $x = a_0 + a_1 e^i + a_2 e^{2i} + \cdots + a_n e^{ni}$, kde a_i, $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$, jsou nezáporná celá čísla a n je přirozené.

Pak E_1 obsahuje všechny body množiny E takové, že $a_0 > 0$ a E_2 body takové, že $a_0 = 0$. Zřejmě tedy $E = E_1 \cup E_2$. Dále také platí, že $E_1 \cap E_2 = \emptyset$. Pokud by totiž existoval $x \in E_1 \cap E_2$, pak by bod x měl dvě různé reprezentace závislé na e^i. Tedy e^i by bylo řešením polynomiální rovnice s celočíselnými koeficienty a to je spor s tím, že e^i je transcendentní (Lindemann, 1882).

3. Banachův-Tarského paradox a jeho důkaz

Formulujme větu pro jednotkovou kouli centrovanou v počátku. Tvrzení pak bude zřejmě platit i pro libovolnou kouli o poloměru jedna.

Věta 2 (Banachova-Tarského věta)**.** *Pro jednotkovou uzavřenou kouli*

$$B = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq 1\}$$

existují B_1 a B_2, pro které platí $B_1 \cap B_2 = \emptyset$, $B = B_1 \cup B_2$ a zároveň $B \sim B_1$, $B \sim B_2$. Symbol „$\sim$“ zde používáme pro označení ekvirozložitelnosti grupou všech izometrií v $\mathbb{R}^3$ (vizte definici 4).

Důkaz věty bude vycházet z postupu knize *The Pea and the Sun Paradox* (Wapner, 2005), přičemž některé části upravíme, či dále rozšíříme. Tvrzení dokážeme ve třech krocích. V prvním kroku definujeme grupu rotací pro jednotkovou sféru

$$S = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}.$$

Ve druhém kroku tyto rotace použijeme pro rozdělení sféry na disjunktní podmnožiny. Nakonec ve třetím kroku rozšíříme vlastnosti dokázané v prvních dvou krocích tak, aby platily jednotkovou kouli.

3.1 Grupa rotací G

Definujme nyní dvě základní rotace:

- τ označme rotaci kolem osy x_3 o úhel $\frac{2\pi}{3}$,
- σ označme rotaci kolem přímky procházející počátkem a bodem (1,0,1) o úhel π.

Pak lze rotace reprezentovat pomocí matic takto:

$$\tau = \begin{pmatrix} \frac{-1}{2} & \frac{-\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{-1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Skládáním těchto rotací získáme nekonečně mnoho dalších rotací. Například $\tau \circ \tau = \tau^2$ značí rotaci kolem osy x_3 o $\frac{4\pi}{3}$. Zřejmě

$$\tau^3 = \sigma^2 = e, \tag{3.1}$$

kde e označuje identitu.

Libovolnou rotaci vzniklou skládáním σ a τ lze zapsat jako konečnou posloupnost těchto rotací. U těchto posloupností budeme pro větší přehlednost vynechávat symbol skládání „$\circ$“. Dále platí, že na množinu vždy aplikujeme rotace z posloupnosti v pořadí zprava.

Díky (3.1) platí, že $\tau^4 = \tau\tau^3 = \tau e = \tau$. Obdobně platí, že $\sigma^3 = \sigma\sigma^2 = \sigma e = \sigma$ To lze pro τ, resp. σ použít pro libovolnou mocninu ≥ 3, resp. ≥ 2. Proto pak například lze výraz $\sigma^3\tau^8\sigma^5\tau^4\sigma$ upravit následovně:

$$\sigma^3\tau^8\sigma^5\tau^4\sigma = \sigma e\tau^2 ee\sigma ee\tau e\sigma = \sigma\tau^2\sigma\tau\sigma,$$

přičemž poslední výraz již nelze zkrátit. S výjimkou identity e lze tedy každou rotaci vzniklou ze σ a τ zapsat jako posloupnost tvořenou znaky σ, τ a τ^2. Tento zápis budeme nazývat *zkrácený tvar.*

Definice 14 (délka rotace)**.** Délku rotace ρ *vzniklé skládáním rotací* σ *a* τ *definujeme jako počet znaků (*σ*,* τ *a* τ^2*) nutný k jejímu zapsání ve zkráceném tvaru. Například* $\rho = \sigma\tau^2\sigma\tau\sigma$ *je délky* 5. *Identita* e *je délky* 0.

Celkem takovýmto skládáním dostaneme spočetně mnoho rotací. Množinu všech těchto rotací označme G. Množina G spolu s binární operací „$\circ$“, unární operací „$^{-1}$“ a identitou e tvoří grupu.

Věta 3 (o jednoznačnosti)**.** *Každá rotace* $\rho \in G$ *má jednoznačný zkrácený zápis. Speciálně, dvě různé posloupnosti tvořené znaky* σ*,* τ *a* τ^2 *značí různé rotace.*

Důkaz. Všimněme si, že každý zkrácený zápis rotace délky alespoň 2 bude v jednom z následujících tvarů:

- $\alpha = \tau^{P_1}\sigma\tau^{P_2}\sigma\ldots\tau^{P_n}\sigma$, nebo
- $\beta = \sigma\tau^{P_1}\sigma\tau^{P_2}\ldots\sigma\tau^{P_n}$, nebo
- $\gamma = \tau^{P_1}\sigma\tau^{P_2}\ \sigma\ldots\sigma\tau^{P_n}$, nebo
- $\delta = \sigma\tau^{P_1}\sigma\tau^{P_2}\ldots\tau^{P_n}\sigma$, kde $P_i \in \{1,2\}, \forall i \in \{1,\ldots,n\}$.

Pro zápis tvaru γ předpokládejme $n > 1$.

Nejprve dokažme, že žádným zkráceným zápisem rotace tvaru α nedostaneme identitu e. Z reprezentace τ a σ pomocí matic plyne, že

$$\tau\sigma = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{3} & -1 \\ 0 & 1 & \sqrt{3} \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau^2\sigma = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{3} & -1 \\ 0 & 1 & -\sqrt{3} \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ukažme matematickou indukcí, že

$$\alpha = \tau^{P_1}\sigma\tau^{P_2}\sigma\ldots\tau^{P_n}\sigma = \frac{1}{2^n}\begin{pmatrix} m_{11} & m_{12}\sqrt{3} & m_{13} \\ m_{21}\sqrt{3} & m_{22} & m_{23}\sqrt{3} \\ m_{31} & m_{32}\sqrt{3} & m_{33} \end{pmatrix},$$

kde m_{11}, m_{21}, m_{31}, m_{32} a m_{33} jsou sudá a ostatní m_{ij}, $i,j \in \{1,2,3\}$, jsou lichá celá čísla. Pro $n = 1$ to již máme ukázáno. Ukažme nyní, že z platnosti pro n plyne platnost pro $n+1$:

$$\tau\sigma\tau^{P_1}\sigma\tau^{P_2}\sigma\ldots\tau^{P_n}\sigma = \frac{1}{2^n}\begin{pmatrix} m_{11} & m_{12}\sqrt{3} & m_{13} \\ m_{21}\sqrt{3} & m_{22} & m_{23}\sqrt{3} \\ m_{31} & m_{32}\sqrt{3} & m_{33} \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{3} & -1 \\ 0 & 1 & \sqrt{3} \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$\frac{1}{2^{n+1}}\begin{pmatrix} 2m_{13} & \sqrt{3}\,(m_{11}+m_{12}) & 3m_{12}-m_{11} \\ 2m_{23}\sqrt{3} & 3m_{21}+m_{22} & \sqrt{3}\,(m_{22}-m_{21}) \\ 2m_{33} & \sqrt{3}\,(m_{31}+m_{32}) & 3m_{32}-m_{31} \end{pmatrix}.$$

Skládání s $\tau^2\sigma$ lze ukázat obdobně, a platí tedy, že sudost a lichost jednotlivých m_{ij}, $i{,}j \in \{1{,}2{,}3\}$, je opravdu zachována.

Pak $\alpha \neq e$. To plyne například z toho, že m_{13} je liché a tedy matice reprezentující rotaci α má v prvním řádku ve třetím sloupci prvek $\frac{m_{13}}{2^n} \neq 0$ a nemůže se tedy jednat o jednotkovou matici, která reprezentuje identitu e.

Pak i $\beta \neq e$, neboť $\alpha = \sigma\beta\sigma$. Pokud bychom měli $\beta = e$, pak i $\alpha = \sigma\beta\sigma = \sigma e\sigma = \sigma^2 = e$ a to je spor, neboť již víme, že $\alpha \neq e$.

Vezměme nyní rotaci tvaru γ. Nechť nejprve $P_1 = P_n$. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že $P_1 = 1 = P_n$, neboť v případě $P_1 = 2 = P_n$ lze postupovat analogicky. Pak máme $\gamma = \tau\sigma\tau^{P_2}\ \sigma\ldots\sigma\tau$, a tedy $\beta = \tau^2\gamma\tau$. Pak pokud $\gamma = e$, tak i $\beta = e$, a to nelze dle předchozího odstavce.

Nechť tedy pro rotaci tvaru γ platí $P_1 \neq P_n$. Postupujme sporem a vezměme nejmenší $n > 1$ takové, že $\gamma = \tau^{P_1}\sigma\tau^{P_2}\ \sigma\ldots\sigma\tau^{P_n} = e$. Pokud $n > 3$, pak $e = \sigma\tau^{P_n}\gamma\tau^{P_1}\sigma = \tau^{P_2}\sigma\ldots\sigma\tau^{P_{n-1}}$, která je ovšem také tvaru γ, což je spor s tím, že jsme volili n nejmenší možné. Pro $n = 2$ pak $e = \tau^{P_2}\gamma\tau^{P_1} = \sigma$, což je spor. Obdobně pro $n = 3$ máme $e = \sigma\tau^{P_3}\gamma\tau^{P_1}\sigma = \tau^{P_2}$, tedy opět spor. Proto $\gamma \neq e$.

Konečně $\delta \neq e$, neboť $\gamma = \sigma\delta\sigma$ a lze tedy použít stejný argument jako pro β. Zatím jsme tedy ukázali, že žádný zkrácený zápis rotace náležící G není roven e (s výjimkou samotné identity). Díky tomu nyní ukažme, že každý zkrácený zápis je jednoznačný.

Nechť pro spor existují dva různé zkrácené zápisy $\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_m$, $\rho_1\rho_2\ldots\rho_n$ jedné rotace z G (neboli $\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_m = \rho_1\rho_2\ldots\rho_n$). V tomto případě každé λ_i, ρ_j značí jeden ze symbolů σ, τ, τ^2. Volme nyní takové dva zkrácené zápisy, že $m + n$ je minimální. Pak z rovnosti zápisů máme:

$$\begin{gathered}(\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_m)(\rho_1\rho_2\ldots\rho_n)^{-1} = \\ \lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_m\rho_n^{-1}\ldots\rho_2^{-1}\rho_1^{-1} = \\ \rho_1\rho_2\ldots\rho_n\rho_n^{-1}\ldots\rho_2^{-1}\rho_1^{-1} = e,\end{gathered}$$

pak ale z prvního kroku důkazu musí platit $\lambda_m\rho_n^{-1} = e$ a tedy i $\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_{m-1} = \rho_1\rho_2\ldots\rho_{n-1}$. To je spor s minimalitou $m + n$. Pak má každá rotace v G jednoznačný zkrácený zápis.

□

Rozdělme nyní grupu G na tři podmnožiny G_1, G_2 a G_3. Prvky grupy G budeme rozřazovat rekurzivně podle jejich délky. Položme $e \in G_1$ a rotace délky 1 rozdělme takto: τ, $\sigma \in G_2$ a $\tau^2 \in G_3$. Nechť $\alpha \in G$ je rotace délky $l \geq 1$, pak rotace délky $l + 1$ odvozené od α rozřadíme pomocí tabulky 3.1, kde $\rho \in G$ značí nějakou rotaci délky $l - 1$.

	$\alpha \in G_1$	$\alpha \in G_2$	$\alpha \in G_3$
α tvaru $\tau\rho$, či $\tau^2\rho$	$\sigma\alpha \in G_2$	$\sigma\alpha \in G_1$	$\sigma\alpha \in G_1$
α tvaru $\sigma\rho$	$\tau\alpha \in G_2$	$\tau\alpha \in G_3$	$\tau\alpha \in G_1$
α tvaru $\sigma\rho$	$\tau^2\alpha \in G_3$	$\tau^2\alpha \in G_1$	$\tau^2\alpha \in G_2$

Tabulka 3.1: Algoritmus pro rozdělování grupy G

Pokud tedy například rotace α náleží G_1 a její zkrácený zápis je tvaru $\sigma\rho$, položme $\tau\alpha \in G_2$ a $\tau^2\alpha \in G_3$.

Tímto postupem tedy získáme rozklad G na tři podmnožiny:

$$\begin{aligned} G_1 &= \{e, \sigma\tau, \sigma\tau^2, \tau^2\sigma, \dots\} \\ G_2 &= \{\sigma, \tau, \tau\sigma\tau, \sigma\tau^2\sigma, \tau\sigma\tau^2, \dots\} \\ G_3 &= \{\tau^2, \tau\sigma, \tau^2\sigma\tau, \dots\}. \end{aligned}$$

Věta 4. *Platí následující rovnosti:*

$$\begin{aligned} \tau G_1 &= G_2 \\ \tau^2 G_1 &= G_3 \\ \sigma G_1 &= G_2 \cup G_3. \end{aligned}$$

Důkaz. Dokažme, že α leží v G_1 tehdy a jen tehdy, leží-li $\tau\alpha$ v G_2. Předpokládejme, že všechny prvky grupy G byly rozřazeny podle algoritmu daného tabulkou 3.1. Předpokládejme dále, že délka l rotace α je alespoň 2, neboť pro rotace délky $l < 2$ lze toto tvrzení snadno ověřit. Povšimněme si, že délka rotace $\tau\alpha$ nemusí být $l + 1$. Například v případě $\alpha = \tau^2\sigma$ platí $\tau\alpha = \tau^3\sigma = \sigma$. Rozlišme nyní tři případy.
α je tvaru $\sigma\rho$ pro $\rho \in G$ délky $l - 1$:

Pokud je α prvkem G_1, pak podle algoritmu daného tabulkou 3.1 platí $\tau\alpha \in G_2$. Ukažme opačnou implikaci. Nechť $\tau\alpha \in G_2$. Z tabulky 3.1 vidíme, že jsou jen tři možnosti, jak přidat prvek do množiny G_2. Podmínky $\tau\alpha \in G_2$ a $\alpha = \sigma\rho$ jednoznačně určují, že $\alpha \in G_1$.
α je tvaru $\tau\rho$ pro $\rho \in G$ délky $l - 1$:

Pak tedy zkrácený zápis ρ končí rotací σ, jinak by zkrácený zápis α nebyl délky l. Předpokládejme, že $\alpha \in G_1$. Algoritmus nabízí čtyři možnosti, jak přiřadit prvek do množiny G_1. Podmínky $\rho = \sigma \dots$ a $\alpha \in G_1$ jednoznačně určují, že $\rho \in G_3$. Pak tedy opět využitím tabulky 3.1 dostáváme $\tau\alpha = \tau^2\rho \in G_2$. Pro obrácenou implikaci předpokládejme, že $\tau\alpha = \tau^2\rho$ leží v G_2. Opět vidíme, že prvky do G_2 lze přiřadit třemi způsoby. Protože ve zkráceném zápisu máme $\rho = \sigma \dots$, musí platit, že $\rho \in G_3$. Pak tedy podle algoritmu $\alpha = \tau\rho \in G_1$.
α je tvaru $\tau^2\rho$ pro $\rho \in G$ délky $l - 1$:

Pak tedy zkrácený zápis ρ končí rotací σ. Předpokládejme, že $\alpha \in G_1$. Opět máme čtyři možnosti, jak přiřadit prvek do množiny G_1. Podmínky $\rho = \sigma \dots$ a $\alpha \in G_1$ jednoznačně určují, že $\rho \in G_2$. Pak $\tau\alpha = \tau^3\rho = \rho \in G_2$. Pro důkaz opačné implikace předpokládejme, že $\tau\alpha = \tau^3\rho = \rho$ leží v množině G_2. Pak z podmínek $\rho \in G_2$ a $\rho = \sigma \dots$ a tabulky 3.1 plyne, že $\alpha = \tau^2\rho \in G_1$.

Tímto jsme dokázali první rovnost, druhou lze ukázat analogicky za pomoci algoritmu z tabulky 3.1. Ukažme nyní ještě platnost třetí rovnosti. Tedy, že α délky l leží v G_1 tehdy a jen tehdy, leží-li $\sigma\alpha$ v $G_2 \cup G_3$. Rozlišme dva případy.
α je tvaru $\sigma\rho$ pro $\rho \in G$ délky $l - 1$:

Pak buď $\rho = \tau \dots$, nebo $\rho = \tau^2 \dots$, neboť jinak by α nebyla délky l. Nechť $\alpha \in G_1$. Máme čtyři možnosti, jak přiřadit prvek do množiny G_1. Podmínky $\rho = \tau \dots$ a $\alpha \in G_1$ určují, že buď $\rho \in G_2$, nebo $\rho \in G_3$. Pro $\rho = \tau^2 \dots$ dostáváme stejný výsledek. Pak $\sigma\alpha = \sigma^2\rho = \rho \in G_2 \cup G_3$. Pro důkaz opačné implikace předpokládejme, že $\sigma\alpha = \sigma^2\rho = \rho$ leží v $G_2 \cup G_3$. Pak z podmínek $\rho \in G_2$, nebo $\rho \in G_3$ a $\rho = \tau \dots$, či $\rho = \tau^2 \dots$ plyne, že $\alpha = \sigma\rho \in G_1$.

α je tvaru $\tau\rho$, nebo $\tau^2\rho$ pro $\rho \in G$ délky $l-1$:

Pokud je α prvkem G_1, pak podle algoritmu daného tabulkou 3.1 platí $\sigma\alpha \in G_2$, tedy i $\sigma\alpha \in G_2 \cup G_3$. Ukažme opačnou implikaci. Nechť $\sigma\alpha \in G_2$, nebo $\sigma\alpha \in G_3$. Z tabulky 3.1 vidíme, že je pět možností, jak přidat prvek do množiny $G_2 \cup G_3$. Podmínky $\sigma\alpha \in G_3$ a $\alpha = \tau\rho$, či $\alpha = \tau^2\rho$ nesplňuje žádná α. Podmínky $\sigma\alpha \in G_2$ a $\alpha = \tau\rho$, či $\alpha = \tau^2\rho$ jednoznačně určují, že $\alpha \in G_1$.

Dokázali jsme tedy, že α leží v G_1 tehdy a jen tehdy, leží-li $\sigma\alpha$ v $G_2 \cup G_3$. A tudíž i třetí rovnost platí. □

3.2 Dělení sféry

Naším cílem bude nyní rozdělit sféru $S = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$ na disjunktní množiny, se kterými budeme dále pracovat. Nejprve si všimněme, že pro každou rotaci $\alpha \in G, \alpha \neq e$, existují právě dva body $x, y \in S$ takové, že $\alpha x = x$ a $\alpha y = y$.

Tyto body se nazývají *póly* rotace α a jsou tvořeny průsečíky osy rotace α s jednotkovou sférou S. Například póly rotace τ (tedy rotace kolem osy x_3 o úhel $\frac{2\pi}{3}$) jsou tvořeny body $(0, 0, 1)$ a $(0, 0, -1)$.

Jednotková sféra S obsahuje spočetně mnoho pólů, neboť v grupě G leží spočetně mnoho rotací a každá tato rotace má právě dva póly. Označme P množinu všech pólů ležících na S příslušejících rotacím z grupy G. Pak je množina $S \setminus P$ nespočetná, protože je doplňkem spočetné množiny P v nespočetné množině S.

Lemma 5. *Pro každé $\rho \in G$ a každé $x \in S \setminus P$ platí, že $\rho x \in S \setminus P$.*

Důkaz. Pro $\rho = e$ lemma zřejmě platí, uvažujme nyní $\rho \neq e$. Nechť pro spor $\rho x \in P$. Potom existuje $\alpha \in G$, $\alpha \neq e$, že $\alpha\rho x = \rho x$. Pak by ale x byl pólem rotace $\rho^{-1}\alpha\rho \in G$, $\rho^{-1}\alpha\rho \neq e$, a to je spor s volbou $x \in S \setminus P$.

□

Každý bod množiny $S \setminus P$ lze tedy pomocí rotací z G zobrazit na spočetně mnoho bodů z $S \setminus P$. Pokud pro body $x, y \in S \setminus P$ existuje $\alpha \in G$, že $\alpha x = y$, pišme $x \simeq_G y$.

Lemma 6. *Relace $\simeq_G$ je ekvivalence.*

Důkaz. Potřebujeme ukázat, že je reflexivní, symetrická a tranzitivní.

- $x \simeq_G x$ platí, neboť pro $e \in G$ platí $ex = x$.
- $x \simeq_G y \Rightarrow y \simeq_G x$: Nechť pro nějaké $\alpha \in G$ platí $\alpha x = y$. Pak z definice grupy 2 existuje $\alpha^{-1} \in G$, že $\alpha^{-1}\alpha = e$. Tedy $\alpha^{-1}y = \alpha^{-1}\alpha x = x$.
- $x \simeq_G y \wedge y \simeq_G z \Rightarrow x \simeq_G z$: Nechť pro nějaké $\alpha, \beta \in G$ platí $\alpha x = y$ a $\beta y = z$. Pak z definice grupy 2 plyne $\beta\alpha \in G$, a tedy $x \simeq_G z$, neboť $\beta\alpha x = \beta y = z$.

□

Celou množinu $S \setminus P$ lze tedy rozdělit do tříd ekvivalence vzhledem k relaci $\simeq_G$. Těchto tříd je nespočetně mnoho a každá obsahuje spočetně mnoho prvků. Použijme nyní axiom výběru 1.2 a zvolme právě jeden bod z každé třídy ekvivalence. Množinu takových bodů označme C. Všimněme si nyní, že množina C má následující vlastnosti:

1. C je nespočetná.

2. $C \subset S \setminus P$, tedy $C \cap P = \emptyset$.

3. Pokud pro $x,y \in C$ existuje $\alpha \in G$, že $\alpha x = y$, pak $y = x$ a $\alpha = e$.

4. Pro každé $y \in S \setminus P$ existuje $x \in C$ a rotace $\alpha \in G$, že $y = \alpha x$.

Vezměme nyní grupy rotací, které jsme odvodili v předchozí podkapitole. Označme

$$\begin{aligned} K_1 &= G_1 C, \\ K_2 &= G_2 C, \\ K_3 &= G_3 C, \end{aligned} \tag{3.2}$$

kde $G_i C$ pro $i \in \{1,2,3\}$ značí sjednocení všech množin vzniklých otočením C rotací z G_i.

Pak z vlastností 2,3 a 4 množiny C plyne, že K_1, K_2, K_3 a P jsou po dvou disjunktní a jejich sjednocením je celá S. Díky rovnicím (3.2) a vztahům G_1, G_2, G_3, které jsou shrnuty větou 4, můžeme provést následující pozorování.

Rotací τ množiny K_1 obdržíme K_2. K_1 a K_2 jsou tedy kongruentní, neboli $K_1 \cong K_2$. Obdobně, rotací τ^2 množiny K_1 obdržíme K_3. Tedy $K_1 \cong K_3$. Nakonec rotací σ dostáváme $K_1 \cong K_2 \cup K_3$. Pak

$$K_1 \cong K_2 \cong K_3 \cong K_2 \cup K_3. \tag{3.3}$$

Nyní položme:

$$\begin{aligned} S_1 &= P \cup K_1, \\ S_2 &= K_2 \cup K_3, \end{aligned}$$

tedy platí $S_1 \cup S_2 = S$ a zároveň $S_1 \cap S_2 = \emptyset$. Chceme ukázat, že S_1, resp. S_2 jsou ekvirozložitelné S (tedy $S_1 \sim S, S_2 \sim S$).

Pomocí kongruencí z (3.3) dostáváme:

$$\begin{aligned} S_1 &= P \cup K_1 \\ &\sim P \cup (K_2 \cup K_3) \\ &\sim P \cup K_1 \cup (K_2 \cup K_3) = S, \end{aligned}$$

kde první ekvirozložitelnost plyne z $K_1 \cong K_2 \cup K_3$ a druhá ekvirozložitelnost plyne z $K_2 \cong K_1$ a z $K_3 \cong K_2 \cup K_3$.

Obdobně pro S_2:

$$S_2 = K_2 \cup K_3 \sim K_1 \cup (K_2 \cup K_3) = S \setminus P. \tag{3.4}$$

Množina S_2 je tedy ekvirozložitelná množině $S \setminus P$. K dokončení této části důkazu nám zbývá ukázat, že $(S \setminus P) \sim S$. Jak jsme již zmínili výše, bodů množiny P je spočetně mnoho, tedy jsme je schopni pokrýt *posouváním z nekonečna*, které jsme uvedli ve druhé kapitole 2.1. Proto pak $(S \setminus P) \sim S$, což nám s použitím (3.4) dává:

$$S_2 \sim S \setminus P \sim S.$$

3.3 Rozšíření pro kouli

Nyní již máme dokázáno, že pro jednotkovou sféru $S = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$ existují S_1 a S_2, pro které platí $S_1 \cap S_2 = \emptyset$, $S = S_1 \cup S_2$ a zároveň $S \sim S_1$, $S \sim S_2$. Toto tvrzení je nyní třeba rozšířit tak, aby platilo pro celou jednotkovou kouli $B = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq 1\}$.

Definice 15 (vnitřní zhuštění)**.** *Pro každý bod $x \in S$ nyní definujme jeho* vnitřní zhuštění *jako množinu všech bodů z B ležících na úsečce mezi x a počátkem (ovšem kromě bodu* $(0, 0, 0)$*).* Vnitřní zhuštění *$K \subseteq S$ definujme jako vnitřní zhuštění všech bodů K a značme $\overline{K}$.*

Pak například $\overline{S} = B \setminus \{(0, 0, 0)\}$. Pracujme tedy nyní s množinami $\overline{S}$, $\overline{S_1}$, $\overline{S_2}$, $\overline{K_1}$, $\overline{K_2}$, $\overline{K_3}$, $\overline{P} \subseteq B$. V předchozí podkapitole jsme pro K_1, K_2, K_3 dokázali vztah (3.3), který ovšem platí i pro jejich vnitřní zhuštění:

$$\overline{K_1} \cong \overline{K_2} \cong \overline{K_3} \cong \overline{K_2 \cup K_3}.$$

To opět zřejmě plyne z věty 4 a z toho, jak jsme volili množiny $\overline{K_i}, i \in \{1, 2, 3\}$. Potom tedy analogicky jako v předchozí kapitole dostáváme:

$$\begin{aligned} \overline{S} &= \overline{S_1} \cup \overline{S_2}, \\ \overline{S_1} \cap \overline{S_2} &= \emptyset, \\ \overline{S} &\sim \overline{S_1}, \\ \overline{S} &\sim \overline{S_2}. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Položme:

$$\begin{aligned} B_1 &= \overline{S_1} \cup \{(0, 0, 0)\}, \\ B_2 &= \overline{S_2}, \end{aligned}$$

tedy ze vztahů daných první a druhou rovnicí v (3.5) plyne $B_1 \cup B_2 = B$ a zároveň $B_1 \cap B_2 = \emptyset$.

Dále

$$B_1 = \overline{S_1} \cup \{(0, 0, 0)\} \sim \overline{S} \cup \{(0, 0, 0)\} = B$$

díky třetí rovnici z (3.5) a

$$B_2 = \overline{S_2} \sim \overline{S} \sim \overline{S} \cup \{(0, 0, 0)\} = B,$$

kde první ekvirozložitelnost plyne ze čtvrté rovnice v (3.5). Druhá ekvirozložitelnost plyne opět využitím *pousouváním z nekonečna* popsaném v druhé kapitole 2.1. Tím je tedy věta 2 dokázána.

Všimněme si dále, že Banachova-Tarského věta platí také pro koule libovolného poloměru, neboť můžeme definovat zhušťování (případně zužování) z jednotkové koule na kouli jiného poloměru podobně jako jsme postupovali v definici 15.

4. De Grootův problém a jeho řešení

Banachův-Tarského paradox vyvolal po svém zveřejnění řadu otázek týkajících se zejména toho, zda je toto „množení“ koulí fyzicky proveditelné a jaké by pak mělo dopady pro svět mimo matematiku. Jedním z předpokladů fyzické proveditelnosti paradoxu je možnost jednotlivé množiny spojitě posouvat, a ne jen předpokládat jejich okamžité přesunutí na výsledné kongruentní množiny. Tento problém formuloval roku 1958 holandský matematik Johannes de Groot a je znám pod názvem De Grootova otázka.

Otázka 7 (De Groot)**.** *Nechť B, B_1 a B_2 jsou po dvou disjunktní koule v $\mathbb{R}^3$ s poloměrem délky 1. Lze pak B rozložit na množiny $A_1,\ldots,A_m,A_{m+1},\ldots,A_{m+n}$ tak, že pro všechna $i = 1,...,m+n$ a $t \in [0,1]$ existuje izometrie σ_t^i splňující následující podmínky?*

1. *σ_0^i je identita; $\sigma_1^i(A_i)$ pro $i = 1,...,m$ je rozkladem B_1 a $\sigma_1^i(A_i)$ pro $i = m+1,...,m+n$ je rozkladem B_2.*
2. *Pro každé i závisí izometrie σ_t^i spojitě na t (pro vysvětlení spojité závislosti vizte definici 16).*
3. *Pro každé $t \in [0,1]$ jsou množiny $\sigma_t^i(A_i)$, $i = 1,...,m+n$, po dvou disjunktní.*

Řešení De Grootovy otázky budeme hledat pomocí článku Trevora Wilsona (Wilson, 2005). Především je třeba zobecnit dříve používaný pojem ekvirozložitelnosti na spojitou ekvirozložitelnost.

Dále chceme na podmnožinách $\mathbb{R}^3$ zavést operaci sčítání a dokázat některé její vlastnosti. To nám pak umožní definovat vyprostitelnost dvojice množin, potažmo vyprostitelnost množinového systému.

4.1 Spojitá ekvirozložitelnost

V následující podkapitole rozšíříme definici G-ekvirozložitelnosti (definice 4) zavedením nového pojmu G-cesty.

Definice 16 (G-cesta)**.** *Nechť $n \in \mathbb{N}$, $t \in [0,1]$, a G je grupa izometrií na $\mathbb{R}^n$. Pro nějaké $g \in G$ definujeme příslušnou* G-cestu *γ_t tak, že $\gamma_0 = e$, $\gamma_1 = g$ a γ_t je spojitě závislá na t. Spojitou závislostí rozumíme, že pro libovolný bod $x \in \mathbb{R}^n$ platí:*

- $\lim_{t\to s} \gamma_t(x) = \gamma_s(x)$ *pro každé* $s \in (0,1)$,
- $\lim_{t\to 1-} \gamma_t(x) = \gamma_1(x)$,
- $\lim_{t\to 0+} \gamma_t(x) = \gamma_0(x)$.

Pokud je G úplná grupa izometrií na $\mathbb{R}^n$ (nebo je grupa jasně určena z kontextu), budeme hovořit pouze o cestách.

Značení: Ve zbytku kapitoly značí I,J konečné indexové množiny, pokud není řečeno jinak.

Definice 17 (spojitá G-ekvirozložitelnost)**.** *Nechť $n \in \mathbb{N}$, $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ a G je grupa izometrií na $\mathbb{R}^n$. Řekneme, že A, B jsou* spojitě G-ekvirozložitelné *($A \approx_G B$), pokud existují konečná rozdělení $\{A_i\}_{i\in I}$ a $\{B_i\}_{i\in I}$ množin A a B a množina G-cest $\{\gamma^i\}_{i\in I}$ taková, že pro všechna $i \in I$ platí*

$$\begin{aligned} \gamma_0^i &= e, \\ \gamma_1^i A_i &= B_i, \\ \gamma_t^i A_i \cap \gamma_t^j A_j &= \emptyset \end{aligned}$$

pro všechna $t \in [0,1]$, $j, i \in I$, $j \neq i$.
Pokud je G úplná grupa izometrií na $\mathbb{R}^n$ (nebo je grupa jasně určena z kontextu), řekneme, že A, B jsou spojitě ekvirozložitelné *($A \approx B$).*

Poznámka. Zřejmě platí, že pokud jsou dvě množiny kongruentní, pak jsou i spojitě ekvirozložitelné.

Motivace a interpretace: Klasická verze paradoxu hovoří o diskrétní ekvirozložitelnosti. V takovém případě požadujeme γ_t^i definované pouze pro $t \in \{0,1\}$, a tedy pro $\gamma_1^i = g_i \in G$ odpovídá $g_i A_i$ okamžitému přemístění A_i na B_i.
Spojitá ekvirozložitelnost naopak umožňuje plynule realizovat otáčení (posouvání) A_i na B_i a navíc zaručuje, že si množiny při pohybu vzájemně nepřekážejí. Dalo by se tedy říci, že při spojité ekvirozložitelnosti by měly být jednotlivé pohyby fyzicky proveditelné.

Tvrzení 8. *Relace $\approx$ je ekvivalence.*

Důkaz. Chceme ukázat, že $\approx$ je reflexivní, symetrická a tranzitivní.

- $A \approx A$: platí pro $G = \{e\}$ a triviální rozklad množiny A.
- $A \approx B \Rightarrow B \approx A$: Pokud pro $\{A_i\}_{i\in I}$, $\{B_i\}_{i\in I}$ a $\{\gamma^i\}_{i\in I}$ platí $A \approx B$, pak pro týž rozklad A a B a cesty $\{\gamma_{1-t}^i(\gamma_1^i)^{-1}\}_{i\in I}$ platí $B \approx A$.
- $(A \approx B \land B \approx C) \Rightarrow A \approx C$: Pokud pro $\{A_i\}_{i\in I}$, $\{B_i\}_{i\in I}$ a $\{\gamma^i\}_{i\in I}$ platí $A \approx B$ a navíc pro $\{B_j'\}_{j\in J}$, $\{C_j\}_{j\in J}$ a $\{\delta^j\}_{j\in J}$ platí $B \approx C$, pak pro rozklady $\{A_i \cap (\gamma_1^i)^{-1}B_j'\}_{i\in I, j\in J}$ a $\{C_j \cap \delta_1^j B_i\}_{i\in I, j\in J}$ a cesty $\{\gamma^i.(\delta^j\gamma_1^i)\}_{i\in I, j\in J}$ platí $A \approx C$, symbol „.“ značí skládání cest.

Tedy $\approx$ je relace ekvivalence.

□

4.2 Operace sčítání na množinách, vyprostitelnost

Definice 18 (Ideál)**.** *Nechť X je množina. Ideálem na množině X rozumíme systém množin $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{P}(X)$ uzavřený na podmnožiny a konečná sjednocení.*

V dalším textu uvažujme ideál $\mathcal{B}$ všech omezených podmnožin $\mathbb{R}^n, n \geq 2$. Nechť dále grupa G izometrií na $\mathbb{R}^n$ obsahuje všechna posunutí v prvních dvou souřadnicích (tento fakt budeme značit $\mathbb{R}^2 \subseteq G$). Pokud není řečeno jinak, budeme pro jednoduchost uvažovat grupu všech izometrií na $\mathbb{R}^n$.

Definice 19. *Pro $A \in \mathcal{B}$ označme $[A] = \{A' \in \mathcal{B} : A' \approx A\}$ a definujme operaci sčítání:*

$$[A] + [B] = [(A + u) \cup (B + v)] \,, \tag{4.1}$$

kde u,$v \in \mathbb{R}^2 \subseteq G$ (neboli u a v jsou n-rozměrné vektory tvaru $(u_1, u_2, 0,\ldots, 0)$, resp. $(v_1, v_2, 0,\ldots, 0)$, kde $u_1, u_2, v_1, v_2 \in \mathbb{R}$) jsou zvolené tak, že $A + u$ leží ostře vlevo od $B + v$ v první souřadnici, tedy

$$p_1(v - u) > p_1(a - b) \tag{4.2}$$

pro každé $a \in A$ a každé $b \in B$, kde p_1 je projekce do první souřadnice. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $u_2 = 0 = v_2$, pokud není řečeno jinak.

Tvrzení 9. *Operace* (4.1) *je dobře definovaná, asociativní a komutativní.*

Důkaz.

- Součet $[A]+[B]$ je nezávislý na volbě u a v: Nechť u' a v' splňují podmínku (4.2). Pak $C := (A+u)\cup(B+v) \approx (A+u')\cup(B+v')$, neboť C lze rozložit na množiny $(A+u)$ a $(B+v)$, kde první posuneme o vektor $u'-u$ a druhou o $v'-v$.

- Součet $[A] + [B]$ je nezávislý na volbě zástupců $[A]$ a $[B]$: Nechť $A \approx A'$ pomocí rozkladů $\{A_i\}_{i\in I}$, $\{A'_i\}_{i\in I}$ a cest $\{\alpha^i\}_{i\in I}$, a $B \approx B'$ pomocí rozkladů $\{B_j\}_{j\in J}$, $\{B'_j\}_{j\in J}$ a cest $\{\beta^j\}_{j\in J}$. A a B jsou omezené, indexové množiny I, J jsou konečné a interval [0,1] je kompaktní, lze tedy zvolit u a v takové, že
$$\begin{gathered} p_1(v-u) > p_1(a-b), \\ \forall i \in I, \forall j \in J, \forall t \in [0{,}1], \forall a \in \alpha^i_t(A_i), \forall b \in \beta^j_t(B_j). \end{gathered} \tag{4.3}$$
To plyne z faktu, že
$$F(t) := \max_{i\in I, j\in J} \sup\{p_1(a-b) : a \in \alpha^i_t(A_i), b \in \beta^j_t(B_j)\}$$
je spojitá funkce z intervalu [0,1] s hodnotami v $\mathbb{R}$, a je tedy omezená. Lze tudíž nalézt u a v, že (4.3) platí.
Pak je rovnost $[A] + [B] = [A'] + [B']$ ukázána pomocí rozkladů $\{A_i + u\}_{i\in I} \cup \{B_j + v\}_{j\in J}$ a $\{A'_i + u\}_{i\in I} \cup \{B'_j + v\}_{j\in J}$ a cestami $\{\tau_u\alpha^i\tau_{-u}\}_{i\in I} \cup \{\tau_v\beta^j\tau_{-v}\}_{j\in J}$, kde τ_w značí posunutí v první souřadnici přičtením vektoru $w \in \{u, -u, v, -v\}$.

- Asociativita: Pro vhodné vektory u,v,w dostáváme
$$\begin{gathered} ([A] + [B]) + [C] = [(A + u) \cup (B + v)] + [C] = \\ [(A + u) \cup (B + v) \cup (C + w)] = \\ [A] + [(B + v) \cup (C + w)] = [A] + ([B] + [C])\,. \end{gathered}$$

- Komutativita: Zvolme $r_0 > \operatorname{diam}(A \cup B)$, pak pro vektor $r \in \mathbb{R}^2 \subseteq G$, $r = (r_0,0,\ldots,0)$ je rovnost
$$[A] + [B] = [A \cup (B + r)] = [A \cup (B - r)] = [B] + [A]$$

ukázána pomocí cest $\gamma_t^1 = (0,0,...,0)$ a $\gamma_t^2 = (\mathrm{Re}(r_0 e^{i\pi t} - r_0), \mathrm{Im}(r_0 e^{i\pi t} - r_0),0,...,0)$, kde Re a Im značí reálnou a imaginární část.
Množiny $\gamma_t^1 A$ a $\gamma_t^2 B$ jsou pro každé $t \in [0,1]$ disjunktní, neboť A zůstává fixní a B se pohybuje po kružnici, která má poloměr roven r_0.

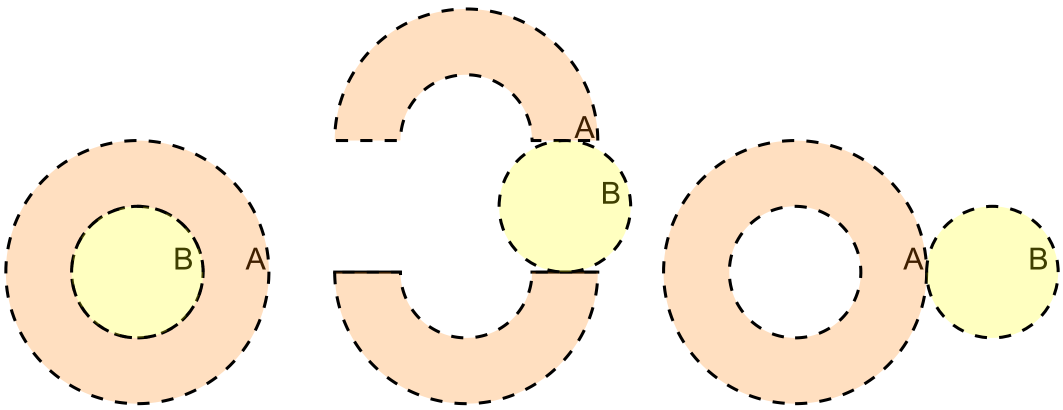
Tedy operace je dobře definována, je asociativní a komutativní.

□

Definice 20 (Vyprostitelnost)**.** *Dvojice disjunktních množin $A,B \in \mathcal{B}$ je vyprostitelná, pokud $[A]+[B] = [A \cup B]$. Obecněji, konečný systém po dvou disjunktních množin $A_i \in \mathcal{B}$ je vyprostitelný, pokud $\sum_i [A_i] = [\bigcup_i A_i]$.*

Příklad: Uveďme jednoduchý příklad v $\mathbb{R}^2$. Množina $B = \{(x,y) : x^2+y^2 < 1\}$ je vyprostitelná od $A = \{1 < x^2 + y^2 < 4\}$. Neboť $[A \cup B] = [A \cup B + (3,0,0)] = [A] + [B]$, kde první rovnost platí díky spojité ekvirozložitelnosti ukázané na obrázku 4.1

Obrázek 4.1: Spojitá ekvirozložitelnost množin $A \cup B$ a $A \cup B + (3,0,0)$



Definice 21 ($\mathcal{C}$)**.** *Systém všech omezených množin takových, že každá dvojice disjunktních množin tohoto systému je vyprostitelná, budeme značit $\mathcal{C}$.*

4.3 Vztah systému omezených a systému vyprostitelných množin

Naším cílem bude nyní dokázat, že pro $\mathbb{R}^n, n \geq 2$, platí $\mathcal{C} = \mathcal{B}$, tedy, že v systému omezených množin je každá dvojice disjunktních množin vyprostitelná. Induktivně pak bude v $\mathcal{B}$ každý konečný podsystém po dvou disjunktních množin vyprostitelný.

Lemma 10. *Systém $\mathcal{C}$ je uzavřený na podmnožiny a sjednocení vyprostitelných systémů.*

Důkaz. Pokud je $\{A_i\}_{i\in I}$ vyprostitelný systém a $\{A'_i\}_{i\in I}$ je systém takový, že $\forall i \in I : A'_i \subseteq A_i$, pak i $\{A'_i\}_{i\in I}$ je vyprostitelný a to pomocí stejných cest.

Nechť systém $\{A_i\} \in \mathcal{C}$ tvoří vyprostitelný systém, pak pro konečně mnoho po dvou disjunktních množin $B_j \subseteq \bigcup_i A_i$ dostáváme

$$\left[\bigcup_j B_j\right] = \sum_i \left[\bigcup_j (A_i \cap B_j)\right] = \sum_{i,j} [A_i \cap B_j] = \sum_j \left[\bigcup_i (A_i \cap B_j)\right] = \sum_j [B_j],$$

kde druhá a třetí rovnost plynou z toho, že $\{A_i\} \in \mathcal{C}$ a $\mathcal{C}$ je uzavřený na podmnožiny, jak jsme ukázali výše. □

Lemma 11. *Existují disjunktní množiny S_1 a S_2 takové, že $\mathbb{R} = S_1 \cup S_2$ a množina*

$$\Delta S_i = S_i - S_i = \{x \in \mathbb{R}; \exists y, z \in S_i : x = y - z\}$$

má hustý doplněk v $\mathbb{R}$ pro $i \in \{1,2\}$.

Důkaz. Položme

$$K = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{3^n}\mathbb{Z}, \quad H = K + \frac{1}{2}\mathbb{Z}.$$

Použitím axiomu výběru zvolme $\{r_\alpha\}$ zástupce ze tříd ekvivalence faktorprostoru $\mathbb{R}/H$ a položme

$$S_1 = \bigcup_\alpha (r_\alpha + K), \quad S_2 = S_1 + \frac{1}{2},$$

pak S_1 a S_2 jsou disjunktní a $\mathbb{R} = S_1 \cup S_2$. Dále pro všechna $a,b \in S_i$ platí, že pokud $a - b \in H$, pak $a - b \in K$. Pro S_1 to plyne z faktu, že $a = r_{\alpha_a} + k_a$ a $b = r_{\alpha_b} + k_b$, kde $k_a, k_b \in K$. Pak pokud $\alpha_a = \alpha_b$, tak $a - b = k_a - k_b \in K$.
Naopak, pokud $\alpha_a \neq \alpha_b$, tak $a - b = r_{\alpha_a} - r_{\alpha_b} + k_a - k_b$. Díky tomu, že r_{α_a} a r_{α_b} jsou zástupci různých tříd ekvivalence, jejich rozdíl nenáleží H a tedy i $a - b \notin H$.
Pro S_2 je postup analogický, neboť dochází k odečtení $\frac{1}{2}$.
Tedy ΔS_i je disjunktní množině $H \setminus K$ a zbývá dokázat, že tato množina je hustá.
K tomu chceme ukázat, že $H \setminus K = K + \frac{1}{2}$. Pro $x \in H \setminus K$ máme, že

$$x = \frac{z_1}{3^n} + \frac{z_2}{2},$$

kde $z_2 \in \mathbb{Z}$ je liché a $z_1 \in \mathbb{Z}$. To platí právě tehdy, když $\frac{z_2 - 1}{2} = z_3 \in \mathbb{Z}$. Tedy

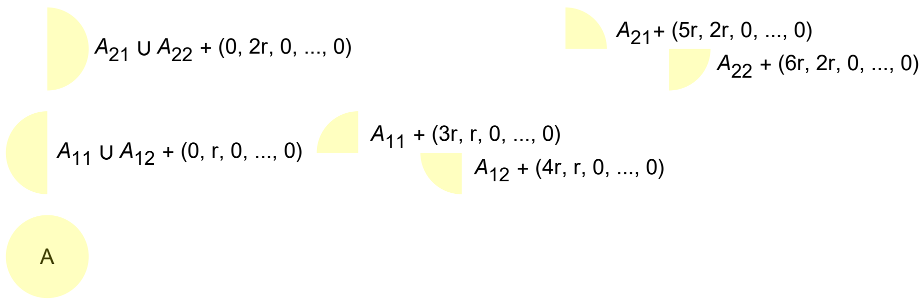
$$x = \frac{z_1 + 3^n z_3}{3^n} + \frac{1}{2} \in K + \frac{1}{2}.$$

Dohromady tedy dostáváme, že $\mathbb{R} \setminus \Delta S_i = H \setminus K = K + \frac{1}{2}$, což je hustá množina. □

Věta 12. *Pro $n \geq 2$ je v systému omezených podmnožin $\mathbb{R}^n$ každá dvojice disjunktních množin vyprostitelná, neboli $\mathcal{C} = \mathcal{B}$.*

Důkaz. Inkluze $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{B}$ je zřejmá, dokažme nyní opačnou inkluzi. Nechť $A \in \mathcal{B}$. Chceme ukázat, že $A \in \mathcal{C}$. Zvolme množiny $S_1, S_2 \subset \mathbb{R}$ z lemmatu 11, definujme $S_{ij} = S_i \times S_j \times \mathbb{R}^{n-2}$ a $A_{ij} = A \cap S_{ij}$, kde $i,j \in \{1,2\}$. Zvolme r větší než diametr A, pak dokážeme vyprostitelnost systému $\{A_{ij}\}_{i,j \in \{1,2\}}$ tak, že ve druhé dimenzi posuneme A_{ij} o ir a v první dimenzi o $(2i + j)r$. Vizme názornou ukázku na obrázku 4.2.

Obrázek 4.2: Posouvání množin A_{ij} o příslušné násobky r



Díky lemmatu 10 stačí ukázat, že $A_{ij} \in \mathcal{C}$. Pro libovolné $i,j \in \{1,2\}$ zvolme disjunktní množiny $B, C \subseteq A_{ij}$. Naším cílem bude nalézt cestu $\gamma \in \mathbb{R}^2 \subseteq G$, která tyto množiny vyprošťuje. Zvolme posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ v $\mathbb{R} \setminus \Delta S_i$ takovou, že $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, a posloupnost $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ v $\mathbb{R} \setminus \Delta S_j$, že $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$. To lze díky tomu, že ΔS_i a ΔS_j mají podle lemmatu 11 husté doplňky. Dále definujme posloupnost $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$ prvků z $\mathbb{R}^2 \subseteq G$ následovně

$$v_0 = (r,b_0,0,0,...,0),\ v_{2n+1} = (a_n,b_n,0,0,...,0),\ v_{2n+2} = (a_n,b_{n+1},0,0,...,0).$$

Nyní na intervalech $\left(2^{-k-1}, 2^{-k}\right]$ definujme cestu γ jako lineární proložení v_{k+1} a v_k, tedy:

$$\gamma(t) = \begin{cases} \left(2\left(t-\frac{1}{2}\right)r + 2\left(1-t\right)a_0, b_0, 0, ..., 0\right) \\ \text{na } \left(\frac{1}{2}, 1\right], \\ \left(2^{2n+1}\left(t-2^{-2n-1}\right)a_{n-1} + 2^{2n+1}\left(2^{-2n}-t\right)a_n, b_n, 0, ..., 0\right) \\ \text{na } \left(2^{-2n-1}, 2^{-2n}\right], n \geq 1, \\ \left(a_n, 2^{2n+2}\left(t-2^{-2n-2}\right)b_n + 2^{2n+2}\left(2^{-2n-1}-t\right)b_{n+1}, 0, ..., 0\right) \\ \text{na } \left(2^{-2n-2}, 2^{-2n-1}\right], n \geq 0. \end{cases}$$

Položme dále $\gamma(0) = (0,0,...,0)$.

Pak $\gamma_t \notin \Delta S_i \times \Delta S_j \times \mathbb{R}^{n-2}$ pro všechna $t \in (0,1]$, což plyne z toho, jak jsme volili prvky posloupností $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ a $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$. Platí tedy, že $\gamma_t(A_{ij}) \cap A_{ij} = \emptyset$. Pak také $\gamma_t(C) \cap B = \emptyset$ pro $t \in [0,1]$. Navíc $\gamma_1(C) = C + (r, b_0, 0,..., 0)$, což v první souřadnici leží ostře vpravo od B, tedy cesta γ vyprošťuje systém množin $\{B,C\}$, a proto $A_{ij} \in \mathcal{C}$. □

Věta 13. *Nechť $n \geq 2$ a G je grupa izometrií na $\mathbb{R}^n$, která obsahuje všechna posunutí v prvních dvou dimenzích. Pak každé dvě omezené G-ekvirozložitelné podmnožiny $\mathbb{R}^n$ jsou spojitě G-ekvirozložitelné.*

Důkaz. Mějme dvě omezené $A, B \subset \mathbb{R}^n$, které jsou ekvirozložitelné pomocí rozkladů $\{A_i\}_{i\in I}$ a $\{B_i\}_{i\in I}$ a izometrií $\{g_i\}_{i\in I}$. Pak

$$[A] = \left[\bigcup_{i\in I} A_i\right] = \sum_{i\in I} [A_i] = \sum_{i\in I} [B_i] = \left[\bigcup_{i\in I} B_i\right] = [B]\,,$$

kde první a pátá rovnost jsou zřejmé. Druhou, resp. čtvrtou, rovnost získáváme použitím věty 12 pro omezené množiny $A_i, i \in I$, resp. $B_i, i \in I$. Třetí rovnost pak plyne z toho, že pro libovolné $i \in I$ je A_i G-kongruentní B_i a tedy i $A_i \approx_G B_i$. Rovnost $[A] = [B]$, pak implikuje, že $A \approx_G B$. □

Věta 14. *Odpověď na De Grootovu otázku 7 je kladná.*

Důkaz. V Banachově-Tarského paradoxu (věta 2) využíváme grupu všech izometrií v $\mathbb{R}^3$, která splňuje podmínky věty 13. Pak tedy využitím vět 13 a 2 získáváme, že $B \approx B_1 \cup B_2$. Nechť $\{C_i\}_{i=1}^n$ jsou množiny rozkladu B dokládající tuto skutečnost a $\{\gamma^i\}_{i=1}^n$ jsou jim příslušející cesty. Položme $m = n$ a definujme $A_i = C_i \cap (\gamma_1^i)^{-1} B_1$, $A_{n+i} = C_i \cap (\gamma_1^i)^{-1} B_2$ a $\sigma^i = \sigma^{n+i} = \gamma^i$ pro $\forall i \in \{1, \ldots, n\}$. Pak σ^i splňuje podmínky otázky 7 pro všechna $i \in \{1, \ldots, 2n\}$. $\square$

Seznam použité literatury

Balcar, B. a Štěpánek, P. (1986). *Teorie množin.* Academia, Praha. ISBN 21-022-86.

Barto, L. a Tůma, J. (2022). Lineární algebra. URL `https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~stovicek/dl/20-21-zs/skripta_la6.pdf`. (zobrazeno: 05.03.2022).

Lindemann, F. (1882). Ueber die Zahl π.*). *Math. Ann.*, **20**(2), 213–225. ISSN 0025-5831. doi: 10.1007/BF01446522. URL `https://doi-org.ezproxy.is.cuni.cz/10.1007/BF01446522`.

Mazurkiewicz, S. a Sierpiński, W. (1914). *Sur un ensemble superposable avec chacune de ses deux parties.* Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences, 618-619.

Rataj, J. (2017). Teorie míry a integrálu. URL `https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~rataj/TMI/TMI-text_2017.pdf`. (zobrazeno: 15.04.2022).

Vitali, G. (1905). *Sul problema della misura dei Gruppi di punti di una retta: Nota.* Tip. Gamberini e Parmeggiani.

Wapner, M. L. (2005). *The Pea and the Sun, A Mathematical Paradox.* A K Peters, Ltd., Wellesey. ISBN 1-56881-213-2.

Wilson, T. M. (2005). A Continuous Movement Version of the Banach-Tarski Paradox: A solution to de Groot's Problem. *The Journal of Symbolic Logic*, **70**(3), 946–952.