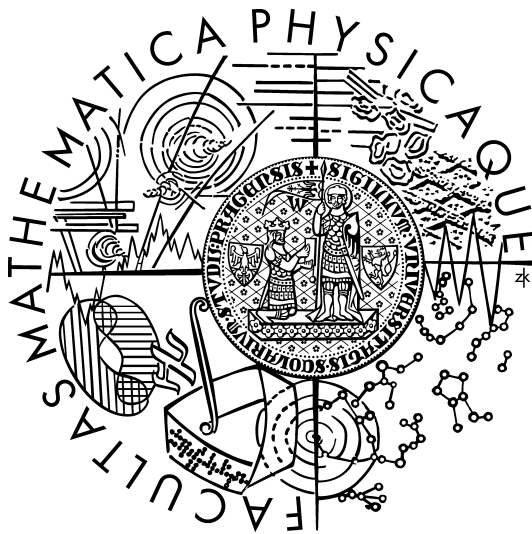


UNIVERZITA KARLOVA V PRAZE

Matematicko-fyzikální fakulta

DIPLOMOVÁ PRÁCE



Eva Nerglová

Strukturální změny ekonomických veličin

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí diplomové práce: Doc. RNDr. Zuzana Prášková, CSc.

Studijní program: Matematika

Studijní obor: Pravděpodobnost, matematická statistika a ekonometrie

Studijní plán: Ekonometrie

Ráda bych poděkovala vedoucí mé diplomové práce Doc. RNDr. Zuzaně Práškové, CSc. za pomoc při vedení této práce a za cenné rady a připomínky. Zároveň bych ráda poděkovala Prof. RNDr. Marii Huškové, DrSc. za poskytnutí dat.

Prohlašuji, že jsem svou diplomovou práci napsala samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů. Souhlasím se zapůjčováním práce.

V Praze dne 10.srpna 2007

Eva Nerglová

Obsah

| | | |
|----------|--|-----------|
| 1 | Úvod | 4 |
| 1.1 | Značení | 5 |
| 2 | Některá použitá rozdělení | 6 |
| 2.1 | Vícerozměrné normální rozdělení | 6 |
| 2.2 | Normální-gama rozdělení | 7 |
| 2.3 | Vícerozměrné t rozdělení | 7 |
| 2.4 | Inverzní gama rozdělení | 8 |
| 3 | Bayesovská analýza | 9 |
| 3.1 | Úvod | 9 |
| 3.2 | Bayesovská analýza lineárního modelu | 11 |
| 3.3 | Měnicí se normální posloupnost | 14 |
| 3.3.1 | Odvození $\xi(m \mathbf{x})$ | 14 |
| 3.3.2 | Odvození $\xi(\boldsymbol{\theta} \mathbf{x})$ | 19 |
| 3.3.3 | Odhad parametrů $\boldsymbol{\theta}$ a σ^2 | 20 |
| 3.4 | Dvoufázový regresní model | 21 |
| 3.4.1 | Test stability | 21 |
| 3.4.2 | Odvození $\xi(m \mathbf{y})$ | 22 |
| 3.4.3 | Odhad bodu změny v nestabilním modelu | 31 |
| 3.4.4 | Odhad parametrů $\boldsymbol{\theta}$ a σ^2 | 32 |
| 3.4.5 | Příklad | 36 |
| 3.4.6 | Simulace dat | 44 |
| 4 | Metoda maximální věrohodnosti | 63 |
| 4.1 | Úvod | 63 |
| 4.2 | Test stability | 64 |
| 4.2.1 | Posloupnost normálně rozdělených hodnot | 64 |
| 4.2.2 | Dvoufázový regresní model | 65 |
| 4.3 | Odhad bodu změny | 67 |
| 4.3.1 | Posloupnost normálně rozdělených hodnot | 67 |
| 4.3.2 | Dvoufázový regresní model | 67 |
| 4.4 | Simulace dat | 67 |

| | |
|-------------------------------|-----------|
| <i>OBSAH</i> | 2 |
| 5 Porovnání metod | 71 |
| 5.1 Simulovaná data | 71 |
| 5.2 Reálná data | 74 |
| 6 Pomocná tvrzení | 78 |
| 7 Závěr | 80 |

Název práce: Strukturální změny ekonomických veličin

Autor: Eva Nerglová

Katedra: Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí diplomové práce: Doc. RNDr. Zuzana Prášková, CSc.

e-mail vedoucího: Zuzana.Praskova@mff.cuni.cz

Abstrakt: Tato práce se zabývá detekcí změn ve střední hodnotě (v poloze) v posloupnosti normálně rozdělených náhodných veličin a detekcí změn v jednoduchém modelu lineární regrese (dvoufázový regresní model).

Vedle testování hypotézy o přítomnosti změny v uvažovaném modelu se zabývá i odhadem bodu změny a odhadem parametrů modelu před a po změně. Zabývá se zejména bayesovským přístupem, v závěru práce je zmíněn i přístup založený na metodě maximální věrohodnosti. Oba přístupy jsou porovnány na simulovaných i reálných datech.

Klíčová slova: Strukturální změna, bod změny, test stability, bayesovská analýza, měnící se normální posloupnost, dvoufázový regresní model, metoda maximální věrohodnosti

Title: Structural changes of economic variables

Author: Eva Nerglová

Department: Department of Probability and Mathematical Statistics

Supervisor: Doc. RNDr. Zuzana Prášková, CSc.

Supervisor's e-mail address: Zuzana.Praskova@mff.cuni.cz

Abstract: This thesis deals with detection of changes in the mean value (location) of a sequence of normally distributed random variables and with detection of changes in a simple linear regression model (two-phase regression model).

Besides testing the hypotheses regarding the existence of a change in the models under consideration this thesis deals with estimation of the change point and parameters of the model before and after the change. The Bayesian approach is considered in the thesis excepting the last part, where an approach based on the maximum likelihood method is described briefly. Both methods are compared using simulated and real data.

Keywords: Structural change, change point, test of stability, Bayesian analysis, changing normal sequence, two-phase regression model, maximum likelihood method

Kapitola 1

Úvod

V přírodních vědách, ekonomii i v technice se často objevují problémy se zjišťováním nestabilního chování statistického modelu. Vezmeme-li v úvahu každodenní zaznamenávání teplot, vývoj ceny benzínu, nebo zaznamenávání průtoků vody v řekách, atd., to mohou být příklady, kde se strukturální změna může objevit. Některé z těchto změn mohou být způsobeny odlesňováním, zvyšováním spotřeby fosilních paliv, nadměrným používáním automobilů atd.

Pojem „strukturální změna“ v sobě zahrnuje mnoho různých variant změn. Může to být změna ve střední hodnotě, rozptylu, korelační struktuře nebo v regresním parametru daného modelu apod. Změny mohou nastat i současně. Navíc změna může být ne jen jedna, ale může jich nastat i více. Vyskytuje se změna náhlá nebo postupná.

Statistická inference se zpravidla skládá ze dvou kroků. Nejprve je nutné rozhodnout, zda ke změně vůbec došlo. Rozhodnutí je založeno na testování hypotéz, kde nulová hypotéza tvrdí, že model je stabilní, tj. nenastala v něm žádná změna, zatímco alternativní hypotéza tvrdí, že existuje časový okamžik (tzv. bod změny) takový, že problém před bodem změny lze popsat jedním modelem a po bodu změny jiným modelem. V praxi je potřeba mít představu o tom, jaký typ změny se v modelu vyskytuje. Pokud byla změna v modelu detekována (odhalena), je v druhém kroku potřeba nalézt čas, v němž nastala. Kromě odhadu tohoto času nás zajímají odhady parametrů modelu před změnou i po ní, které mohou sloužit například k posouzení toho, k jak velké změně došlo.

V naší práci se zaměříme především na právě jednu náhlou změnu v parametrech regresního modelu a uvedeme také případ právě jedné náhlé změny ve střední hodnotě posloupnosti hodnot normálně rozdělených. Cílem práce je uvést a porovnat dvě metody pro odhalení a odhad strukturální změny.

Ve druhé kapitole této práce si uvedeme (popřípadě odvodíme) některá rozdělení, která budeme využívat. Ve třetí kapitole se seznámíme s bayesovskou analýzou (metodou) lineárního modelu, měnící se normální posloupnosti a dvoufázového regresního modelu. Pro posloupnost i dvoufázový model si uvedeme, jak odhalit a odhadnout změnu a parametry modelu. Na příkladu a simulacích ukážeme, jak dobře tyto veličiny bayesovská metoda odhaduje. Ve čtvrté kapitole se seznámíme s jednou z nebayesovských metod, tzv. metodou maximální věrohodnosti. Pro měnící se posloupnost i dvoufázový model si uvedeme

jak odhalit a odhadnout změnu v modelu. Na simulacích ukážeme, jak dobře tyto veličiny metoda odhaduje. Následuje kapitola, ve které obě metody porovnáme na reálných a simulovaných datech. Tuto práci uzavře kapitola šestá s uvedenými pomocnými tvrzeními a kapitola sedmá s krátkým shrnutím.

Všechny výpočty jsme realizovali ve statistickém programu R 2.3.1.¹

1.1 Značení

V celé naší práci budou všechny vektory sloupcové. Označme $\mathbf{1}_n \in \mathbb{R}^n$ vektor samých jedniček a \mathbf{I}_n diagonální matici typu $n \times n$ s jedničkami na diagonále.

Nyní si zavedeme pojem strukturální změny a uvedeme si úmluvu.

Definice 1.1. *Strukturální změnu v rámci regresních modelů budeme definovat jako změnu v regresní rovnici (tj. jeden nebo více regresních parametrů se změní) nebo jako změnu ve střední hodnotě nebo rozptylu závislé proměnné. Není vyloučeno, že změny mohou nastat současně.*

Poznámka 1.2. *Strukturální změna z definice 1.1. v sobě zahrnuje i změnu ve střední hodnotě náhodné posloupnosti.*

Úmluva 1.3. *V dalším textu bude písmeno „c“ označovat normovací konstantu, která se mění dle potřeby. Tj. ve dvou různých rovnicích či výrazech písmeno „c“ označuje dvě normovací konstanty, které si nemusí být rovny.*

Protože v dalším textu budeme používat lineární regresní model, tak si ho zde zavedeme:

$$y_i = \theta_1 + \theta_2 x_{i2} + \dots + \theta_p x_{ip} + \epsilon_i, \quad i = 1, \dots, n, \quad (1.1)$$

kde y_i je závislá proměnná (nebo vysvětlovaná proměnná) v období i , x_{ij} je j -tý známý regresor (nebo vysvětlující proměnná) v období i , ϵ_i je chybový člen v období i a θ_j je j -tý neznámý regresní koeficient (nebo také neznámý parametr). Předpokládejme, že chybové členy jsou nezávislé, stejně rozdělené podle normálního rozdělení se střední hodnotou 0 a rozptylem σ^2 , tj. $\epsilon_i \stackrel{\text{i.i.d.}}{\sim} N(0, \sigma^2)$ pro $i = 1, \dots, n$.

Pokud $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)'$ je vektor typu $n \times 1$, $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_p)'$ je vektor typu $p \times 1$, $\boldsymbol{\epsilon} = (\epsilon_1, \dots, \epsilon_n)'$ je vektor typu $n \times 1$ a

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & x_{12} & \dots & x_{1p} \\ 1 & x_{22} & \dots & x_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{n2} & \dots & x_{np} \end{pmatrix} \quad (1.2)$$

je matice typu $n \times p$, můžeme model (1.1) přepsat (maticově) jako

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{\epsilon}.$$

¹<http://www.r-project.org>

Kapitola 2

Některá použitá rozdělení

V této kapitole si uvedeme (popřípadě odvodíme) některá rozdělení, která použijeme v dalším textu.

2.1 Vícerozměrné normální rozdělení

Nechť $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^p$ je daný vektor a \mathbf{V} je známá pozitivně definitní matice typu $p \times p$. Nechť \mathbf{X} je p -rozměrný náhodný vektor. Řekneme, že \mathbf{X} má p -rozměrné normální rozdělení se střední hodnotou $\boldsymbol{\mu}$ a rozptylovou maticí \mathbf{V} , pokud jeho hustota je

$$f(\mathbf{x}) = c|\mathbf{V}|^{-1/2} \exp\left[-\frac{1}{2}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})'\mathbf{V}^{-1}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})\right], \quad (2.1)$$

kde normovací konstanta $c = (2\pi)^{-p/2}$. Toto rozdělení značíme symbolem $\mathbf{X} \sim N_p(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{V})$.

Vezměme v úvahu speciální případ, kdy veličina \mathbf{X} má p -rozměrné normální rozdělení $\mathbf{X} \sim N_p(\boldsymbol{\mu}, \tau^{-1}\mathbf{Q}^{-1})$, kde \mathbf{Q} je matice známých konstant typu $p \times p$ a $\tau > 0$, pak vztah (2.1) přepíšeme jako

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) &= c|\tau^{-1}\mathbf{Q}^{-1}|^{-1/2} \exp\left[-\frac{1}{2}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})'\tau\mathbf{Q}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})\right] \\ &= c\tau^{p/2}|\mathbf{Q}|^{1/2} \exp\left[-\frac{\tau}{2}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})'\mathbf{Q}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})\right]. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Poznámka 2.1. Matice \mathbf{Q}^{-1} je dle předpokladu pozitivně definitní, proto podle lemma 6.4. je matice \mathbf{Q} také pozitivně definitní.

2.2 Normální-gama rozdělení

Vezměme v úvahu dvě náhodné veličiny X_1 a X_2 s hustotou

$$f(x_1, x_2) = f_1(x_1|x_2)f_2(x_2), \quad x_1 \in \mathbb{R}, \quad x_2 > 0, \quad (2.3)$$

kde

$$f_1(x_1|x_2) = c(x_2s)^{1/2} \exp\left[-\frac{x_2s}{2}(x_1 - \mu)^2\right], \quad x_1 \in \mathbb{R} \quad (2.4)$$

a

$$f_2(x_2) = cx_2^{\alpha-1}e^{-x_2\beta}, \quad x_2 > 0, \quad (2.5)$$

kde $\mu \in \mathbb{R}$, $s > 0$, $\alpha > 0$ a $\beta > 0$ jsou dané konstanty (parametry). Pak sdružená hustota pro X_1 a X_2 (2.3) je normální-gama s parametry μ , s , α a β (píšeme $(X_1|X_2) \sim NG(\mu, s, \alpha, \beta)$). Všimněme si, že vztah (2.4) je podmíněná normální hustota pro $X_1|X_2 = x_2$ se střední hodnotou μ a přesností sx_2 (přesnost je převrácená hodnota rozptylu), zatímco vztah (2.5) je gama hustota pro X_2 s parametry α a β (píšeme $X_2 \sim Ga(\alpha, \beta)$).

Podívejme se nyní, jak vypadá normální-gama hustota, pokud podmíněná veličina $\mathbf{X}_1|X_2 = x_2$ má p -rozměrné normální rozdělení $(\mathbf{X}_1|X_2) \sim N_p(\boldsymbol{\mu}, \tau^{-1}\mathbf{Q}^{-1})$ s hustotou

$$f_1(\mathbf{x}_1|x_2) = c\tau^{p/2}|\mathbf{Q}|^{1/2} \exp\left[-\frac{\tau}{2}(\mathbf{x}_1 - \boldsymbol{\mu})'\mathbf{Q}(\mathbf{x}_1 - \boldsymbol{\mu})\right]. \quad (2.6)$$

Hustotu (2.6) jsme získali ze vztahu (2.2). Nechť \mathbf{X}_1 a X_2 mají sdružené normální-gama rozdělení s parametry $\boldsymbol{\mu}$ typu $p \times 1$, \mathbf{Q} typu $p \times p$, $\alpha > 0$ a $\beta > 0$ (píšeme $(\mathbf{X}_1, X_2) \sim NG_p(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{Q}, \alpha, \beta)$), pak hustota tohoto rozdělení je rovna

$$f(\mathbf{x}_1, x_2) = f_1(\mathbf{x}_1|x_2)f_2(x_2), \quad \mathbf{x}_1 \in \mathbb{R}^p, \quad x_2 > 0, \quad (2.7)$$

kde $f_1(\mathbf{x}_1|x_2)$ je uvedena v (2.6) a $f_2(x_2)$ je uvedena v (2.5).

2.3 Vícerozměrné t rozdělení

Nechť \mathbf{X} je p -rozměrný náhodný vektor. Řekneme, že \mathbf{X} má p -rozměrné t rozdělení s d stupni volnosti, střední hodnotou $\boldsymbol{\mu}$ a přesnostní maticí \mathbf{Q} , pokud hustota vektoru \mathbf{X} je

$$f(\mathbf{x}) = c|\mathbf{Q}|^{1/2} \left[1 + \frac{(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})'\mathbf{Q}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})}{d}\right]^{-(d+p)/2}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^p, \quad (2.8)$$

kde $d > 0$, $\boldsymbol{\mu}$ je $p \times 1$ konstantní vektor, \mathbf{Q} je známá pozitivně definitní matice řádu p a normovací konstanta je podle DeGroot [6] (kapitola 5, strana 61) $c = \frac{\Gamma[(d+p)/2]}{\Gamma(d/2)(d\pi)^{p/2}}$. Toto rozdělení značíme $X \sim t_p[d, \boldsymbol{\mu}, \mathbf{Q}]$, popřípadě $t_p[X; d, \boldsymbol{\mu}, \mathbf{Q}]$. Střední hodnota vektoru \mathbf{X} je $\boldsymbol{\mu}$ a rozptylová matice vektoru \mathbf{X} je

$$Var(\mathbf{X}) = \frac{d}{d-2} \mathbf{Q}^{-1}, \quad d > 2. \quad (2.9)$$

2.4 Inverzní gama rozdělení

Pokud má náhodná veličina X rozdělení gama s parametry α a β ($X \sim Ga(\alpha, \beta)$), pak rozdělení náhodné veličiny $Y = 1/X$ je inverzní gama rozdělení s parametry $\alpha > 0$ a $\beta > 0$, které budeme značit $Y \sim IGa(\alpha, \beta)$.

Nyní odvodíme hustotu, střední hodnotu a rozptyl pro veličinu $Y = 1/X$. Vyjdeme z hustoty pro gama rozdělení s parametry $\alpha > 0$ a $\beta > 0$

$$f(x) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x}, \quad x > 0.$$

Aplikací věty 3.7 o transformaci náhodného vektoru uvedené v Anděl [1] je hustota veličiny Y

$$h(y) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \frac{1}{y^{\alpha-1}} e^{-\beta/y} \frac{1}{y^2} = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \frac{1}{y^{\alpha+1}} e^{-\beta/y}, \quad y > 0.$$

Střední hodnota veličiny Y pro $\alpha > 1$ je

$$E(Y) = \int_0^\infty y \cdot h(y) dy = \int_0^\infty \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \frac{1}{y^\alpha} e^{-\beta/y} dy = \frac{\beta}{\Gamma(\alpha)} \Gamma(\alpha - 1) = \frac{\beta}{\alpha - 1}. \quad (2.10)$$

Obecný moment druhého řádu pro $\alpha > 2$ je

$$E(Y^2) = \int_0^\infty y^2 \cdot h(y) dy = \int_0^\infty \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \frac{1}{y^{\alpha-1}} e^{-\beta/y} dy = \frac{\beta^2}{\Gamma(\alpha)} \Gamma(\alpha - 2) = \frac{\beta^2}{(\alpha - 1)(\alpha - 2)}. \quad (2.11)$$

Podle předešlých rovností (2.10) a (2.11) spočteme rozptyl veličiny Y jako

$$Var(Y) = EY^2 - (EY)^2 = \frac{\beta^2}{(\alpha - 1)(\alpha - 2)} - \left(\frac{\beta}{\alpha - 1} \right)^2 = \frac{\beta^2}{(\alpha - 1)^2(\alpha - 2)}. \quad (2.12)$$

Kapitola 3

Bayesovská analýza

Tato kapitola se zabývá bayesovskou analýzou lineárního modelu, měnící se normální posloupnosti a dvoufázového regresního modelu.

3.1 Úvod

Nyní si přiblížíme bayesovský přístup v modelech. V obvyklém modelu matematické statistiky máme k dispozici výsledky náhodného pokusu v podobě pozorování náhodných veličin $X = (X_1, \dots, X_n)$ s hustotou $f(x) = f(x; \vartheta)$. Hustota f je známa jen částečně, je znám její tvar až na parametr ϑ , který může být i vektorový. Např. víme, že X tvoří náhodný výběr z normálního rozdělení $N(\mu, \sigma^2)$, jehož parametry μ, σ^2 však neznáme ($\boldsymbol{\vartheta} = (\mu, \sigma^2)'$). Úkolem je většinou učinit určité závěry o rozdělení pozorovaných hodnot týkající se parametru ϑ nebo jeho funkcí. V modelu nás proto zajímají úkoly, jako je hledání bodového nebo intervalového odhadu, testování hypotéz, apod.

Při klasickém přístupu počítáme s parametrem ϑ jako s neznámou, ale pevnou konstantou, k závěrům používáme tvar hustoty $f(x; \vartheta)$ a pozorování X .

Při bayesovském přístupu naproti tomu považujeme parametr ϑ za náhodnou veličinu (popřípadě náhodný vektor), jejíž hodnotu sice nepozorujeme, ale jejíž rozdělení známe. Hustotu veličiny ϑ značme $\xi(\vartheta)$. Tato hustota vyjadřuje apriorní informaci o možných hodnotách parametru ϑ , informaci, kterou máme ještě před pokusem, tedy získanou nezávisle na pozorováních X . Hustotu pozorování $f(x; \vartheta)$ chápeme při tomto přístupu jako podmíněnou hustotu $f(x|\vartheta)$ veličiny X při daných hodnotách veličiny ϑ .

Apriorní hustota (informace) může být zvolena zcela objektivně, např. na základě zkušenosti s pozorováními z minulosti, nebo na základě vnějších informací, např. z fyzikální podstaty problému. Možná je ale také subjektivní volba, vyjadřující individuální názor na pravděpodobnosti výskytu jednotlivých hodnot parametrů. Vyskytuje se i volba z nouze tak, aby „to šlo spočítat“. V naší práci se vyskytnou dva typy apriorních hustot, které vyplývají z obecné teorie bayesovských metod. Jedná se o apriorní hustotu získanou metodou konjugovaného systému a o hustotu získanou podle Jeffreysova principu.

Konjugovaný systém hustot $\xi((\cdot)|\vartheta)$ je systém hustot, který splňuje požadavek, že při apriorní hustotě z tohoto systému dostaneme aposteriorní hustotu, která do něj také náleží. Více informací nalezneme v Hušková [8], kapitola 2. V naší práci budeme používat konjugovaný systém hustot normálního-gama rozdělení.

Jeffreysův princip je jedna z možností, jak získat apriorní hustotu, pokud o parametru ϑ před pokusem nic nevíme. Výpočet této hustoty (tzv. Jeffreysovy apriorní hustoty) závisí na Fischerově informační matici $\mathbf{J}(\vartheta)$ (přesný vztah je v Hušková [8] na straně 31), její tvar závisí na rozdělení daného výběru. V naší práci uijeme Jeffreysovu apriorní hustotu pro výběr z normálního rozdělení, která, jak uvidíme, vyjde nevlastní. Výhoda Jeffreysovy apriorní hustoty je, že nezávisí na parametrizaci modelu, tj. aposteriorní hustoty například pro veličiny ϑ a ϑ^2 jsou stejné. Více informací nalezneme v Hušková [8], kapitola 2.

Veškeré závěry založené na datech se odvíjejí od aposteriorního rozdělení parametru. Vztah mezi apriorní a aposteriorní hustotou zachycuje Bayesova věta:

Věta 3.1. *Má-li vektor (X, Y) sdruženou hustotu $f(x, y)$, pak podmíněná hustota složky Y za podmínky, že $X = x$, je*

$$f(y|x) = \frac{f(x|y)f(y)}{f(x)},$$

kde $f(x|y)$ značí podmíněnou hustotu X při daných hodnotách složky Y ; $f(x)$ a $f(y)$ jsou marginální hustoty složek.

Důkaz. Důkaz je uveden v Anděl [1], věta 3.21 na str. 57. □

Přepíšeme-li větu v našem označení, dostáváme pro aposteriorní hustotu parametru ϑ při daných hodnotách pozorování $X = x$ vztah

$$\xi(\vartheta|x) = cf(x|\vartheta)\xi(\vartheta). \quad (3.1)$$

Tedy aposteriorní hustota je, až na nějakou normovací konstantu c , rovna součinu věrohodnostní funkce $L(\vartheta|x) = L(\vartheta) = f(x; \vartheta) = f(x|\vartheta)$ pro parametr ϑ na základě pozorování X a apriorní hustoty $\xi(\vartheta)$. Díky předešlému značení můžeme přepsat (3.1) jako

$$\xi(\vartheta|x) = cL(\vartheta|x)\xi(\vartheta). \quad (3.2)$$

V případě práce s diskrétními rozděleními na místech hustot vystupují pravděpodobnostní funkce.

Podobně jako u klasických odhadů, rozlišujeme i při bayesovském přístupu různé typy odhadů. Jako bodový odhad můžeme použít období maximálně věrohodného odhadu, tj. tu hodnotu ϑ , kde aposteriorní hustota $\xi(\vartheta|x)$ nabývá nejvyšší hodnoty.

O hypotézách můžeme rozhodovat přímo porovnáním pravděpodobností, s jakými při aposteriorním rozdělení nastávají.

3.2 Bayesovská analýza lineárního modelu

V této podkapitole se zabýváme bayesovskou analýzou lineárního modelu, ve kterém se změna nepředpokládá. Uvedeme věrohodnostní funkci modelu a ukážeme, že je to hustota normálního-gama rozdělení. Pro dané sdružené apriorní rozdělení spočteme sdruženou aposteriorní hustotu $\xi(\boldsymbol{\theta}, \tau | \mathbf{y})$ a ukážeme, že je to opět hustota normálního-gama rozdělení. Podkapitolu ukončíme marginálním aposteriorním rozdělením veličiny $\boldsymbol{\theta}$.

Mějme lineární model

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{\epsilon},$$

(zaveden v podkapitole 1.1) kde $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)'$ je vektor typu $n \times 1$, $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_p)'$ je neznámý vektor parametrů typu $p \times 1$, \mathbf{X} je známá matice (1.2) a $\boldsymbol{\epsilon} = (\epsilon_1, \dots, \epsilon_n)'$ je vektor typu $n \times 1$ skládající se z n nezávislých normálně rozdělených proměnných se střední hodnotou nula a rozptylem $\sigma^2 = \tau^{-1}$, kde τ je neznámý a kladný parametr. (Neznámé parametry jsou τ a $\boldsymbol{\theta}$). Namísto parametru τ^{-1} budeme nadále pracovat s převrácenou hodnotou rozptylu τ (parametr přesnosti).

Protože $\mathbf{y} \sim N_n(\mathbf{X}\boldsymbol{\theta}, \tau^{-1}\mathbf{I}_n)$, věrohodnostní funkce je podle (2.2)

$$L(\boldsymbol{\theta}, \tau | \mathbf{y}) = c\tau^{n/2} \exp \left[-\frac{\tau}{2}(\mathbf{y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\theta})'(\mathbf{y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\theta}) \right], \quad \boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^p, \tau > 0. \quad (3.3)$$

Věta 3.2. *L jako funkce $\boldsymbol{\theta}$ a τ ze vztahu (3.3) je hustota normálního-gama rozdělení.*

Důkaz. Provedeme nejprve pomocné výpočty. Označme

$$\mathbf{X}'\mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{X}'\mathbf{y}, \quad (3.4)$$

pak lze ověřit, že $\mathbf{X}'(\mathbf{y} - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\theta}}) = \mathbf{0}$, $(\mathbf{y} - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\theta}})'\mathbf{X} = \mathbf{0}'$ a $(\mathbf{y} - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\theta}})'\mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\theta}} = 0$. Vzhledem k tomu dostáváme

$$\begin{aligned} (\mathbf{y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\theta})'(\mathbf{y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\theta}) &= [(\mathbf{y} - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\theta}}) - (\mathbf{X}\boldsymbol{\theta} - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\theta}})]'[(\mathbf{y} - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\theta}}) - (\mathbf{X}\boldsymbol{\theta} - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\theta}})] \\ &= (\mathbf{y} - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\theta}})'\mathbf{y} - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\theta}}'\mathbf{y} + (\boldsymbol{\theta} - \hat{\boldsymbol{\theta}})'\mathbf{X}'\mathbf{X}(\boldsymbol{\theta} - \hat{\boldsymbol{\theta}}). \end{aligned} \quad (3.5)$$

Poznamenejme, že pokud $\mathbf{X}'\mathbf{X}$ je regulární matice, můžeme psát $\hat{\boldsymbol{\theta}} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{y}$, obecně však může být daná matice singulární a řešení $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ rovnice (3.4) nemusí být jednoznačné. Použitím (3.5) upravíme vzorec pro věrohodnostní funkci (3.3) jako

$$\begin{aligned} L(\boldsymbol{\theta}, \tau | \mathbf{y}) &= c\tau^{n/2} \exp \left[-\frac{\tau}{2}(\mathbf{y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\theta})'(\mathbf{y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\theta}) \right] \\ &= c\tau^{p/2} \exp \left[-\frac{\tau}{2}(\boldsymbol{\theta} - \hat{\boldsymbol{\theta}})'\mathbf{X}'\mathbf{X}(\boldsymbol{\theta} - \hat{\boldsymbol{\theta}}) \right] \end{aligned} \quad (3.6)$$

$$\times \tau^{(n-p+2)/2-1} \exp \left[-\tau \frac{(\mathbf{y} - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\theta}})'\mathbf{y} - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\theta}}'\mathbf{y}}{2} \right]. \quad (3.7)$$

Z předešlé rovnosti je vidět, že věrohodnostní funkce je hustota normálního-gama rozdělení, protože podmíněný vektor $\boldsymbol{\theta}$ při daném τ (viz (3.6)) má normální rozdělení a marginální rozdělení veličiny τ (viz (3.7)) je gama rozdělení, konkrétně

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{\theta}|\tau, \mathbf{y}) &\sim N_p(\hat{\boldsymbol{\theta}}, \tau^{-1}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}), \\ (\tau|\mathbf{y}) &\sim Ga\left(\frac{n-p+2}{2}, \frac{(\mathbf{y}-\mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\theta}})'(\mathbf{y}-\mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\theta}})}{2}\right).\end{aligned}$$

□

Nyní si pro danou sdruženou apriorní hustotu spočteme sdruženou aposteriorní hustotu veličin $\boldsymbol{\theta}$ a τ . Předpokládejme, že sdružená apriorní hustota pro $\boldsymbol{\theta}$ a τ je normální-gama s parametry $\boldsymbol{\mu}$ typu $p \times 1$, \mathbf{Q} typu $p \times p$, $\alpha > 0$ a $\beta > 0$ (tj. $(\boldsymbol{\theta}, \tau) \sim NG_p(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{Q}, \alpha, \beta)$), pak podle (2.7) je tato hustota

$$\xi(\boldsymbol{\theta}, \tau) = \xi_1(\boldsymbol{\theta}|\tau)\xi_2(\tau),$$

kde

$$\xi_1(\boldsymbol{\theta}|\tau) = c\tau^{p/2}|\mathbf{Q}|^{1/2} \exp\left[-\frac{\tau}{2}(\boldsymbol{\theta}-\boldsymbol{\mu})'\mathbf{Q}(\boldsymbol{\theta}-\boldsymbol{\mu})\right], \quad \boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^p \quad (3.8)$$

a

$$\xi_2(\tau) = c\tau^{\alpha-1}e^{-\tau\beta}, \quad \tau > 0, \quad \alpha, \beta > 0.$$

Tedy $(\boldsymbol{\theta}|\tau) \sim N_p(\boldsymbol{\mu}, \tau^{-1}\mathbf{Q}^{-1})$ a $\tau \sim Ga(\alpha, \beta)$. Poznamenejme, že ve vztahu (3.8) můžeme $|\mathbf{Q}|^{1/2}$ považovat za konstantu, proto tento vztah přepíšeme jako

$$\xi_1(\boldsymbol{\theta}|\tau) = c\tau^{p/2} \exp\left[-\frac{\tau}{2}(\boldsymbol{\theta}-\boldsymbol{\mu})'\mathbf{Q}(\boldsymbol{\theta}-\boldsymbol{\mu})\right], \quad \boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^p.$$

Protože již známe věrohodnostní funkci a sdruženou apriorní hustotu, můžeme podle (3.2) vypočítat sdruženou aposteriorní hustotu pro $\boldsymbol{\theta}$ a τ :

$$\begin{aligned}\xi(\boldsymbol{\theta}, \tau|\mathbf{y}) &= cL(\boldsymbol{\theta}, \tau|\mathbf{y})\xi(\boldsymbol{\theta}, \tau) \\ &= c\tau^{n/2+p/2} \exp\left[-\frac{\tau}{2}\left\{(\mathbf{y}-\mathbf{X}\boldsymbol{\theta})'(\mathbf{y}-\mathbf{X}\boldsymbol{\theta}) + (\boldsymbol{\theta}-\boldsymbol{\mu})'\mathbf{Q}(\boldsymbol{\theta}-\boldsymbol{\mu})\right\}\right] \times \tau^{\alpha-1}e^{-\tau\beta}.\end{aligned} \quad (3.9)$$

Opět si ukážeme, že tato hustota je hustota normálního-gama rozdělení. Začneme s pomocnými výpočty. Označme

$$\boldsymbol{\theta}^* = (\mathbf{Q} + \mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}(\mathbf{Q}\boldsymbol{\mu} + \mathbf{X}'\mathbf{y}), \quad (3.10)$$

pak platí

$$\boldsymbol{\theta}^{*'}(\mathbf{Q} + \mathbf{X}'\mathbf{X}) = (\mathbf{Q}\boldsymbol{\mu} + \mathbf{X}'\mathbf{y})'. \quad (3.11)$$

Vzhledem k (3.4), (3.11) a symetrii matice \mathbf{Q} (plyne z poznámky 2.1.) dostáváme

$$\begin{aligned}
& (\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\mu})' \mathbf{Q} (\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\mu}) + (\boldsymbol{\theta} - \hat{\boldsymbol{\theta}})' \mathbf{X}' \mathbf{X} (\boldsymbol{\theta} - \hat{\boldsymbol{\theta}}) = \\
& = [(\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}^*) - (\boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{\theta}^*)]' \mathbf{Q} [(\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}^*) - (\boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{\theta}^*)] + [(\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}^*) - (\hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta}^*)]' \mathbf{X}' \mathbf{X} [(\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}^*) - (\hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta}^*)] \\
& = (\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}^*)' \mathbf{Q} (\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}^*) - 2(\boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{\theta}^*)' \mathbf{Q} (\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}^*) + (\boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{\theta}^*)' \mathbf{Q} (\boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{\theta}^*) + \\
& \quad + (\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}^*)' \mathbf{X}' \mathbf{X} (\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}^*) - 2(\hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta}^*)' \mathbf{X}' \mathbf{X} (\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}^*) + (\hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta}^*)' \mathbf{X}' \mathbf{X} (\hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta}^*) \\
& = (\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}^*)' (\mathbf{Q} + \mathbf{X}' \mathbf{X}) (\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}^*) + \boldsymbol{\mu}' \mathbf{Q} \boldsymbol{\mu} + \hat{\boldsymbol{\theta}}' \mathbf{X}' \mathbf{X} \hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta}^{*'} (\mathbf{Q} + \mathbf{X}' \mathbf{X}) \boldsymbol{\theta}^*,
\end{aligned} \tag{3.12}$$

$$\begin{aligned}
& (\mathbf{y} - \mathbf{X} \hat{\boldsymbol{\theta}})' (\mathbf{y} - \mathbf{X} \hat{\boldsymbol{\theta}}) + \boldsymbol{\mu}' \mathbf{Q} \boldsymbol{\mu} + \hat{\boldsymbol{\theta}}' \mathbf{X}' \mathbf{X} \hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta}^{*'} (\mathbf{Q} + \mathbf{X}' \mathbf{X}) \boldsymbol{\theta}^* = \\
& = \mathbf{y}' \mathbf{y} - \hat{\boldsymbol{\theta}}' \mathbf{X}' \mathbf{y} - \mathbf{y}' \mathbf{X} \hat{\boldsymbol{\theta}} + \hat{\boldsymbol{\theta}}' \mathbf{X}' \mathbf{X} \hat{\boldsymbol{\theta}} + \boldsymbol{\mu}' \mathbf{Q} \boldsymbol{\mu} + \hat{\boldsymbol{\theta}}' \mathbf{X}' \mathbf{y} - \boldsymbol{\theta}^{*'} (\mathbf{Q} \boldsymbol{\mu} + \mathbf{X}' \mathbf{y}) \\
& = \mathbf{y}' \mathbf{y} - \mathbf{y}' \mathbf{X} \hat{\boldsymbol{\theta}} + \mathbf{y}' \mathbf{X} \hat{\boldsymbol{\theta}} + \boldsymbol{\mu}' \mathbf{Q} \boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{\theta}^{*'} (\mathbf{Q} \boldsymbol{\mu} + \mathbf{X}' \mathbf{y}) = \mathbf{y}' \mathbf{y} + \boldsymbol{\mu}' \mathbf{Q} \boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{\theta}^{*'} \mathbf{Q} \boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{\theta}^{*'} \mathbf{X}' \mathbf{y} \\
& = (\mathbf{y} - \mathbf{X} \boldsymbol{\theta}^*)' \mathbf{y} + (\boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{\theta}^*)' \mathbf{Q} \boldsymbol{\mu}.
\end{aligned} \tag{3.13}$$

Použitím vztahů (3.5), (3.12) a (3.13) můžeme přepsat aposteriorní hustotu veličin $\boldsymbol{\theta}$ a τ (3.9) jako

$$\begin{aligned}
\xi(\boldsymbol{\theta}, \tau | \mathbf{y}) &= c \tau^{n/2+p/2+\alpha-1} \times \\
& \times \exp \left[-\frac{\tau}{2} \left\{ 2\beta + (\mathbf{y} - \mathbf{X} \hat{\boldsymbol{\theta}})' (\mathbf{y} - \mathbf{X} \hat{\boldsymbol{\theta}}) + (\boldsymbol{\theta} - \hat{\boldsymbol{\theta}})' \mathbf{X}' \mathbf{X} (\boldsymbol{\theta} - \hat{\boldsymbol{\theta}}) + (\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\mu})' \mathbf{Q} (\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\mu}) \right\} \right] \\
&= c \tau^{p/2} \exp \left[-\frac{\tau}{2} (\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}^*)' (\mathbf{Q} + \mathbf{X}' \mathbf{X}) (\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}^*) \right] \times \\
& \times \tau^{n/2+\alpha-1} \exp \left[-\tau \left\{ \beta + \frac{1}{2} \left[(\mathbf{y} - \mathbf{X} \hat{\boldsymbol{\theta}})' (\mathbf{y} - \mathbf{X} \hat{\boldsymbol{\theta}}) + \boldsymbol{\mu}' \mathbf{Q} \boldsymbol{\mu} + \hat{\boldsymbol{\theta}}' \mathbf{X}' \mathbf{X} \hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta}^{*'} (\mathbf{Q} + \mathbf{X}' \mathbf{X}) \boldsymbol{\theta}^* \right] \right\} \right] \\
&= c \tau^{p/2} \exp \left[-\frac{\tau}{2} (\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}^*)' (\mathbf{Q} + \mathbf{X}' \mathbf{X}) (\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}^*) \right] \times \\
& \times \tau^{n/2+\alpha-1} \exp \left[-\tau \left\{ \beta + \frac{1}{2} \left[(\mathbf{y} - \mathbf{X} \boldsymbol{\theta}^*)' \mathbf{y} + (\boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{\theta}^*)' \mathbf{Q} \boldsymbol{\mu} \right] \right\} \right] \\
&= c \tau^{p/2} \exp \left[-\frac{\tau}{2} (\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}^*)' (\mathbf{Q} + \mathbf{X}' \mathbf{X}) (\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}^*) \right] \times \tau^{n/2+\alpha-1} \exp \left[-\tau \beta^* \right],
\end{aligned} \tag{3.14}$$

kde

$$\beta^* = \beta + \frac{1}{2} \left[(\mathbf{y} - \mathbf{X} \boldsymbol{\theta}^*)' \mathbf{y} + (\boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{\theta}^*)' \mathbf{Q} \boldsymbol{\mu} \right]. \tag{3.15}$$

Z rovnosti (3.14) je vidět, že aposteriorní hustota veličin $\boldsymbol{\theta}$ a τ je hustota normálního-gama rozdělení, neboť podmíněné rozdělení $\boldsymbol{\theta}$ za podmínky τ , \mathbf{y} je normální rozdělení (konkrétně $(\boldsymbol{\theta} | \tau, \mathbf{y}) \sim N_p(\boldsymbol{\theta}^*, \tau^{-1} [\mathbf{Q} + \mathbf{X}' \mathbf{X}]^{-1})$) a rozdělení veličiny $\tau | \mathbf{y}$ je gama rozdělení (konkrétně $(\tau | \mathbf{y}) \sim Ga(\alpha + \frac{n}{2}, \beta^*)$).

Pokud aposteriorní hustotu veličin $\boldsymbol{\theta}$ a τ (3.14) zintegrujeme podle veličiny τ (viz lemma 6.7.), zjistíme, že marginální aposteriorní rozdělení vektoru $\boldsymbol{\theta}$ je p -rozměrné t rozdělení s $2\alpha + n$ stupni volnosti, střední hodnotou $\boldsymbol{\theta}^*$ a přesnostní maticí $\frac{2\alpha+n}{2\beta^*} (\mathbf{Q} + \mathbf{X}' \mathbf{X})$. Podle

(2.8) má toto rozdělení hustotu

$$\xi(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{y}) = c \frac{|\mathbf{Q} + \mathbf{X}'\mathbf{X}|^{1/2}}{(2\beta^*)^{p/2}} \left[1 + \frac{(\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}^*)'(\mathbf{Q} + \mathbf{X}'\mathbf{X})(\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}^*)}{2\beta^*} \right]^{-\frac{(n+p+2\alpha)}{2}}, \quad (3.16)$$

kde výraz $(2\alpha + n)^{p/2}$ je považován za konstantu. Ve vztahu (3.16) jsme využili lemmu 6.1.

3.3 Měnicí se normální posloupnost

V této podkapitole se zabýváme odhadem změny a parametrů v normální posloupnosti pomocí bayesovské analýzy. Odvodíme si tvar marginální aposteriorní funkce bodu změny $\xi(m|\mathbf{x})$ a marginální aposteriorní hustotu $\xi(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{x})$. Uvedeme si, jak spočítat střední hodnotu a rozptyl veličin $\boldsymbol{\theta}$ a σ^2 .

Předpokládejme, že X_1, X_2, \dots, X_n jsou nezávislé normálně rozdělené náhodné veličiny a m je neznámé přirozené číslo ($m \in \{1, 2, \dots, n-1\}$). Nechť prvních m veličin má normální rozdělení s neznámou střední hodnotou θ_1 (tj. $X_i \sim N(\theta_1, \tau^{-1})$) a zbývajících $n - m$ veličin má normální rozdělení s neznámou střední hodnotou θ_2 (tj. $X_i \sim N(\theta_2, \tau^{-1})$), kde $\theta_1 \neq \theta_2$. Strukturální změna se zde vyskytuje jako změna ve střední hodnotě. Nás zajímá, pro jaké m tato změna nastane a jaké jsou hodnoty střední hodnoty před změnou a po změně. Vše je založeno na marginální aposteriorní pravděpodobnostní funkci bodu změny $\xi(m|\mathbf{x})$, kde $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)'$.

Nejpravděpodobnější hodnota m (modus pravděpodobnostní funkce $\xi(m|\mathbf{x})$) ukazuje, kde nastala změna. Představu o tom, kde tato změna nastala, si můžeme udělat z grafu funkce $\xi(m|\mathbf{x})$ v závislosti na m , kde $m \in \{1, 2, \dots, n-1\}$.

3.3.1 Odvození $\xi(m|\mathbf{x})$

V této části práce si odvodíme marginální aposteriorní pravděpodobnostní funkci bodu změny $\xi(m|\mathbf{x})$ pro měnicí se normální posloupnost.

Věrohodnostní funkce všech parametrů je

$$L(\theta_1, \theta_2, \tau, m|\mathbf{x}) = c\tau^{n/2} \exp \left[-\frac{\tau}{2} \left\{ \sum_{i=1}^m (x_i - \theta_1)^2 + \sum_{i=m+1}^n (x_i - \theta_2)^2 \right\} \right], \quad (3.17)$$

kde $\theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}$, $\tau > 0$, $m = 1, 2, \dots, n-1$ a $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)'$.

Označme $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \theta_2)'$,

$$\mathbf{F}(m) = \begin{pmatrix} \mathbf{1}_m & \mathbf{0}_{m \times 1} \\ \mathbf{0}_{(n-m) \times 1} & \mathbf{1}_{n-m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.18)$$

Vzhledem k (3.18) můžeme přepsat věrohodnostní funkci (3.17) jako

$$L(\boldsymbol{\theta}, \tau, m|\mathbf{x}) = c\tau^{n/2} \exp \left\{ -\frac{\tau}{2} [\mathbf{x} - \mathbf{F}(m)\boldsymbol{\theta}]' [\mathbf{x} - \mathbf{F}(m)\boldsymbol{\theta}] \right\}.$$

Nyní si uvedeme sdruženou apriorní hustotu všech parametrů $\xi(\boldsymbol{\theta}, \tau, m)$. Předpokládejme, že m je nezávislé na ostatních parametrech a že marginální apriorní hustota pro m je konstantní. Vzhledem k tomu je $\xi(\boldsymbol{\theta}, \tau, m) = \xi(m) \cdot \xi(\boldsymbol{\theta}, \tau) = c \cdot \xi(\boldsymbol{\theta}, \tau)$. Nechť sdružená apriorní hustota pro $\boldsymbol{\theta}$ a τ je normální-gama s parametry $\boldsymbol{\mu}$ typu 2×1 , \mathbf{Q} typu 2×2 , $a > 0$ a $b > 0$ (tj. $(\boldsymbol{\theta}, \tau) \sim NG_2(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{Q}, a, b)$), pak podle (2.7) a předpokladu, že $|\mathbf{Q}|^{1/2} = \textit{konstanta}$, můžeme sdruženou apriorní hustotu všech parametrů napsat jako

$$\xi(\boldsymbol{\theta}, \tau, m) = c \cdot \xi(\boldsymbol{\theta}, \tau) = c \cdot \xi_1(\boldsymbol{\theta}|\tau)\xi_2(\tau),$$

kde

$$\xi_1(\boldsymbol{\theta}|\tau) = c\tau \exp \left[-\frac{\tau}{2} (\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\mu})' \mathbf{Q} (\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\mu}) \right], \quad \boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^2$$

a

$$\xi_2(\tau) = c\tau^{a-1} e^{-\tau b} \quad \tau > 0, \quad a, b > 0.$$

Tedy $(\boldsymbol{\theta}|\tau) \sim N_2(\boldsymbol{\mu}, \tau^{-1}\mathbf{Q}^{-1})$ a $\tau \sim Ga(a, b)$.

Jelikož již známe věrohodnostní funkci a apriorní hustotu všech parametrů, můžeme podle (3.2) vypočítat sdruženou aposteriorní hustotu všech parametrů $\xi(\boldsymbol{\theta}, \tau, m|\mathbf{x})$

$$\begin{aligned} \xi(\boldsymbol{\theta}, \tau, m|\mathbf{x}) &= c L(\boldsymbol{\theta}, \tau, m|\mathbf{x}) \xi(\boldsymbol{\theta}, \tau, m) \\ &= c\tau^{n/2+a} \exp \left\{ -\tau \left[b + \frac{1}{2} \left\{ [\mathbf{x} - \mathbf{F}(m)\boldsymbol{\theta}]' [\mathbf{x} - \mathbf{F}(m)\boldsymbol{\theta}] + (\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\mu})' \mathbf{Q} (\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\mu}) \right\} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Protože budeme aposteriorní hustotu (3.19) integrovat, upravíme si ji do vhodného tvaru. Označme

$$\mathbf{A}(m) = \mathbf{Q} + \mathbf{F}'(m)\mathbf{F}(m) = \mathbf{Q} + \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & n - m \end{bmatrix}, \quad (3.20)$$

$$\mathbf{B}(m) = \mathbf{Q}\boldsymbol{\mu} + \mathbf{F}'(m)\mathbf{x} = \mathbf{Q}\boldsymbol{\mu} + \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^m x_i \\ n \\ \sum_{i=m+1}^n x_i \end{pmatrix}, \quad (3.21)$$

$$C(m) = 2b + \boldsymbol{\mu}'\mathbf{Q}\boldsymbol{\mu} + \mathbf{x}'\mathbf{x} = 2b + \boldsymbol{\mu}'\mathbf{Q}\boldsymbol{\mu} + \sum_{i=1}^n x_i^2, \quad (3.22)$$

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}(m) = [\mathbf{F}'(m)\mathbf{F}(m)]^{-1} \mathbf{F}'(m)\mathbf{x}, \quad (3.23)$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\theta}^*(m) &= [\mathbf{Q} + \mathbf{F}'(m)\mathbf{F}(m)]^{-1}[\mathbf{Q}\boldsymbol{\mu} + \mathbf{F}'(m)\mathbf{x}] \\ &= \mathbf{A}^{-1}(m)\mathbf{B}(m),\end{aligned}\tag{3.24}$$

$$D(m) = b + \frac{1}{2} \left\{ [\mathbf{x} - \mathbf{F}(m)\boldsymbol{\theta}^*(m)]' \mathbf{x} + [\boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{\theta}^*(m)]' \mathbf{Q}\boldsymbol{\mu} \right\}.\tag{3.25}$$

Poznámka 3.3. Matice $\mathbf{A}(m)$ je pozitivně definitní, neboť matice \mathbf{Q} je dle předpokladu pozitivně definitní (viz kapitola 2, poznámka 2.1.), a proto pro každý vektor $\mathbf{a}_{(2 \times 1)} \neq 0$

$$\mathbf{a}'\mathbf{A}(m)\mathbf{a} = \mathbf{a}'\mathbf{Q}\mathbf{a} + \underbrace{\mathbf{a}'\mathbf{F}'(m)\mathbf{F}(m)\mathbf{a}}_{\geq 0} \geq \mathbf{a}'\mathbf{Q}\mathbf{a} > 0.$$

Předpokládejme, že všechna pozorování x_1, \dots, x_n jsou taková, že splňují podmínku $D(m) > 0$ pro každé $m \in \{1, \dots, n-1\}$. Díky předešlému značení (viz (3.20) až (3.25)) dostáváme

$$\begin{aligned}[\mathbf{x} - \mathbf{F}(m)\boldsymbol{\theta}]' [\mathbf{x} - \mathbf{F}(m)\boldsymbol{\theta}] &= \\ &= \left\{ [\mathbf{x} - \mathbf{F}(m)\hat{\boldsymbol{\theta}}(m)] - [\mathbf{F}(m)\boldsymbol{\theta} - \mathbf{F}(m)\hat{\boldsymbol{\theta}}(m)] \right\}' \left\{ [\mathbf{x} - \mathbf{F}(m)\hat{\boldsymbol{\theta}}(m)] - [\mathbf{F}(m)\boldsymbol{\theta} - \mathbf{F}(m)\hat{\boldsymbol{\theta}}(m)] \right\} \\ &= [\mathbf{x} - \mathbf{F}(m)\hat{\boldsymbol{\theta}}(m)]' [\mathbf{x} - \mathbf{F}(m)\hat{\boldsymbol{\theta}}(m)] + [\boldsymbol{\theta} - \hat{\boldsymbol{\theta}}(m)]' \mathbf{F}'(m)\mathbf{F}(m) [\boldsymbol{\theta} - \hat{\boldsymbol{\theta}}(m)],\end{aligned}\tag{3.26}$$

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\mu})' \mathbf{Q}(\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\mu}) + [\boldsymbol{\theta} - \hat{\boldsymbol{\theta}}(m)]' \mathbf{F}'(m)\mathbf{F}(m) [\boldsymbol{\theta} - \hat{\boldsymbol{\theta}}(m)] &= \\ &= \left\{ [\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}^*(m)] - [\boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{\theta}^*(m)] \right\}' \mathbf{Q} \left\{ [\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}^*(m)] - [\boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{\theta}^*(m)] \right\} + \\ &\quad + \left\{ [\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}^*(m)] - [\hat{\boldsymbol{\theta}}(m) - \boldsymbol{\theta}^*(m)] \right\}' \mathbf{F}'(m)\mathbf{F}(m) \left\{ [\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}^*(m)] - [\hat{\boldsymbol{\theta}}(m) - \boldsymbol{\theta}^*(m)] \right\} \\ &= [\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}^*(m)]' \mathbf{Q} [\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}^*(m)] - 2[\boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{\theta}^*(m)]' \mathbf{Q} [\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}^*(m)] + [\boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{\theta}^*(m)]' \mathbf{Q} [\boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{\theta}^*(m)] \\ &\quad + [\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}^*(m)]' \mathbf{F}'(m)\mathbf{F}(m) [\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}^*(m)] - 2[\hat{\boldsymbol{\theta}}(m) - \boldsymbol{\theta}^*(m)]' \mathbf{F}'(m)\mathbf{F}(m) [\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}^*(m)] + \\ &\quad + [\hat{\boldsymbol{\theta}}(m) - \boldsymbol{\theta}^*(m)]' \mathbf{F}'(m)\mathbf{F}(m) [\hat{\boldsymbol{\theta}}(m) - \boldsymbol{\theta}^*(m)] = \\ &= [\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}^*(m)]' \mathbf{A}(m) [\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}^*(m)] + \boldsymbol{\mu}' \mathbf{Q}\boldsymbol{\mu} + \hat{\boldsymbol{\theta}}'(m)\mathbf{F}'(m)\mathbf{F}(m)\hat{\boldsymbol{\theta}}(m) - \boldsymbol{\theta}^{*'}(m)\mathbf{A}(m)\boldsymbol{\theta}^*(m),\end{aligned}\tag{3.27}$$

$$\begin{aligned}[\mathbf{x} - \mathbf{F}(m)\hat{\boldsymbol{\theta}}(m)]' [\mathbf{x} - \mathbf{F}(m)\hat{\boldsymbol{\theta}}(m)] + \boldsymbol{\mu}' \mathbf{Q}\boldsymbol{\mu} + \hat{\boldsymbol{\theta}}'(m)\mathbf{F}'(m)\mathbf{F}(m)\hat{\boldsymbol{\theta}}(m) - \boldsymbol{\theta}^{*'}(m)\mathbf{A}(m)\boldsymbol{\theta}^*(m) &= \\ &= \mathbf{x}'\mathbf{x} - \hat{\boldsymbol{\theta}}'(m)\mathbf{F}'(m)\mathbf{x} - \mathbf{x}'\mathbf{F}(m)\hat{\boldsymbol{\theta}}(m) + \hat{\boldsymbol{\theta}}'(m)\mathbf{F}'(m)\mathbf{F}(m)\hat{\boldsymbol{\theta}}(m) + \boldsymbol{\mu}' \mathbf{Q}\boldsymbol{\mu} + \hat{\boldsymbol{\theta}}'(m)\mathbf{F}'(m)\mathbf{x} \\ &\quad - \boldsymbol{\theta}^{*'}(m)\mathbf{B}(m) = \\ &= \mathbf{x}'\mathbf{x} - \mathbf{x}'\mathbf{F}(m)\hat{\boldsymbol{\theta}}(m) + \mathbf{x}'\mathbf{F}(m)\hat{\boldsymbol{\theta}}(m) + \boldsymbol{\mu}' \mathbf{Q}\boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{\theta}^{*'}(m)\mathbf{B}(m) \\ &= \mathbf{x}'\mathbf{x} + \boldsymbol{\mu}' \mathbf{Q}\boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{\theta}^{*'}(m)\mathbf{Q}\boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{\theta}^{*'}(m)\mathbf{F}'(m)\mathbf{x} \\ &= [\mathbf{x} - \mathbf{F}(m)\boldsymbol{\theta}^*(m)]' \mathbf{x} + [\boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{\theta}^*(m)]' \mathbf{Q}\boldsymbol{\mu}.\end{aligned}\tag{3.28}$$

V předešlém výpočtu (3.28) jsme využili rovností

$$\mathbf{A}(m)\boldsymbol{\theta}^*(m) = \mathbf{B}(m), \quad \boldsymbol{\theta}^{*\prime}(m)\mathbf{B}(m) = \boldsymbol{\theta}^{*\prime}(m)\mathbf{Q}\boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{\theta}^{*\prime}(m)\mathbf{F}'(m)\mathbf{x}.$$

Poznámka 3.4. Všimněme si, že předešlé značení (viz (3.23), (3.24) a (3.25)) a pomocné výpočty (viz (3.26), (3.27) a (3.28)) jsou analogické značení a pomocným výpočtům v podkapitole 3.2 (viz (3.4), (3.10), (3.15) a viz (3.5), (3.12) a (3.13)). Vzhledem k tomu pokud v následujícím textu budeme tyto analogické výpočty a značení používat, tak se jen odkážeme na již zmiňovanou podkapitolu 3.2 a výpočty znova provádět nebudeme.

Na základě předešlých výpočtů a předešlého značení (viz (3.20) až (3.28)) můžeme aposteriorní hustotu všech parametrů (3.19) přepsat jako

$$\begin{aligned} \xi(\boldsymbol{\theta}, \tau, m|\mathbf{x}) &= c\tau^{n/2+a} \exp \left[-\tau \left\{ b + \frac{1}{2} [\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}^*(m)]' \mathbf{A}(m) [\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}^*(m)] + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{1}{2} \left([\mathbf{x} - \mathbf{F}(m)\boldsymbol{\theta}^*(m)]' \mathbf{x} + [\boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{\theta}^*(m)]' \mathbf{Q}\boldsymbol{\mu} \right) \right\} \right] \\ &= c\tau^{n/2+a} \exp \left[-\tau \left\{ \frac{1}{2} [\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}^*(m)]' \mathbf{A}(m) [\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}^*(m)] + D(m) \right\} \right]. \end{aligned} \quad (3.29)$$

Pravděpodobnostní funkci bodu změny $\xi(m|\mathbf{x})$ spočteme za pomoci lemmy 6.7. a (3.29) jako

$$\begin{aligned} \xi(m|\mathbf{x}) &= \int_{\mathbb{R}^2} \int_0^\infty \xi(\boldsymbol{\theta}, \tau, m|\mathbf{x}) \, d\tau d\boldsymbol{\theta} \\ &= c \int_{\mathbb{R}^2} \left\{ D(m) + \frac{1}{2} [\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}^*(m)]' \mathbf{A}(m) [\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}^*(m)] \right\}^{-(n/2+a+1)} d\boldsymbol{\theta} \\ &= c D(m)^{-(n/2+a+1)} \int_{\mathbb{R}^2} \underbrace{\left\{ 1 + \frac{1}{2D(m)} [\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}^*(m)]' \mathbf{A}(m) [\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}^*(m)] \right\}}_{F^*}^{-(n/2+a+1)} d\boldsymbol{\theta} \end{aligned} \quad (3.30)$$

Zavedme substituci $\mathbf{z} = (z_1, z_2)'$, tak že

$$\mathbf{z} = \frac{1}{\sqrt{2D(m)}} [\mathbf{A}(m)]^{1/2} [\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}^*(m)]. \quad (3.31)$$

Pak platí

$$\mathbf{z}'\mathbf{z} = \sum_{i=1}^2 z_i^2 = F^*.$$

Jakobián substituce (3.31) je díky lemmě 6.5. roven

$$J = \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial \theta_1}{\partial z_1} & \frac{\partial \theta_1}{\partial z_2} \\ \frac{\partial \theta_2}{\partial z_1} & \frac{\partial \theta_2}{\partial z_2} \end{array} \right| = \frac{2D(m)}{\left\{ \mathbf{A}(m) \right\}^{1/2}} = \frac{2D(m)}{|\mathbf{A}(m)|^{1/2}}. \quad (3.32)$$

Podle věty 3.6 o substituci uvedené v Anděl [1] na straně 49 a použitím substituce (3.31) a jakobiánu (3.32) můžeme přepsat (3.30) jako

$$\begin{aligned} \xi(m|\mathbf{x}) &= c D(m)^{-(n/2+a+1)} \int_{\mathbb{R}^2} \left\{ 1 + \mathbf{z}'\mathbf{z} \right\}^{-(n/2+a+1)} \frac{|2D(m)|}{|\mathbf{A}(m)|^{1/2}} d\mathbf{z} \\ &= c D(m)^{-(n/2+a+1)} |2D(m)| |\mathbf{A}(m)|^{-1/2} \int_{\mathbb{R}^2} \left\{ 1 + \mathbf{z}'\mathbf{z} \right\}^{-(n/2+a+1)} d\mathbf{z} \\ &= c \left\{ 2D(m) \right\}^{-(n/2+a)} |\mathbf{A}(m)|^{-1/2} \int_{\mathbb{R}^2} \left\{ 1 + \mathbf{z}'\mathbf{z} \right\}^{-(n/2+a+1)} d\mathbf{z} \end{aligned} \quad (3.33)$$

Poznamenejme, že v (3.33) absolutní hodnota u členu $|2D(m)|$ mohla být odstraněna díky předpokladu $D(m) > 0$, a že součinitel $\left\{ 2D(m) \right\}^{-(n/2+a)}$ vznikl vyjmutím čísla $2^{-(n/2+a+1)}$ z normovací konstanty c .

Zavedme polární souřadnice

$$\begin{aligned} z_1 &= \sqrt{y} \cos r \\ z_2 &= \sqrt{y} \sin r, \end{aligned} \quad (3.34)$$

kde $y \geq 0$, $r \in [0, 2\pi)$. Jakobián substituce (3.34) je roven

$$J = \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial z_1}{\partial y} & \frac{\partial z_1}{\partial r} \\ \frac{\partial z_2}{\partial y} & \frac{\partial z_2}{\partial r} \end{array} \right| = \frac{1}{2}. \quad (3.35)$$

Opět podle věty 3.6 o substituci uvedené v Anděl [1] na straně 49 a použitím substituce (3.34) a jakobiánu (3.35) můžeme přepsat (3.33) jako

$$\begin{aligned} \xi(m|\mathbf{x}) &= c \left\{ 2D(m) \right\}^{-(n/2+a)} |\mathbf{A}(m)|^{-1/2} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} (1+y)^{-(n/2+a+1)} \frac{1}{2} dr dy \\ &= c \left\{ 2D(m) \right\}^{-(n/2+a)} |\mathbf{A}(m)|^{-1/2} \underbrace{\int_0^\infty (1+y)^{-(n/2+a+1)} dy}_{\text{konstanta}} \\ &= c \left\{ 2D(m) \right\}^{-(n/2+a)} |\mathbf{A}(m)|^{-1/2}. \end{aligned} \quad (3.36)$$

Nyní si vzorec pro výpočet marginální aposteriorní pravděpodobnostní funkce bodu změny (3.36) upravíme. Vzhledem k označení (3.20) až (3.22) a (3.24), (3.25) dostáváme

$$\begin{aligned} 2D(m) &= 2b + [\mathbf{x} - \mathbf{F}(m)\boldsymbol{\theta}^*(m)]' \mathbf{x} + [\boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{\theta}^*(m)]' \mathbf{Q}\boldsymbol{\mu} \\ &= 2b + \mathbf{x}'\mathbf{x} - \boldsymbol{\theta}^{*\prime}(m)\mathbf{F}'(m)\mathbf{x} + \boldsymbol{\mu}'\mathbf{Q}\boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{\theta}^{*\prime}(m)\mathbf{Q}\boldsymbol{\mu} \\ &= C(m) - \boldsymbol{\theta}^{*\prime}(m)\mathbf{B}(m) \\ &= C(m) - \mathbf{B}'(m)\mathbf{A}^{-1}(m)\mathbf{B}(m). \end{aligned} \quad (3.37)$$

Vzhledem k rovnosti (3.37) můžeme pravděpodobnostní funkci $\xi(m|\mathbf{x})$ (3.36) přepsat jako

$$\xi(m|\mathbf{x}) = c \cdot [C(m) - \mathbf{B}'(m)\mathbf{A}^{-1}(m)\mathbf{B}(m)]^{-(n/2+a)} |\mathbf{A}(m)|^{-1/2}, \quad (3.38)$$

kde $\mathbf{A}(m)$, $\mathbf{B}(m)$ a $C(m)$ jsou uvedeny v (3.20), (3.21) a (3.22).

3.3.2 Odvození $\xi(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{x})$

V této části práce si odvodíme marginální aposteriorní hustotu $\xi(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{x})$ pro měnící se normální posloupnost použitím lemma 6.7. a (3.29):

$$\begin{aligned} \xi(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{x}) &= \sum_{m=1}^{n-1} \int_0^\infty \xi(\boldsymbol{\theta}, \tau, m|\mathbf{x}) d\tau = \\ &= \sum_{m=1}^{n-1} c \int_0^\infty \tau^{n/2+a} \exp \left[-\tau \left\{ D(m) + \frac{1}{2} [\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}^*(m)]' \mathbf{A}(m) [\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}^*(m)] \right\} \right] d\tau \\ &= \sum_{m=1}^{n-1} c \left[D(m) + \frac{1}{2} [\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}^*(m)]' \mathbf{A}(m) [\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}^*(m)] \right]^{-(n/2+a+1)} \\ &= \sum_{m=1}^{n-1} c D(m)^{-(n/2+a+1)} \left[1 + \frac{[\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}^*(m)]' \mathbf{A}(m) [\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}^*(m)]}{2D(m)} \right]^{-(n/2+a+1)} \\ &= \sum_{m=1}^{n-1} \underbrace{c [2D(m)]^{-(n/2+a)} |\mathbf{A}(m)|^{-1/2}}_{\xi(m|\mathbf{x})} \times \\ &\quad \times \underbrace{\frac{|\mathbf{A}(m)|^{1/2} (n+2a)}{2D(m)} \left[1 + \frac{[\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}^*(m)]' \mathbf{A}(m) [\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}^*(m)]}{2D(m)} \right]^{-(n/2+a+1)}}_{\xi(\boldsymbol{\theta}|m, \mathbf{x})} \\ &= \sum_{m=1}^{n-1} \xi(m|\mathbf{x}) \xi(\boldsymbol{\theta}|m, \mathbf{x}), \quad \boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^2, \end{aligned} \quad (3.39)$$

kde $\xi(m|\mathbf{x})$ je marginální aposteriorní funkce bodu změny m (viz (3.38)) a $\xi(\boldsymbol{\theta}|m, \mathbf{x})$ je podmíněná aposteriorní hustota vektoru $\boldsymbol{\theta}$ za podmínky m a je to hustota dvourozměrného t rozdělení s $n+2a$ stupni volnosti, střední hodnotou

$$\mathbf{E}(\boldsymbol{\theta}|m, \mathbf{x}) = \mathbf{A}^{-1}(m)\mathbf{B}(m) = \boldsymbol{\theta}^*(m) \quad (3.40)$$

a přesnostní maticí

$$\mathbf{Q}(\boldsymbol{\theta}|m, \mathbf{x}) = \frac{(n+2a) \mathbf{A}(m)}{2D(m)} = \frac{(n+2a) \mathbf{A}(m)}{C(m) - \mathbf{B}'(m)\mathbf{A}^{-1}(m)\mathbf{B}(m)}. \quad (3.41)$$

Poznámka 3.5. Ve výpočtu (3.39) se normovací konstanta c „schová“ do výsledných hustot $\xi(m|\mathbf{x})$ a $\xi(\boldsymbol{\theta}|m, \mathbf{x})$, a proto se již nevyskytuje v poslední rovnosti.

3.3.3 Odhad parametrů $\boldsymbol{\theta}$ a σ^2

V této podkapitole si uvedeme (popřípadě odvodíme) vzorce pro výpočet aposteriorní střední hodnoty a rozptylu veličin $\boldsymbol{\theta}$ a σ^2 . Jako bodový odhad těchto veličin můžeme vzít jejich aposteriorní podmíněnou (popřípadě nepodmíněnou) střední hodnotu.

Aposterioorní podmíněná střední hodnota vektoru $\boldsymbol{\theta}$ za podmínky m je uvedena v (3.40). Aposterioroní podmíněná rozptylová matice vektoru $\boldsymbol{\theta}$ za podmínky m je podle (2.9)

$$\mathbf{Var}(\boldsymbol{\theta}|m, \mathbf{x}) = \frac{n + 2a}{n + 2a - 2} \mathbf{Q}^{-1}(\boldsymbol{\theta}|m, \mathbf{x}), \quad \boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^2,$$

kde matice $\mathbf{Q}(\boldsymbol{\theta}|m, \mathbf{x})$ je uvedena v (3.41).

Aposterioorní (nepodmíněná) střední hodnota vektoru $\boldsymbol{\theta}$ je podle (3.39) rovna

$$\mathbf{E}(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{x}) = \sum_{m=1}^{n-1} \xi(m|\mathbf{x}) \mathbf{E}(\boldsymbol{\theta}|m, \mathbf{x}), \quad (3.42)$$

kde $\xi(m|\mathbf{x})$ a $\mathbf{E}(\boldsymbol{\theta}|m, \mathbf{x})$ jsou uvedeny v (3.38) a (3.40).

Nyní si odvodíme aposteriorní (nepodmíněnou) rozptylovou matici vektoru $\boldsymbol{\theta}$. Provedeme nejprve pomocné výpočty:

$$\begin{aligned} \mathbf{Var}(\boldsymbol{\theta}|m, \mathbf{x}) &= \mathbf{E} \left\{ [\boldsymbol{\theta} - \mathbf{E}(\boldsymbol{\theta}|m, \mathbf{x})] [\boldsymbol{\theta} - \mathbf{E}(\boldsymbol{\theta}|m, \mathbf{x})]' \middle| m, \mathbf{x} \right\} \\ &= \mathbf{E} \left\{ [\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}^*(m)] [\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}^*(m)]' \middle| m, \mathbf{x} \right\} \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} [\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}^*(m)] [\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}^*(m)]' \xi(\boldsymbol{\theta}|m, \mathbf{x}) d\boldsymbol{\theta} \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} [\boldsymbol{\theta} \boldsymbol{\theta}' - \boldsymbol{\theta}^*(m) \boldsymbol{\theta}' - \boldsymbol{\theta} \boldsymbol{\theta}^{*'}(m) + \boldsymbol{\theta}^*(m) \boldsymbol{\theta}^{*'}(m)]' \xi(\boldsymbol{\theta}|m, \mathbf{x}) d\boldsymbol{\theta} \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} \boldsymbol{\theta} \boldsymbol{\theta}' \xi(\boldsymbol{\theta}|m, \mathbf{x}) d\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}^*(m) \underbrace{\left[\int_{\mathbb{R}^2} \boldsymbol{\theta}' \xi(\boldsymbol{\theta}|m, \mathbf{x}) d\boldsymbol{\theta} \right]}_{\mathbf{E}(\boldsymbol{\theta}'|m, \mathbf{x}) = \boldsymbol{\theta}^{*'}(m)} - \underbrace{\left[\int_{\mathbb{R}^2} \boldsymbol{\theta} \xi(\boldsymbol{\theta}|m, \mathbf{x}) d\boldsymbol{\theta} \right]}_{\mathbf{E}(\boldsymbol{\theta}|m, \mathbf{x}) = \boldsymbol{\theta}^*(m)} \boldsymbol{\theta}^{*'}(m) + \\ &\quad + \boldsymbol{\theta}^*(m) \boldsymbol{\theta}^{*'}(m) = \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} \boldsymbol{\theta} \boldsymbol{\theta}' \xi(\boldsymbol{\theta}|m, \mathbf{x}) d\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}^*(m) \boldsymbol{\theta}^{*'}(m). \end{aligned} \quad (3.43)$$

Z předešlé rovnosti (3.43) vyplývá, že

$$\int_{\mathbb{R}^2} \boldsymbol{\theta} \boldsymbol{\theta}' \xi(\boldsymbol{\theta}|m, \mathbf{x}) d\boldsymbol{\theta} = \mathbf{Var}(\boldsymbol{\theta}|m, \mathbf{x}) + \boldsymbol{\theta}^*(m) \boldsymbol{\theta}^{*'}(m). \quad (3.44)$$

Vzhledem k (3.39) a (3.44) můžeme psát

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(\boldsymbol{\theta}\boldsymbol{\theta}'|\mathbf{x}) &= \int_{\mathbb{R}^2} \boldsymbol{\theta}\boldsymbol{\theta}'\xi(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{x})d\boldsymbol{\theta} = \int_{\mathbb{R}^2} \boldsymbol{\theta}\boldsymbol{\theta}' \sum_{m=1}^{n-1} \xi(m|\mathbf{x})\xi(\boldsymbol{\theta}|m, \mathbf{x})d\boldsymbol{\theta} \\
&= \sum_{m=1}^{n-1} \xi(m|\mathbf{x}) \left[\int_{\mathbb{R}^2} \boldsymbol{\theta}\boldsymbol{\theta}'\xi(\boldsymbol{\theta}|m, \mathbf{x})d\boldsymbol{\theta} \right] \\
&= \sum_{m=1}^{n-1} \xi(m|\mathbf{x}) \left[\mathbf{Var}(\boldsymbol{\theta}|m, \mathbf{x}) + \boldsymbol{\theta}^*(m)\boldsymbol{\theta}^{*\prime}(m) \right]. \tag{3.45}
\end{aligned}$$

Aposteriorní rozptylová matice vektoru $\boldsymbol{\theta}$ je

$$\begin{aligned}
\mathbf{Var}(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{x}) &= \mathbf{E} \left\{ [\boldsymbol{\theta} - \mathbf{E}(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{x})] [\boldsymbol{\theta} - \mathbf{E}(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{x})]' \middle| \mathbf{x} \right\} \\
&= \mathbf{E}(\boldsymbol{\theta}\boldsymbol{\theta}'|\mathbf{x}) - [\mathbf{E}(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{x})] [\mathbf{E}(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{x})]',
\end{aligned}$$

kde střední hodnota $\mathbf{E}(\boldsymbol{\theta}\boldsymbol{\theta}'|\mathbf{x})$ je uvedena v (3.45) a střední hodnota $\mathbf{E}(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{x})$ je uvedena v (3.42).

Pokud nás kromě odhadu parametrů modelu zajímá odhad podmíněné střední hodnoty a podmíněného rozptylu veličiny $\sigma^2 = \frac{1}{\tau}$, musíme nejprve zjistit, jaké je podmíněné aposteriorní rozdělení veličiny $(\tau|m, \mathbf{x})$. Podle Broemeling a Tsurumi [5] je rozdělení této veličiny gama s parametry $(n/2 + a)$ a $D(m)$, a proto podle inverzního gama rozdělení (viz (2.10) a (2.12)) je

$$E(\sigma^2|m, \mathbf{x}) = E(\tau^{-1}|m, \mathbf{x}) = \frac{D(m)}{n/2 + a - 1}, \quad (n/2 + a) > 1$$

a

$$Var(\sigma^2|m, \mathbf{x}) = Var(\tau^{-1}|m, \mathbf{x}) = \frac{D(m)^2}{(n/2 + a - 1)^2(n/2 + a - 2)}, \quad (n/2 + a) > 2.$$

3.4 Dvoufázový regresní model

V této podkapitole se budeme věnovat testu stability, odhadu změny a parametrů dvoufázového regresního modelu. Pro lepší pochopení výkladu si uvedeme příklad. Závěrem této podkapitoly uvedeme výsledky a postřehy ze simulací dat.

3.4.1 Test stability

V této části práce si zavedeme obecný dvoufázový regresní model. Uvedeme, kdy rozhodnout, že daný model je stabilní (popřípadě nestabilní).

Vezměme v úvahu lineární regresní model, u kterého si nejsme jisti, zda je stabilní (tj. zda v něm nenastala změna), tzv. obecný dvoufázový regresní model

$$y_i = \begin{cases} \mathbf{x}_i' \boldsymbol{\theta}_1 + e_i, & i = 1, 2, \dots, m \\ \mathbf{x}_i' \boldsymbol{\theta}_2 + e_i, & i = m + 1, \dots, n, \end{cases} \quad (3.46)$$

kde $1 \leq m \leq n$, $\boldsymbol{\theta}_1 = (\theta_1, \dots, \theta_p)'$, $\boldsymbol{\theta}_2 = (\theta_1^*, \dots, \theta_p^*)'$ a $\boldsymbol{\theta}_1 \neq \boldsymbol{\theta}_2$. Pokud $m = n$ změna v modelu (3.46) žádná nenastala (tj. model je stabilní), zatímco pokud $1 \leq m \leq n - 1$ změna nastala právě jedna (ve vztahu y_i a \mathbf{x}_i) v neznámém bodě m (tj. model je nestabilní). V modelu (3.46) jsou \mathbf{x}_i $p \times 1$ známé vektory, $\boldsymbol{\theta}_i$ ($i = 1, 2$) jsou $p \times 1$ neznámé vektory parametrů a e_i jsou i.i.d. normálně rozdělené náhodné proměnné se střední hodnotou nula a přesností $\tau = \frac{1}{\sigma^2} > 0$. Nadále budeme předpokládat, že m je nezávislé na ostatních parametrech $\boldsymbol{\theta}_1$, $\boldsymbol{\theta}_2$ a τ . Nevíme, zda je strukturální stabilita v modelu přítomna, proto budeme testovat nulovou hypotézu, že změna nenastala:

$$H_0 : m = n$$

proti alternativní hypotéze, že nastala právě jedna změna:

$$H_1 : 1 \leq m \leq n - 1.$$

Test strukturální stability (H_0 versus H_1) je založen na marginální aposteriorní pravděpodobnostní funkci pro bod změny m , kde $m \in \{1, \dots, n\}$ (značíme $\xi(m|\mathbf{y})$). Aposteriorní pravděpodobnost $\xi(n|\mathbf{y})$ (tj. $\xi(m|\mathbf{y})$ pro případ $m = n$), že změna nenastane (tj. aposteriorní pravděpodobnost stability), srovnáme s apriorní pravděpodobností stability q . H_0 zamítneme, pokud aposteriorní pravděpodobnost stability $\xi(n|\mathbf{y})$ je menší než apriorní pravděpodobnost stability q (tj. aposteriorní pravděpodobnost toho, že změna nastane je větší než apriorní).

3.4.2 Odvození $\xi(m|\mathbf{y})$

V této podkapitole se budeme zabývat odvozováním marginální aposteriorní pravděpodobnostní funkce bodu změny $\xi(m|\mathbf{y})$ pro obecný a speciální dvoufázový regresní model se známým apriorním rozdělením a pro obecný dvoufázový regresní model s Jeffreysovou apriorní hustotou.

Znamé apriorní rozdělení

V této části práce odvodíme marginální aposteriorní pravděpodobnostní funkci bodu změny $\xi(m|\mathbf{y})$ pro obecný dvoufázový regresní model (3.46) se známým apriorním rozdělením.

Věrohodnostní funkce pro $\boldsymbol{\theta}_1$, $\boldsymbol{\theta}_2$ a τ je z (3.46) a podle (3.3)

$$L(\boldsymbol{\theta}_1, \boldsymbol{\theta}_2, \tau, m | \mathbf{y}) = \begin{cases} c \tau^{n/2} \exp \left\{ -\frac{\tau}{2} [\mathbf{y}(n) - \mathbf{x}(n)\boldsymbol{\theta}_1]' [\mathbf{y}(n) - \mathbf{x}(n)\boldsymbol{\theta}_1] \right\}, & m = n \\ c \tau^{n/2} \exp \left\{ -\frac{\tau}{2} [\mathbf{y}(m) - \mathbf{x}(m)\boldsymbol{\theta}]' [\mathbf{y}(m) - \mathbf{x}(m)\boldsymbol{\theta}] \right\}, & 1 \leq m \leq n-1, \end{cases} \quad (3.47)$$

kde $\boldsymbol{\theta} = (\boldsymbol{\theta}_1', \boldsymbol{\theta}_2')'$ je vektor $2p \times 1$, $\tau > 0$, $\mathbf{y} = \mathbf{y}(n) = (y_1, \dots, y_n)'$ a

$$\mathbf{y}(m) = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_1(m) \\ \mathbf{y}_2(m) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}(m) = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1(m) & \mathbf{0}_{m \times p} \\ \mathbf{0}_{(n-m) \times p} & \mathbf{x}_2(m) \end{bmatrix}.$$

$\mathbf{y}_1(m)$ je $m \times 1$ vektor prvních m pozorování, $\mathbf{y}_2(m)$ je $(n-m) \times 1$ vektor zbývajících $n-m$ pozorování, $\mathbf{x}_1(m)$ je $m \times p$ matice odpovídající prvním m pozorováním (regresorům) a $\mathbf{x}_2(m)$ je $(n-m) \times p$ matice odpovídající zbývajícím $n-m$ pozorováním (regresorům):

$$\mathbf{x}_1(m) = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1' \\ \mathbf{x}_2' \\ \vdots \\ \mathbf{x}_m' \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_2(m) = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_{m+1}' \\ \mathbf{x}_{m+2}' \\ \vdots \\ \mathbf{x}_n' \end{pmatrix},$$

$\mathbf{x}_i' = (1, x_{i2}, \dots, x_{ip})$.

Vzhledem k předešlému značení můžeme přepsat model (3.46) jako

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_1(m) &= \mathbf{x}_1(m)\boldsymbol{\theta}_1 + \mathbf{e}_1, \\ \mathbf{y}_2(m) &= \mathbf{x}_2(m)\boldsymbol{\theta}_2 + \mathbf{e}_2, \end{aligned}$$

nebo jako

$$\mathbf{y}(m) = \mathbf{x}(m)\boldsymbol{\theta} + \mathbf{e},$$

kde $\mathbf{e} = (\mathbf{e}_1', \mathbf{e}_2')'$, \mathbf{e}_1 je vektor chyb pro prvních m pozorování a \mathbf{e}_2 je vektor chyb pro zbývajících $n-m$ pozorování.

Marginální apriorní pravděpodobnostní funkce pro m jsme zvolili stejně jako v knize Broemeling a Tsurumi [5] (strana 69):

$$\xi(m) = \begin{cases} q, & m = n \\ (1-q)(n-1)^{-1}, & 1 \leq m \leq n-1, \end{cases} \quad (3.48)$$

kde q je (již zmíněná) apriorní pravděpodobnost toho, že je model stabilní. Poznamenejme, že $1-q$ je apriorní pravděpodobnost, že změna v modelu nastane, rovnoměrně rozdělena do bodů $1, \dots, n-1$.

Pokud $m = n$, předpokládáme, že $\boldsymbol{\theta}_1$ a τ jsou parametry s apriorním normální-gama rozdělením s parametry $\boldsymbol{\mu}_1$ ($p \times 1$), \mathbf{Q}_{11} ($p \times p$), $a > 0$ a $b > 0$. Proto podle (2.7) můžeme psát

$$\xi(\boldsymbol{\theta}_1|\tau) = c\tau^{p/2}|\mathbf{Q}_{11}|^{1/2} \exp\left[-\frac{\tau}{2}(\boldsymbol{\theta}_1 - \boldsymbol{\mu}_1)'\mathbf{Q}_{11}(\boldsymbol{\theta}_1 - \boldsymbol{\mu}_1)\right], \quad \boldsymbol{\theta}_1 \in \mathbb{R}^p, \quad (3.49)$$

což je podmíněná apriorní hustota pro $\boldsymbol{\theta}_1$ za podmínky τ ($(\boldsymbol{\theta}_1|\tau) \sim N_p(\boldsymbol{\mu}_1, \tau^{-1}\mathbf{Q}_{11}^{-1})$). Marginální apriorní hustota pro τ ($\tau \sim Ga(a, b)$) je podle (2.7)

$$\xi(\tau) = c\tau^{a-1}e^{-\tau b}, \quad \tau > 0. \quad (3.50)$$

Pokud $1 \leq m \leq n - 1$, předpokládáme pro parametry $\boldsymbol{\theta}$ a τ apriorní normální-gama rozdělení s parametry $\boldsymbol{\mu}$ ($2p \times 1$), \mathbf{Q} ($2p \times 2p$), $a > 0$ a $b > 0$. Proto podle (2.7) můžeme psát

$$\xi(\boldsymbol{\theta}|\tau) = c\tau^p|\mathbf{Q}|^{1/2} \exp\left[-\frac{\tau}{2}(\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\mu})'\mathbf{Q}(\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\mu})\right], \quad \boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^{2p}, \quad (3.51)$$

což je podmíněná apriorní hustota pro $\boldsymbol{\theta}$ za podmínky τ ($(\boldsymbol{\theta}|\tau) \sim N_{2p}(\boldsymbol{\mu}, \tau^{-1}\mathbf{Q}^{-1})$). Marginální apriorní hustota pro τ je stejná jako v (3.50). Navíc $\boldsymbol{\mu} = (\boldsymbol{\mu}_1', \boldsymbol{\mu}_2)'$, kde $\boldsymbol{\mu}_2 \in \mathbb{R}^p$ a matice \mathbf{Q} je pozitivně definitní řádu $2p$

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \mathbf{Q}_{11} & \mathbf{Q}_{12} \\ \mathbf{Q}_{21} & \mathbf{Q}_{22} \end{pmatrix}.$$

Sdruženou aposteriorní hustotu parametrů získáme ze vztahu (3.2) a použitím současného značení (spočteme si jí jen pro případ $1 \leq m \leq n - 1$):

$$\xi(\boldsymbol{\theta}, \tau, m|\mathbf{y}) = cL(\boldsymbol{\theta}, \tau, m|\mathbf{y})\xi(\boldsymbol{\theta}, \tau, m). \quad (3.52)$$

Věrohodnostní funkce $L(\boldsymbol{\theta}, \tau, m|\mathbf{y})$ je uvedena v (3.47) a sdružená apriorní hustota všech parametrů $\xi(\boldsymbol{\theta}, \tau, m)$ se získá součinem hustot $\xi(\boldsymbol{\theta}, \tau, m) = \xi(m)\xi(\boldsymbol{\theta}, \tau)$, která platí, pokud uijeme předpokladu, že m je nezávislé na ostatních parametrech. Protože $\xi(m)$ je uvedena v (3.48) a $\xi(\boldsymbol{\theta}, \tau) = \xi(\boldsymbol{\theta}|\tau)\xi(\tau)$, kde jednotlivé hustoty jsou (3.51) a (3.50), můžeme přepsat tuto sdruženou apriorní hustotu všech parametrů jako

$$\begin{aligned} \xi(\boldsymbol{\theta}, \tau, m) &= \xi(m)\xi(\boldsymbol{\theta}, \tau) = c \frac{1-q}{n-1} \times \tau^p |\mathbf{Q}|^{1/2} \exp\left[-\frac{\tau}{2}(\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\mu})'\mathbf{Q}(\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\mu})\right] \times \tau^{a-1} e^{-\tau b} \\ &= c \frac{1-q}{n-1} |\mathbf{Q}|^{1/2} \tau^{p+a-1} \exp\left[-\tau \left\{b + \frac{1}{2}(\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\mu})'\mathbf{Q}(\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\mu})\right\}\right]. \end{aligned} \quad (3.53)$$

Vzhledem k předešlé rovnosti (3.53) můžeme sdruženou aposteriorní hustotu parametrů (3.52) přepsat jako

$$\begin{aligned} \xi(\boldsymbol{\theta}, \tau, m | \mathbf{y}) &= c\tau^{n/2} \exp \left\{ -\frac{\tau}{2} [\mathbf{y}(m) - \mathbf{x}(m)\boldsymbol{\theta}]' [\mathbf{y}(m) - \mathbf{x}(m)\boldsymbol{\theta}] \right\} \times \frac{1-q}{n-1} |\mathbf{Q}|^{1/2} \tau^{p+a-1} \\ &\quad \times \exp \left[-\tau \left\{ b + \frac{1}{2} (\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\mu})' \mathbf{Q} (\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\mu}) \right\} \right] \\ &= c \frac{1-q}{n-1} |\mathbf{Q}|^{1/2} \tau^{n/2+p+a-1} \\ &\quad \times \exp \left[-\tau \left\{ b + \frac{1}{2} (\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\mu})' \mathbf{Q} (\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\mu}) + \frac{1}{2} [\mathbf{y}(m) - \mathbf{x}(m)\boldsymbol{\theta}]' [\mathbf{y}(m) - \mathbf{x}(m)\boldsymbol{\theta}] \right\} \right]. \end{aligned} \quad (3.54)$$

Marginální aposteriorní pravděpodobnostní funkce bodu změny $\xi(m | \mathbf{y})$ se získá z (3.54) vyintegrováním přebytečných parametrů. Nejprve si ale upravíme rovnost (3.54) do tvaru vhodného k integrování. Označme

$$\mathbf{A}(m) = \mathbf{Q} + \mathbf{x}'(m)\mathbf{x}(m),$$

$$\mathbf{x}'(m)\mathbf{x}(m)\hat{\boldsymbol{\theta}}(m) = \mathbf{x}'(m)\mathbf{y}(m), \quad (3.55)$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\theta}^*(m) &= [\mathbf{Q} + \mathbf{x}'(m)\mathbf{x}(m)]^{-1} [\mathbf{Q}\boldsymbol{\mu} + \mathbf{x}'(m)\mathbf{y}(m)] \\ &= [\mathbf{A}(m)]^{-1} [\mathbf{Q}\boldsymbol{\mu} + \mathbf{x}'(m)\mathbf{y}(m)], \end{aligned}$$

$$D(m) = b + \frac{1}{2} \left\{ [\mathbf{y}(m) - \mathbf{x}(m)\boldsymbol{\theta}^*(m)]' \mathbf{y}(m) + [\boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{\theta}^*(m)]' \mathbf{Q}\boldsymbol{\mu} \right\}$$

pro $1 \leq m \leq n-1$,

$$\mathbf{x}'(n)\mathbf{x}(n)\hat{\boldsymbol{\theta}}(n) = \mathbf{x}'(n)\mathbf{y}(n), \quad (3.56)$$

$$\boldsymbol{\theta}^*(n) = [\mathbf{Q}_{11} + \mathbf{x}'(n)\mathbf{x}(n)]^{-1} [\mathbf{Q}_{11}\boldsymbol{\mu}_1 + \mathbf{x}'(n)\mathbf{y}(n)],$$

$$D(n) = b + \frac{1}{2} \left\{ [\mathbf{y}(n) - \mathbf{x}(n)\boldsymbol{\theta}^*(n)]' \mathbf{y}(n) + [\boldsymbol{\mu}_1 - \boldsymbol{\theta}^*(n)]' \mathbf{Q}_{11}\boldsymbol{\mu}_1 \right\}.$$

Poznamenejme, že $\hat{\boldsymbol{\theta}}(m)$ (respektive $\hat{\boldsymbol{\theta}}(n)$) získáme vyřešením rovnice (3.55) (respektive (3.56)) pokud je matice $\mathbf{x}'(m)\mathbf{x}(m)$ (respektive $\mathbf{x}'(n)\mathbf{x}(n)$) regulární. Předpokládejme, že všechna pozorování jsou taková, že splňují podmínku $D(m) > 0$ pro každé $m \in \{1, \dots, n\}$. Vzhledem k předešlému značení a analogickému značení v podkapitole 3.2 (viz (3.4), (3.10), (3.15)) můžeme podle rovností (3.5), (3.12) a (3.13) přepsat aposteriorní hustotu všech

parametrů (3.54) jako

$$\begin{aligned}\xi(\boldsymbol{\theta}, \tau, m|\mathbf{y}) &= c \frac{1-q}{n-1} |\mathbf{Q}|^{1/2} \tau^{n/2+p+a-1} \exp \left[-\tau \left\{ b + \frac{1}{2} [\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}^*(m)]' \mathbf{A}(m) [\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}^*(m)] + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{1}{2} \left[[\mathbf{y}(m) - \mathbf{x}(m)\boldsymbol{\theta}^*(m)]' \mathbf{y}(m) + [\boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{\theta}^*(m)]' \mathbf{Q}\boldsymbol{\mu} \right] \right\} \right] \\ &= c \frac{1-q}{n-1} |\mathbf{Q}|^{1/2} \tau^{n/2+p+a-1} \exp \left[-\tau \left\{ \frac{1}{2} [\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}^*(m)]' \mathbf{A}(m) [\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}^*(m)] + D(m) \right\} \right].\end{aligned}\quad (3.57)$$

Pravděpodobnostní funkci bodu změny $\xi(m|\mathbf{y})$ spočteme vzhledem k (3.57) a lemmě 6.7. jako

$$\begin{aligned}\xi(m|\mathbf{y}) &= \int_{\mathbb{R}^{2p}} \int_0^\infty \xi(\boldsymbol{\theta}, \tau, m|\mathbf{y}) \, d\tau d\boldsymbol{\theta} \\ &= c \frac{1-q}{n-1} |\mathbf{Q}|^{1/2} \int_{\mathbb{R}^{2p}} \left\{ D(m) + \frac{1}{2} [\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}^*(m)]' \mathbf{A}(m) [\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}^*(m)] \right\}^{-(n/2+p+a)} d\boldsymbol{\theta} \\ &= c \frac{1-q}{n-1} |\mathbf{Q}|^{1/2} D(m)^{-(n/2+p+a)} \times \\ &\quad \times \int_{\mathbb{R}^{2p}} \underbrace{\left\{ 1 + \frac{1}{2D(m)} [\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}^*(m)]' \mathbf{A}(m) [\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}^*(m)] \right\}^{-(n/2+p+a)}}_{F^*} d\boldsymbol{\theta}.\end{aligned}\quad (3.58)$$

K dopočítání $\xi(m|\mathbf{y})$ využijeme analogických substitucí jako v podkapitole 3.3.1. Zavedme substituci $\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_{2p})'$, tak že

$$\mathbf{z} = \frac{1}{\sqrt{2D(m)}} [\mathbf{A}(m)]^{1/2} [\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}^*(m)]. \quad (3.59)$$

Pak platí

$$\mathbf{z}'\mathbf{z} = \sum_{i=1}^{2p} z_i^2 = F^*.$$

Jakobián substituce (3.59) je podle lemmy 6.5. roven

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial \theta_1}{\partial z_1} & \cdots & \frac{\partial \theta_1}{\partial z_{2p}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \theta_{2p}}{\partial z_1} & \cdots & \frac{\partial \theta_{2p}}{\partial z_{2p}} \end{vmatrix} = \frac{\{2D(m)\}^p}{\{|\mathbf{A}(m)|\}^{1/2}} = \frac{\{2D(m)\}^p}{|\mathbf{A}(m)|^{1/2}}. \quad (3.60)$$

Podle věty 3.6 o substituci uvedené v Anděl [1] na straně 49 a použitím substituce (3.59) a jakobiánu (3.60) můžeme přepsat (3.58) jako

$$\begin{aligned}
\xi(m|\mathbf{y}) &= c \frac{1-q}{n-1} |\mathbf{Q}|^{1/2} D(m)^{-(n/2+p+a)} \int_{\mathbb{R}^{2p}} \left\{1 + \mathbf{z}'\mathbf{z}\right\}^{-(n/2+p+a)} \frac{|\{2D(m)\}^p|}{|\mathbf{A}(m)|^{1/2}} d\mathbf{z} \\
&= c \frac{1-q}{n-1} |\mathbf{Q}|^{1/2} D(m)^{-(n/2+p+a)} |2D(m)|^p |\mathbf{A}(m)|^{-1/2} \int_{\mathbb{R}^{2p}} \left\{1 + \mathbf{z}'\mathbf{z}\right\}^{-(n/2+p+a)} d\mathbf{z} \\
&= c \frac{1-q}{n-1} |\mathbf{Q}|^{1/2} \{D(m)\}^{-(n/2+a)} |\mathbf{A}(m)|^{-1/2} \int_{\mathbb{R}^{2p}} \left\{1 + \mathbf{z}'\mathbf{z}\right\}^{-(n/2+p+a)} d\mathbf{z} \\
&= c \frac{1-q}{n-1} |\mathbf{Q}|^{1/2} D(m)^{-(n/2+a)} |\mathbf{A}(m)|^{-1/2} \int_{\mathbb{R}^{2p}} \left\{1 + \mathbf{z}'\mathbf{z}\right\}^{-(n/2+p+a)} d\mathbf{z}.
\end{aligned} \tag{3.61}$$

Poznamenejme, že v (3.61) absolutní hodnota u členu $|2D(m)|^p$ mohla být odstraněna díky předpokladu $D(m) > 0$, a že člen 2^p jsme zahrnuli do normovací konstanty c . Zavedme polární souřadnice

$$\begin{aligned}
z_1 &= \sqrt{y} \cos r_1 \\
z_2 &= \sqrt{y} \sin r_1 \cos r_2 \\
&\vdots \\
z_{2p-1} &= \sqrt{y} \sin r_1 \dots \sin r_{2p-2} \cos r_{2p-1} \\
z_{2p} &= \sqrt{y} \sin r_1 \dots \sin r_{2p-2} \sin r_{2p-1},
\end{aligned} \tag{3.62}$$

kde $y \geq 0$, $r_1 \in [0, \pi), \dots, r_{2p-2} \in [0, \pi), r_{2p-1} \in [0, 2\pi)$. Jakobián substituce (3.62) je roven

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial z_1}{\partial y} & \frac{\partial z_1}{\partial r_1} & \cdots & \frac{\partial z_1}{\partial r_{2p-1}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial z_{2p}}{\partial y} & \frac{\partial z_{2p}}{\partial r_1} & \cdots & \frac{\partial z_{2p}}{\partial r_{2p-1}} \end{vmatrix} = y^{p-1} \cdot g(r_1, \dots, r_{2p-1}), \tag{3.63}$$

kde $g(r_1, \dots, r_{2p-1})$ označuje reálnou funkci proměnných r_1, \dots, r_{2p-1} . Opět podle věty 3.6 o substituci uvedené v Anděl [1] na straně 49 a použitím substituce (3.62) a jakobiánu (3.63) můžeme přepsat (3.61) jako

$$\begin{aligned}
\xi(m|\mathbf{y}) &= c \frac{1-q}{n-1} |\mathbf{Q}|^{1/2} D(m)^{-(n/2+a)} |\mathbf{A}(m)|^{-1/2} \times \\
&\quad \times \underbrace{\int_0^\infty \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \dots \int_0^\pi (1+y)^{-(n/2+p+a)} y^{p-1} g(r_1, \dots, r_{2p-1}) dr_1 \dots dr_{2p-2} dr_{2p-1} dy}_{\text{konstanta}} \\
&= c \frac{1-q}{n-1} |\mathbf{Q}|^{1/2} D(m)^{-(n/2+a)} |\mathbf{A}(m)|^{-1/2} \\
&= c \frac{1-q}{n-1} |\mathbf{Q}|^{1/2} D(m)^{-(n/2+a)} |\mathbf{Q} + \mathbf{x}'(m)\mathbf{x}(m)|^{-1/2}.
\end{aligned} \tag{3.64}$$

Analogickým způsobem lze spočítat marginální aposteriorní hustotu $\xi(n|\mathbf{y})$, která je rovna

$$\xi(n|\mathbf{y}) = c \cdot q |\mathbf{Q}_{11}|^{1/2} D(n)^{-(n/2+a)} |\mathbf{Q}_{11} + \mathbf{x}'(n)\mathbf{x}(n)|^{-1/2}. \quad (3.65)$$

Speciální případ dvoufázového regresního modelu

V této podkapitole si odvození provedená v předešlé podkapitole uvedeme pro speciální případ dvoufázového regresního modelu (se známým apriorním rozdělením).

Vezměme v úvahu speciální případ dvoufázového regresního modelu (3.46)

$$y_i = \begin{cases} \theta_1 + \theta_2 x_i + e_i, & i = 1, 2, \dots, m \\ \theta_1^* + \theta_2^* x_i + e_i, & i = m + 1, \dots, n, \end{cases} \quad \text{kde } 1 \leq m \leq n. \quad (3.66)$$

Vzhledem k modelu (3.66) dostáváme pro $1 \leq m \leq n - 1$

$$\mathbf{A}(m) = \mathbf{Q} + \mathbf{x}'(m)\mathbf{x}(m) = \mathbf{Q} + \begin{bmatrix} m & \sum_{i=1}^m x_i & 0 & 0 \\ \sum_{i=1}^m x_i & \sum_{i=1}^m x_i^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & n - m & \sum_{i=m+1}^n x_i \\ 0 & 0 & \sum_{i=m+1}^n x_i & \sum_{i=m+1}^n x_i^2 \end{bmatrix}. \quad (3.67)$$

Označíme-li pro $1 \leq m \leq n - 1$

$$\mathbf{B}(m) = \mathbf{Q}\boldsymbol{\mu} + \mathbf{x}'(m)\mathbf{y} = \mathbf{Q}\boldsymbol{\mu} + \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^m y_i \\ \sum_{i=1}^m x_i y_i \\ \sum_{i=m+1}^n y_i \\ \sum_{i=m+1}^n x_i y_i \end{pmatrix}, \quad (3.68)$$

$$C(m) = 2b + \boldsymbol{\mu}'\mathbf{Q}\boldsymbol{\mu} + \mathbf{y}'\mathbf{y} = 2b + \boldsymbol{\mu}'\mathbf{Q}\boldsymbol{\mu} + \sum_{i=1}^n y_i^2 \quad (3.69)$$

máme

$$\begin{aligned} 2D(m) &= 2b + [\mathbf{y} - \mathbf{x}(m)\boldsymbol{\theta}^*(m)]'\mathbf{y} + [\boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{\theta}^*(m)]'\mathbf{Q}\boldsymbol{\mu} \\ &= 2b + \mathbf{y}'\mathbf{y} - \boldsymbol{\theta}^{*'}(m)\mathbf{x}'(m)\mathbf{y} + \boldsymbol{\mu}'\mathbf{Q}\boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{\theta}^{*'}(m)\mathbf{Q}\boldsymbol{\mu} \\ &= C(m) - \boldsymbol{\theta}^{*'}(m)[\mathbf{Q}\boldsymbol{\mu} + \mathbf{x}'(m)\mathbf{y}] \\ &= C(m) - [\mathbf{Q}\boldsymbol{\mu} + \mathbf{x}'(m)\mathbf{y}]'\mathbf{A}(m)^{-1}[\mathbf{Q}\boldsymbol{\mu} + \mathbf{x}'(m)\mathbf{y}] \\ &= C(m) - \mathbf{B}'(m)\mathbf{A}^{-1}(m)\mathbf{B}(m). \end{aligned} \quad (3.70)$$

Stále předpokládáme, že všechna pozorování jsou taková, že splňují podmínku $D(m) > 0$ pro každé $m \in \{1, \dots, n\}$. Poznamenejme, že předešlé značení (3.67) až (3.69) platí pro model (3.66). Vzhledem k rovnostem (3.67), (3.70) můžeme pravděpodobnostní funkci (3.64) pro model (3.66) (označme $\xi_{sp}(m|\mathbf{y})$) přepsat jako

$$\begin{aligned}\xi_{sp}(m|\mathbf{y}) &= c \cdot \frac{1-q}{n-1} |\mathbf{Q}|^{1/2} [2D(m)]^{-(n/2+a)} |\mathbf{A}(m)|^{-1/2} \\ &= c \cdot \frac{1-q}{n-1} |\mathbf{Q}|^{1/2} [C(m) - \mathbf{B}'(m)\mathbf{A}^{-1}(m)\mathbf{B}(m)]^{-(n/2+a)} |\mathbf{A}(m)|^{-1/2}.\end{aligned}\tag{3.71}$$

Poznamenejme, že v (3.71) součinitel $[2D(m)]^{-(n/2+a)}$ vznikl vyjmutím čísla $2^{-(n/2+a)}$ z normovací konstanty c .

Analogickým způsobem lze upravit marginální aposteriorní hustotu (3.65), která je pro model (3.66) (označme ji $\xi_{sp}(n|\mathbf{y})$) rovna

$$\begin{aligned}\xi_{sp}(n|\mathbf{y}) &= c \cdot q |\mathbf{Q}_{11}|^{1/2} [2D(n)]^{-(n/2+a)} |\mathbf{Q}_{11} + \mathbf{x}'(n)\mathbf{x}(n)|^{-1/2} \\ &= c \cdot q |\mathbf{Q}_{11}|^{1/2} [C(n) - \mathbf{B}'(n)\mathbf{A}^{-1}(n)\mathbf{B}(n)]^{-(n/2+a)} |\mathbf{A}(n)|^{-1/2},\end{aligned}\tag{3.72}$$

kde

$$\begin{aligned}\mathbf{A}(n) &= \mathbf{Q}_{11} + \mathbf{x}'(n)\mathbf{x}(n) = \mathbf{Q}_{11} + \begin{bmatrix} n & \sum_{i=1}^n x_i \\ \sum_{i=1}^n x_i & \sum_{i=1}^n x_i^2 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{B}(n) &= \mathbf{Q}_{11}\boldsymbol{\mu}_1 + \mathbf{x}'(n)\mathbf{y} = \mathbf{Q}_{11}\boldsymbol{\mu}_1 + \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n y_i \\ \sum_{i=1}^n x_i y_i \end{pmatrix}, \\ C(n) &= 2b + \boldsymbol{\mu}_1' \mathbf{Q}_{11} \boldsymbol{\mu}_1 + \mathbf{y}'\mathbf{y} = 2b + \boldsymbol{\mu}_1' \mathbf{Q}_{11} \boldsymbol{\mu}_1 + \sum_{i=1}^n y_i^2,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}2D(n) &= 2b + [\mathbf{y} - \mathbf{x}(n)\boldsymbol{\theta}^*(n)]'\mathbf{y} + [\boldsymbol{\mu}_1 - \boldsymbol{\theta}^*(n)]'\mathbf{Q}_{11}\boldsymbol{\mu}_1 \\ &= 2b + \mathbf{y}'\mathbf{y} - \boldsymbol{\theta}^{*'}(n)\mathbf{x}'(n)\mathbf{y} + \boldsymbol{\mu}_1' \mathbf{Q}_{11} \boldsymbol{\mu}_1 - \boldsymbol{\theta}^{*'}(n)\mathbf{Q}_{11}\boldsymbol{\mu}_1 \\ &= C(n) - \boldsymbol{\theta}^{*'}(n)[\mathbf{Q}_{11}\boldsymbol{\mu}_1 + \mathbf{x}'(n)\mathbf{y}] \\ &= C(n) - [\mathbf{Q}_{11}\boldsymbol{\mu}_1 + \mathbf{x}'(n)\mathbf{y}]'[\mathbf{Q}_{11} + \mathbf{x}'(n)\mathbf{x}(n)]^{-1}[\mathbf{Q}_{11}\boldsymbol{\mu}_1 + \mathbf{x}'(n)\mathbf{y}] \\ &= C(n) - \mathbf{B}'(n)\mathbf{A}^{-1}(n)\mathbf{B}(n).\end{aligned}$$

Jeffreysova apriorní hustota

V této podkapitole si odvodíme marginální aposteriorní pravděpodobnostní funkci bodu změny $\xi(m|\mathbf{y})$ pro obecný dvoufázový regresní model (3.46) s Jeffreysovou apriorní hustotou.

Doposud jsme předpokládali, že známe apriorní hustotu $\xi(\boldsymbol{\theta}, \tau, m)$. Pokud však $\xi(\boldsymbol{\theta}, \tau, m)$ neznáme, použijeme Jeffreysovou apriorní hustotu:

$$\xi_{JF}(\boldsymbol{\theta}, \tau, m) = c \cdot \tau^{-1}, \quad \tau > 0, \boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^{2p}. \quad (3.73)$$

Tvar této hustoty, jak už jsme zmínili v úvodu této kapitoly, záleží na rozdělení výběru a lze odvodit z Fisherovy informační matice. Hustota (3.73) odpovídá normálnímu rozdělení výběru s neznámými parametry, viz například Hušková [8], strana 32.

Všimněme si, že hustota (3.73) je nevlastní, tj. $\xi_{JF}(\boldsymbol{\theta}, \tau, m)$ je nezáporná funkce a platí $\sum_{m=1}^n \left[\int_{\mathbb{R}^{2p}} \int_0^\infty \xi_{JF}(\boldsymbol{\theta}, \tau, m) d\tau d\boldsymbol{\theta} \right] = \infty$ (není to rovno 1).

V celé této podkapitole předpokládejme, že je model nestabilní (tj. $m \in \{1, \dots, n-1\}$). Nyní si pro apriorní hustotu (3.73) odvodíme sdruženou aposteriorní hustotu parametrů a marginální aposteriorní pravděpodobnostní funkci bodu změny m pro model (3.46). První zmíněnou hustotu získáme z Bayesovy věty podle vztahu (3.2), kde jako věrohodnostní funkci uijeme (3.47) a jako apriorní hustotu uijeme (3.73)

$$\xi_{JF}(\boldsymbol{\theta}, \tau, m|\mathbf{y}) = cL(\boldsymbol{\theta}, \tau, m|\mathbf{y})\xi_{JF}(\boldsymbol{\theta}, \tau, m) = c\tau^{n/2-1} \exp \left\{ -\frac{\tau}{2} [\mathbf{y}(m) - \mathbf{x}(m)\boldsymbol{\theta}]' [\mathbf{y}(m) - \mathbf{x}(m)\boldsymbol{\theta}] \right\}. \quad (3.74)$$

Použijeme-li pomocný výpočet (3.5) a současné značení, můžeme rovnost (3.74) přepsat jako

$$\begin{aligned} \xi_{JF}(\boldsymbol{\theta}, \tau, m|\mathbf{y}) &= c\tau^{n/2-1} \exp \left[-\frac{\tau}{2} \left\{ [\boldsymbol{\theta} - \hat{\boldsymbol{\theta}}(m)]' \mathbf{x}'(m)\mathbf{x}(m) [\boldsymbol{\theta} - \hat{\boldsymbol{\theta}}(m)] + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + [\mathbf{y}(m) - \mathbf{x}(m)\hat{\boldsymbol{\theta}}(m)]' [\mathbf{y}(m) - \mathbf{x}(m)\hat{\boldsymbol{\theta}}(m)] \right\} \right] \\ &= c\tau^{n/2-1} \exp \left\{ -\tau \left[\beta^*(m) + \frac{1}{2} [\boldsymbol{\theta} - \hat{\boldsymbol{\theta}}(m)]' \mathbf{x}'(m)\mathbf{x}(m) [\boldsymbol{\theta} - \hat{\boldsymbol{\theta}}(m)] \right] \right\}, \end{aligned} \quad (3.75)$$

kde

$$\beta^*(m) = \frac{1}{2} [\mathbf{y}(m) - \mathbf{x}(m)\hat{\boldsymbol{\theta}}(m)]' [\mathbf{y}(m) - \mathbf{x}(m)\hat{\boldsymbol{\theta}}(m)] \quad (3.76)$$

a $\hat{\boldsymbol{\theta}}(m)$ je uvedena v (3.55). Poznamenejme, že $\beta^*(m)$ je vždy kladné pro všechna pozorování.

Poznámka 3.6. Snadno zjistíme, že matice $\mathbf{x}'(m)\mathbf{x}(m)$ není regulární pro $m=1$ a $m=n-1$. Proto všechny výpočty u Jeffreysovy hustoty omezíme na $m \in \{2, \dots, n-2\}$.

Vyintegrováním přebytečných proměnných z rovnosti (3.75) získáme pravděpodobnostní funkci bodu změny $\xi_{JF}(m|\mathbf{y})$. Vzhledem k lemmě 6.7. a (3.75) můžeme psát

$$\begin{aligned}\xi_{JF}(m|\mathbf{y}) &= \int_{\mathbb{R}^{2p}} \int_0^\infty \xi_{JF}(\boldsymbol{\theta}, \tau, m|\mathbf{y}) \, d\tau d\boldsymbol{\theta} \\ &= c \cdot \int_{\mathbb{R}^{2p}} \left[\beta^*(m) + \frac{1}{2} [\boldsymbol{\theta} - \hat{\boldsymbol{\theta}}(m)]' \mathbf{x}'(m) \mathbf{x}(m) [\boldsymbol{\theta} - \hat{\boldsymbol{\theta}}(m)] \right]^{-n/2} d\boldsymbol{\theta} \\ &= c \cdot \beta^*(m)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^{2p}} \left[1 + \frac{1}{2\beta^*(m)} [\boldsymbol{\theta} - \hat{\boldsymbol{\theta}}(m)]' \mathbf{x}'(m) \mathbf{x}(m) [\boldsymbol{\theta} - \hat{\boldsymbol{\theta}}(m)] \right]^{-n/2} d\boldsymbol{\theta},\end{aligned}\tag{3.77}$$

kde $m \in \{2, \dots, n-2\}$. Další výpočet $\xi_{JF}(m|\mathbf{y})$ z (3.77) je analogický výpočtu pravděpodobnostní funkce bodu změny se známou apriorní hustotou (viz (3.58)), a proto ho nebudeme znova provádět. Konečný tvar pravděpodobnostní funkce $\xi_{JF}(m|\mathbf{y})$ je

$$\xi_{JF}(m|\mathbf{y}) = c \beta^*(m)^{-n/2+p} |\mathbf{x}'(m) \mathbf{x}(m)|^{-1/2}, \quad m \in \{2, \dots, n-2\},\tag{3.78}$$

kde $\beta^*(m)$ je uvedena v (3.76).

3.4.3 Odhad bodu změny v nestabilním modelu

V této podkapitole si uvedeme, jak odhadnout bod změny m pro obecný a speciální dvoufázový regresní model se známým apriorním rozdělením a pro obecný dvoufázový regresní model s Jeffreysovou apriorní hustotou. Pro tuto podkapitulu předpokládáme, že model, ve kterém chceme odhadnout bod změny, je nestabilní.

Znamé apriorní rozdělení

V této části práce si ukážeme, jak odhadnout bod změny $m \in \{1, \dots, n-1\}$ obecného a speciálního dvoufázového regresního modelu se známým apriorním rozdělením.

Pokud jsme si jisti, že změna v modelu (3.46) (respektive (3.66)) nastala, tak chceme odhadnout jeho bod změny m . Pro tento odhad potřebujeme opět určit marginální aposteriorní pravděpodobnostní funkci $\xi(m|\mathbf{y})$. Vypočteme ji stejným způsobem jako pro zkoumání stability modelu, až na to že nám odpadne případ $m = n$ (tj. případ stability modelu).

Věrohodnostní funkce pro $\boldsymbol{\theta} = (\boldsymbol{\theta}_1', \boldsymbol{\theta}_2')'$ a τ je podle (3.47)

$$L(\boldsymbol{\theta}, \tau, m|\mathbf{y}) = c\tau^{n/2} \exp\left\{-\frac{\tau}{2} [\mathbf{y} - \mathbf{x}(m)\boldsymbol{\theta}]' [\mathbf{y} - \mathbf{x}(m)\boldsymbol{\theta}]\right\}, \quad 1 \leq m \leq n-1,$$

kde jsme použili rovnosti $\mathbf{y} = \mathbf{y}(m)$. A tedy marginální aposteriorní pravděpodobnostní funkce bodu změny pro model (3.46) je podle (3.64)

$$\xi(m|\mathbf{y}) = c D(m)^{-(n+2a)/2} |\mathbf{Q} + \mathbf{x}'(m) \mathbf{x}(m)|^{-1/2}, \quad 1 \leq m \leq n-1,\tag{3.79}$$

neboť $\frac{1-q}{n-1} |\mathbf{Q}|^{1/2}$ zde považujeme za konstantu. Připomeňme si, že

$$D(m) = b + \frac{1}{2} \left\{ [\mathbf{y} - \mathbf{x}(m)\boldsymbol{\theta}^*(m)]' \mathbf{y} + [\boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{\theta}^*(m)]' \mathbf{Q}\boldsymbol{\mu} \right\} \quad (3.80)$$

a

$$\boldsymbol{\theta}^*(m) = [\mathbf{Q} + \mathbf{x}'(m)\mathbf{x}(m)]^{-1} [\mathbf{Q}\boldsymbol{\mu} + \mathbf{x}'(m)\mathbf{y}]. \quad (3.81)$$

Marginální aposteriorní pravděpodobnostní funkce bodu změny pro speciální model (3.66) je podle (3.71)

$$\xi_{sp}(m|\mathbf{y}) = c [C(m) - \mathbf{B}'(m)\mathbf{A}^{-1}(m)\mathbf{B}(m)]^{-(n/2+a)} |\mathbf{A}(m)|^{-1/2}, \quad 1 \leq m \leq n-1, \quad (3.82)$$

kde vzorce pro výpočet $\mathbf{A}(m)$, $\mathbf{B}(m)$ a $C(m)$ jsou uvedeny v (3.67), (3.68) a (3.69), a $\frac{1-q}{n-1} |\mathbf{Q}|^{1/2}$ považujeme za konstantu.

Chceme-li odhadnout bod změny, tak spočteme aposteriorní pravděpodobnostní funkci bodu změny $\xi(m|\mathbf{y})$ podle (3.79) (respektive $\xi_{sp}(m|\mathbf{y})$ podle (3.82)) pro každé $m \in \{1, \dots, n-1\}$ a výsledná čísla znormujeme tak, aby $\sum_{m=1}^{n-1} \xi(m|\mathbf{y}) = 1$ (respektive $\sum_{m=1}^{n-1} \xi_{sp}(m|\mathbf{y}) = 1$). Jako odhad změny vezmeme to m , pro které byla znormovaná hodnota $\xi(m|\mathbf{y})$ (respektive $\xi_{sp}(m|\mathbf{y})$) nejvyšší (tj. modus pravděpodobnostní funkce (3.79), respektive (3.82)). Představu o tom, kde změna nastala si můžeme udělat z grafu funkce $\xi(m|\mathbf{y})$ (respektive $\xi_{sp}(m|\mathbf{y})$) v závislosti na m , kde $m \in \{1, 2, \dots, n-1\}$.

Jeffreysova apriorní hustota

Uvažujeme-li model (3.46) s Jeffreysovou apriorní hustotou, je odhad bodu změny analogický jako u modelu se známou apriorní hustotou. Nejprve spočteme aposteriorní pravděpodobnostní funkci bodu změny $\xi_{JF}(m|\mathbf{y})$ podle (3.78) pro každé $m \in \{2, \dots, n-2\}$ a výsledná čísla znormujeme. Jako odhad změny vezmeme to m , pro které byla znormovaná hodnota $\xi_{JF}(m|\mathbf{y})$ nejvyšší.

3.4.4 Odhad parametrů $\boldsymbol{\theta}$ a σ^2

V této podkapitole si uvedeme (popřípadě odvodíme) vzorce pro výpočet aposteriorní střední hodnoty a rozptylu veličin $\boldsymbol{\theta}$ a σ^2 pro obecný nestabilní dvoufázový regresní model se známým apriorním rozdělením a s Jeffreysovou apriorní hustotou. Jako bodový odhad těchto veličin můžeme vzít jejich aposteriorní podmíněnou (popřípadě nepodmíněnou) střední hodnotu.

Známé apriorní rozdělení

V této části práce si uvedeme vzorce pro výpočet aposteriorní střední hodnoty a rozptylu veličin $\boldsymbol{\theta}$ a σ^2 pro obecný dvoufázový regresní model se známým apriorním rozdělením.

Začneme s podmíněným vektorem středních hodnot a rozptylovou maticí regresního parametru $\boldsymbol{\theta}$. Podle Broemeling a Tsurumi [5] platí, že podmíněná aposteriorní hustota pro

$\boldsymbol{\theta}$ za podmínky m ($\xi(\boldsymbol{\theta}|m, \mathbf{y})$) je $2p$ -rozměrná t s $n + 2a$ stupni volnosti, střední hodnotou $\boldsymbol{\theta}^*(m)$ a přesnostní maticí

$$\mathbf{P}(m) = \frac{n + 2a}{2D(m)} [\mathbf{Q} + \mathbf{x}'(m)\mathbf{x}(m)],$$

kde $D(m)$ je uvedena v (3.80). Což díky vlastnostem mnohorozměrného t rozdělení (viz podkapitola 2.3, vzorec (2.9)) dává vzorec pro podmíněnou aposteriorní rozptylovou matici parametru $\boldsymbol{\theta}$

$$\mathbf{Var}(\boldsymbol{\theta}|m, \mathbf{y}) = \frac{n + 2a}{n + 2a - 2} \mathbf{P}^{-1}(m) = \left(\frac{n + 2a}{2}\right) \left(\frac{n + 2a}{2} - 1\right)^{-1} \mathbf{P}^{-1}(m) \quad (3.83)$$

a pro podmíněný vektor aposteriorních středních hodnot pro $\boldsymbol{\theta}$ za podmínky m

$$\mathbf{E}(\boldsymbol{\theta}|m, \mathbf{y}) = \boldsymbol{\theta}^*(m), \quad (3.84)$$

kde $\boldsymbol{\theta}^*(m)$ je uvedena v (3.81).

Abychom mohli odhadnout aposteriorní nepodmíněný vektor středních hodnot a rozptylovou matici vektoru $\boldsymbol{\theta}$, potřebujeme si odvodit marginální aposteriorní hustota $\xi(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{y})$. Analogické odvození této hustoty můžeme najít v podkapitole 3.3.2, proto si zde uvedeme jen její výsledný tvar:

$$\xi(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{y}) = \sum_{m=1}^{n-1} \xi(m|\mathbf{y})\xi(\boldsymbol{\theta}|m, \mathbf{y}) = \sum_{m=1}^{n-1} \xi(m|\mathbf{y})t_{2p}[\boldsymbol{\theta}; n + 2a, \boldsymbol{\theta}^*(m), \mathbf{P}(m)], \quad \boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^{2p}, \quad (3.85)$$

kde $\xi(m|\mathbf{y})$ je marginální aposteriorní funkce bodu změny m (viz (3.79)) a $\xi(\boldsymbol{\theta}|m, \mathbf{y})$ je již zmiňovaná podmíněná aposteriorní hustota vektoru $\boldsymbol{\theta}$ za podmínky m a je to hustota rozdělení $t_{2p}[\boldsymbol{\theta}; n + 2a, \boldsymbol{\theta}^*(m), \mathbf{P}(m)]$.

Z (3.85) plyne, že aposteriorní (nepodmíněný) vektor středních hodnot pro $\boldsymbol{\theta}$ je

$$\mathbf{E}(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{y}) = \sum_{m=1}^{n-1} \xi(m|\mathbf{y})\mathbf{E}(\boldsymbol{\theta}|m, \mathbf{y}) = \sum_{m=1}^{n-1} \xi(m|\mathbf{y})\boldsymbol{\theta}^*(m), \quad (3.86)$$

kde $\xi(m|\mathbf{y})$ a $\boldsymbol{\theta}^*(m)$ jsou uvedeny v (3.79) a (3.81).

Odvození aposteriorní rozptylové matice vektoru $\boldsymbol{\theta}$ je analogické jako v podkapitole 3.3.3. Opět uvedeme jen výsledný tvar této matice:

$$\begin{aligned} \mathbf{Var}(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{y}) &= \mathbf{E}\left\{ [\boldsymbol{\theta} - \mathbf{E}(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{y})] [\boldsymbol{\theta} - \mathbf{E}(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{y})]' \middle| \mathbf{y} \right\} \\ &= \mathbf{E}(\boldsymbol{\theta}\boldsymbol{\theta}'|\mathbf{y}) - [\mathbf{E}(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{y})] [\mathbf{E}(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{y})]', \end{aligned} \quad (3.87)$$

kde

$$\mathbf{E}(\boldsymbol{\theta}\boldsymbol{\theta}'|\mathbf{y}) = \sum_{m=1}^{n-1} \xi(m|\mathbf{y}) \left[\mathbf{Var}(\boldsymbol{\theta}|m, \mathbf{y}) + \boldsymbol{\theta}^*(m)\boldsymbol{\theta}^{*'}(m) \right],$$

$\xi(m|\mathbf{y})$, $\boldsymbol{\theta}^*(m)$, $\mathbf{Var}(\boldsymbol{\theta}|m, \mathbf{y})$ a $\mathbf{E}(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{y})$ jsou uvedeny v (3.79), (3.81), (3.83) a (3.86).

Kromě odhadu parametrů modelu nás může zajímat odhad aposteriorní podmíněné střední hodnoty a aposteriorního podmíněného rozptylu $\sigma^2 = \tau^{-1}$. Podle Broemeling a Tsurumi [5] je podmíněné aposteriorní rozdělení pro τ za podmínky m gama s parametry $(n + 2a)/2$ a $D(m)$, a proto podle inverzního gama rozdělení (viz (2.10) a (2.12))

$$E(\sigma^2|m, \mathbf{y}) = \frac{D(m)}{\frac{n+2a}{2} - 1}, \quad \frac{n + 2a}{2} > 1 \quad (3.88)$$

a

$$\mathit{Var}(\sigma^2|m, \mathbf{y}) = \frac{D(m)^2}{\left(\frac{n+2a}{2} - 1\right)^2 \left(\frac{n+2a}{2} - 2\right)}, \quad \frac{n + 2a}{2} > 2, \quad (3.89)$$

kde $D(m)$ je uvedena v (3.80).

Jeffreysova apriorní hustota

V této části práce si uvedeme vzorce pro výpočet aposteriorní střední hodnoty a rozptylu veličin $\boldsymbol{\theta}$ a σ^2 pro obecný dvoufázový regresní model s Jeffreysovou apriorní hustotou.

Analogickým způsobem jako v podkapitole 3.3.2 odvodíme marginální aposteriorní hustotu $\xi_{JF}(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{y})$. Uvedeme si její výsledný tvar:

$$\xi_{JF}(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{y}) = \sum_{m=2}^{n-2} \xi_{JF}(m|\mathbf{y}) \xi_{JF}(\boldsymbol{\theta}|m, \mathbf{y}) = \sum_{m=2}^{n-2} \xi_{JF}(m|\mathbf{y}) t_{2p}[\boldsymbol{\theta}; n - 2p, \hat{\boldsymbol{\theta}}(m), \mathbf{P}_{JF}(m)], \quad (3.90)$$

kde $\xi_{JF}(m|\mathbf{y})$ je uvedena v (3.78) a $t_{2p}[\boldsymbol{\theta}; n - 2p, \hat{\boldsymbol{\theta}}(m), \mathbf{P}_{JF}(m)]$ je $2p$ -rozměrné t rozdělení s $n - 2p$ stupni volnosti, střední hodnotou $\hat{\boldsymbol{\theta}}(m)$ a přesnostní maticí

$$\mathbf{P}_{JF}(m) = \frac{n - 2p}{2\beta^*(m)} [\mathbf{x}'(m)\mathbf{x}(m)], \quad (3.91)$$

kde $\beta^*(m)$ je uvedena v (3.76). Připomeňme si, že

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}(m) = [\mathbf{x}'(m)\mathbf{x}(m)]^{-1} \mathbf{x}'(m)\mathbf{y}(m), \quad (3.92)$$

pokud matice $\mathbf{x}'(m)\mathbf{x}(m)$ je regulární (viz poznámka 3.6.).

Z výpočtu (3.90) plyne, že podmíněná aposteriorní hustota pro $\boldsymbol{\theta}$ za podmínky m (tj. $\xi(\boldsymbol{\theta}|m, \mathbf{y})$) je hustota rozdělení $t_{2p}[\boldsymbol{\theta}; n - 2p, \hat{\boldsymbol{\theta}}(m), \mathbf{P}_{JF}(m)]$. Což díky vlastnostem mnoho-rozměrného t rozdělení (viz podkapitola 2.3, vzorec (2.9)) dává vzorec pro podmíněnou aposteriorní rozptylovou matici

$$\mathbf{Var}_{JF}(\boldsymbol{\theta}|m, \mathbf{y}) = \frac{n - 2p}{n - 2p - 2} \mathbf{P}_{JF}^{-1}(m) = \left(\frac{n - 2p}{2}\right) \left(\frac{n - 2p}{2} - 1\right)^{-1} \mathbf{P}_{JF}^{-1}(m), \quad (3.93)$$

kde $\mathbf{P}_{JF}(m)$ je uvedeno v (3.91), a pro podmíněný vektor aposteriorních středních hodnot pro $\boldsymbol{\theta}$ za podmínky m

$$\mathbf{E}_{JF}(\boldsymbol{\theta}|m, \mathbf{y}) = \hat{\boldsymbol{\theta}}(m), \quad (3.94)$$

kde $\hat{\boldsymbol{\theta}}(m)$ je uvedeno v (3.92).

Z (3.90) plyne, že aposteriorní (nepodmíněný) vektor středních hodnot pro $\boldsymbol{\theta}$ je

$$\mathbf{E}_{JF}(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{y}) = \sum_{m=2}^{n-2} \xi_{JF}(m|\mathbf{y}) \mathbf{E}_{JF}(\boldsymbol{\theta}|m, \mathbf{y}) = \sum_{m=2}^{n-2} \xi_{JF}(m|\mathbf{y}) \hat{\boldsymbol{\theta}}(m), \quad (3.95)$$

kde $\xi_{JF}(m|\mathbf{y})$ a $\hat{\boldsymbol{\theta}}(m)$ jsou uvedeny v (3.78) a (3.92).

Aposteriorní (nepodmíněná) rozptylová matice vektoru $\boldsymbol{\theta}$ se odvodí analogickým způsobem jako v podkapitole 3.3.3, proto si zde uvedeme jen její výsledný tvar:

$$\begin{aligned} \mathbf{Var}_{JF}(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{y}) &= \mathbf{E}_{JF} \left\{ [\boldsymbol{\theta} - \mathbf{E}_{JF}(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{y})] [\boldsymbol{\theta} - \mathbf{E}_{JF}(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{y})]' | \mathbf{y} \right\} \\ &= \mathbf{E}_{JF}(\boldsymbol{\theta}\boldsymbol{\theta}'|\mathbf{y}) - [\mathbf{E}_{JF}(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{y})] [\mathbf{E}_{JF}(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{y})]', \end{aligned} \quad (3.96)$$

kde

$$\mathbf{E}_{JF}(\boldsymbol{\theta}\boldsymbol{\theta}'|\mathbf{y}) = \sum_{m=2}^{n-2} \xi_{JF}(m|\mathbf{y}) \left[\mathbf{Var}_{JF}(\boldsymbol{\theta}|m, \mathbf{y}) + \hat{\boldsymbol{\theta}}(m)\hat{\boldsymbol{\theta}}'(m) \right],$$

$\xi_{JF}(m|\mathbf{y})$, $\hat{\boldsymbol{\theta}}(m)$, $\mathbf{Var}_{JF}(\boldsymbol{\theta}|m, \mathbf{y})$ a $\mathbf{E}_{JF}(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{y})$ jsou uvedeny v (3.78), (3.92), (3.93) a (3.95).

Dále si odvodíme podmíněnou aposteriorní střední hodnotu a rozptyl veličiny $\sigma^2 = \tau^{-1}$. Nejprve zjistíme ze vztahu (3.75) aposteriorní rozdělení pro τ za podmínky m :

$$\begin{aligned} \xi_{JF}(\tau|m, \mathbf{y}) &= \int_{\mathbb{R}^{2p}} \xi_{JF}(\boldsymbol{\theta}, \tau|m, \mathbf{y}) d\boldsymbol{\theta} \\ &= c \tau^{n/2-1} \int_{\mathbb{R}^{2p}} \exp \left[-\tau\beta^*(m) \left\{ 1 + \frac{1}{2\beta^*(m)} [\boldsymbol{\theta} - \hat{\boldsymbol{\theta}}(m)]' \mathbf{x}'(m)\mathbf{x}(m) [\boldsymbol{\theta} - \hat{\boldsymbol{\theta}}(m)] \right\} \right] d\boldsymbol{\theta}. \end{aligned} \quad (3.97)$$

Další výpočet (3.97) je analogický výpočtu (3.58). Výsledný tvar $\xi_{JF}(\tau|m, \mathbf{y})$ je

$$\xi_{JF}(\tau|m, \mathbf{y}) = c \tau^{n/2-p-1} e^{-\tau\beta^*(m)}, \quad m \in \{2, \dots, n-2\}. \quad (3.98)$$

Z předešlé rovnosti (3.98) plyne, že podmíněné aposteriorní rozdělení pro τ za podmínky m je gama s parametry $(n-2p)/2$ a $\beta^*(m)$. Proto podle inverzního gama rozdělení (viz (2.10) a (2.12)) je podmíněná aposteriorní střední hodnota a podmíněný aposteriorní rozptyl veličiny σ^2 roven

$$E_{JF}(\sigma^2|m, \mathbf{y}) = \frac{\beta^*(m)}{\frac{n-2p}{2} - 1}, \quad \frac{n-2p}{2} > 1 \quad (3.99)$$

a

$$\mathit{Var}_{JF}(\sigma^2|m, \mathbf{y}) = \frac{\beta^*(m)^2}{\left(\frac{n-2p}{2} - 1\right)^2 \left(\frac{n-2p}{2} - 2\right)}, \quad \frac{n-2p}{2} > 2, \quad (3.100)$$

kde $\beta^*(m)$ je uvedena v (3.76).

3.4.5 Příklad

Na datech uvedených v tabulce 3.1 si ukážeme, jak použít test stability a jak odhadnout bod změny a parametry modelu pro známou a Jeffreysovu apriorní hustotu.

Pozorování x_i jsou realizace diskrétního rovnoměrného rozdělení s pravděpodobnostní $\frac{1}{20}$, dále s nimi počítáme jako s konstantami. Pozorování y_i v tabulce 3.1 jsou normálně rozdělena, konkrétně $y_i \sim N(2,5 + 0,7x_i; 1)$ pro $i = 1, \dots, 12$ a $y_i \sim N(5 + 0,5x_i; 1)$ pro $i = 13, \dots, 20$. Tedy změna je z jednoho regresního modelu do druhého (změna v regresních koeficientech) po dvanáctém pozorování.

| i (číslo pozorování) | x_i | y_i | i (číslo pozorování) | x_i | y_i |
|------------------------|-------|--------|------------------------|-------|--------|
| 1 | 5 | 6,969 | 11 | 17 | 16,016 |
| 2 | 10 | 10,536 | 12 | 11 | 12,283 |
| 3 | 3 | 4,567 | 13 | 4 | 6,816 |
| 4 | 6 | 6,252 | 14 | 14 | 10,852 |
| 5 | 2 | 3,024 | 15 | 20 | 15,502 |
| 6 | 16 | 13,266 | 16 | 18 | 13,471 |
| 7 | 19 | 16,432 | 17 | 9 | 9,547 |
| 8 | 15 | 12,994 | 18 | 12 | 11,140 |
| 9 | 1 | 3,489 | 19 | 13 | 11,281 |
| 10 | 8 | 8,047 | 20 | 7 | 8,224 |

Tabulka 3.1: Data příkladu

Známa apriorní hustota

Nejprve provedeme test stability, odhad bodu změny a parametrů pro známé apriorní rozdělení. Předpokládejme, že parametry θ a τ mají normální-gama rozdělení s parametry $\mu_{(4 \times 1)}$, $\mathbf{Q}_{(4 \times 4)}$, $a > 0$ a $b > 0$, tj. $(\theta, \tau) \sim NG_4(\mu, \mathbf{Q}, a, b)$, kde $a = b = 1$, $\mu = (2,5; 0,7; 5; 0,5)'$ a $\mathbf{Q} = \mathbf{I}_4$. Dále parametry θ_1 a τ mají normální-gama rozdělení s parametry $\mu_1_{(2 \times 1)}$, $\mathbf{Q}_{11(2 \times 2)}$, $a > 0$ a $b > 0$, tj. $(\theta_1, \tau) \sim NG_2(\mu_1, \mathbf{Q}_{11}, a, b)$, kde $a = b = 1$, $\mu_1 = (2,5; 0,7)'$ a $\mathbf{Q}_{11} = \mathbf{I}_2$. Tudíž apriorní střední hodnota regresních koeficientů je nastavena na jejich reálnou hodnotu. Apriorní střední hodnota přesnostního parametru je také nastavena na jeho reálnou hodnotu.

Tabulka 3.2 ukazuje aposteriorní pravděpodobnostní funkce bodu změny $\xi(m|\mathbf{y})$ pro různé hodnoty q (kde q je apriorní pravděpodobnost toho, že změna nenastala). Hodnoty v této tabulce vznikly ze vztahů (3.71), (3.72) (nebo ekvivalentně ze vztahů (3.64), (3.65)) a ukazují, že pravděpodobnostní funkce bodu změny je citlivá na hodnotu q . Všimněme si,

| m | q, (apriorní pravděpodobnost toho, že změna nenastala) | | | |
|----|--|--------|--------|--------|
| | 0,05 | 0,5 | 0,95 | 0,99 |
| 1 | 0,0014 | 0,0009 | 0,0001 | 0,0000 |
| 2 | 0,0008 | 0,0005 | 0,0001 | 0,0000 |
| 3 | 0,0008 | 0,0006 | 0,0001 | 0,0000 |
| 4 | 0,0008 | 0,0005 | 0,0001 | 0,0000 |
| 5 | 0,0047 | 0,0032 | 0,0005 | 0,0001 |
| 6 | 0,0015 | 0,0010 | 0,0001 | 0,0000 |
| 7 | 0,0022 | 0,0015 | 0,0002 | 0,0000 |
| 8 | 0,0020 | 0,0014 | 0,0002 | 0,0000 |
| 9 | 0,0071 | 0,0049 | 0,0007 | 0,0001 |
| 10 | 0,0141 | 0,0096 | 0,0014 | 0,0003 |
| 11 | 0,2727 | 0,1862 | 0,0265 | 0,0055 |
| 12 | 0,5121 | 0,3498 | 0,0498 | 0,0103 |
| 13 | 0,1228 | 0,0839 | 0,0119 | 0,0025 |
| 14 | 0,0143 | 0,0098 | 0,0014 | 0,0003 |
| 15 | 0,0068 | 0,0047 | 0,0007 | 0,0001 |
| 16 | 0,0018 | 0,0013 | 0,0002 | 0,0000 |
| 17 | 0,0017 | 0,0012 | 0,0002 | 0,0000 |
| 18 | 0,0022 | 0,0015 | 0,0002 | 0,0000 |
| 19 | 0,0044 | 0,0030 | 0,0004 | 0,0001 |
| 20 | 0,0258 | 0,3346 | 0,9053 | 0,9803 |

Tabulka 3.2: Test stability I: Marginální aposteriorní pravděpodobnostní funkce bodu změny $\xi(m|\mathbf{y})$ pro $a = b = 1$, $\boldsymbol{\mu}_1 = (2,5; 0,7)'$, $\boldsymbol{\mu}_2 = (5; 0,5)'$ a různé hodnoty q

že aposteriorní pravděpodobnost stability ($\xi(m|y)$ pro $m = 20$) je vždy menší než apriorní pravděpodobnost q . Z toho plyne, že je model nestabilní.

Poznámka 3.7. *Ve výsledných tabulkách (například 3.2, 3.3, 3.4, atd.) si můžeme povšimnout, že součet ve sloupcích není vždy roven jedné. To je důsledek zaokrouhlování hodnot (tj. nejprve jsme hodnoty znormovali a poté zaokrouhlili).*

Pokud si nejsme jisti, že je model stabilní, volíme apriorní pravděpodobnost stability q (tj. apriorní pravděpodobnost toho, že změna nenastala) rovnu hodnotě 0,5. Pro tuto hodnotu nám v tabulce 3.2 vyšla aposteriorní pravděpodobnost stability 0,3346, která svědčí o tom, že je model nestabilní.

| m | Střední hodnoty apriorního rozdělení | | | | | |
|----|--------------------------------------|--------------------|--------------------|-------------------|--------------------|------------------|
| | $\mu_1'=(2;0,7)$ | $\mu_1'=(2,5;0,7)$ | $\mu_1'=(2,5;1,5)$ | $\mu_1'=(1;0,7)$ | $\mu_1'=(5,5;0,7)$ | $\mu_1'=(2,5;8)$ |
| | $\mu_2'=(5,5;0,5)$ | $\mu_2'=(5;0,5)$ | $\mu_2'=(5;-0,5)$ | $\mu_2'=(10;0,5)$ | $\mu_2'=(2;0,5)$ | $\mu_2'=(5;6)$ |
| 1 | 0,0006 | 0,0009 | 0,0011 | 0,0000 | 0,0666 | 0,0005 |
| 2 | 0,0003 | 0,0005 | 0,0006 | 0,0000 | 0,0331 | 0,0001 |
| 3 | 0,0003 | 0,0006 | 0,0006 | 0,0000 | 0,0067 | 0,0001 |
| 4 | 0,0004 | 0,0005 | 0,0006 | 0,0000 | 0,0034 | 0,0001 |
| 5 | 0,0029 | 0,0032 | 0,0032 | 0,0000 | 0,0014 | 0,0002 |
| 6 | 0,0007 | 0,0010 | 0,0009 | 0,0000 | 0,0009 | 0,0001 |
| 7 | 0,0012 | 0,0015 | 0,0014 | 0,0000 | 0,0006 | 0,0001 |
| 8 | 0,0010 | 0,0014 | 0,0012 | 0,0000 | 0,0006 | 0,0001 |
| 9 | 0,0045 | 0,0049 | 0,0041 | 0,0000 | 0,0006 | 0,0001 |
| 10 | 0,0099 | 0,0096 | 0,0078 | 0,0000 | 0,0006 | 0,0001 |
| 11 | 0,2234 | 0,1862 | 0,1188 | 0,0004 | 0,0015 | 0,0001 |
| 12 | 0,3291 | 0,3498 | 0,2099 | 0,0003 | 0,0042 | 0,0001 |
| 13 | 0,0734 | 0,0839 | 0,0590 | 0,0005 | 0,0059 | 0,0001 |
| 14 | 0,0093 | 0,0098 | 0,0082 | 0,0002 | 0,0016 | 0,0001 |
| 15 | 0,0048 | 0,0047 | 0,0043 | 0,0005 | 0,0012 | 0,0001 |
| 16 | 0,0012 | 0,0013 | 0,0013 | 0,0005 | 0,0014 | 0,0001 |
| 17 | 0,0011 | 0,0012 | 0,0012 | 0,0005 | 0,0017 | 0,0001 |
| 18 | 0,0014 | 0,0015 | 0,0016 | 0,0008 | 0,0022 | 0,0001 |
| 19 | 0,0031 | 0,0030 | 0,0033 | 0,0074 | 0,0064 | 0,0002 |
| 20 | 0,3315 | 0,3346 | 0,5710 | 0,9890 | 0,8594 | 0,9978 |

Tabulka 3.3: Test stability II: Marginální aposteriorní pravděpodobnostní funkce bodu změny $\xi(m|\mathbf{y})$ pro různé hodnoty středních hodnot apriorního rozdělení a pro $q = 0,5$, $a = b = 1$

Pro zajímavost jsou v tabulkách 3.3 a 3.4 ještě uvedeny výsledky marginální aposteriorní funkce bodu změny $\xi(m|\mathbf{y})$ pro různé parametry apriorního rozdělení. Je z nich patrné, že výsledky pravděpodobnostní funkce změny jsou na tyto parametry citlivé. V tabulce 3.3 bychom dokonce rozhodli, že je model stabilní pro poslední čtyři případy (sloupce). Obdobně v tabulce 3.4 je model stabilní pro případ $a = 102$, $b = 101$.

Nyní když víme, že je model nestabilní, odhadneme bod změny podle (3.82) (nebo ekvivalentně podle (3.79)). V tabulce 3.5 je marginální aposteriorní funkce bodu změny pro různé hodnoty a , b . K našemu příkladu se vztahuje druhý sloupeček této tabulky

| m | Hodnoty a , b (popřípadě hodnoty rozptylu veličiny σ^2) | | | | |
|----|---|-------------------------------------|---------------------------------|--------------------------------------|---|
| | $Var(\sigma^2)=0,01$ $a=102, b=101$ | $Var(\sigma^2)=0,1$ $a=12, b=11$ | $Var(\sigma^2)=1$ $a=3, b=2$ | $Var(\sigma^2)=10$ $a=2,1, b=1,1$ | $Var(\sigma^2)=100$ $a=2,01, b=1,01$ |
| 1 | 0,0018 | 0,0013 | 0,0007 | 0,0006 | 0,0006 |
| 2 | 0,0010 | 0,0007 | 0,0004 | 0,0003 | 0,0003 |
| 3 | 0,0011 | 0,0008 | 0,0004 | 0,0004 | 0,0003 |
| 4 | 0,0011 | 0,0008 | 0,0004 | 0,0003 | 0,0003 |
| 5 | 0,0059 | 0,0048 | 0,0029 | 0,0024 | 0,0024 |
| 6 | 0,0019 | 0,0015 | 0,0008 | 0,0007 | 0,0007 |
| 7 | 0,0027 | 0,0022 | 0,0013 | 0,0011 | 0,0011 |
| 8 | 0,0025 | 0,0020 | 0,0012 | 0,0010 | 0,0010 |
| 9 | 0,0072 | 0,0067 | 0,0047 | 0,0041 | 0,0041 |
| 10 | 0,0122 | 0,0124 | 0,0096 | 0,0086 | 0,0085 |
| 11 | 0,0855 | 0,1391 | 0,2044 | 0,2152 | 0,2163 |
| 12 | 0,1224 | 0,2221 | 0,3862 | 0,4253 | 0,4297 |
| 13 | 0,0549 | 0,0768 | 0,0905 | 0,0900 | 0,0899 |
| 14 | 0,0126 | 0,0127 | 0,0097 | 0,0087 | 0,0086 |
| 15 | 0,0073 | 0,0066 | 0,0044 | 0,0038 | 0,0038 |
| 16 | 0,0024 | 0,0019 | 0,0011 | 0,0009 | 0,0009 |
| 17 | 0,0023 | 0,0017 | 0,0010 | 0,0008 | 0,0008 |
| 18 | 0,0030 | 0,0022 | 0,0013 | 0,0011 | 0,0010 |
| 19 | 0,0060 | 0,0045 | 0,0025 | 0,0021 | 0,0021 |
| 20 | 0,6660 | 0,4991 | 0,2765 | 0,2322 | 0,2275 |

Tabulka 3.4: Test stability III: Marginální aposteriorní pravděpodobnostní funkce bodu změny $\xi(m|\mathbf{y})$ pro $q = 0, 5$, $E(\sigma^2) = 1$, $\boldsymbol{\mu}_1 = (2,5; 0,7)'$, $\boldsymbol{\mu}_2 = (5; 0,5)'$ a různé hodnoty a , b

(tj. případ $a = b = 1$), další sloupečky jsou uvedeny pro zajímavost. Můžeme si povšimnout, že pro všechny případy vychází změna na dvanácté pozorování.

Poznamenejme, že případ $a = 102$, $b = 101$ by v tabulce 3.5 neměl být uveden, protože jsme již dříve usoudili, že pro tyto hodnoty a , b je model stabilní. Nicméně ve srovnání s ostatními případy v tabulce 3.5 vidíme, že změna vychází také na dvanácté pozorování, ale není tak výrazná.

Poslední, co nám chybí, je odhad parametrů pro data z tabulky 3.1. V tabulkách 3.6, 3.7 a 3.8 jsou uvedeny výsledky aposteriorní střední hodnoty a rozptylu parametrů modelu a veličiny σ^2 , které jsou spočteny ze vztahů (3.83), (3.84), (3.86) až (3.89).

| m | Hodnoty a, b | | | | | |
|----|----------------|----------------|--------------|------------|----------------|------------------|
| | $a=1, b=1$ | $a=102, b=101$ | $a=12, b=11$ | $a=3, b=2$ | $a=2,1, b=1,1$ | $a=2,01, b=1,01$ |
| 1 | 0,0014 | 0,0055 | 0,0026 | 0,0010 | 0,0008 | 0,0007 |
| 2 | 0,0008 | 0,0031 | 0,0015 | 0,0005 | 0,0004 | 0,0004 |
| 3 | 0,0008 | 0,0033 | 0,0016 | 0,0006 | 0,0005 | 0,0004 |
| 4 | 0,0008 | 0,0033 | 0,0016 | 0,0006 | 0,0005 | 0,0004 |
| 5 | 0,0049 | 0,0177 | 0,0096 | 0,0040 | 0,0032 | 0,0031 |
| 6 | 0,0015 | 0,0058 | 0,0030 | 0,0012 | 0,0009 | 0,0009 |
| 7 | 0,0023 | 0,0082 | 0,0044 | 0,0019 | 0,0015 | 0,0015 |
| 8 | 0,0020 | 0,0074 | 0,0040 | 0,0017 | 0,0013 | 0,0013 |
| 9 | 0,0073 | 0,0217 | 0,0134 | 0,0065 | 0,0054 | 0,0053 |
| 10 | 0,0145 | 0,0366 | 0,0248 | 0,0133 | 0,0113 | 0,0110 |
| 11 | 0,2799 | 0,2561 | 0,2777 | 0,2825 | 0,2803 | 0,2800 |
| 12 | 0,5257 | 0,3665 | 0,4434 | 0,5338 | 0,5539 | 0,5562 |
| 13 | 0,1260 | 0,1644 | 0,1533 | 0,1250 | 0,1173 | 0,1164 |
| 14 | 0,0147 | 0,0378 | 0,0254 | 0,0134 | 0,0114 | 0,0112 |
| 15 | 0,0070 | 0,0218 | 0,0131 | 0,0061 | 0,0050 | 0,0049 |
| 16 | 0,0019 | 0,0073 | 0,0037 | 0,0015 | 0,0012 | 0,0011 |
| 17 | 0,0017 | 0,0068 | 0,0034 | 0,0013 | 0,0011 | 0,0010 |
| 18 | 0,0023 | 0,0088 | 0,0045 | 0,0018 | 0,0014 | 0,0014 |
| 19 | 0,0046 | 0,0179 | 0,0090 | 0,0035 | 0,0028 | 0,0027 |

Tabulka 3.5: Odhad změny: Marginální aposteriorní pravděpodobnostní funkce bodu změny $\xi(m|\mathbf{y})$ pro různé hodnoty a, b

Jeffreysova apriorní hustota

Nyní provedeme odhad bodu změny a parametrů pro dvoufázový regresní model s Jeffreysovou apriorní hustotou.

Vezmeme-li v úvahu poznámku 3.6., tak pro odhad změny připadá v úvahu jen m z množiny $\{2, \dots, 18\}$. Data, na kterých výpočty provádíme, jsou opět z tabulky 3.1.

Tabulka 3.9 ukazuje aposteriorní pravděpodobnostní funkci bodu změny $\xi(m|\mathbf{y})$, která vznikla ze vztahu (3.78). Je z ní patrné, že změna vychází na dvanácté pozorování.

Zbývá nám už jen odhad parametrů pro data z tabulky 3.1. V tabulkách 3.10, 3.11 a 3.12 jsou uvedeny výsledky aposteriorní střední hodnoty a rozptylu parametrů modelu a veličiny σ^2 , které jsou spočteny ze vztahů (3.93) až (3.96), (3.99) a (3.100).

Na obrázku 3.1 jsou znázorněny data z tabulky 3.1 a regresní přímky, které jsou spočteny z podmíněné střední hodnoty pro známé apriorní rozdělení (červená barva) viz tabulka

| Střední hodnota parametrů modelu | | Podmíněná střední hodnota parametrů modelu | |
|----------------------------------|------|--|------|
| $E(\theta_1 \mathbf{y})$ | 2,47 | $E(\theta_1 \mathbf{y}, m=12)$ | 2,45 |
| $E(\theta_2 \mathbf{y})$ | 0,74 | $E(\theta_2 \mathbf{y}, m=12)$ | 0,75 |
| $E(\theta_1^* \mathbf{y})$ | 4,89 | $E(\theta_1^* \mathbf{y}, m=12)$ | 4,85 |
| $E(\theta_2^* \mathbf{y})$ | 0,50 | $E(\theta_2^* \mathbf{y}, m=12)$ | 0,50 |

Tabulka 3.6: Odhad parametrů I: Aposteriorní střední hodnota parametrů modelu podmíněná i nepodmíněná pro známé apriorní rozdělení

| Rozptyl parametrů modelu | | Podmíněný rozptyl parametrů modelu | |
|------------------------------|--------|------------------------------------|--------|
| $Var(\theta_1 \mathbf{y})$ | 0,1499 | $Var(\theta_1 \mathbf{y}, m=12)$ | 0,1284 |
| $Var(\theta_2 \mathbf{y})$ | 0,0016 | $Var(\theta_2 \mathbf{y}, m=12)$ | 0,0011 |
| $Var(\theta_1^* \mathbf{y})$ | 0,3173 | $Var(\theta_1^* \mathbf{y}, m=12)$ | 0,2613 |
| $Var(\theta_2^* \mathbf{y})$ | 0,0023 | $Var(\theta_2^* \mathbf{y}, m=12)$ | 0,0017 |

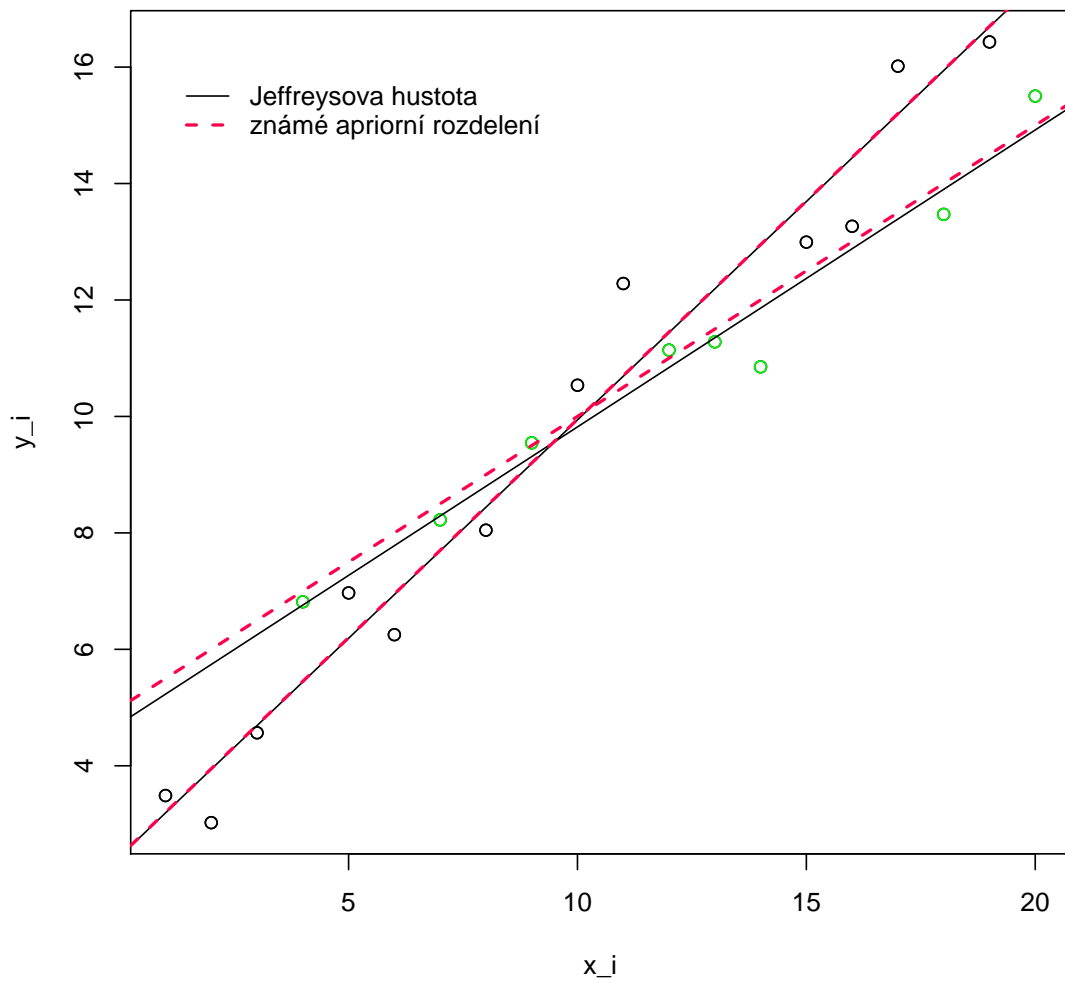
Tabulka 3.7: Odhad parametrů II: Aposteriorní rozptyl parametrů modelu podmíněný i nepodmíněný pro známé apriorní rozdělení

| Podmíněný rozptyl a střední hodnota σ^2 | |
|--|--------|
| $E(\sigma^2 \mathbf{y}, m=12)$ | 0,57 |
| $Var(\sigma^2 \mathbf{y}, m=12)$ | 0,0361 |

Tabulka 3.8: Odhad parametrů III: Aposteriorní podmíněný rozptyl a střední hodnota veličiny σ^2 pro známé apriorní rozdělení

3.6 a pro Jeffreysovu hustotu (černá barva) viz tabulka 3.10. Poznamenejme, že dvě přímky se překrývají. Jednotlivá pozorování jsou od prvního až do dvanáctého (včetně) znázorněna černým kolečkem a od třináctého až po dvacáté zeleným kolečkem. Poznamenejme, že k černým kolečkům patří rychleji rostoucí přímky (překrývající se).

Srovnáme-li výsledky pro dvě různě nastavené apriorní hustoty (Jeffreysovu a známou hustotu normálního-gama rozdělení), zjistíme, že jsou porovnatelné (tj. velmi se neliší). Avšak pro nějaké závěry je tento příklad nepostačující (malé množství pozorování).



Obrázek 3.1: Data příkladu a regresní přímky, které jsou spočteny pro známé apriorní rozdělení (červená) a pro Jeffreysovu hustotu (černá)

| m | $\xi(m \mathbf{y})$ | m | $\xi(m \mathbf{y})$ |
|----|---------------------|----|---------------------|
| 1 | - | 11 | 0,2422 |
| 2 | 0,0177 | 12 | 0,4353 |
| 3 | 0,0102 | 13 | 0,1490 |
| 4 | 0,0082 | 14 | 0,0240 |
| 5 | 0,0224 | 15 | 0,0152 |
| 6 | 0,0055 | 16 | 0,0077 |
| 7 | 0,0065 | 17 | 0,0080 |
| 8 | 0,0059 | 18 | 0,0105 |
| 9 | 0,0120 | 19 | - |
| 10 | 0,0198 | | |

Tabulka 3.9: Odhad změny: Marginální aposteriorní pravděpodobnostní funkce bodu změny $\xi(m|\mathbf{y})$ pro Jeffreysovu apriorní hustotu

| Střední hodnota parametrů modelu | | Podmíněná střední hodnota parametrů modelu | |
|----------------------------------|------|--|------|
| $E_{JF}(\theta_1 \mathbf{y})$ | 2,48 | $E_{JF}(\theta_1 \mathbf{y}, m = 12)$ | 2,44 |
| $E_{JF}(\theta_2 \mathbf{y})$ | 0,74 | $E_{JF}(\theta_2 \mathbf{y}, m = 12)$ | 0,75 |
| $E_{JF}(\theta_1^* \mathbf{y})$ | 4,69 | $E_{JF}(\theta_1^* \mathbf{y}, m = 12)$ | 4,72 |
| $E_{JF}(\theta_2^* \mathbf{y})$ | 0,52 | $E_{JF}(\theta_2^* \mathbf{y}, m = 12)$ | 0,51 |

Tabulka 3.10: Odhad parametrů I: Aposteriorní střední hodnota parametrů modelu podmíněná i nepodmíněná pro Jeffreysovu apriorní hustotu

| Rozptyl parametrů modelu | | Podmíněný rozptyl parametrů modelu | |
|-----------------------------------|--------|---|--------|
| $Var_{JF}(\theta_1 \mathbf{y})$ | 0,4260 | $Var_{JF}(\theta_1 \mathbf{y}, m = 12)$ | 0,1945 |
| $Var_{JF}(\theta_2 \mathbf{y})$ | 0,0058 | $Var_{JF}(\theta_2 \mathbf{y}, m = 12)$ | 0,0016 |
| $Var_{JF}(\theta_1^* \mathbf{y})$ | 1,0639 | $Var_{JF}(\theta_1^* \mathbf{y}, m = 12)$ | 0,5677 |
| $Var_{JF}(\theta_2^* \mathbf{y})$ | 0,0070 | $Var_{JF}(\theta_2^* \mathbf{y}, m = 12)$ | 0,0033 |

Tabulka 3.11: Odhad parametrů II: Aposteriorní rozptyl parametrů modelu podmíněný i nepodmíněný pro Jeffreysovu apriorní hustotu

| Podmíněný rozptyl a střední hodnota σ^2 | |
|---|--------|
| $E_{JF}(\sigma^2 \mathbf{y}, m=12)$ | 0,67 |
| $Var_{JF}(\sigma^2 \mathbf{y}, m=12)$ | 0,0744 |

Tabulka 3.12: Odhad parametrů III: Aposteriorní podmíněný rozptyl a střední hodnota veličiny σ^2 pro Jeffreysovu apriorní hustotu

3.4.6 Simulace dat

V této podkapitole si uvedeme výsledky a postřehy ze simulací dat pro speciální dvoufázový regresní model se známým apriorním rozdělením a s Jeffreysovou apriorní hustotou.

Nejprve si něco řekneme k simulovaným datům. Pozorování x_i jsou realizací spojitého rovnoměrného rozdělení na intervalu $(0, 1; 500)$. Pozorování y_i jsou normálně rozdělena v závislosti na pozorováních x_i podle zvoleného regresního modelu. Například pro model 1 (viz (3.101)) jsou pozorování y_i rozdělena takto: $y_i \sim N(2,5 + 0,7x_i; sd^2)$ pro $i = 1, \dots, m$ a $y_i \sim N(5 + 0,5x_i; sd^2)$ pro $i = m + 1, \dots, n$, kde veličina sd představuje směrodatnou odchylku normálního rozdělení. Postupně jsme za tuto veličinu dosadili hodnoty 0, 1; 1; 10.

Simulovali jsme tyto tři modely:

model 1:

$$y_i = \begin{cases} 2,5 + 0,7x_i + e_i, & i = 1; 2, \dots, m \\ 5 + 0,5x_i + e_i, & i = m + 1, \dots, n, \end{cases} \quad (3.101)$$

model 2:

$$y_i = \begin{cases} 1273 - 295x_i + e_i, & i = 1; 2, \dots, m \\ 1556 - 208x_i + e_i, & i = m + 1, \dots, n, \end{cases} \quad (3.102)$$

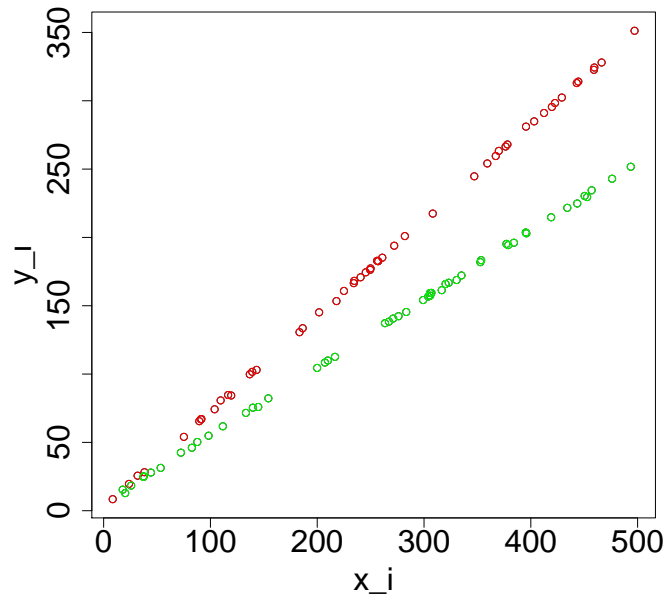
model 3:

$$y_i = \begin{cases} 20 - 0,06x_i + e_i, & i = 1; 2, \dots, m \\ -8 + 0,05x_i + e_i, & i = m + 1, \dots, n, \end{cases} \quad (3.103)$$

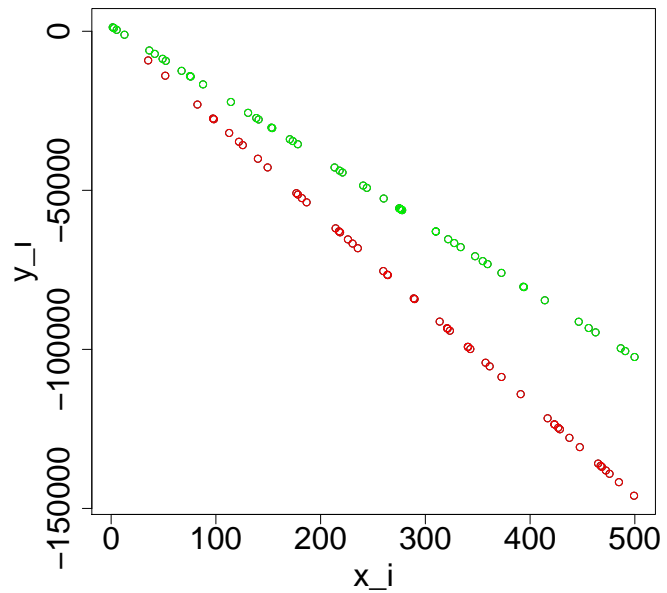
kde n je počet simulovaných dat (v našem případě $n = 100$) a m je index pozorování, kde je změna v modelu simulovaná (značíme také jako změna_{sim}). Hodnoty m se liší podle použité apriorní hustoty.

Můžeme si povšimnout, že model 1 představuje dvě rostoucí přímky s nevýraznou změnou, model 2 dvě přímky klesající s výraznou změnou a model 3 jednu přímku rostoucí, jednu klesající s nevýraznou změnou. Pro lepší představu jsou na obrázcích 3.2 až 3.5 znázorněny jedny z možných příkladů vygenerovaných dat pro jednotlivé modely a pro změna_{sim} = 50, $sd = 1$. Červená barva na obrázcích znázorňuje hodnoty pozorování pro $i = 1, \dots, 50$ a zelená pro $i = 51, \dots, 100$.

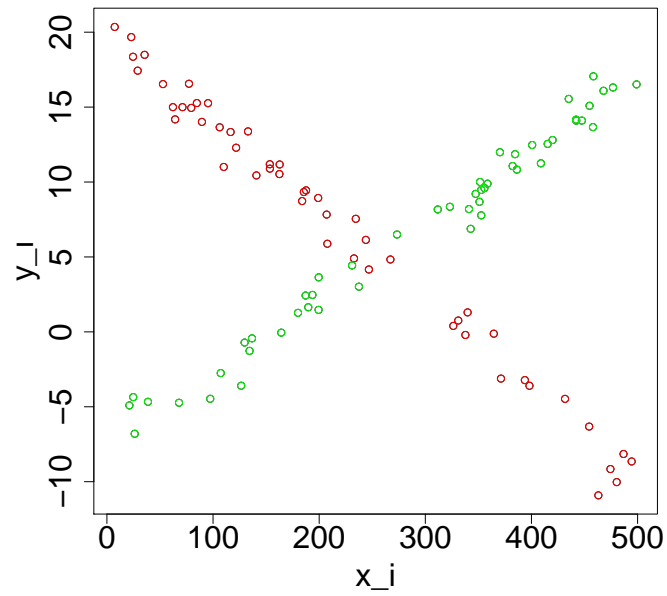
Výsledkům uvedeným v této podkapitole (pro různé nastavení hodnot) vždy předcházelo tisíc pokusů.



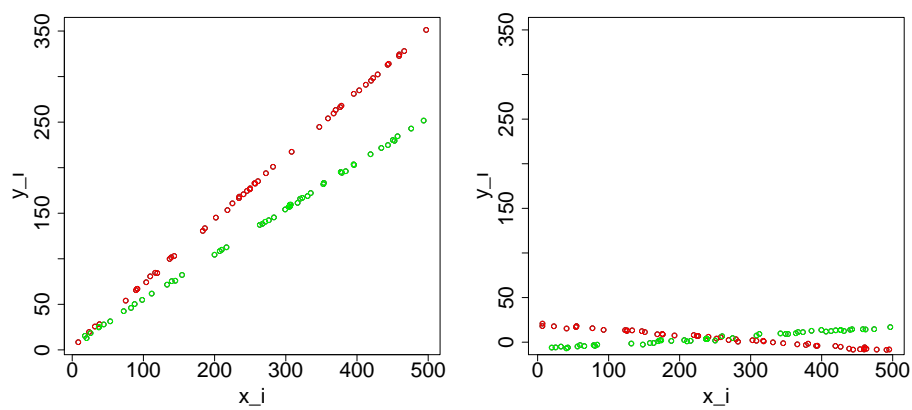
Obrázek 3.2: Jedna z možných nagerování dat pro model 1 a změna $_{sim} = 50$, $sd = 1$



Obrázek 3.3: Jedna z možných nagerování dat pro model 2 a změna $_{sim} = 50$, $sd = 1$



Obrázek 3.4: Jedna z možných nagenování dat pro model 3 a změna $_{sim} = 50$, $sd = 1$



Obrázek 3.5: Porovnání předchozích obrázků (model 1 a 3) - stejné hodnoty na ose y

Jeffreysova apriorní hustota

V této části práce se pokusíme zjistit, zda dříve uvedená metoda pro Jeffreysovu apriorní hustotu (viz podkapitola 3.4.3) dobře odhaluje změnu z jednoho regresního modelu na druhý. Provedeme také aposteriorní odhad parametrů modelu.

Změnu v modelech 1 až 3 (viz (3.101) až (3.103)) jsme postupně simulovali na desáté, padesáté a osmdesáté pozorování. Všechny odhady jsme provedli tisíckrát. Výsledky správného odhadu změny (tj. odhad změny vyjde stejně jako změna simulovaná) jsou uvedeny pro modely 1 až 3 v procentech v tabulkách 3.13 až 3.15. Například pro model 1, $sd = 1$ a $změna_{sim} = 10$ vyšlo 96,4% odhadů (z 1000 pokusů) správně na desáté pozorování. Z výše zmíněných tabulek je vidět, že výraznou změnu (pro model 2) jsme správně detekovali ve 100% případech bez ohledu na zvolenou směrodatnou odchylku sd . Pokud máme změnu nevýraznou (model 1 a 3) správná detekce změny závisí na zvolené směrodatné odchylce. Pro $sd = 0,1$ se správný odhad změny pohyboval okolo 99%, pro $sd = 1$ se pohyboval okolo 96% a 94%. Pro $sd = 10$ u modelu 1 se správný odhad změny pohyboval okolo 77% – 82%, pro model 3 je tato směrodatná odchylka příliš velká a velmi zásadně ovlivňuje data, nicméně jsme ji pro srovnání v tabulce ponechali (hodnoty okolo 38%).

| | model 1 | | |
|-----|--------------------|--------------------|--------------------|
| sd | $změna_{sim} = 10$ | $změna_{sim} = 50$ | $změna_{sim} = 80$ |
| 0,1 | 99,6% | 99,7% | 99,8% |
| 1 | 96,4% | 97,6% | 96,5% |
| 10 | 77,6% | 81,8% | 82,1% |

Tabulka 3.13: Relativní četnost správně odhadnutého bodu změny v modelu 1

| | model 2 | | |
|-----|--------------------|--------------------|--------------------|
| sd | $změna_{sim} = 10$ | $změna_{sim} = 50$ | $změna_{sim} = 80$ |
| 0,1 | 100% | 100% | 100% |
| 1 | 100% | 100% | 100% |
| 10 | 100% | 100% | 100% |

Tabulka 3.14: Relativní četnost správně odhadnutého bodu změny v modelu 2

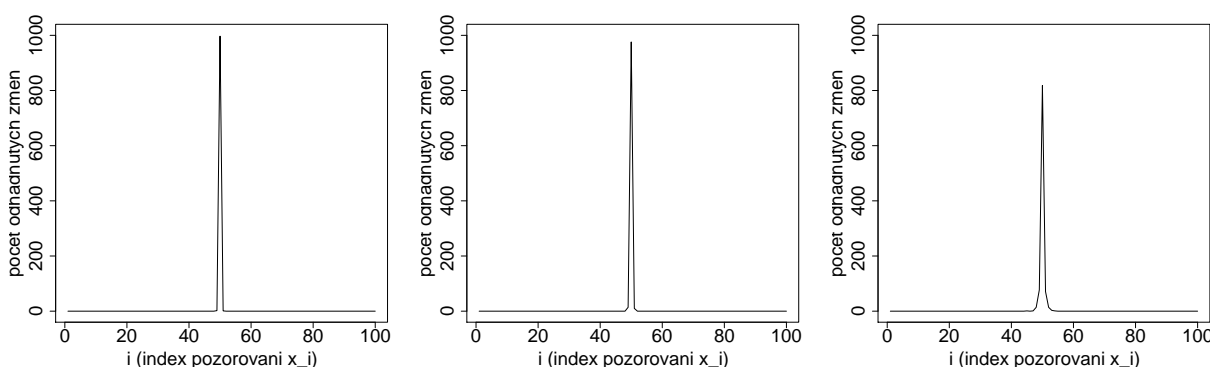
Obrázky 3.6 znázorňují vztahy mezi indexem pozorování a počtem odhadnutých změn (z tisíce pokusů) k danému indexu pro model 1, $změna_{sim} = 50$. Je z nich patrné, že odhadovaná změna (označme $změna_{odh}$) se pohybuje velmi blízko změny simulované. Například pro $sd = 10$, $změna_{sim} = 50$ víme z tabulky 3.13, že 81,8% odhadů vychází na padesáté pozorování. Kde se vyskytuje zbývajících 18,2% odhadů, můžeme vidět na obrázku 3.6 vpravo. Vidíme, že odhady se pohybují v rozmezí čtyřicátého pátého a padesátého pátého

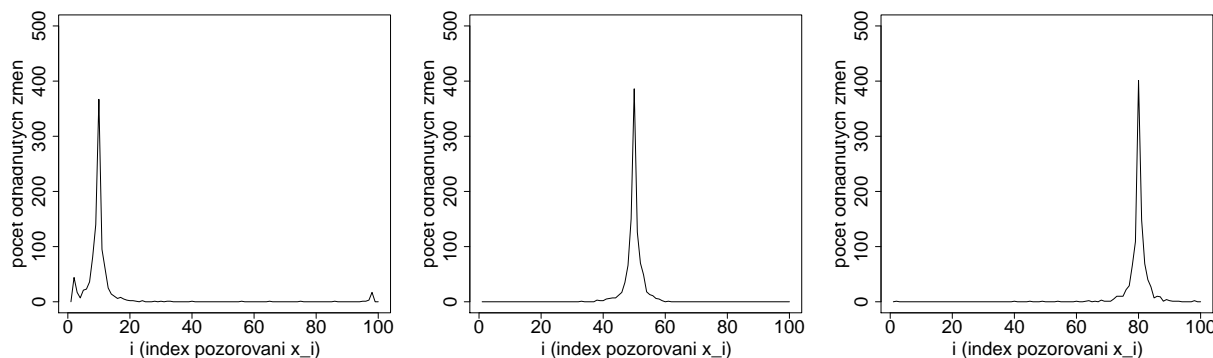
| | model 3 | | |
|-----|---------------------------|---------------------------|---------------------------|
| sd | změna _{sim} = 10 | změna _{sim} = 50 | změna _{sim} = 80 |
| 0,1 | 99,1% | 99,1% | 99,1% |
| 1 | 94,8% | 94,3% | 93% |
| 10 | 36,7% | 38,6% | 40,1% |

Tabulka 3.15: Relativní četnost správně odhadnutého bodu změny v modelu 3

pozorování. Obdobné obrázky bychom získali pro všechny případy (různé hodnoty sd) u modelu 1 a 2. Pro model 3 by obrázky byly podobné jen pro $sd = 0,1$ a $sd = 1$.

Obrázky 3.7 znázorňují vztahy mezi indexem pozorování a počtem odhadnutých změn (z tisíce pokusů) k danému indexu pro model 3, $sd = 10$. Je z nich patrné, že odhadovaná změna se pohybuje ve většině případů v okolí změny simulované. Například pro $sd = 10$, změna_{sim} = 50 víme z tabulky 3.15, že 38,6% odhadů vychází na padesáté pozorování. Kde se vyskytuje zbývajících 61,4% odhadů, můžeme vidět na obrázku 3.7 uprostřed. Vidíme, že většina odhadů se pohybuje v rozmezí čtyřicátého a šedesátého pozorování. Za zmínku stojí případ, kde $sd = 10$ a změna_{sim} = 10 (obrázek 3.7 vlevo). Můžeme si v něm povšimnout, že část odhadů „ulétla“ úplně na jiné pozorování (přibližně změna_{odh} = 98), než na které je změna simulována.

Obrázek 3.6: Počet odhadnutých změn pro Jeffreysovu apriorní hustotu u modelu 1 pro změna_{sim} = 50 a zleva pro $sd = 0,1$, $sd = 1$ a $sd = 10$



Obrázek 3.7: Počet odhadnutých změn pro Jeffreysovu apriorní hustotu u modelu 3 pro $sd = 10$ a zleva pro $změnína_{sim} = 10$; 50 a 80

| | sd | $změnína_{sim} = 10$ | $změnína_{sim} = 50$ | $změnína_{sim} = 80$ |
|--|------|----------------------|----------------------|----------------------|
| $E_{JF}(\theta_1 \mathbf{y}, m = změna_{odh})$ | 0,1 | 2,5005 | 2,5005 | 2,5006 |
| | 1 | 2,4923 | 2,5023 | 2,4956 |
| | 10 | 3,4011 | 2,5857 | 2,6150 |
| $E_{JF}(\theta_2 \mathbf{y}, m = změna_{odh})$ | 0,1 | 0,7000 | 0,7000 | 0,7000 |
| | 1 | 0,7000 | 0,7000 | 0,7000 |
| | 10 | 0,6972 | 0,7001 | 0,6996 |
| $E_{JF}(\theta_1^* \mathbf{y}, m = změna_{odh})$ | 0,1 | 5,0009 | 4,9981 | 5,0019 |
| | 1 | 4,9996 | 4,9991 | 4,9853 |
| | 10 | 4,9687 | 4,8409 | 5,0353 |
| $E_{JF}(\theta_2^* \mathbf{y}, m = změna_{odh})$ | 0,1 | 0,5000 | 0,5000 | 0,5000 |
| | 1 | 0,5000 | 0,5000 | 0,5001 |
| | 10 | 0,4999 | 0,5006 | 0,5001 |

Tabulka 3.16: Odhad parametrů: Podmíněná aposteriorní střední hodnota parametrů pro Jeffreysovu apriorní hustotu u modelu 1; 1000 simulací

V tabulkách 3.16 až 3.24 jsou uvedeny podmíněné aposteriorní odhady parametrů a jejich rozptylů pro jednotlivé modely. Pro $sd = 0,1$ a $sd = 1$ u všech tří modelů vychází odhady parametrů téměř stejné jako simulované hodnoty parametrů a rozptyl těchto odhadů se pohybuje pod hodnotou 1. Pro $sd = 10$ u modelů 1 a 2 jsou odhady parametrů dosti věrohodné, ale jejich rozptyl se pohybuje v rozmezí hodnot 5 a 235. U modelu 3 jsme již zmiňovali, že tato směrodatná odchylka velmi ovlivňuje data, nicméně pokud je $změna_{sim} = 50$, nebo $změna_{sim} = 80$ odhady parametrů jsou dosti blízko simulovaným, ale rozptyl některých odhadů je vysoký. Pokud je $změna_{sim} = 10$ u modelu 3, pak odhady se velmi liší.

| | sd | $změna_{sim} = 10$ | $změna_{sim} = 50$ | $změna_{sim} = 80$ |
|--|------|--------------------|--------------------|--------------------|
| $Var_{JF}(\theta_1 \mathbf{y}, m = změna_{odh})$ | 0,1 | 0,0049 | 0,0009 | 0,0005 |
| | 1 | 0,5119 | 0,0845 | 0,0525 |
| | 10 | 54,0967 | 8,4265 | 5,1867 |
| $Var_{JF}(\theta_2 \mathbf{y}, m = změna_{odh})$ | 0,1 | 6×10^{-8} | 1×10^{-8} | 1×10^{-8} |
| | 1 | 6×10^{-6} | 1×10^{-6} | 1×10^{-6} |
| | 10 | 0,0006 | 0,0001 | 0,0001 |
| $Var_{JF}(\theta_1^* \mathbf{y}, m = změna_{odh})$ | 0,1 | 0,0005 | 0,0009 | 0,0022 |
| | 1 | 0,0464 | 0,0844 | 0,2293 |
| | 10 | 4,5744 | 8,4607 | 22,5736 |
| $Var_{JF}(\theta_2^* \mathbf{y}, m = změna_{odh})$ | 0,1 | 1×10^{-8} | 1×10^{-8} | 3×10^{-8} |
| | 1 | 1×10^{-6} | 1×10^{-6} | 3×10^{-6} |
| | 10 | 0,0001 | 0,0001 | 0,0003 |

Tabulka 3.17: Odhad parametrů: Podmíněný aposteriorní rozptyl parametrů pro Jeffrey-sovu apriorní hustotu u modelu 1; 1000 simulací

| | <i>sd</i> | změna _{sim} = 10 | změna _{sim} = 50 | změna _{sim} = 80 |
|---|-----------|---------------------------|---------------------------|---------------------------|
| $E_{JF}(\sigma^2 \mathbf{y}, m = \text{změna}_{odh})$ | 0,1 | 0,0102 | 0,0103 | 0,0103 |
| | 1 | 1,0208 | 1,0228 | 1,0289 |
| | 10 | 101,3929 | 101,7037 | 101,8036 |
| $Var_{JF}(\sigma^2 \mathbf{y}, m = \text{změna}_{odh})$ | 0,1 | 2×10^{-6} | 2×10^{-6} | 2×10^{-6} |
| | 1 | 0,0231 | 0,0232 | 0,0235 |
| | 10 | 228,1727 | 229,8023 | 229,9151 |

Tabulka 3.18: Odhad parametrů: Podmíněná aposteriorní střední hodnota a rozptyl σ^2 pro Jeffreysovu apriorní hustotu u modelu 1; 1000 simulací

| | <i>sd</i> | změna _{sim} = 10 | změna _{sim} = 50 | změna _{sim} = 80 |
|---|-----------|---------------------------|---------------------------|---------------------------|
| $E_{JF}(\theta_1 \mathbf{y}, m = \text{změna}_{odh})$ | 0,1 | 1273,0000 | 1273,0010 | 1273,0010 |
| | 1 | 1273,0210 | 1272,9910 | 1273,0061 |
| | 10 | 1273,0361 | 1272,9952 | 1273,0922 |
| $E_{JF}(\theta_2 \mathbf{y}, m = \text{změna}_{odh})$ | 0,1 | -295,0000 | -295,0000 | -295,0000 |
| | 1 | -295,0000 | -295,0000 | -295,0000 |
| | 10 | -295,0001 | -294,9998 | -295,0003 |
| $E_{JF}(\theta_1^* \mathbf{y}, m = \text{změna}_{odh})$ | 0,1 | 1556,0000 | 1556,0000 | 1555,9990 |
| | 1 | 1555,9950 | 1556,0060 | 1556,0235 |
| | 10 | 1555,9635 | 1555,8358 | 1556,3775 |
| $E_{JF}(\theta_2^* \mathbf{y}, m = \text{změna}_{odh})$ | 0,1 | -208,0000 | -208,0000 | -208,0000 |
| | 1 | -208,0000 | -208,0000 | -208,0001 |
| | 10 | -207,9998 | -207,9994 | -208,0009 |

Tabulka 3.19: Odhad parametrů: Podmíněná aposteriorní střední hodnota parametrů pro Jeffreysovu apriorní hustotu u modelu 2; 1000 simulací

| | <i>sd</i> | změna _{sim} = 10 | změna _{sim} = 50 | změna _{sim} = 80 |
|--|-----------|---------------------------|---------------------------|---------------------------|
| $Var_{JF}(\theta_1 \mathbf{y}, m=změna_{odh})$ | 0,1 | 0,0050 | 0,0009 | 0,0005 |
| | 1 | 0,5210 | 0,0846 | 0,0521 |
| | 10 | 50,1661 | 8,4225 | 5,2354 |
| $Var_{JF}(\theta_2 \mathbf{y}, m=změna_{odh})$ | 0,1 | 6×10^{-8} | 1×10^{-8} | 1×10^{-8} |
| | 1 | 6×10^{-6} | 1×10^{-6} | 1×10^{-6} |
| | 10 | 0,0006 | 0,0001 | 0,0001 |
| $Var_{JF}(\theta_1^* \mathbf{y}, m=změna_{odh})$ | 0,1 | 0,0005 | 0,0009 | 0,0023 |
| | 1 | 0,0464 | 0,0852 | 0,2238 |
| | 10 | 4,6789 | 8,4624 | 22,4832 |
| $Var_{JF}(\theta_2^* \mathbf{y}, m=změna_{odh})$ | 0,1 | 1×10^{-8} | 1×10^{-8} | 3×10^{-8} |
| | 1 | 1×10^{-6} | 1×10^{-6} | 3×10^{-6} |
| | 10 | 0,0001 | 0,0001 | 0,0003 |

Tabulka 3.20: Odhad parametrů: Podmíněný aposteriorní rozptyl parametrů pro Jeffreysovu apriorní hustotu u modelu 2; 1000 simulací

| | <i>sd</i> | změna _{sim} = 10 | změna _{sim} = 50 | změna _{sim} = 80 |
|--|-----------|---------------------------|---------------------------|---------------------------|
| $E_{JF}(\sigma^2 \mathbf{y}, m=změna_{odh})$ | 0,1 | 0,0102 | 0,0103 | 0,0103 |
| | 1 | 1,0226 | 1,0251 | 1,0216 |
| | 10 | 102,7312 | 102,4051 | 102,4169 |
| $Var_{JF}(\sigma^2 \mathbf{y}, m=změna_{odh})$ | 0,1 | 2×10^{-6} | 2×10^{-6} | 2×10^{-6} |
| | 1 | 0,0232 | 0,0233 | 0,0232 |
| | 10 | 234,3709 | 232,6570 | 232,6372 |

Tabulka 3.21: Odhad parametrů: Podmíněná aposteriorní střední hodnota a rozptyl σ^2 pro Jeffreysovu apriorní hustotu u modelu 2; 1000 simulací

| | <i>sd</i> | změna _{sim} = 10 | změna _{sim} = 50 | změna _{sim} = 80 |
|---|-----------|---------------------------|---------------------------|---------------------------|
| $E_{JF}(\theta_1 \mathbf{y}, m=\text{změna}_{odh})$ | 0,1 | 19,9975 | 19,9974 | 20,0002 |
| | 1 | 19,9917 | 20,0149 | 19,9981 |
| | 10 | 57,3137 | 20,1138 | 20,6901 |
| $E_{JF}(\theta_2 \mathbf{y}, m=\text{změna}_{odh})$ | 0,1 | -0,0600 | -0,0600 | -0,0600 |
| | 1 | -0,0600 | -0,0601 | -0,0600 |
| | 10 | -0,1512 | -0,0603 | -0,0615 |
| $E_{JF}(\theta_1^* \mathbf{y}, m=\text{změna}_{odh})$ | 0,1 | -8,0001 | -7,9986 | -7,9978 |
| | 1 | -7,9994 | -7,9960 | -8,0172 |
| | 10 | -10,3661 | -8,1685 | -10,0524 |
| $E_{JF}(\theta_2^* \mathbf{y}, m=\text{změna}_{odh})$ | 0,1 | 0,0500 | 0,0500 | 0,0500 |
| | 1 | 0,0500 | 0,0500 | 0,0500 |
| | 10 | 0,0573 | 0,0508 | 0,0575 |

Tabulka 3.22: Odhad parametrů: Podmíněná aposteriorní střední hodnota parametrů pro Jeffreysovu apriorní hustotu u modelu 3; 1000 simulací

| | <i>sd</i> | změna _{sim} = 10 | změna _{sim} = 50 | změna _{sim} = 80 |
|---|-----------|---------------------------|---------------------------|---------------------------|
| $Var_{JF}(\theta_1 \mathbf{y}, m=\text{změna}_{odh})$ | 0,1 | 0,0050 | 0,0009 | 0,0005 |
| | 1 | 0,5077 | 0,0846 | 0,0518 |
| | 10 | 1 842 045 | 8,3338 | 62,3249 |
| $Var_{JF}(\theta_2 \mathbf{y}, m=\text{změna}_{odh})$ | 0,1 | 6×10^{-8} | 1×10^{-8} | 1×10^{-8} |
| | 1 | 6×10^{-6} | 1×10^{-6} | 1×10^{-6} |
| | 10 | 11,3290 | 0,0001 | 0,0003 |
| $Var_{JF}(\theta_1^* \mathbf{y}, m=\text{změna}_{odh})$ | 0,1 | 0,0005 | 0,0009 | 0,0023 |
| | 1 | 0,0463 | 0,0843 | 0,2194 |
| | 10 | 3196,3890 | 8,3344 | 4 887,0455 |
| $Var_{JF}(\theta_2^* \mathbf{y}, m=\text{změna}_{odh})$ | 0,1 | 1×10^{-8} | 1×10^{-8} | 3×10^{-8} |
| | 1 | 1×10^{-6} | 1×10^{-6} | 3×10^{-6} |
| | 10 | 0,0516 | 0,0001 | 0,0631 |

Tabulka 3.23: Odhad parametrů: Podmíněný aposteriorní rozptyl parametrů pro Jeffreysovu apriorní hustotu u modelu 3; 1000 simulací

| | <i>sd</i> | změna _{sim} = 10 | změna _{sim} = 50 | změna _{sim} = 80 |
|---|-----------|---------------------------|---------------------------|---------------------------|
| $E_{JF}(\sigma^2 \mathbf{y}, m = \text{změna}_{odh})$ | 0,1 | 0,0102 | 0,0103 | 0,0103 |
| | 1 | 1,0219 | 1,0254 | 1,0157 |
| | 10 | 101,3574 | 100,5635 | 101,3431 |
| $Var_{JF}(\sigma^2 \mathbf{y}, m = \text{změna}_{odh})$ | 0,1 | 2×10^{-6} | 2×10^{-6} | 2×10^{-6} |
| | 1 | 0,0232 | 0,0234 | 0,0229 |
| | 10 | 228,2175 | 224,8222 | 227,9199 |

Tabulka 3.24: Odhad parametrů: Podmíněná aposteriorní střední hodnota a rozptyl σ^2 pro Jeffreysovu apriorní hustotu u modelu 3; 1000 simulací

Známa apriorní hustota

V této části práce se pokusíme zjistit, zda dříve uvedená metoda pro apriorní normální-gama rozdělení (podkapitola 3.4) dobře odhaluje stabilitu modelu, popřípadě správně odhaduje změnu z jednoho regresního modelu na druhý. V případě nestability modelu provedeme aposteriorní odhad parametrů.

Předpokládejme, že parametry θ a τ mají normální-gama rozdělení s parametry $\boldsymbol{\mu}_{(4 \times 1)}$, $\mathbf{Q}_{(4 \times 4)}$, $a > 0$ a $b > 0$, tj. $(\theta, \tau) \sim NG_4(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{Q}, a, b)$. Pro zjednodušení výpočtů budeme předpokládat, že $\mathbf{Q} = \mathbf{I}_4$ a že známe regresní parametry modelu před změnou i po ní. Například pro model 1 je $\boldsymbol{\mu} = (2,5; 0,7; 5; 0,5)'$ a $\boldsymbol{\mu}_1 = (2,5; 0,7)'$. Zbývá ještě určit hodnoty a a b . Postupně budeme za tyto veličiny volit následující hodnoty:

- A) $a = 11, b = 0,1$
- B) $a = 3, b = 2$
- C) $a = 1,01, b = 1$.

Tyto hodnoty odpovídají postupně apriorní střední hodnotě $E(\sigma^2) = 0,01; 1; 100$ spočtené podle (2.10), využijeme-li předpokladu, že $\sigma^2 \sim IGa(a, b)$. Tudiž apriorní střední hodnota veličiny σ^2 je nastavena pro některé případy na její reálnou hodnotu. Apriorní střední hodnota regresních koeficientů je nastavena na jejich reálnou hodnotu.

Změnu v modelech 1 až 3 (viz (3.101) až (3.103)) jsme postupně simulovali na desáté, padesáté a sté pozorování. Všechny odhady jsme provedli tisíckrát. Výsledky správného odhadu změny (tj. změna_{sim} = změna_{odh}) jsou uvedeny pro všechny tři modely v tabulkách 3.25 až 3.33. Poznamenejme, že změna_{sim} = 100 (popřípadě změna_{odh} = 100) označuje model, který je stabilní. Z tabulek je patrné, že pokud je změna v modelu přítomna, je detekována obdobně dobře (popřípadě špatně) jako pro Jeffreysovu apriorní hustotu. Pověsim si, že pokud je model simulován jako stabilní, pohybuje se odhad stability kolem 99,6% – 100% bez ohledu na zvolené a, b a směrodatnou odchylku. Nicméně zbývajících většinou 0,1% odhadů „ulétlo“ dosti citelně od simulované změny (změna_{sim} = 100), například na pozorování změna_{odh} = 1; 54; 69; 86.

| | model 1, změna _{sim} = 10 | | |
|-----|------------------------------------|----------------|-------------------|
| sd | $a = 11, b = 0,1$ | $a = 3, b = 2$ | $a = 1,01, b = 1$ |
| 0,1 | 99,8% | 99,7% | 99,6% |
| 1 | 96,8% | 96,8% | 96,5% |
| 10 | 80,6% | 78,7% | 79,5% |

Tabulka 3.25: Relativní četnost správně odhadnutého bodu změny pro změna_{sim} = 10, model 1 a známé apriorní rozdělení

| | model 1, změna _{sim} = 50 | | |
|-----|------------------------------------|----------------|-------------------|
| sd | $a = 11, b = 0,1$ | $a = 3, b = 2$ | $a = 1,01, b = 1$ |
| 0,1 | 99,3% | 99,2% | 99,8% |
| 1 | 97,4% | 96,6% | 96,3% |
| 10 | 81,5% | 80,6% | 80,9% |

Tabulka 3.26: Relativní četnost správně odhadnutého bodu změny pro změna_{sim} = 50, model 1 a známé apriorní rozdělení

V tabulkách 3.34 až 3.42 jsou uvedeny podmíněné aposteriorní odhady parametrů a jejich rozptylů pro změna_{sim} = 10 a všechny tři modely. Zbývající tabulky výsledků byly velmi obdobné, proto je zde neuvádíme, lze je však nalézt v příloženém CD. Z tabulek je patrné, že odhady regresních parametrů a jejich rozptylů se až na jednu výjimku nijak zásadně neliší od výsledků pro Jeffreysovu apriorní hustotu. Výjimku tvoří výsledky pro model 3, změna_{sim} = 10, které se oproti Jeffreysově apriorní hustotě zpřesnily. Rozptyly těchto odhadů se zásadně zmenšily bez ohledu na zvolené a, b . Co se týče aposteriorních odhadů veličiny σ^2 , ty se oproti Jeffreysově apriorní hustotě zhoršily, naproti tomu rozptyly těchto odhadů se zmenšily bez ohledu na zvolené a, b .

Dále si můžeme povšimnout, že odhad aposteriorní veličiny σ^2 pro $sd = 0,1$ vychází nejpřesněji pro hodnoty $a = 11, b = 0,1$, pro $sd = 10$ vychází nejpřesněji pro hodnoty $a = 1,01, b = 0,1$. Překvapivé však je, že pro $sd = 1$ vychází odhad této veličiny nejpřesněji opět pro hodnoty $a = 1,01, b = 0,1$, avšak s větším rozptylem než pro ostatní hodnoty a, b .

| | model 1, změna _{sim} = 100 | | |
|-----|-------------------------------------|----------------|-------------------|
| sd | $a = 11, b = 0,1$ | $a = 3, b = 2$ | $a = 1,01, b = 1$ |
| 0,1 | 100% | 100% | 100% |
| 1 | 100% | 99,9% | 100% |
| 10 | 99,6% | 100% | 99,9% |

Tabulka 3.27: Relativní četnost správně odhadnutého bodu změny pro změna_{sim} = 100, model 1 a známé apriorní rozdělení

| | model 2, změna _{sim} = 10 | | |
|-----|------------------------------------|----------------|-------------------|
| sd | $a = 11, b = 0,1$ | $a = 3, b = 2$ | $a = 1,01, b = 1$ |
| 0,1 | 100% | 100% | 100% |
| 1 | 100% | 100% | 100% |
| 10 | 100% | 100% | 100% |

Tabulka 3.28: Relativní četnost správně odhadnutého bodu změny pro změna_{sim} = 10, model 2 a známé apriorní rozdělení

| | model 2, změna _{sim} = 50 | | |
|-----|------------------------------------|----------------|-------------------|
| sd | $a = 11, b = 0,1$ | $a = 3, b = 2$ | $a = 1,01, b = 1$ |
| 0,1 | 100% | 100% | 100% |
| 1 | 100% | 100% | 100% |
| 10 | 100% | 100% | 100% |

Tabulka 3.29: Relativní četnost správně odhadnutého bodu změny pro změna_{sim} = 50, model 2 a známé apriorní rozdělení

| | model 2, změna _{sim} = 100 | | |
|-----|-------------------------------------|----------------|--------------------|
| sd | $a = 11, b = 0, 1$ | $a = 3, b = 2$ | $a = 1, 01, b = 1$ |
| 0,1 | 100% | 100% | 100% |
| 1 | 100% | 100% | 100% |
| 10 | 100% | 100% | 100% |

Tabulka 3.30: Relativní četnost správně odhadnutého bodu změny pro změna_{sim} = 100, model 2 a známé apriorní rozdělení

| | model 3, změna _{sim} = 10 | | |
|-----|------------------------------------|----------------|--------------------|
| sd | $a = 11, b = 0, 1$ | $a = 3, b = 2$ | $a = 1, 01, b = 1$ |
| 0,1 | 99,3% | 99,5% | 99% |
| 1 | 94,1% | 94,9% | 95% |
| 10 | 37% | 33,5% | 32,6% |

Tabulka 3.31: Relativní četnost správně odhadnutého bodu změny pro změna_{sim} = 10, model 3 a známé apriorní rozdělení

| | model 3, změna _{sim} = 50 | | |
|-----|------------------------------------|----------------|--------------------|
| sd | $a = 11, b = 0, 1$ | $a = 3, b = 2$ | $a = 1, 01, b = 1$ |
| 0,1 | 99,5% | 99,7% | 99,6% |
| 1 | 94,1% | 94,5% | 92,8% |
| 10 | 44,3% | 43,3% | 42,5% |

Tabulka 3.32: Relativní četnost správně odhadnutého bodu změny pro změna_{sim} = 50, model 3 a známé apriorní rozdělení

| model 3, změna _{sim} = 100 | | | |
|-------------------------------------|-------------------|----------------|-------------------|
| sd | $a = 11, b = 0,1$ | $a = 3, b = 2$ | $a = 1,01, b = 1$ |
| 0,1 | 100% | 100% | 100% |
| 1 | 100% | 100% | 100% |
| 10 | 99,8% | 100% | 100% |

Tabulka 3.33: Relativní četnost správně odhadnutého bodu změny pro změna_{sim} = 100, model 3 a známé apriorní rozdělení

| | sd | $a = 11, b = 0,1$ | $a = 3, b = 2$ | $a = 1,01, b = 1$ |
|--|-----|-------------------|----------------|-------------------|
| $E(\theta_1 \mathbf{y}, m = \text{změna}_{odh})$ | 0,1 | 2,5025 | 2,4991 | 2,5001 |
| | 1 | 2,4903 | 2,5040 | 2,5058 |
| | 10 | 2,8673 | 2,9360 | 2,5360 |
| $E(\theta_2 \mathbf{y}, m = \text{změna}_{odh})$ | 0,1 | 0,7000 | 0,7000 | 0,7000 |
| | 1 | 0,7001 | 0,7000 | 0,7000 |
| | 10 | 0,6992 | 0,6992 | 0,7002 |
| $E(\theta_1^* \mathbf{y}, m = \text{změna}_{odh})$ | 0,1 | 5,0010 | 4,9998 | 4,9996 |
| | 1 | 4,9955 | 4,9941 | 5,0026 |
| | 10 | 4,8695 | 4,9743 | 5,0095 |
| $E(\theta_2^* \mathbf{y}, m = \text{změna}_{odh})$ | 0,1 | 0,5000 | 0,5000 | 0,5000 |
| | 1 | 0,5000 | 0,5000 | 0,5000 |
| | 10 | 0,5003 | 0,5000 | 0,5000 |

Tabulka 3.34: Odhad parametrů: Podmíněná aposteriorní střední hodnota parametrů pro známé apriorní rozdělení u modelu 1, změna_{sim} = 10; 1000 simulací

| | sd | $a = 11, b = 0, 1$ | $a = 3, b = 2$ | $a = 1, 01, b = 1$ |
|--|-----|--------------------|--------------------|--------------------|
| $Var(\theta_1 \mathbf{y}, m = \text{změna}_{odh})$ | 0,1 | 0,0031 | 0,0150 | 0,0095 |
| | 1 | 0,2518 | 0,2997 | 0,3090 |
| | 10 | 25,7382 | 29,4800 | 30,9909 |
| $Var(\theta_2 \mathbf{y}, m = \text{změna}_{odh})$ | 0,1 | 4×10^{-8} | 2×10^{-7} | 1×10^{-7} |
| | 1 | 4×10^{-6} | 4×10^{-6} | 4×10^{-6} |
| | 10 | 0,0004 | 0,0004 | 0,0004 |
| $Var(\theta_1^* \mathbf{y}, m = \text{změna}_{odh})$ | 0,1 | 0,0004 | 0,0021 | 0,0013 |
| | 1 | 0,0345 | 0,0419 | 0,0428 |
| | 10 | 3,4528 | 3,9780 | 4,1712 |
| $Var(\theta_2^* \mathbf{y}, m = \text{změna}_{odh})$ | 0,1 | 1×10^{-8} | 3×10^{-8} | 2×10^{-8} |
| | 1 | 4×10^{-7} | 1×10^{-6} | 1×10^{-6} |
| | 10 | 4×10^{-5} | 0,0001 | 0,0001 |

Tabulka 3.35: Odhad parametrů: Podmíněný aposteriorní rozptyl parametrů pro známé apriorní rozdělení u modelu 1, $\text{změna}_{sim} = 10$; 1000 simulací

| | sd | $a = 11, b = 0, 1$ | $a = 3, b = 2$ | $a = 1, 01, b = 1$ |
|--|-----|--------------------|--------------------|--------------------|
| $E(\sigma^2 \mathbf{y}, m = \text{změna}_{odh})$ | 0,1 | 0,0097 | 0,0477 | 0,0296 |
| | 1 | 0,7992 | 0,9626 | 0,9880 |
| | 10 | 80,1619 | 92,1900 | 96,8044 |
| $Var(\sigma^2 \mathbf{y}, m = \text{změna}_{odh})$ | 0,1 | 2×10^{-6} | 4×10^{-5} | 2×10^{-5} |
| | 1 | 0,0110 | 0,0185 | 0,0203 |
| | 10 | 111,4012 | 169,9837 | 195,2720 |

Tabulka 3.36: Odhad parametrů: Podmíněná aposteriorní střední hodnota a rozptyl σ^2 pro známé apriorní rozdělení u modelu 1, $\text{změna}_{sim} = 10$; 1000 simulací

| | sd | $a = 11, b = 0, 1$ | $a = 3, b = 2$ | $a = 1, 01, b = 1$ |
|--|-----|--------------------|----------------|--------------------|
| $E(\theta_1 \mathbf{y}, m = \text{změna}_{odh})$ | 0,1 | 1273,0010 | 1272,9990 | 1273,0020 |
| | 1 | 1273,0070 | 1273,0346 | 1273,0236 |
| | 10 | 1272,9055 | 1272,9550 | 1272,9346 |
| $E(\theta_2 \mathbf{y}, m = \text{změna}_{odh})$ | 0,1 | -295,0000 | -295,0000 | -295,0000 |
| | 1 | -295,0000 | -295,0001 | -295,0001 |
| | 10 | -294,9993 | -295,0001 | -294,9998 |
| $E(\theta_1^* \mathbf{y}, m = \text{změna}_{odh})$ | 0,1 | 1556,0010 | 1556,0000 | 1555,9990 |
| | 1 | 1556,0020 | 1556,0035 | 1556,0090 |
| | 10 | 1556,0186 | 1555,8778 | 1555,8724 |
| $E(\theta_2^* \mathbf{y}, m = \text{změna}_{odh})$ | 0,1 | -208,0000 | -208,0000 | -208,0000 |
| | 1 | -208,0000 | -208,0000 | -208,0000 |
| | 10 | -208,0001 | -207,9995 | -207,9995 |

Tabulka 3.37: Odhad parametrů: Podmíněná aposteriorní střední hodnota parametrů pro známé apriorní rozdělení u modelu 2, $\text{změna}_{sim} = 10$; 1000 simulací

| | sd | $a = 11, b = 0, 1$ | $a = 3, b = 2$ | $a = 1, 01, b = 1$ |
|--|-----|--------------------|--------------------|--------------------|
| $Var(\theta_1 \mathbf{y}, m = \text{změna}_{odh})$ | 0,1 | 0,0030 | 0,0150 | 0,0093 |
| | 1 | 0,2553 | 0,3058 | 0,3155 |
| | 10 | 25,2540 | 29,1128 | 29,8974 |
| $Var(\theta_2 \mathbf{y}, m = \text{změna}_{odh})$ | 0,1 | 4×10^{-8} | 2×10^{-7} | 1×10^{-7} |
| | 1 | 4×10^{-6} | 4×10^{-6} | 4×10^{-6} |
| | 10 | 0,0004 | 0,0004 | 0,0004 |
| $Var(\theta_1^* \mathbf{y}, m = \text{změna}_{odh})$ | 0,1 | 0,0004 | 0,0021 | 0,0013 |
| | 1 | 0,0348 | 0,0419 | 0,0428 |
| | 10 | 3,4780 | 4,0008 | 4,0816 |
| $Var(\theta_2^* \mathbf{y}, m = \text{změna}_{odh})$ | 0,1 | 1×10^{-8} | 3×10^{-8} | 2×10^{-8} |
| | 1 | 4×10^{-7} | 1×10^{-6} | 1×10^{-6} |
| | 10 | 4×10^{-5} | 0,0001 | 0,0001 |

Tabulka 3.38: Odhad parametrů: Podmíněný aposteriorní rozptyl parametrů pro známé apriorní rozdělení u modelu 2, $\text{změna}_{sim} = 10$; 1000 simulací

| | sd | $a = 11, b = 0, 1$ | $a = 3, b = 2$ | $a = 1, 01, b = 1$ |
|--|-----|--------------------|--------------------|--------------------|
| $E(\sigma^2 \mathbf{y}, m = \text{změna}_{odh})$ | 0,1 | 0,0096 | 0,0477 | 0,0296 |
| | 1 | 0,8072 | 0,9659 | 0,9845 |
| | 10 | 80,3040 | 92,3950 | 95,0304 |
| $Var(\sigma^2 \mathbf{y}, m = \text{změna}_{odh})$ | 0,1 | 2×10^{-6} | 4×10^{-5} | 2×10^{-5} |
| | 1 | 0,0113 | 0,0186 | 0,0202 |
| | 10 | 111,5758 | 170,8264 | 188,1843 |

Tabulka 3.39: Odhad parametrů: Podmíněná aposteriorní střední hodnota a rozptyl σ^2 pro známé apriorní rozdělení u modelu 2, $\text{změna}_{sim} = 10$; 1000 simulací

| | sd | $a = 11, b = 0, 1$ | $a = 3, b = 2$ | $a = 1, 01, b = 1$ |
|--|-----|--------------------|----------------|--------------------|
| $E(\theta_1 \mathbf{y}, m = \text{změna}_{odh})$ | 0,1 | 20,0012 | 20,0000 | 20,0010 |
| | 1 | 20,0046 | 19,9837 | 20,0033 |
| | 10 | 21,1051 | 21,2882 | 21,2010 |
| $E(\theta_2 \mathbf{y}, m = \text{změna}_{odh})$ | 0,1 | -0,0600 | -0,0600 | -0,0600 |
| | 1 | -0,0600 | -0,0600 | -0,0600 |
| | 10 | -0,0637 | -0,0640 | -0,0559 |
| $E(\theta_1^* \mathbf{y}, m = \text{změna}_{odh})$ | 0,1 | -7,9995 | -7,9987 | -7,9993 |
| | 1 | -7,9971 | -7,9949 | -7,9996 |
| | 10 | -8,3184 | -8,3604 | -8,3837 |
| $E(\theta_2^* \mathbf{y}, m = \text{změna}_{odh})$ | 0,1 | 0,0500 | 0,0500 | 0,0500 |
| | 1 | 0,0500 | 0,0500 | 0,0500 |
| | 10 | 0,0511 | 0,0512 | 0,0515 |

Tabulka 3.40: Odhad parametrů: Podmíněná aposteriorní střední hodnota parametrů pro známé apriorní rozdělení u modelu 3, $\text{změna}_{sim} = 10$; 1000 simulací

| | sd | $a = 11, b = 0, 1$ | $a = 3, b = 2$ | $a = 1, 01, b = 1$ |
|--|-----|--------------------|--------------------|--------------------|
| $Var(\theta_1 \mathbf{y}, m = \text{změna}_{odh})$ | 0,1 | 0,0030 | 0,0153 | 0,0094 |
| | 1 | 0,2538 | 0,3057 | 0,3134 |
| | 10 | 25,1950 | 28,8709 | 29,5228 |
| $Var(\theta_2 \mathbf{y}, m = \text{změna}_{odh})$ | 0,1 | 4×10^{-8} | 2×10^{-7} | 1×10^{-7} |
| | 1 | 4×10^{-6} | 4×10^{-6} | 4×10^{-6} |
| | 10 | 0,0017 | 0,1278 | 0,1735 |
| $Var(\theta_1^* \mathbf{y}, m = \text{změna}_{odh})$ | 0,1 | 0,0004 | 0,0021 | 0,0013 |
| | 1 | 0,0348 | 0,0417 | 0,0426 |
| | 10 | 3,4387 | 3,9224 | 4,0654 |
| $Var(\theta_2^* \mathbf{y}, m = \text{změna}_{odh})$ | 0,1 | 1×10^{-8} | 3×10^{-8} | 2×10^{-8} |
| | 1 | 4×10^{-7} | 1×10^{-6} | 1×10^{-6} |
| | 10 | 4×10^{-5} | 0,0001 | 0,0001 |

Tabulka 3.41: Odhad parametrů: Podmíněný aposteriorní rozptyl parametrů pro známé apriorní rozdělení u modelu 3, $\text{změna}_{sim} = 10$; 1000 simulací

| | sd | $a = 11, b = 0, 1$ | $a = 3, b = 2$ | $a = 1, 01, b = 1$ |
|--|-----|--------------------|--------------------|--------------------|
| $E(\sigma^2 \mathbf{y}, m = \text{změna}_{odh})$ | 0,1 | 0,0097 | 0,0477 | 0,0297 |
| | 1 | 0,8043 | 0,9656 | 0,9844 |
| | 10 | 78,9886 | 90,6769 | 93,7261 |
| $Var(\sigma^2 \mathbf{y}, m = \text{změna}_{odh})$ | 0,1 | 2×10^{-6} | 4×10^{-5} | 2×10^{-5} |
| | 1 | 0,0112 | 0,0187 | 0,0202 |
| | 10 | 107,9524 | 164,6764 | 182,5664 |

Tabulka 3.42: Odhad parametrů: Podmíněná aposteriorní střední hodnota a rozptyl σ^2 pro známé apriorní rozdělení u modelu 3, $\text{změna}_{sim} = 10$; 1000 simulací

Kapitola 4

Metoda maximální věrohodnosti

Tato kapitola se zabývá především testováním stability a odhadem změny speciálního dvoufázového lineárního modelu metodou maximální věrohodnosti (nebayesovskou metodou). Zmíníme také testování stability měnící se normální posloupnosti.

4.1 Úvod

Metoda maximální věrohodnosti (značíme jako „MMV“ nebo „metoda MV“) je jedním z nejpoužívanějších postupů při odhadu parametrů a testování hypotéz. Hlavní myšlenkou testů založených na metodě maximální věrohodnosti je použití věrohodnostního poměru, případně statistiky s ním ekvivalentní k testování nulové hypotézy proti alternativě. Více informací o testech poměrem věrohodnosti lze nalézt například v Hátle a Likeš [7] na straně 285.

Jak už jsme se zmiňovali v úvodu práce, nejprve je nutné rozhodnout, zda ke změně v modelu vůbec došlo. Toto rozhodnutí je založeno na výsledku statistického testování hypotéz. Nulová hypotéza tvrdí, že je model stabilní, zatímco alternativní hypotéza tvrdí, že je model nestabilní. Vlastní rozhodnutí, zda zamítnout nulovou hypotézu závisí na hodnotě testové statistiky. V naší práci uvádíme testové statistiky, které vznikly metodou maximální věrohodnosti za předpokladu normálního rozdělení, a jsou to tzv. statistiky maximálního typu. Používáme je však i v případě, že předpoklad normality není splněn.

Pokud změnu v modelu odhalíme, zajímá nás, kde se nachází. Dále nás zajímá odhad parametrů modelu. V této kapitole pro odhad změny a parametrů používáme metodu nejmenších čtverců.

4.2 Test stability

V této podkapitole uvedeme testové statistiky a popřípadě jejich limitní rozdělení pro měnící se normální posloupnost a speciální dvoufázový regresní model.

4.2.1 Posloupnost normálně rozdělených hodnot

V této části práce uvedeme testové statistiky pro měnící se normální posloupnost.

Předpokládejme, že X_1, X_2, \dots, X_n jsou nezávislé normálně rozdělené náhodné veličiny. Pak nulovou a alternativní hypotézu můžeme zformulovat takto:

$$\begin{aligned} H_{P_0} : X_i &\sim N(\theta_1, \sigma^2), & i = 1, \dots, n, \\ H_{P_1} : \exists m \in \{1, \dots, n-1\} & \text{ takové, že} \\ & X_i \sim N(\theta_1, \sigma^2), & i = 1, \dots, m, \\ & X_i \sim N(\theta_2, \sigma^2), & i = m+1, \dots, n, \end{aligned}$$

kde $\sigma^2 > 0$ je neznámá veličina a $\theta_1 \neq \theta_2$. Testové statistiky maximálního typu pro tyto hypotézy jsou podle Antoch a kol. [2] (strana 15) v následujícím tvaru:

$$\max_{1 \leq k \leq n-1} \left\{ \left| \frac{1}{s_k} \sqrt{\frac{n}{k(n-k)}} \sum_{i=1}^k (X_i - \bar{X}_n) \right| \right\}$$

a

$$\max_{\lfloor \beta n \rfloor \leq k \leq \lfloor (1-\beta)n \rfloor} \left\{ \left| \frac{1}{s_k} \sqrt{\frac{n}{k(n-k)}} \sum_{i=1}^k (X_i - \bar{X}_n) \right| \right\},$$

kde

$$\begin{aligned} s_k^2 &= \frac{1}{n-2} \left(\sum_{i=1}^k (X_i - \bar{X}_k)^2 + \sum_{i=k+1}^n (X_i - \bar{X}_k^o)^2 \right), \\ \bar{X}_k &= \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k X_i, \quad \bar{X}_k^o = \frac{1}{n-k} \sum_{i=k+1}^n X_i, \end{aligned}$$

$0 < \beta < 1$ a $\lfloor z \rfloor$ označuje celou část čísla z .

Limitní rozdělení a kritické hodnoty těchto statistik lze najít v Antoch a kol. [2] na straně 16.

Nulovou hypotézu H_{P_0} zamítneme, pokud hodnota testové statistiky je větší než její kritická hodnota.

Poznámka 4.1. Všimněme si, že \bar{X}_k je výběrový průměr z prvních k pozorování X_1, \dots, X_k , zatímco \bar{X}_k^o je výběrový průměr z pozorování X_{k+1}, \dots, X_n . Tyto statistiky lze interpretovat jako odhady parametrů θ_1 a θ_2 za předpokladu, že změna se vyskytla v čase k .

4.2.2 Dvoufázový regresní model

V této části práce uvedeme testové statistiky a jejich limitní rozdělení pro speciální dvoufázový regresní model.

Uvažujeme-li speciální dvoufázový regresní model (3.66), pak nulovou a alternativní hypotézu můžeme zformulovat takto:

$$\begin{aligned} H_{M0} : Y_i &\sim N(\theta_1 + \theta_2 x_i, \sigma^2), & i = 1, \dots, n, \\ H_{M1} : \exists m \in \{2, \dots, n-2\} & \text{ takové, že} \\ Y_i &\sim N(\theta_1 + \theta_2 x_i, \sigma^2), & i = 1, \dots, m, \\ Y_i &\sim N(\theta_1^* + \theta_2^* x_i, \sigma^2), & i = m+1, \dots, n, \end{aligned}$$

kde $\sigma^2 > 0$ je neznámá veličina a $(\theta_1, \theta_2)' \neq (\theta_1^*, \theta_2^*)'$, $x_i, i = 1, \dots, n$ jsou známé konstanty.

Poznámka 4.2. U této a následující podkapitoly pro test stability a odhad změny dvoufázového regresního modelu se náhodné chyby e_i nemusí řídit normálním rozdělením (tak jak je to v H_{M0} a H_{M1}). Postačující předpoklad je, aby platilo, že chyby e_i jsou nezávislé, stejně rozdělené, nezávislé na veličinách x_i a $Ee_i = 0$, $Ee_i^2 = \sigma^2$, $E|e_i|^{2+\Delta} < \infty$ pro nějaké $\Delta > 0$.

Testové statistiky maximálního typu jsou pro hypotézy H_{M0} a H_{M1} podle Jarušková a Antoch [10] (strana 317) v následujícím tvaru:

$$\max_{2 \leq k \leq n-2} \{F_k\} \quad \max_{[\beta n] \leq k \leq [(1-\beta)n]} \{F_k\}, \quad (4.1)$$

kde

$$\begin{aligned} F_k &= \frac{1}{s_k^2} \left(\frac{nk(\bar{Y}_k - \bar{Y}_n)^2}{n-k} + \frac{Q_{xy}^2(k)}{Q_{xx}(k)} + \frac{Q_{xy}^{o2}(k)}{Q_{xx}^o(k)} - \frac{Q_{xy}^2(n)}{Q_{xx}(n)} \right), \\ s_k^2 &= \frac{1}{n-2} \left(\sum_{i=1}^k (Y_i - \hat{\theta}_1 - \hat{\theta}_2 x_i)^2 + \sum_{i=k+1}^n (Y_i - \hat{\theta}_1^* - \hat{\theta}_2^* x_i)^2 \right), \end{aligned}$$

$\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \hat{\theta}_1^*, \hat{\theta}_2^*$ jsou odhady regresních parametrů metodou nejmenších čtverců za předpokladu, že změna se vyskytla v čase k , tj. $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2$ jsou odhady θ_1, θ_2 spočtené z pozorování Y_1, \dots, Y_k , zatímco $\hat{\theta}_1^*, \hat{\theta}_2^*$ jsou spočteny z Y_{k+1}, \dots, Y_n ,

$$\begin{aligned} \bar{Y}_k &= \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k Y_i, & \bar{Y}_k^o &= \frac{1}{n-k} \sum_{i=k+1}^n Y_i, \\ \bar{x}_k &= \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k x_i, & \bar{x}_k^o &= \frac{1}{n-k} \sum_{i=k+1}^n x_i, \end{aligned}$$

$0 < \beta < 1$, $[z]$ označuje celou část čísla z a

$$Q_{xx}(k) = \sum_{i=1}^k (x_i - \bar{x}_k)(x_i - \bar{x}_k), \quad Q_{xy}(k) = \sum_{i=1}^k (x_i - \bar{x}_k)(Y_i - \bar{Y}_k),$$

$$Q_{xx}^o(k) = \sum_{i=k+1}^n (x_i - \bar{x}_k^o)(x_i - \bar{x}_k^o), \quad Q_{xy}^o(k) = \sum_{i=k+1}^n (x_i - \bar{x}_k^o)(Y_i - \bar{Y}_k^o).$$

Kritické hodnoty těchto statistik mohou být pro velké hodnoty n , jak je uvedeno v Jarušková a Antoch [10] na straně 318, spočteny aproximací ($x \in \mathbb{R}$):

$$P\left(\max_{2 \leq k \leq n-2} \{F_k\} > \left(\frac{x + b_n}{a_n}\right)^2\right) \approx 1 - \exp\{-2e^{-x}\}, \quad (4.2)$$

kde

$$a_n = \sqrt{2 \ln \ln n} \quad \text{a} \quad b_n = 2 \ln \ln n + \ln \ln \ln n,$$

respektive

$$P\left(\max_{\lfloor \beta n \rfloor \leq k \leq \lfloor (1-\beta)n \rfloor} \{F_k\} > x\right) \approx x e^{-x/2} \ln \frac{1-\beta}{\beta} \quad (x > 0). \quad (4.3)$$

Kritická hodnota spočtená pro $n = 100$, $\alpha = 0,05$ podle (4.2) vychází 16,6960. Kritickou hodnotu pro (4.3) nelze spočítat přímo.

Pokud náhodné chyby $\{e_i\}$ jsou nezávislé, stejně rozdělené s normálním rozdělením, potom za platnosti H_{M0} se podle Jarušková a Antoch [10] (strana 318) všechny veličiny $\{F_k : k = 2, \dots, n-2\}$ řídí F -rozdělením s 2 a $n-4$ stupni volnosti. Proto pro malý rozsah výběru (tj. pro malé hodnoty n) můžeme dostatečně přesně aproximovat skutečné kritické hodnoty například tzv. Bonferroniho nerovností:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) \leq \sum_{i=1}^n P(A_i),$$

kde $\{A_i\}$ jsou libovolné náhodné jevy. Aplikujeme-li tento postup na testovou statistiku z (4.1) vlevo, dostaneme, že

$$P\left(\max_{2 \leq k \leq n-2} \{F_k\} > C\right) = P\left(\bigcup_{k=2}^{n-2} (F_k > C)\right) \leq \sum_{k=2}^{n-2} P(F_k > C),$$

kde hodnota $F_{2,n-4}\left(\frac{\alpha}{n-3}\right)$ může posloužit jako konzervativní odhad kritické hodnoty „C“ pro první testovou statistiku, neboť

$$P\left(\max_{2 \leq k \leq n-2} \{F_k\} > F_{2,n-4}\left(\frac{\alpha}{n-3}\right)\right) \leq \alpha.$$

Analogickým postupem lze získat konzervativní odhad kritické hodnoty pro druhou testovou statistiku ((4.1) vpravo).

Nulovou hypotézu H_{M0} zamítneme, pokud hodnota testové statistiky je větší než její kritická hodnota.

4.3 Odhad bodu změny

V této podkapitole uvedeme, jak spočítat odhad bodu změny pro měnící se normální posloupnost a speciální dvoufázový regresní model.

4.3.1 Posloupnost normálně rozdělených hodnot

V této části práce uvedeme odhad bodu změny pro měnící se normální posloupnost.

Pokud jsme zamítli nulovou hypotézu H_{P0} , zajímá nás, kde změna nastala a odhad parametrů modelu. Předpokládejme, že bod změny m splňuje:

$$m = \lfloor n\gamma \rfloor, \quad \gamma \in (0; 1). \quad (4.4)$$

To znamená, že změna nenastává příliš blízko ani prvnímu, ani poslednímu pozorování. Parametry modelu θ_1, θ_2 a bodu změny m se mohou odhadnout metodou nejmenších čtverců, tj. řešením následujícího minimalizačního problému:

$$\min \left\{ \sum_{i=1}^k (X_i - \theta_1)^2 + \sum_{i=k+1}^n (X_i - \theta_2)^2; k \in \{1, \dots, n-1\}, \theta_1 \in \mathbb{R}, \theta_2 \in \mathbb{R} \right\}.$$

Více informací lze najít v Antoch a kol. [2] na straně 38.

4.3.2 Dvoufázový regresní model

V této části práce uvedeme odhad bodu změny pro speciální dvoufázový regresní model.

Pokud jsme zamítli nulovou hypotézu H_{M0} , zajímá nás, kde změna nastala a odhad parametrů modelu. Předpokládejme, že bod změny m splňuje podmínku (4.4). Parametry modelu $\theta_1, \theta_2, \theta_1^*, \theta_2^*$ a bodu změny m se mohou opět odhadnout metodou nejmenších čtverců. Odhad bodu změny je proto roven

$$\hat{m} = \operatorname{argmin} \left\{ \sum_{i=1}^k (Y_i - \hat{\theta}_1 - \hat{\theta}_2 x_i)^2 + \sum_{i=k+1}^n (Y_i - \hat{\theta}_1^* - \hat{\theta}_2^* x_i)^2; k \in \{1, \dots, n-1\} \right\}, \quad (4.5)$$

kde $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \hat{\theta}_1^*, \hat{\theta}_2^*$ jsou odhady regresních parametrů modelu metodou nejmenších čtverců za předpokladu, že změna nastala v čase k .

4.4 Simulace dat

V této podkapitole si uvedeme výsledky a postřehy ze simulací dat pro speciální dvoufázový regresní model pro metodu maximální věrohodnosti. U testu stability používáme testovou statistiku $\max_{2 \leq k \leq n-2} \{F_k\}$ a kritickou hodnotu získanou z jejího limitního rozdělení.

Obdobně jako v podkapitole 3.4.6 jsme simulovali data podle modelu 1 (3.101) až 3 (3.103), kde bod změny $m = \text{změna}_{sim}$ je postupně 10; 50 a 100. U každé simulace jsme

odhadli bod změny $\hat{m} = \text{změna}_{odh}$ podle postupu uvedeného ve vzorci (4.5). Simulace jsme opět provedli tisíckrát.

Výsledky správného odhadu změny (tj. $\text{změna}_{sim} = \text{změna}_{odh}$) jsou uvedeny v tabulkách 4.1 až 4.3. Je z nich patrné, že pro $\text{změna}_{sim} = 10$ a 50 jsou výsledky porovnatelné s bayesovskými (viz tabulky 3.13 - 3.15 a 3.25 - 3.33), zatímco pro $\text{změna}_{sim} = 100$ jsou výsledky o něco horší, hodnoty se pohybují okolo 99%.

| | model 1 | | |
|-----|---------------------------|---------------------------|----------------------------|
| sd | $\text{změna}_{sim} = 10$ | $\text{změna}_{sim} = 50$ | $\text{změna}_{sim} = 100$ |
| 0,1 | 99,9% | 99,8% | 98,7% |
| 1 | 97,2% | 95,6% | 98,7% |
| 10 | 77,1% | 80,9% | 99,2% |

Tabulka 4.1: Relativní četnost správně odhadnutého bodu změny u modelu 1

| | model 2 | | |
|-----|---------------------------|---------------------------|----------------------------|
| sd | $\text{změna}_{sim} = 10$ | $\text{změna}_{sim} = 50$ | $\text{změna}_{sim} = 100$ |
| 0,1 | 100% | 100% | 98,9% |
| 1 | 100% | 100% | 99,3% |
| 10 | 100% | 100% | 98,7% |

Tabulka 4.2: Relativní četnost správně odhadnutého bodu změny u modelu 2

| | model 3 | | |
|-----|---------------------------|---------------------------|----------------------------|
| sd | $\text{změna}_{sim} = 10$ | $\text{změna}_{sim} = 50$ | $\text{změna}_{sim} = 100$ |
| 0,1 | 99,3% | 99,4% | 98,7% |
| 1 | 93,8% | 94,4% | 98,5% |
| 10 | 32,5% | 40,7% | 98,2% |

Tabulka 4.3: Relativní četnost správně odhadnutého bodu změny u modelu 3

Podívejme se ještě, jak to vypadá pro odhad parametrů pro model 1 (jen pro $\text{změna}_{sim} = 10; 50$), které nalezneme v tabulkách 4.4 až 4.6. Pro zbývající modely (případy) odhady již dělat nebudeme. Z tabulek je patrné, že odhady regresních parametrů (tabulka 4.5) jsou porovnatelné s odhady u bayesovské metody (viz tabulky 3.16 a 3.34). Pokud porovnáme rozptyly těchto odhadů (viz tabulka 4.6), zjistíme, že se ve většině případů oproti bayesovským odhadům zvětšily (viz tabulky 3.17 a 3.35). Pokud porovnáme odhady veličiny σ^2 (tabulka 4.4), povšimneme si, že jsou porovnatelné s bayesovskými (viz tabulky 3.18 a 3.36).

| | sd | $změna_{sim} = 10$ | $změna_{sim} = 50$ |
|------------------|------|--------------------|--------------------|
| $\hat{\sigma}^2$ | 0,1 | 0,0098 | 0,0098 |
| | 1 | 0,9791 | 0,9792 |
| | 10 | 97,9417 | 97,5232 |

Tabulka 4.4: Odhad parametrů: Hodnota odhadnuté veličiny σ^2 pro metodu maximální věrohodnosti u modelu 1; 1000 simulací

| | sd | $změna_{sim} = 10$ | $změna_{sim} = 50$ |
|--------------------|------|--------------------|--------------------|
| $\hat{\theta}_1$ | 0,1 | 2,4995 | 2,5021 |
| | 1 | 2,4994 | 2,5115 |
| | 10 | 2,6758 | 2,5078 |
| $\hat{\theta}_2$ | 0,1 | 0,7000 | 0,7000 |
| | 1 | 0,7000 | 0,7000 |
| | 10 | 0,6993 | 0,7000 |
| $\hat{\theta}_1^*$ | 0,1 | 5,0006 | 4,9994 |
| | 1 | 5,0008 | 4,9972 |
| | 10 | 4,9565 | 5,0955 |
| $\hat{\theta}_2^*$ | 0,1 | 0,5000 | 0,5000 |
| | 1 | 0,5000 | 0,5000 |
| | 10 | 0,5000 | 0,4999 |

Tabulka 4.5: Odhad parametrů: Hodnoty odhadnutých parametrů pro metodu maximální věrohodnosti u modelu 1; 1000 simulací

| | sd | $změna_{sim} = 10$ | $změna_{sim} = 50$ |
|------------------------|------|--------------------|--------------------|
| $Var \hat{\theta}_1$ | 0,1 | 0,0672 | 0,0288 |
| | 1 | 0,6608 | 0,2841 |
| | 10 | 6,5719 | 2,8431 |
| $Var \hat{\theta}_2$ | 0,1 | 0,0002 | 1×10^{-4} |
| | 1 | 0,0023 | 0,0010 |
| | 10 | 0,0229 | 0,0099 |
| $Var \hat{\theta}_1^*$ | 0,1 | 0,0212 | 0,0286 |
| | 1 | 0,2119 | 0,2862 |
| | 10 | 2,1205 | 2,8443 |
| $Var \hat{\theta}_2^*$ | 0,1 | 1×10^{-4} | 1×10^{-4} |
| | 1 | 0,0007 | 0,0010 |
| | 10 | 0,0074 | 0,0099 |

Tabulka 4.6: Odhad parametrů: Hodnoty odhadnutých parametrů pro metodu maximální věrohodnosti u modelu 1; 1000 simulací

Kapitola 5

Porovnání metod

V této kapitole porovnáme obě metody analýzy regresního modelu na reálných a simulovaných datech.

5.1 Simulovaná data

V této části práce porovnáme bayesovskou a nebayesovskou metodu na simulovaných datech.

Data jsme simulovali podle modelu 3 (3.103), kde bod změny je $m = 50$, $sd = 1$ a $n = 100$. Připomeňme, že pozorování y_i jsou normálně rozdělena, stejně jako tomu bylo v podkapitole 3.4.6. V tabulce 5.1 je část simulovaných dat (prvních deset pozorování). Všechna data (sto pozorování) jsou uvedena v příloženém CD.

V tabulce 5.2 jsou uvedeny hodnoty odhadnutých parametrů a odhad bodu změny pro naše data pro bayesovskou a nebayesovskou metodu. U metody nebayesovské (tj. metody maximální věrohodnosti, značíme „MMV“) jsme pro test stability použili testovou statistiku $\max_{2 \leq k \leq n-2} \{F_k\}$ a kritickou hodnotu získanou z jejího limitního rozdělení. U bayesovské metody jsme použili Jeffreysovu apriorní hustotu (značíme jako „Jeff“) i známé apriorní rozdělení, u kterého jsme nastavili (pro zjednodušení) apriorní střední hodnotu regresních koeficientů na její reálnou hodnotu. Za hodnoty a , b jsme volili postupně $a = 11$, $b = 0,1$ (značíme jako „Apr 1“) a $a = 3$, $b = 2$ (značíme jako „Apr 2“). V posledních třech sloupcích tabulky jsme pro odhad použili podmíněné aposteriorní střední hodnoty nebo rozptyly parametrů.

Porovnáme-li výsledky ve zmíněné tabulce 5.2, všimneme si, že změna byla shodně u všech metod detekována na padesáté pozorování. Pokud porovnáme odhady parametrů, zjistíme, že ve sloupcích pro „MMV“ a „Jeff“ jsou odhady regresních parametrů stejné. Obdobně je tomu i pro sloupce „Apr 1“ a „Apr 2“. Není to náhoda, že to tak vyšlo! Podíváme-li se totiž na vzorec pro výpočet podmíněné aposteriorní střední hodnoty regresních parametrů u Jeffreysovy apriorní hustoty (3.92) a (3.94), zjistíme, že je to stejný výpočet jako pro odhad parametrů metodou nejmenších čtverců. Pokud se podíváme na výpočet podmíněné aposteriorní střední hodnoty regresních parametrů u známého aprior-

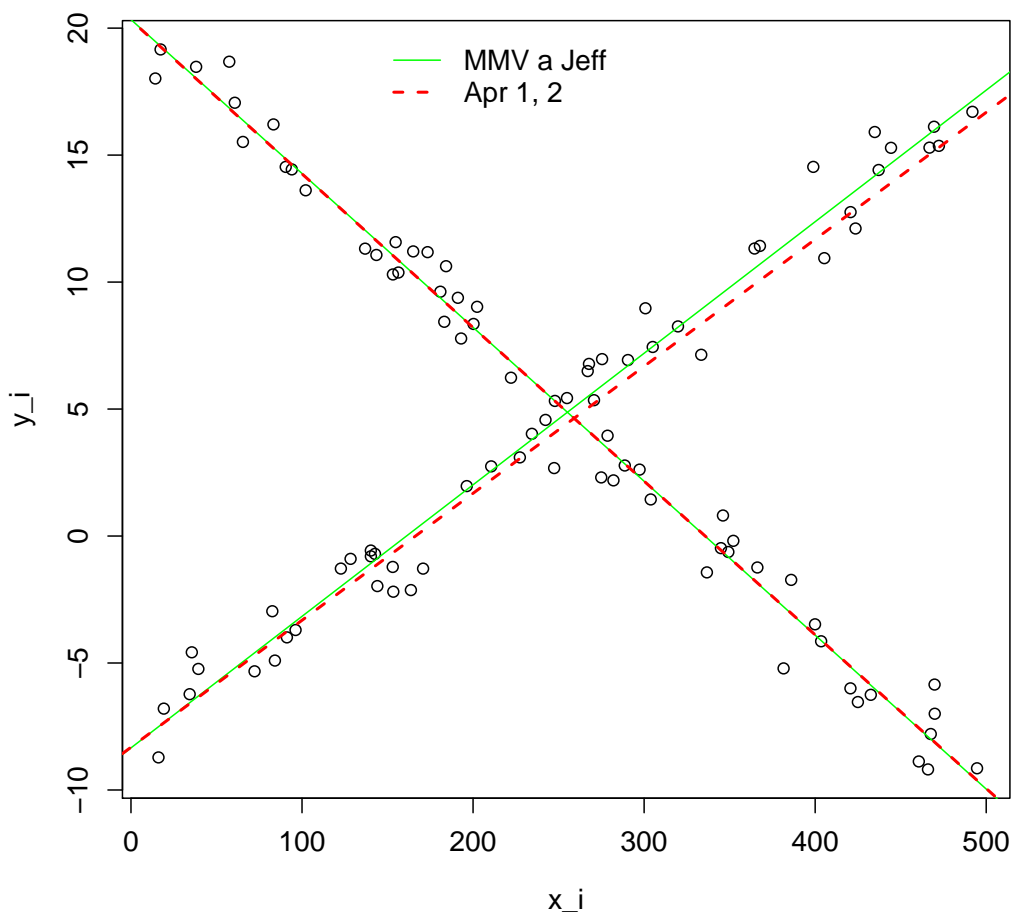
ního rozdělení (3.81) a (3.84) vidíme, že vzorce nejsou závislé ani na hodnotě a , ani na hodnotě b (ale změna_{odh} musí být stejná). Proto jsou pro poslední dva sloupce odhady regresních parametrů stejné.

| i | x_i | y_i | i | x_i | y_i |
|-----|---------|--------|----------|----------|----------|
| 1 | 173,406 | 11,180 | 7 | 469,915 | -6,997 |
| 2 | 297,338 | 2,617 | 8 | 193,006 | 7,779 |
| 3 | 420,628 | -5,997 | 9 | 165,001 | 11,208 |
| 4 | 90,468 | 14,536 | 10 | 288,690 | 2,778 |
| 5 | 385,983 | -1,726 | \vdots | \vdots | \vdots |
| 6 | 366,219 | -1,238 | | | |

Tabulka 5.1: Simulovaná data - prvních 10 pozorování

| | MMV | Jeff | Apr 1 | Apr 2 |
|------------------------|---------|--------------------|--------------------|--------------------|
| změna _{odh} | 50 | 50 | 50 | 50 |
| $\hat{\theta}_1$ | 20,3368 | 20,3368 | 20,3102 | 20,3102 |
| $\hat{\theta}_2$ | -0,0606 | -0,0606 | -0,0605 | -0,0605 |
| $\hat{\theta}_1^*$ | -8,3427 | -8,3427 | -8,3169 | -8,3169 |
| $\hat{\theta}_2^*$ | 0,0518 | 0,0518 | 0,0517 | 0,0517 |
| $Var \hat{\theta}_1$ | 0,2883 | 0,0929 | 0,0673 | 0,0805 |
| $Var \hat{\theta}_2$ | 0,0010 | 1×10^{-6} | 1×10^{-6} | 1×10^{-6} |
| $Var \hat{\theta}_1^*$ | 0,3058 | 0,0880 | 0,0640 | 0,0766 |
| $Var \hat{\theta}_2^*$ | 0,0011 | 1×10^{-6} | 1×10^{-6} | 1×10^{-6} |
| $\hat{\sigma}^2$ | 0,9476 | 1,0808 | 0,8501 | 1,0174 |

Tabulka 5.2: Hodnoty odhadnutých parametrů simulovaných dat pro bayesovskou a nebayesovskou metodu



Obrázek 5.1: Simulovaná data a regresní přímky, které jsou spočteny pro známé apriorní rozdělení (červená) a pro Jeffreysovu hustotu a metodu MV (zelená)

Srovnáme-li hodnoty odhadnutých rozptylů, tak menší vychází pro bayesovskou metodu. Odhad veličiny σ^2 vychází pro obě metody podobně.

Na obrázku 5.1 jsou znázorněna simulovaná data včetně proložených regresních přímek pro známé apriorní rozdělení (červená barva) a pro Jeffreysovu hustotu a metodu MV (zelená barva). Poznamenejme, že dvě přímky se na obrázku překrývají.

Poznamenejme, že podmínka $D(m) > 0$, $m \in \{1, \dots, 100\}$ pro bayesovskou metodu je splněna.

Z obrázku i odhadů parametrů dat vyplývá, že obě metody dávají pro tyto (simulovaná) data podobné výsledky.

5.2 Reálná data

V této části práce porovnáme bayesovskou a nebayesovskou metodu na reálných datech.

V tabulce 5.3 jsou uvedena reálná data, která představují měsíční objem prodeje v miliónech dolarů na Bostonské burze cenných papírů (Boston Stock Exchange neboli „BSE“) a na kombinované Newyorsko-americké burze cenných papírů (New York American Stock Exchange neboli „NYAMSE“) z let 1967 – 1969. Jsou převzata z Chen a Gupta [9].

| time point | calendar month | NYAMSE | BSE | time point | calendar month | NYAMSE | BSE |
|------------|----------------|---------|-------|------------|----------------|---------|-------|
| 1 | Jan. 1967 | 10581,6 | 78,8 | 19 | Jul. 1968 | 15178,8 | 159,6 |
| 2 | Feb. 1967 | 10234,3 | 69,1 | 20 | Aug. 1968 | 12774,8 | 185,5 |
| 3 | Mar. 1967 | 13299,5 | 87,6 | 21 | Sep. 1968 | 12377,8 | 178 |
| 4 | Apr. 1967 | 10746,5 | 72,8 | 22 | Oct. 1968 | 16856,3 | 271,8 |
| 5 | May 1967 | 13310,7 | 79,4 | 23 | Nov. 1968 | 14635,3 | 212,3 |
| 6 | Jun. 1967 | 12835,5 | 85,6 | 24 | Dec. 1968 | 17436,9 | 139,4 |
| 7 | Jul. 1967 | 12194,2 | 75 | 25 | Jan. 1969 | 16482,2 | 106 |
| 8 | Aug. 1967 | 12860,4 | 85,3 | 26 | Feb. 1969 | 13905,4 | 112,1 |
| 9 | Sep. 1967 | 11955,6 | 86,9 | 27 | Mar. 1969 | 11973,7 | 103,5 |
| 10 | Oct. 1967 | 13351,5 | 107,8 | 28 | Apr. 1969 | 12573,6 | 92,5 |
| 11 | Nov. 1967 | 13285,9 | 128,7 | 29 | May 1969 | 16566,8 | 116,9 |
| 12 | Dec. 1967 | 13784,4 | 134,5 | 30 | Jun. 1969 | 13558,7 | 78,9 |
| 13 | Jan. 1968 | 16336,7 | 148,7 | 31 | Jul. 1969 | 11530,9 | 57,4 |
| 14 | Feb. 1968 | 11040,5 | 94,2 | 32 | Aug. 1969 | 11278 | 75,9 |
| 15 | Mar. 1968 | 11525,3 | 128,1 | 33 | Sep. 1969 | 11263,7 | 109,8 |
| 16 | Apr. 1968 | 16056,4 | 154,1 | 34 | Oct. 1969 | 15649,5 | 129,2 |
| 17 | May 1968 | 18464,3 | 191,3 | 35 | Nov. 1969 | 12197,1 | 115,1 |
| 18 | Jun. 1968 | 17092,2 | 191,9 | | | | |

Tabulka 5.3: Reálná data

Nyní se pokusíme data analyzovat. Hodnota BSE bude pro nás představovat závislou proměnnou, zatímco hodnota NYAMSE vysvětlující proměnnou. Tuto volbu jsme převzali z Chen a Gupta [9], ve které tyto data také analyzovali. V tabulce 5.4 jsou uvedeny hodnoty odhadnutých parametrů a odhad změny reálných dat pro bayesovskou a nebayesovskou metodu. Poznamenejme, že pokud je změna_{odh} = 35, znamená to , že model je detekován

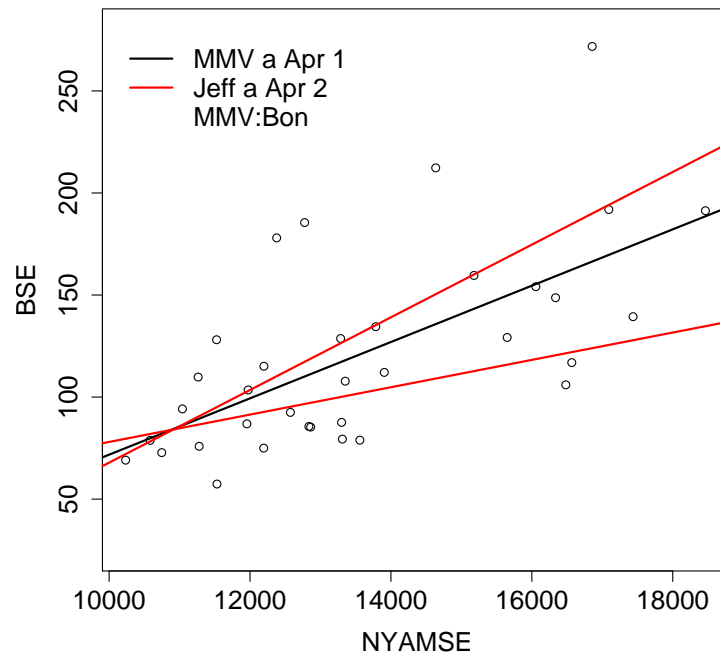
jako stabilní. U metody nebayesovské (tj. metody maximální věrohodnosti) jsme pro test stability použili testovou statistiku $\max_{2 \leq k \leq n-2} \{F_k\}$, kde kritickou hodnotu jsme získali nejen z limitního rozdělení (značíme jako „MMV“), ale také z Bonferroniho nerovnosti (značíme jako „MMV: Bonf“). U bayesovské metody jsme použili Jeffreysovu apriorní hustotu (značíme jako „Jeff“) i známé apriorní rozdělení, u kterého jsme nastavili apriorní střední hodnoty regresních koeficientů na hodnoty blížíící se odhadům získaným z Jeffreysovy apriorní hustoty (tj. na $(-110; 0,02; 11; 0,01)$). Za hodnoty a, b jsme volili postupně $a = 3, b = 2$ (značíme jako „Apr 1“) a $a = 30, b = 29$ (značíme jako „Apr 2“).

| | MMV | MMV: Bonf | Jeff | Apr 1 | Apr 2 |
|------------------------|-----------|-----------|--------------------|-----------|--------------------|
| $změna_{odh}$ | 35 | 23 | 23 | 35 | 23 |
| $\hat{\theta}_1$ | -66,2193 | -110,3097 | -110,3097 | -66,2193 | -110,1153 |
| $\hat{\theta}_2$ | 0,0138 | 0,0178 | 0,0178 | 0,0138 | 0,0178 |
| $\hat{\theta}_1^*$ | -66,2193 | 11,0747 | 11,0747 | -66,2193 | 11,0170 |
| $\hat{\theta}_2^*$ | 0,0138 | 0,0067 | 0,0067 | 0,0138 | 0,0067 |
| $Var \hat{\theta}_1$ | 39,6809 | 49,7934 | 1995,0590 | 39,6809 | 232,0127 |
| $Var \hat{\theta}_2$ | 0,0029 | 0,0036 | 1×10^{-5} | 0,0029 | 1×10^{-6} |
| $Var \hat{\theta}_1^*$ | 39,6809 | 34,1115 | 4009,6790 | 39,6809 | 285,4010 |
| $Var \hat{\theta}_2^*$ | 0,0029 | 0,0025 | 2×10^{-5} | 0,0029 | 2×10^{-6} |
| $\hat{\sigma}^2$ | 1400,6130 | 1039,9280 | 1183,3660 | 1400,6130 | 369,6306 |

Tabulka 5.4: Hodnoty odhadnutých parametrů reálných dat pro bayesovskou a nebayesovskou metodu

Porovnáme-li výsledky ve zmíněné tabulce 5.4, všimneme si, že v některých sloupcích (případech) je model stabilní, zatímco v jiných je odhalena změna na dvacáté třetí pozorování. Vezmeme-li v úvahu bayesovskou metodu s tím, že o datech nemáme žádné apriorní informace (tj. použijeme Jeffreysovu apriorní hustotu), je změna v datech detekována na $změna_{odh} = 23$. U známého apriorního rozdělení (Apr 1, 2) se odhad změny (test stability) liší pro různá nastavení a, b . U metody nebayesovské (metoda MV) s kritickou hodnotou podle limitního rozdělení je model detekován jako stabilní, ale použijeme-li kritickou hodnotu z Bonferroniho nerovnosti změna je detekována opět na $změna_{odh} = 23$. To může být způsobeno tím, že kritické hodnoty získané z limitního rozdělení se dají sice dobře spočítat, ale pro malý rozsah výběru nejsou moc dobrou aproximací.

Pokud je $změna_{odh} = 23$, jsou odhady regresních parametrů přibližně stejné. Rozptyly těchto odhadů se liší, pro bayesovskou metodu jsou někde větší, někde menší oproti nebayesovské. Pokud je model detekován jako stabilní, použili jsme pro odhad parametrů metodu nejmenších čtverců bez ohledu na zvolenou metodu (v tabulce 5.4 u MMV a Apr 1).



Obrázek 5.2: Reálná data a regresní přímky, které jsou spočteny pro známé apriorní rozdělení, pro Jeffreysovu hustotu a metodu MV

Odhad veličiny σ^2 vychází pro všechny případy až na jeden okolo 1000-1400. Výjimku tvoří hodnota v posledním sloupci, která se pohybuje okolo 369.

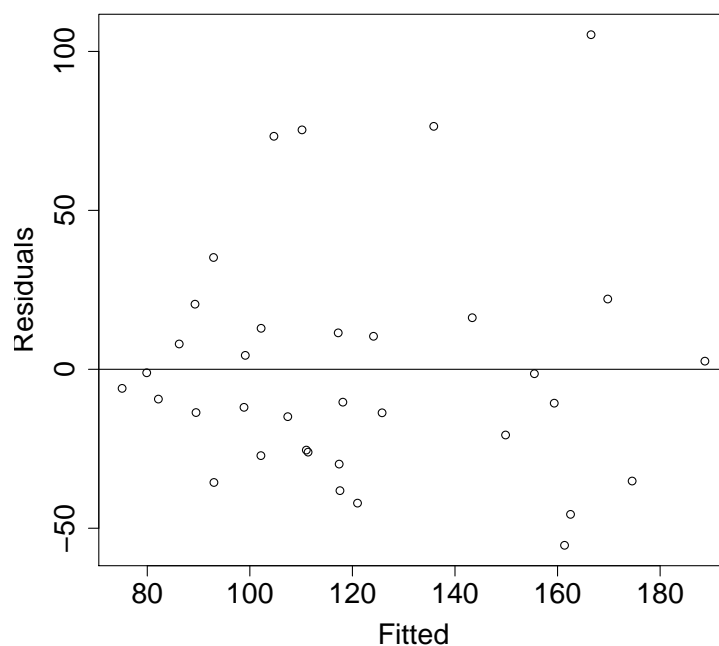
Na obrázku 5.2 jsou znázorněna reálná data včetně proložených regresních přímek pro nestabilní model, změna_{odh} = 23 (červená barva) a pro stabilní model (černá barva). Poznamenejme, že pro všechny případy, kde je model detekován jako nestabilní, vychází odhady regresních parametrů téměř shodně, proto jsou na obrázku všechny spojeny do jednoho.

Poznamenejme, že podmínka $D(m) > 0$, $m \in \{1, \dots, 35\}$ pro bayesovskou metodu je splněna. Normalita chyb však splněna není ani pro model stabilní, ani pro změna_{odh} = 23 (avšak pro jednu část normalitu nezamítáme), proto výsledky pro použitou Bonferroniho nerovnost a bayesovskou metodu musíme brát s rezervou. Přikládáme výpis z testování normality v programu R:

```
Shapiro-Wilk normality test
data: residuals(cely_model) W = 0.9002, p-value = 0.004009
```

```
Shapiro-Wilk normality test
data: residuals(model_1cast) W = 0.8684, p-value = 0.005972
```

```
Shapiro-Wilk normality test
data: residuals(model_2cast) W = 0.9463, p-value = 0.5834
```



Obrázek 5.3: Graf reziduí proti vyrovnaným hodnotám

Z obrázku dat 5.2 vyplývá, že dané křivky data popisují celkem dobře až na čtyři až pět pozorování, která se dosti od přímek vzdalují. Vysoké hodnoty odhadnutého rozptylu $\hat{\sigma}^2$ mohou být ovlivněny právě těmito (vzdálenými) pozorováními. Z dosavadních výsledků se zdá, že data lépe popisuje nestabilní model s bodem změny 23. Pro učinění nějakých závěrů by bylo však lepší mít více pozorování.

Pro lepší analýzu dat by bylo lepší zkontrolovat, zda nejsou přítomna odlehlá pozorování (graf standardizovaných reziduí proti vyrovnaným hodnotám), a uvažovat model se změnou i v rozptylu. Obrázek 5.3 znázorňuje graf reziduí proti vyrovnaným hodnotám, ze kterého se zdá, že rozptyl není konstantní (vytváří se nevýrazný trychtýř). Není však cílem této práce, abychom data popsali co nejlepším modelem, proto se další analýzou nebudeme již zabývat.

Kapitola 6

Pomocná tvrzení

Lemma 6.1. *Nechť \mathbf{D} je matice typu $p \times p$ a k je nenulové reálné číslo, pak platí:*

$$|k \mathbf{D}| = k^p |\mathbf{D}|.$$

Důkaz. Důkaz plyne z vlastností determinantů. □

Věta 6.2. (O násobení determinantů) *Jsou-li \mathbf{A} a \mathbf{B} dvě čtvercové matice řádu n , pak $|\mathbf{AB}| = |\mathbf{A}| \cdot |\mathbf{B}|$.*

Důkaz. Uveden v Bican [4] na straně 54. □

Lemma 6.3. *Nechť \mathbf{B} je regulární čtvercová matice typu $n \times n$, pak platí:*

$$|\mathbf{B}^{-1}| = |\mathbf{B}|^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{B}|}.$$

Důkaz. Protože matice \mathbf{B} a \mathbf{B}^{-1} splňují předpoklady věty 6.2., můžeme psát

$$|\mathbf{B}^{-1}| \cdot |\mathbf{B}| = |\mathbf{B}^{-1} \cdot \mathbf{B}| = |\mathbf{I}_n| = 1.$$

Poslední vztah přepíšeme jako $|\mathbf{B}^{-1}| \cdot |\mathbf{B}| = 1$, odkud jednoduchou úpravou dostaneme $|\mathbf{B}^{-1}| = \frac{1}{|\mathbf{B}|}$. □

Lemma 6.4. *Nechť $\mathbf{B}_{n \times n}$ je pozitivně definitní matice, pak i \mathbf{B}^{-1} je pozitivně definitní.*

Důkaz. Z předpokladu pozitivní definitnosti, vyplývá, že \mathbf{B} je symetrická matice, a pro každý nenulový vektor \mathbf{x} platí $\mathbf{x}'\mathbf{B}\mathbf{x} > 0$. Z věty A.6 uvedené v Anděl [1] na straně 317 vyplývá, že existuje $\mathbf{U}_{n \times n}$ tak, že $\mathbf{B} = \mathbf{U}\mathbf{\Lambda}\mathbf{U}'$, kde $\mathbf{U}\mathbf{U}' = \mathbf{I}_n$, $\mathbf{\Lambda} = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$, λ_i jsou vlastní čísla matice \mathbf{B} . Ze vztahu $\mathbf{U}\mathbf{U}' = \mathbf{I}_n$ plyne, že \mathbf{U} je regulární, a platí $\mathbf{U}^{-1} = \mathbf{U}'$. Proto můžeme psát: $\mathbf{B}^{-1} = \mathbf{U}\mathbf{\Lambda}^{-1}\mathbf{U}'$. Tedy

$$\mathbf{x}'\mathbf{B}^{-1}\mathbf{x} = \mathbf{x}'\mathbf{U}\mathbf{\Lambda}^{-1}\mathbf{U}'\mathbf{x} = \mathbf{y}'\mathbf{\Lambda}^{-1}\mathbf{y} > 0 \text{ pro každé } \mathbf{y} \neq 0,$$

protože $\mathbf{\Lambda}^{-1}$ je pozitivně definitní (na diagonále má kladná čísla). Zbývá dokázat, že $\mathbf{y} = \mathbf{U}'\mathbf{x} = 0 \iff \mathbf{x} = \mathbf{0}$. To vyplývá z lineárně nezávislých sloupců matice \mathbf{U}' . □

Lemma 6.5. *Nechť \mathbf{B} je pozitivně definitní matice taková, že platí $\mathbf{B} = \mathbf{B}^{1/2}\mathbf{B}^{1/2}$. Pak platí $|\mathbf{B}^{1/2}| = |\mathbf{B}|^{1/2}$.*

Důkaz. V důkazu použijeme vlastnosti determinantů. Z předpokladu, že je \mathbf{B} pozitivně definitní, vyplývá, že matice \mathbf{B} a $\mathbf{B}^{1/2}$ jsou čtvercové. Proto pokud platí $\mathbf{B} = \mathbf{B}^{1/2}\mathbf{B}^{1/2}$, tak je z vlastnosti determinantů $|\mathbf{B}| = |\mathbf{B}^{1/2}| \cdot |\mathbf{B}^{1/2}|$. Poslední rovnost lze upravit jako $|\mathbf{B}| = |\mathbf{B}^{1/2}|^2$, ve které odmocněním získáme vztah $|\mathbf{B}|^{1/2} = |\mathbf{B}^{1/2}|$. \square

Poznámka 6.6. *Pro platnost lemmy 6.5. by stačilo použít matici \mathbf{B} , která je pozitivně semidefinitní. Jelikož budeme lemmu využívat ve jmenovateli zlomku, potřebujeme, aby determinant matice byl nenulový. Proto předpokládáme pozitivní definitnost.*

Lemma 6.7. *Nechť $G > 0$, H je číslo přirozené, pak*

$$\int_0^\infty \tau^H e^{-\tau G} d\tau = c \cdot G^{-(H+1)},$$

kde normovací konstanta $c = H^H$.

Důkaz. Plyne z rekurentního vzorce uvedeného v Bartsch [3] na straně 598. \square

Kapitola 7

Závěr

V této práci jsme se zabývali právě jednou náhlou změnou v parametrech regresního modelu a ve střední hodnotě posloupnosti normálních hodnot. Zaměřili jsme se především na bayesovskou metodu, u které jsme odvodili marginální aposteriorní pravděpodobnostní funkci bodu změny a marginální aposteriorní hustotu regresních parametrů (respektive vektoru středních hodnot).

V první a druhé kapitole jsme zavedli pojem strukturální změny a některá rozdělení použitá v práci.

Ve třetí kapitole jsme se seznámili s bayesovskou analýzou lineárního modelu, měnící se posloupnosti normálních hodnot a dvoufázového regresního modelu. Odvodili jsme marginální aposteriorní pravděpodobnostní funkci bodu změny, kterou je potřeba znát pro test stability. Také jsme odvodili marginální aposteriorní hustotu regresních parametrů (respektive vektoru středních hodnot), která se využívá při odhadování parametrů modelu (respektive posloupnosti). U dvoufázového regresního modelu jsou výpočty nejenom pro známé apriorní rozdělení, ale také pro Jeffreysovu apriorní hustotu. Kapitulu uzavírá příklad a simulace dat, ze kterých vyplývá, že bayesovská analýza v „rozumných“ datech detekuje a odhaduje změnu a parametry modelu velmi dobře.

Ve čtvrté kapitole jsme uvedli jednu nebayesovskou metodu pro test stability a odhad změny, tzv. metodu maximální věrohodnosti. I zde jsme provedli simulace dat. Z jejich výsledků vyplývá, že i tato metoda v „rozumných“ datech detekuje a odhaduje změnu a parametry modelu velmi dobře.

V páté kapitole jsme obě metody porovnali na reálných a simulovaných datech. U simulovaných dat jsme došli u obou metod k porovnatelným výsledkům. U reálných dat jsou rozdílné výsledky (i v rámci jedné metody) zřejmě ovlivněny malým množstvím pozorování, popřípadě porušením předpokladů normality.

Literatura

- [1] ANDĚL, J. (2005): Základy matematické statistiky. Matfyzpress, Praha.
- [2] ANTOCH, J., HUŠKOVÁ, M. A JARUŠKOVÁ, D. (2001): Change point detection. In: Lecture Notes of the 5th IASC Summer School (Lauro et al., eds), ISI, Voorburg.
- [3] BARTSCH, JOCHEN H. (2000): Matematické vzorce. Mladá fronta, Praha.
- [4] BICAN, L. (2000): Lineární algebra a geometrie. Academia, Praha.
- [5] BROEMELING, LYLE D. A TSURUMI, H. (1987): Econometrics and structural change. Marcel Dekker, New York.
- [6] DEGROOT, MORRIS H. (1970): Optimal statistical decisions. McGraw-Hill, New York.
- [7] HÁTLE, J. A LIKEŠ, J. (1974): Základy počtu pravděpodobnosti a matematické statistiky. SNTL/ALFA, Praha.
- [8] HUŠKOVÁ, M. (1985): Bayesovské metody. Univerzita Karlova, Praha (skriptum).
- [9] CHEN, J. A GUPTA, A. K. (2000): Parametric statistical change point analysis. Birkhäuser, Boston.
- [10] JARUŠKOVÁ, D. A ANTOCH, J. (2002): Detekce změn v časových řadách a její aplikace v ekologii. Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, ročník 47, č.4, str. 307-323.