Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Radek Krejčiřík

Bernsteinova aproximace

Katedra numerické matematiky

Vedoucí bakalářské práce: Doc. RNDr. Karel Najzar, CSc.
Studijní program: Matematika, obecná matematika

2007

Rád bych na tomhle místě poděkoval Doc. RNDr. Karlu Najzarovi, CSc. za zadání práce, za poskytnuté konzultace a za zapůjčení studijních materiálů.

Prohlašuji, že jsem svou bakalářskou práci napsal samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů. Souhlasím se zapůjčováním práce a jejím zveřejňováním.

V Praze dne 7. 8. 2007 Radek Krejčiřík

Obsah

Název práce: Bernsteinova aproximace
Autor: Radek Krejčiřík
Katedra (ústav): Katedra numerické matematiky
Vedoucí bakalářské práce: Doc. RNDr. Karel Najzar, CSc.
e-mail vedoucího: knaj@karlin.mff.cuni.cz

Abstrakt: V předložené práci popisujeme Bernsteinovy polynomy a operátory. Nejprve jsou definovány polynomy, dále jsou uvedeny a dokázány některé z jejich vlastností, je odvozeno rekurentní vyjádření polynomů i jejich derivací. Poté jsou definovány polynomiální operátory, u nichž jsou opět řečeny a pak dokázány některé jejich vlastnosti. Je dokázána stejnoměrná konvergence posloupnosti operátorů ke spojité funkci a stejnoměrná konvergence posloupnosti derivací operátorů k derivaci této funkce. Následně jsou vyšetřeny aproximační vlastnosti operátorů u některých elementárních spojitých funkcí a také u jedné funkce nespojité. Je ukázán použitý algoritmus a dílčí i konečné výsledky.

Klíčová slova: Bernsteinův polynom, operátor, aproximace

Title: Bernstein approximation
Author: Radek Krejčiřík
Department: Department of Numerical Mathematics
Supervisor: Doc. RNDr. Karel Najzar, CSc.
Supervisor's e-mail address: knaj@karlin.mff.cuni.cz

Abstract: In the present work we study Bernstein polynomials and operators. At first there are defined polynomials, then there are said and proven some of their properties. There is shown recursive definition of the polynomials and theirs derivatives. Next there are defined the polynomial operators and again discussed and proven their properties. There is verified an uniform convergence of sequence of operators to the continuous function and the uniform convergence of derivatives of the operators to the derivative of this function. After that we investigate approximation of some elementary continuous functions and an approximation of one discontinuous function too. There is presented an used algorithm, partial-results and end-results.

Keywords: Bernstein polynomial, operator, approximation

Úvod

Tato práce se zabývá Bernsteinovými polynomy a polynomiálními operátory. V první kapitole ukážeme a následně dokážeme některé z jejich vlastností (při tom jsme čerpali z [1], [2] a [3]). Tou nejvýznamnější je zcela jistě stejnoměrná konvergence posloupnosti operátorů spojité funkce k této funkci – S. N. Bernstein (1880-1968) tyto polynomiální operátory použil v důkazu Weierstrassovy věty o aproximaci. Dnes se Bernsteinovy polynomy používají při konstrukci Bézierových křivek.
Ve druhé kapitole se budeme zabývat jejich aproximačními vlastnostmi. Popíšeme použitý algoritmus a následně provedeme aproximace některých elementárních spojitých funkcí a také jedné nespojité.

Kapitola 1

Bernsteinovy polynomy

1.1 Bernsteinovy polynomy a jejich vlastnosti

Definice 1.1.1 *Polynom*

$$B_k^n(t) := \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k}, \quad t \in \langle 0, 1 \rangle, \quad k = 0, ..., n$$

se nazývá k-tý Bernsteinův polynom n-tého stupně na intervalu $\langle 0, 1 \rangle$. Lineární transformací

$$x = a + (b-a)t, \quad t \in \langle 0, 1 \rangle, \quad -\infty < a < b < \infty,$$

lze získat k-tý Bernsteinův polynom $B_k^n(x; a, b)$ n-tého stupně na intervalu $\langle a, b \rangle$,

$$B_k^n(x; a, b) := \binom{n}{k} \left(\frac{x-a}{b-a} \right)^k \left(\frac{b-x}{b-a} \right)^{n-k}, \quad x \in \langle a, b \rangle, \quad k = 0, ..., n$$

(Ukázky operátorů prvního, druhého a třetího stupně na $\langle 0, 1 \rangle$ jsou součástí přílohy, str. 34-35)

Vlastnosti Bernsteinových polynomů:

1. Pro $t \in (0, 1)$ a $k = 0, \ldots, n$ je $0 < B_n^k < 1$ a platí

$$\begin{array}{lllll} B_0^n(0) & = B_n^n(1) & = & 1, & B_0^n(1) \; = \; B_n^n(0) \; = \; 0, \\ B_k^n(0) & = B_k^n(1) & = & 0, & k = 1, ..., n-1. \end{array} \tag{1.1}$$

2. Pro $n \in \mathbb{N}$ a $k = 1, \dots, n-1$ nabývá polynom B_k^n na intervalu $\langle 0, 1\rangle$ svého maxima v bodě $\left(\frac{k}{n}\right)$, tedy
$$\max_{t \in \langle 0,1\rangle} B_k^n(t) = B_k^n\left(\frac{k}{n}\right).$$
Hodnota maxima v tomto bodě je
$$\binom{n}{k}\left(\frac{k^k}{n^n}\right)(n-k)^{n-k}.$$

3. Pro $n \in \mathbb{N},\ k = 1, \dots, n-1$ a $t \in \mathbb{R}$ platí
$$B_k^n(t) = tB_{k-1}^{n-1}(t) + (1-t)B_k^{n-1}(t).$$

4. Pro $n \in \mathbb{N},\ k = 0, n$ a $t \in \mathbb{R}$ platí
$$B_0^n(t) = (1-t)B_0^{n-1}(t), \quad B_n^n(t) = tB_{n-1}^{n-1}(t).$$

5. Bernsteinovy polynomy stupně n tvoří rozklad jednotky
$$1 = \sum_{k=0}^{n} B_k^n(t).$$

6. Množina $\{B_k^n\}_{k=0}^n$ Bernsteinových polynomů stupně $n \in \mathbb{N}$ tvoří bázi v prostoru všech polynomů P_n stupně n.

7. První derivaci Bernsteinova polynomu B_k^n pro $n \in \mathbb{N}$ lze spočíst pomocí rekurentního vztahu
$$\frac{d}{dt}B_k^n(t) = n[B_{k-1}^{n-1}(t) - B_k^{n-1}(t)], \quad k = 0, \dots, n,$$
kde $B_{-1}^{n-1}(t) \equiv 0$ a $B_n^{n-1}(t) \equiv 0$.

Důkaz:

1. Pravdivost tvrzení je zřejmá, stačí dosadit příslušné hodnoty k, n a t do definice 1.1.1:
$$\begin{aligned}
B_0^n(0) &= \binom{n}{0}0^0 1^1 = 1 = \binom{n}{n}1^n 0^0 = B_n^n(1)\\
B_0^n(1) &= \binom{n}{0}1^0 0^1 = 0 = \binom{n}{n}0^n 1^0 = B_n^n(0)\\
B_k^n(0) &= \binom{n}{k}0^k 1^{n-k} = 0 = \binom{n}{k}1^k 0^{n-k} = B_k^n(1), \quad 1 < k < n.
\end{aligned}$$

2. Vyšetříme, kdy je první derivace $(B_k^n)'$ rovna nule.

$$\begin{aligned}\big(B_k^n(t)\big)' &= \binom{n}{k}[kt^{k-1}(1-t)^{n-k} - (n-k)t^k(1-t)^{n-k-1}] = \qquad (1.2)\\ &= \binom{n}{k}t^{k-1}(1-t)^{n-k-1}[k(1-t)-(n-k)t] = \\ &= \binom{n}{k}t^{k-1}(1-t)^{n-k-1}[k-nt]\end{aligned}$$

Položíme $(B_k^n)' = 0$ a řešením získáme možné extrémy funkce, které mohou být v bodech

$$t=0 \quad \text{nebo} \quad t=1 \quad \text{nebo} \quad t=\frac{k}{n}.$$

Již víme, že $B_k^n(0) = 0 = B_k^n(1)$ pro $k = 1, \ldots, n-1$. Protože funkce $B_k^n(t)$ není na $\langle 0, 1\rangle$ identicky rovna nule, nabývá pouze jednoho maxima a to v bodě $\left(\frac{k}{n}\right)$.

3. Kombinační číslo $\binom{n}{k}$ lze rozepsat do tvarů

$$\begin{aligned}\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} &= \frac{n}{k}\,\frac{(n-1)!}{(k-1)!\big((n-1)-(k-1)\big)!} = \\ &= \frac{n}{n-k}\,\frac{(n-1)!}{k!\big((n-1)-k\big)!}.\end{aligned}$$

Díky tomu můžeme polynom $B_k^n(t)$ pro $0 < k < n$ vyjádřit ve tvaru

$$\begin{aligned}B_k^n(t) &= \binom{n}{k}t^k(1-t)^{n-k} = \\ &= \frac{n}{k}\frac{(n-1)!}{(k-1)!\big((n-1)-(k-1)\big)!}\,t^k(1-t)^{n-k} = \\ &= \frac{n}{k}\,t\,\frac{(n-1)!}{(k-1)!\big((n-1)-(k-1)\big)!}\,t^{k-1}(1-t)^{(n-1)-(k-1)} = \\ &= \frac{n}{k}\,tB_{k-1}^{n-1}(t),\end{aligned}$$

tedy

$$\frac{k}{n}B_k^n(t) = tB_{k-1}^{n-1}(t).$$

Obdobně získáme vyjádření

$$\begin{aligned}
B_k^n(t) &= \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} = \\
&= \frac{n}{n-k}\, \frac{(n-1)!}{k!\big((n-1)-k\big)!}\, t^k (1-t)^{n-k} = \\
&= \frac{n}{n-k}\,(1-t)\,\frac{(n-1)!}{k!\big((n-1)-k\big)!}\, t^k (1-t)^{(n-1)-k} = \\
&= \frac{n}{n-k}\,(1-t) B_k^{n-1}(t),
\end{aligned}$$

tedy

$$\frac{n-k}{n} B_k^n(t) = (1-t) B_k^{n-1}(t).$$

Z těchto zápisů plyne pravdivost tvrzení

$$\begin{aligned}
B_k^n(t) &= \frac{k}{n} B_k^n(t) + \frac{n-k}{n} B_k^n(t) = \\
&= t B_{k-1}^{n-1}(t) + (1-t) B_k^{n-1}(t).
\end{aligned}$$

4. Pro libovolné $n \in \mathbb{N}$ platí $\binom{n}{n} = 1 = \binom{n}{0}$, z čehož vyplývají rovnosti

$$\begin{aligned}
B_0^n(t) &= \binom{n}{0} t^0 (1-t)^n = (1-t)\binom{n-1}{0} t^0 (1-t)^{n-1} = (1-t) B_0^{n-1}(t) \\
B_n^n(t) &= \binom{n}{n} t^n (1-t)^0 = t\binom{n-1}{n-1} t^{n-1} (1-t)^0 = t B_{n-1}^{n-1}(t)
\end{aligned}$$

5. Rozklad jednotky plyne z binomické věty

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k},$$

kdy po dosazení $a = t$ a $b = (1-t)$ dostáváme

$$\big(t + (1-t)\big)^n = 1^n = 1 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} B_k^n(t). \tag{1.3}$$

6. Předpokládejme, že polynomy $\{B_k^n\}_{k=0}^n$ jsou lineárně závislé. Pak existuje nenulová $(n+1)$-tice čísel $\{c_k\}_{k=0}^n$ taková, že platí

$$\begin{aligned}
0 &= \sum_{k=0}^{n} c_k B_k^n(t) = \\
&= \sum_{k=0}^{n} c_k \frac{n!}{k!(n-k)!} t^k (1-t)^{n-k} = \\
&= \sum_{k=0}^{n} c_k \frac{n!}{k!(n-k)!}\ t^k \cdot \sum_{j=0}^{n-k} \frac{(n-k)!}{j!(n-k-j)!} (-t)^{n-k-j} = \\
&= \sum_{k=0}^{n} c_k \frac{n!}{k!(n-k)!} \sum_{j=0}^{n-k} (-1)^{n-k-j} \frac{(n-k)!}{j!(n-k-j)!} t^{n-j} = \\
&= \sum_{j=0}^{n} t^{n-j} \sum_{k=0}^{n-j} (-1)^{n-k-j} \frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{(n-k)!}{j!(n-k-j)!} c_k = \\
&= \sum_{j=0}^{n} t^{n-j} \sum_{k=0}^{n-j} A_{k,j} c_k,
\end{aligned}$$

kde $A_{k,j}$ je nenulový činitel, který je funkcí k a j. Ve třetím kroku jsme použili aplikaci binomické věty na člen $(1-t)^{n-k}$. Protože je výsledný polynom roven nule, musí být koeficient u každé mocniny t roven nule, tedy

$$0 = \sum_{k=0}^{n-j} A_{k,j} c_k \quad \text{pro} \qquad j = n, n-1, \ldots, 0.$$

Pro $j = n$ je ve výrazu pouze jeden člen, a proto $c_0 = 0$. Pro $j = n-1$ má výraz dva členy, z nichž jeden je c_0 a tím pádem musí být i $c_1 = 0$. Budeme-li j postupně snižovat a zpětně dosazovat zjištěné hodnoty c_{k-1}, zjistíme, že $c_0 = c_1 = \ldots = c_{n-j} = 0$. Nulu tedy nelze vyjádřit jako nenulovou kombinaci polynomů B_k^n, proto jsou tyto polynomy lineárně nezávislé. A protože je n+1 nezávislých polynomů stupně n, tvoří bázi prostoru polynomů stupně n.

7. Za použití rovností

$$\binom{n}{k} k = \frac{n!k}{k!(n-k)!} = n\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} = n\binom{n-1}{k-1}, \tag{1.4}$$

$$\binom{n}{k}(n-k) = \frac{n!(n-k)}{k!(n-k)!} = n\frac{(n-1)!}{k!(n-k-1)!} = n\binom{n-1}{k} \tag{1.5}$$

můžeme derivaci Bernsteinova polynomu (1.2) zapsat také takto

$$\begin{aligned}(B_k^n)' &= n\binom{n-1}{k-1}t^{k-1}(1-t)^{n-k} - n\binom{n-1}{k}t^k(1-t)^{n-k-1} = \\ &= n[B_{k-1}^{n-1}(t) - B_k^{n-1}(t)].\end{aligned}$$

■

1.2 Bernsteinův operátor a jeho vlastnosti

Definice 1.2.1 *Nechť je funkce f spojitá na intervalu $\langle 0,1\rangle$, $f \in \mathbb{C}\langle 0,1\rangle$. Bernsteinův (polynomiální) operátor $B_n(\bullet, f) \equiv B_n f$ je definován předpisem*

$$B_n(x,f) := \sum_{k=0}^{n} B_k^n(x)\, f\left(\frac{k}{n}\right), \quad x \in \langle 0,1\rangle,$$

kde B_k^n je k-tý Bernsteinův polynom stupně n.
Pro funkci f spojitou na intervalu $\langle a,b\rangle, -\infty < a < b < \infty$, lze operátor definovat použitím substituce $y = \frac{x-a}{b-a}$, $F(y) = f\big((b-a)y + a\big), y \in \langle 0,1\rangle$, což vede k identitě

$$B_n(y,F) = B_n(x,f;a,b) = \sum_{k=0}^{n} B_k^n\left(\frac{x-a}{b-a}\right) f\left(\frac{k}{n}(b-a)+a\right), \quad x \in \langle a,b\rangle.$$

Vlastnosti Bernsteinova operátoru:

1. Polynom $B_n(x,f)$ interpoluje hodnoty funkce f v koncových bodech intervalu $\langle 0,1\rangle$, platí
$$B_n(0,f) = f(0), \quad B_n(1,f) = f(1).$$
Obecně však neinterpoluje tuto funkci v bodech $k/n,\ k = 1,\dots,n-1$.

2. Je-li funkce $f(x)$ na intervalu $\langle 0,1\rangle$ ohraničená, pak platí
$$\lim_{n\to\infty} B_n(x,f) = f(x)$$
v každém bodu x, ve kterém je funkce f spojitá.

3. Jestliže je funkce f na intervalu $\langle 0,1\rangle$ spojitá, pak posloupnost operátorů $\{B_n f\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje stejnoměrně k f, tj. platí
$$\lim_{n\to\infty} B_n(x,f) = f(x) \quad \text{pro } \forall f \in \mathbb{C}\langle 0,1\rangle, \forall x \in \langle 0,1\rangle.$$
Je-li navíc splněno $f \in \mathbb{C}^m\langle 0,1\rangle, m \in \mathbb{N}$, pak
$$\lim_{n\to\infty} B_n^{(k)}(x,f) = f^{(k)}(x) \quad \text{pro } k = 0,1.\dots,m, \quad \forall x \in \langle 0,1\rangle,$$
přičemž tyto konvergence jsou na intervalu $\langle 0,1\rangle$ stejnoměrné.

4. Pro lineární funkci $f(x) = ax + b$ platí
$$B_n(x,f) = f(x), \quad x \in \langle 0,1\rangle.$$

5. Pro kvadratickou funkci $f(x) = x^2$ je $B_n(x,f) \neq f(x),\ x \in \langle 0,1\rangle$. Platí
$$B_n(x,f) - f(x) = \frac{x(1-x)}{n}.$$
Rychlost aproximace je lineární a tedy velmi pomalá.

6. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ je Bernsteinův operátor B_n na prostoru spojitých funkcí lineární.

7. Je-li funkce f na intervalu $\langle 0,1\rangle$ nezáporná/záporná, nerostoucí/neklesající, konvexní/konkávní, má tuto vlastnost také funkce $B_n f$.
Obecně platí, že pokud pro nějaké $p \in \{1,\dots,n\}$ je $\alpha_p \le f^{(p)}(x) \le \beta_p, x \in \langle 0,1\rangle$, pak
$$\alpha_p \le \frac{n^p}{n(n-1)\dots(n-p+1)} B_n^{(p)}(x,f) \le \beta_p$$
V případě $p = 0$ nechť $\alpha_0 \le f(x) \le \beta_0, x \in \langle 0,1\rangle$, pak platí nerovnost
$$\alpha_0 \le B_n(x,f) \le \beta_0.$$

8. Pro první derivaci polynomu $B_n f$ v krajních bodech intervalu $\langle 0,1\rangle$ platí vztahy

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}B_n(0,f) &= n\big(f(1/n)-f(0)\big)\\ \frac{d}{dx}B_n(1,f) &= n\big(f(1)-f(1-1/n)\big).\end{aligned}$$

Díky tomu je vidět, že pokud má funkce f v krajním bodě $z=0$ (resp. $z=1$) derivaci $f'(z)$ zprava (resp. zleva), pak

$$\lim_{n\to\infty}\frac{d}{dx}B_n(x,f)|_{x=z}=f'(z).$$

9. Označme $Z(a_0,\dots,a_n)$ počet znaménkových změn v posloupnosti reálných čísel $a_0,\dots,a_n$. Nechť $Z[f]$ je počet znaménkových změn hodnot funkce f spojité na intervalu $\langle 0,1\rangle$. Pak platí

$$Z[B_n(x,f)]\le Z(f(0),f(1/n),\dots,f(n/n)).$$

Důkaz:

1. Plyne přímo z vlastnosti Bernsteinova polynomu (1.1) a definice 1.2.1:

$$\begin{aligned}B_n(0,f) &= \sum_{k=0}^{n}B_k^n(0)\,f\left(\frac{k}{n}\right)=B_0^n(0)\,f(0)=f(0)\\ B_n(1,f) &= \sum_{k=0}^{n}B_k^n(1)\,f\left(\frac{k}{n}\right)=B_n^n(1)\,f(1)=f(1).\end{aligned}$$

2. Definujme pomocnou funkci

$$T=\sum_{k=0}^{n}(k-nx)^2\,B_k^n(x)=\sum_{k=0}^{n}[k(k-1)-(2nx-1)k+n^2x^2]\,B_k^n(x).$$

Z vlastností Bernsteinových polynomů již víme, že $\sum_{k=0}^{n}B_k^n(x)=1$. Dále platí

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}kB_k^n &= \sum_{k=1}^{n}k\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}=nx\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}x^{k-1}(1-x)^{n-k}=\\ &= nx\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}x^k(1-x)^{(n-1)-k}=nx,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} k(k-1)B_k^n &= n(n-1)x^2 \sum_{k=2}^{n} \binom{n-2}{k-2} x^{k-2}(1-x)^{n-k} = \\ &= n(n-1)x^2 \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n-2}{k} x^{k}(1-x)^{(n-2)-k} = n(n-1)x^2.\end{aligned}$$

Díky tomu se dá T vyjádřit ve tvaru

$$T = n(n-1)x^2 - (2nx-1)nx + n^2x^2 = nx(1-x).$$

Protože platí $x(1-x) \leq \frac{1}{4}$ pro $x \in \langle 0,1\rangle$, získáváme nerovnost

$$\begin{aligned}\sum_{|\frac{k}{n}-x|\geq\delta} B_k^n &\leq \frac{1}{\delta^2} \sum_{|\frac{k}{n}-x|\geq\delta} \left(\frac{k}{n}-x\right)^2 B_k^n = \frac{1}{n^2\delta^2} \sum_{|\frac{k}{n}-x|\geq\delta} (k-nx)^2 B_k^n \leq \\ &\leq \frac{1}{n^2\delta^2} T = \frac{x(1-x)}{n\delta^2} \leq \frac{1}{4n\delta^2}. \qquad (1.6)\end{aligned}$$

Nechť f je funkce omezená na intervalu $\langle 0,1\rangle$, pak existuje číslo $0 \leq M < \infty$ takové, že $|f(t)| \leq M$ pro $t \in \langle 0,1\rangle$. Nechť $x \in \langle 0,1\rangle$ je bod, v němž je funkce spojitá. Pak pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že pokud je $|x-y| < \delta$, pak $|f(x)-f(y)| < \varepsilon$. Odtud platí

$$\begin{aligned}|f(x) - B_n(x,f)| &= \left| \sum_{k=0}^{n} \left[f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right] B_k^n \right| \leq \\ &\leq \sum_{|\frac{k}{n}-x|<\delta} \left| f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right| B_k^n + \sum_{|\frac{k}{n}-x|\geq\delta} \left| f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right| B_k^n.\end{aligned}$$

První z výsledných sum je menší nebo rovna $\varepsilon \sum B_k^n = \varepsilon$, ta druhá je dle (1.6) menší nebo rovna číslu $(2M/4n\delta^2)$. Platí tedy nerovnost

$$|f(x) - B_n(x,f)| \leq \varepsilon + (M/2n\delta^2),$$

která pro dostatečně velké n přechází v

$$|f(x) - B_n(x,f)| \leq 2\varepsilon, \qquad (1.7)$$

čímž je platnost tvrzení dokázána.

3. Nechť je funkce $f(x)$ spojitá na celém intervalu $\langle 0, 1\rangle$. Pak nerovnost (1.7) platí pro odpovídající δ nezávisle na x, tedy $B_n(x, f) \to f(x)$ stejnoměrně.
První derivaci Bernsteinova operátoru lze pomocí vztahů (1.4), (1.5) vyjádřit ve tvaru

$$\begin{aligned} B_n'(x, f) &= \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k}[kx^{k-1}(1-x)^{n-k} - (n-k)x^k(1-x)^{n-k-1}] = \\ &= n\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n-1}{k-1}x^{k-1}(1-x)^{n-k} - \\ &\quad - n\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n-1}{k}x^k(1-x)^{n-k-1} = \\ &= n\sum_{k=0}^{n-1}\left[f\left(\frac{k+1}{n}\right) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right]\binom{n-1}{k}x^k(1-x)^{n-k-1}. \end{aligned} \tag{1.8}$$

Výraz $f\big((k+1)/n\big) - f(k/n)$ zde vyjadřuje diferenci prvního řádu $\triangle f(k/n)$ funkce $f(x)$ v bodě $x = k/n$. Diference p-tého řádu je, je-li přírůstek $\triangle x = h$, definována

$$\begin{aligned} \triangle_h^p f(x) &= \triangle\big(\triangle_h^{p-1} f(x)\big) = \\ &= \sum_{j=0}^{p}(-1)^j\binom{p}{j}f\big(x + (p-j)h\big). \end{aligned} \tag{1.9}$$

V našem případě je přírůstek $h = n^{-1}$. S využitím (1.9) pro opakovanou derivaci operátoru získáváme vyjádření

$$B_n^{(p)}(x, f) = n(n-1)\ldots(n-p+1)\sum_{k=0}^{n-p}\triangle_h^p f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n-p}{k}x^k(1-x)^{n-k-p},$$

$$k = 1, \ldots, n.$$

Jelikož platí rovnost $\triangle_h^p f(x)/h^p = f^{(p)}(c)$ pro nějaké c splňující $x < c < x + ph$, lze $B_n^{(p)}$ po úpravách rovněž zapsat takto

$$B_n^{(p)}(x, f) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)\ldots\left(1 - \frac{p-1}{n}\right)\sum_{k=0}^{n-p} f^{(p)}\left(\frac{k}{n} + \alpha\frac{p}{n}\right)B_k^{n-p}(x), \tag{1.10}$$

$$0 < \alpha < 1.$$

Odsud je vidět, že rozdíl mezi hodnotami p-té derivace Bernsteinova operátoru $B_n^{(p)}(x, f)$ funkce f a operátoru $B_{n-p}(x, f^{(p)})$ p-té derivace $f^{(p)}$ konverguje stejnoměrně k nule pro $n \to \infty$. A jelikož podle (1.7) platí $B_{n-p}(x, f^{(p)}) \to f^{(p)}$, tak i $B_n^{(p)}(x) \to f^{(p)}(x)$ stejnoměrně na $\langle 0, 1\rangle$.

4. Nechť $f(x) = \alpha x + \beta,\; f(k/n) = \alpha\,(k/n) + \beta$ pro všechna n a k. Pak

$$\begin{aligned}
B_n(x, f) &= \sum_{k=0}^{n} \left(\alpha \frac{k}{n} + \beta\right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = \\
&= \alpha \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} + \beta \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = \\
&= \alpha \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} x^k (1-x)^{n-k} + \beta = \\
&= \alpha x \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} x^{k-1} (1-x)^{(n-1)-(k-1)} + \beta = \\
&= \alpha x \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} x^{k} (1-x)^{(n-1)-k} + \beta = \\
&= \alpha x + \beta.
\end{aligned}$$

V důkazu využíváme binomickou větu stejně jako v důkazu vlastnosti rozkladu jednotky (1.3).

5. Nechť $f(x) = x^2,\; f(k/n) = (k/n)^2$ pro všechna n a k. Pak

$$B_n(x, f) = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}.$$

Pomocí binomické věty lze pro $n \geq 2$ vyjádřit funkci x^2 jako

$$\begin{aligned}
x^2 &= x^2 \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n-2}{k} x^k (1-x)^{n-2-k} = \\
&= \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n-2}{k} x^{k+2} (1-x)^{n-2-k} = \\
&= \sum_{k=0}^{n-2} \frac{(k+2)(k+1)}{n(n-1)} \binom{n}{k+2} x^{k+2} (1-x)^{n-(k+2)} = \\
&= \sum_{k=2}^{n} \frac{k(k-1)}{n(n-1)} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{k(k-1)}{n(n-1)} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}.
\end{aligned}$$

Poslední rovnost platí, protože $\frac{k(k-1)}{n(n-1)} = 0$ pro $k = 0, k = 1$. Je zřejmé, že $B_n(x, x^2) \neq x^2$. Pro jejich rozdíl platí

$$\begin{aligned}
B_n(x, x^2) - x^2 &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \left(\frac{k^2}{n^2} - \frac{k(k-1)}{n(n-1)} \right) = \\
&= \sum_{k=0}^{n} B_k^n \left[\frac{k}{n} \left(\frac{k}{n} - \frac{(k-1)}{(n-1)} \right) \right] = \\
&= \sum_{k=0}^{n} B_k^n \left[\frac{k}{n} \left(\frac{n-k}{n(n-1)} \right) \right] = \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} \frac{k(n-k)}{n^2(n-1)} x^k (1-x)^{n-k} = \\
&= x(1-x) \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n-2}{k-1} x^{k-1} (1-x)^{n-k-1} = \\
&= x(1-x) \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n-2}{k} x^k (1-x)^{(n-2)-k} = \\
&= \frac{x(1-x)}{n}.
\end{aligned}$$

6. Nechť je funkce $f \in \mathbb{C}\langle 0,1\rangle$ definovaná jako $f(x) = \alpha g(x) + \beta h(x),\ g,h \in \mathbb{C}\langle 0,1\rangle$. Pak platí

$$\begin{aligned} B_n(x,f) &= \sum_{k=0}^{n} B_k^n(x)\, f\left(\frac{k}{n}\right) = \sum_{k=0}^{n} B_k^n(x)\left[\alpha g\left(\frac{k}{n}\right) + \beta h\left(\frac{k}{n}\right)\right] = \\ &= \alpha B_n(x,g) + \beta B_n(x,h). \end{aligned}$$

Bernsteinův operátor je tedy lineární vzhledem k funkci $f(x), \quad f \in \mathbb{C}\langle 0,1\rangle$.

7. Protože je Bernsteinův polynom na $(0,1)$ kladný (viz. první z vlastností polynomů), je znaménko Bernsteinova operátoru funkce f stejné jako znaménko této funkce. Odtud plyne tvrzení o jeho (ne)zápornosti.
Je-li funkce na intervalu nerostoucí, resp. neklesající, je její první derivace na tomto intervalu nekladná, resp. nezáporná. Podíváme-li se na vyjádření první derivace $B_n'(x,f)$ v (1.8), vidíme, že znaménko této derivace závisí pouze na hodnotě rozdílu $\left[f\left(\frac{k+1}{n}\right) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right]$. Znaménko této hodnoty je stejné jako znaménko derivace funkce f, operátor $B_n(x,f)$ je tedy na intervalu stejně monotonní jako funkce f.
Je-li funkce na intervalu konvexní, resp. konkávní, je její druhá derivace na tomto intervalu kladná, resp. záporná. Z (1.10) je vidět, že pak i $B_n''(x,f)$ má stejné znaménko a $B_n(x,f)$ je tedy také konvexní, resp. konkávní.
Nechť $p \in \{1,\dots,n\}$ a nechť pro p-tou derivaci funkce f platí $\alpha_p \le f^{(p)}(x) \le \beta_p$, $x \in \langle 0,1\rangle$. Požadovaná nerovnost $\alpha_p \le \frac{n^p}{n(n-1)\dots(n-p+1)} B_n^{(p)}(x,f) \le \beta_p$ pak vyplývá z (1.10).
V případě $p = 0,\ \alpha_0 \le f(x) \le \beta_0, x \in \langle 0,1\rangle$ plyne tvrzení přímo z nerovností

$$\begin{aligned} B_n(x,f) &= \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) B_k^n(x) \le \max_{x\in\langle 0,1\rangle} f(x) \sum_{k=0}^{n} B_k^n(x) = \max_{x\in\langle 0,1\rangle} f(x) \le \beta_0 \\ B_n(x,f) &= \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) B_k^n(x) \ge \min_{x\in\langle 0,1\rangle} f(x) \sum_{k=0}^{n} B_k^n(x) = \min_{x\in\langle 0,1\rangle} f(x) \ge \alpha_0 \end{aligned}$$

8. Vyjádření prvních derivací $\frac{d}{dx}B_n(0,f)$ a $\frac{d}{dx}B_n(1,f)$ pomocí hodnot funkce f plyne přímo z dosazení bodů $x=0, x=1$ do vzorce (1.8) pro první derivaci operátoru B_n. Druhá část tvrzení je zřejmá z definice derivace zprava v bodě 0, resp. zleva

v bodě 1:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{n\to\infty} n\left(f\left(\frac{1}{n}\right)-f(0)\right),\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{f(x)-f(x-h)}{h} = \lim_{n\to\infty} n\left(f(1)-f\left(1-\frac{1}{n}\right)\right).
\end{aligned}$$

9. Mějme libovolnou funkci $f \in \mathbb{C}\langle 0,1\rangle$ a bod $x \in (0,1)$ zvolený pevně. Pak platí

$$\begin{aligned}
Z[B_n(x,f)] &= Z\left[\frac{B_n(x,f)}{(1-x)^n}\right] = \\
&= Z\left[\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k}\left(\frac{x}{1-x}\right)^k\right] = \\
&= Z\left[\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k} z^k\right] \le \\
&\le Z(f(0), f(1/n), \ldots, f(n/n)),
\end{aligned}$$

kde $z = \left(\frac{x}{1-x}\right)$ nabývá pouze kladných hodnot, $\binom{n}{k}$ taktéž. Poslední nerovnost plyne z Descartova pravidla o počtu kladných a záporných kořenů algebraické rovnice.

$\blacksquare$

Kapitola 2

Vyšetření aproximačních vlastností

V následující kapitole se budeme zabývat aproximačními vlastnostmi Bernsteinových operátorů některých jednoduchých funkcí. Budeme zkoumat relativní chybu, tj. pro jaké nejmenší $n \in \mathbb{N}$ bude pro pevně zvolené $\varepsilon > 0$ splněna podmínka

$$\frac{|B_n(x, f; a, b) - f(x)|}{|f(x)|} < \varepsilon \qquad \text{pro } \forall x \in [a, b]. \tag{2.1}$$

2.1 Algoritmus

Při řešení využijeme výpočetní program *Maple 10.00*. V něm podle definic 1.1.1, 1.2.1 zapíšeme Bernsteinův polynom a operátor jako procedury, stejně tak zkoumanou funkci (zde např. $sin(x)$).

```
Bn:=proc(n,k,x)
  Bn:=(binomial(n,k))*(x^k)*(1-x)^(n-k);
 end proc:

f := (x) -> sin(x):

Bnf:=proc(n,x,a,b)
  local c1, c2, c3;
  c1:=b-a: c2:=x-a: c3:=c1/n:
  Bnf:=sum(Bn(n,k,c2/c1)*f(k*c3+a), k=0..n);
 end proc:
```

Pomocí funkce `infnorm` z knihovny `numapprox` vyšetříme v L^∞-normě absolutní a relativní chybu (o absolutní se budeme dále zajímat, jestliže bude relativní chyba příliš velká) prvních 10–20 aproximací na celém zkoumaném intervalu, u některých funkcí ještě na jeho jednotlivých částech. Na základě těchto výsledků (a případných dalších, např. zjišťování limity v bodě) zvolíme vhodnou funkci pro vyšetřování chyby, kterou použijeme v následujícím algoritmu (jeho zápis v jazyce *maple* je vidět např. na obr. 2.1, str. 22):

1. Dle doposud zjištěných údajů určíme:

   - interval `<ai, bi>` (příp. jen bod), na němž budeme chybu `eps` zkoumat,
   - výchozí hodnotu `l`, od níž budeme hledat velikost `n` potřebného stupně operátoru,
   - délku prvního kroku `k1`, se kterým bude probíhat cyklus (jako délku kroku volíme mocninu čísla 10).

   Výchozí znaménko `ad` tohoto kroku bude kladné (v cyklu budeme zkoumat nerovnici (2.1), která bude mít obě strany přenásobené číslem $+1$ nebo -1 v závislosti na znaménku, jehož hodnota se určí v dalším výpočtu).

2. Je-li `k1` ≥ 1, pak opakujeme:

   - dosadíme `n:=l`,
   - ve *while*-cyklu po zvolených krocích vyšetřujeme relativní (příp. absolutní) chybu až do doby, než nalezneme nějaké `n` takové, že námi zkoumaná chyba aproximace je menší než `eps`,
   - je-li `k1` ≥ 10, pak nalezené `n` zmenšíme o polovinu dosavadního kroku `k1` a tuto hodnotu uložíme do proměnné `l`, krok zmenšíme desetkrát. Prozkoumáme velikost chyby operátoru `l`-tého stupně a podle výsledku stanovíme znaménko kroku `ad` a další posun:
     - je-li max. chyba operátoru větší než `eps`, znaménko kroku zvolíme kladné, hodnotu `l` zvětšíme o jeden krok,
     - je-li max. chyba operátoru menší než `eps`, zvolíme znaménko záporné a hodnotu `l` o jeden krok zmenšíme,
   - pokud `k1` $= 1$, dosadíme `k1` $= 0$, čímž cyklus v dalším kroku ukončíme.

3. Jestliže bylo znaménko `ad` v posledním cyklu záporné, zvětšíme hodnotu nalezeného `n` o 1. Bylo-li kladné, hodnotu neměníme. Získané `n` je minimální stupeň operátoru takový, aby byla splněna vyšetřovaná podmínka chyby.

2.2 Aproximace elementárních funkcí

Algoritmus budeme aplikovat na čísla ε počínaje hodnotou 0.1 dále snižovanou o setiny a posléze tisíciny, dokud to bude možné (tj. dokud nebude výpočet trvat neúměrně dlouho). Grafy související s výsledky měření jsou uvedeny v příloze (str 36–39).

$sin(x)$ na $\langle 0, 2\pi \rangle$

Absolutní chyba je nejprve největší v bodech π a $3/2\pi$ (první dva Bernsteinovy operátory mají podobu úsečky ležící na ose x a spojující koncové body intervalu), u dalších aproximací se pak body nabývání jejího maxima přesouvají směrem ke středu intervalu (viz. tab. 2.1).
Relativní chyba pro n větší než 2 nabývá svého maxima v bodě π a jeho nejbližším okolí (pro velká n leží tyto body ve vzdálenostech v řádu setin od bodu π) a je vždy větší než max. chyba absolutní (viz. tab. 2.2). Stačí tedy vyšetřovat relativní chybu na intervalu např. $\langle 3, 3.2 \rangle$. K tomu lze použít verzi algoritmu, v níž se bude vyšetřovat relativní chyba na tomto intervalu (viz. obr. 2.1).

```
with(numapprox):
k1:=100: l:=1: ad:=1: eps:=0.1:
 ai:=3: bi:=3.2:
while k1>=1 do
  n:=l:
  while infnorm((f(x)-Bnf(n,x,a,b))/f(x),x=ai..bi)*ad > eps*ad
   do n:=n+(ad*k1) end do;
  if k1>=10 then k1:=k1/10;
                 l:=n-(5*k1*ad);
                 if infnorm((f(x)-Bnf(l,x,a,b))/f(x),x=ai..bi)>eps
                        then ad:=1; l:=l+k1
                        else ad:=-1; l:l-k1 fi
             else k1:=0 fi;
end do; if ad=-1 then n:=n+1 fi;
```

Obr. 2.1: Algoritmus pro zjištění nejmenšího n takového, že relativní chyba n-té aproximace je menší nebo rovna ε (případ pro $\varepsilon = 0.1$)

n	max. abs. chyba	body jejího nabývání	
1	1	1.570796327	4.712388980
2	1	1.570796327	4.712388980
3	0.7580898803	1.634930928	4.648254379
4	0.6295086681	1.683698074	4.599487233
5	0.5410220675	1.715103817	4.568081490
6	0.4750474180	1.737194237	4.545991070
7	0.4236516676	1.753662485	4.529522822
8	0.3823878048	1.766445133	4.516740174
9	0.3484933167	1.776668916	4.506516391
10	0.3201409361	1.785038477	4.498146830

Tab. 2.1: Max. absolutní chyba pro prvních 10 aproximací funkce $sin(x)$ na $\langle 0, 2\pi\rangle$

n	max. rel. chyba	bod jejího nabývání	n	max. rel. chyba	bod jejího nabývání
1	1	0	11	0.3476247950	3.141592653
2	1	0	12	0.3248363216	3.141592653
3	0.7932523629	3.141592653	13	0.3048427601	3.141592653
4	0.6816912965	3.141592653	14	0.2871607840	3.141592652
5	0.5992568804	3.141592654	15	0.2714125403	3.141592653
6	0.5348162337	3.141592653	16	0.2572975254	3.141592653
7	0.4828933840	3.141592653	17	0.2445751391	3.141592652
8	0.4401305748	3.141592653	18	0.2330489883	3.141592651
9	0.4042960523	3.141592653	19	0.2225584757	3.141592647
10	0.3738344232	3.141592653	20	0.2129702123	3.141592650

Tab. 2.2: Max. relativní chyba pro prvních 20 aproximací funkce $sin(x)$ na $\langle 0, 2\pi\rangle$

ε	0.1	0.09	0.08	0.07	0.06	0.05	0.04	0.03	0.02	0.01
n	47	52	59	68	80	96	121	162	244	491

Tab. 2.3: Zjištěné velikosti n v závislosti na voleném ε pro $sin(x)$ na $\langle 0, 2\pi\rangle$

$sin(2x)$ na $\langle 0, \pi\rangle$

Velikost maximální absolutní i relativní chyby n-tého operátoru této funkce je na daném intervalu stejná jako u n-tého operátoru funkce $sin(x)$ na dvojnásobném intervalu (viz. tabulky 2.4, 2.5). Hodnoty bodů, v nichž jsou chyby největší, jsou kvůli poloviční délce intervalu také zhruba poloviční.

n	max. abs. chyba	body jejího nabývání	
1	1	2.356194490	0.7853981634
2	1	2.356194490	0.7853981634
3	0.7580898803	2.324127189	0.8174654642
4	0.6295086681	2.299743616	0.8418490372
5	0.5410220675	2.284040745	0.8575519086
6	0.4750474180	2.272995535	0.8685971187
7	0.4236516676	2.264761411	0.8768312425
8	0.3823878048	2.258370087	0.8832225667
9	0.3484933167	2.253258195	0.8883344582
10	0.3201409361	2.249073415	0.8925192383

Tab. 2.4: Max. absolutní chyba pro prvních 10 aproximací funkce $sin(2x)$ na $\langle 0, \pi \rangle$

Algoritmus pro zjištění nejmenšího potřebného počtu aproximací vzhledem k maximální velikosti relativní chyby je téměř stejný jako u funkce $sin(x)$ (obr. 2.1). Je potřeba jen upravit interval $\langle ai, bi \rangle$, na němž se provádí hledání – lze zvolit např.$\langle 1.4, 1.6 \rangle$.
Protože vyšetřujeme operátor definovaný pouze na polovičním intervalu, jsou výpočty o něco rychlejší a lze jich provést více (u $sin(x)$ nedokázal *maple* pomocí funkce `infnorm(...)` spočíst maximální relativní chybu pro větší než cca 550-tou aproximaci, v případě $sin(2x)$ to šlo ještě pro cca 1100-tou aproximaci). Díky tomu lze v případě některých malých ε určit minimální potřebné n i pro funkci $sin(x)$.

n	max. rel. chyba	bod jejího nabývání	n	max. rel. chyba	bod jejího nabývání
1	1	0	11	0.3476247950	1.570796327
2	1	0	12	0.3248363216	1.570796327
3	0.7932523629	1.570796327	13	0.3048427601	1.570796326
4	0.6816912965	1.570796327	14	0.2871607840	1.570796326
5	0.5992568804	1.570796327	15	0.2714125403	1.570796326
6	0.5348162337	1.570796327	16	0.2572975254	1.570796326
7	0.4828933840	1.570796327	17	0.2445751391	1.570796326
8	0.4401305748	1.570796327	18	0.2330489883	1.570796325
9	0.4042960523	1.570796327	19	0.2225584757	1.570796324
10	0.3738344232	1.570796327	20	0.2129702123	1.570796325

Tab. 2.5: Max. relativní chyba pro prvních 20 aproximací funkce $sin(2x)$ na $\langle 0, \pi \rangle$

ε	0.1	0.09	0.08	0.07	0.06	0.05	0.04	0.03
n	47	52	59	68	80	96	121	162
ε	0.02	0.01	0,009	0,008	0,007	0,006	0,005	
n	244	491	546	614	702	820	984	

Tab. 2.6: Zjištěné velikosti n v závislosti na voleném ε pro $sin(2x)$ na $\langle 0, \pi \rangle$

$cos(x)$ **na** $\langle 0, 2\pi \rangle$

Absolutní chyba je ve všech případech největší v okolí bodu π. Maximální relativní chyba se špatně určuje, protože fce $cos(x)$ protíná osu x v jiných místech než její operátor na intervalu $\langle 0, 2\pi \rangle$. Proto dosahuje maximum chyby velmi velikých hodnot (v bodech $\pi/2$ a $3/2\pi$ je rel. chyba v podstatě nekonečná).
Při vyšetřování relativní chyby za použití funkce `infnorm(...)` vycházejí pro jednotlivé aproximace různé výsledky v závislosti na rozmezí intervalu, na němž zkoumání chyby probíhá, a to přesto, že bod nabývání maxima této chyby na intervalu $\langle 0, 2\pi \rangle$ vždy ve zkoumaném intervalu leží (viz. tabulky 2.8 a 2.9). Taková situace u jiných aproximovaných funkcí nenastává, je asi způsobená velikostí chyby[1].

n	max. abs. chyba	bod jejího nabývání
1	2	3.141592654
2	1	3.141592651
3	0.8750000000	3.141592648
4	0.7500000000	3.141592659
5	0.6534321893	3.141592649
6	0.5781250000	3.141592650
7	0.5180871660	3.141592648
8	0.4692099571	3.141592650
9	0.4286893131	3.141592656
10	0.3945709503	3.141592660

Tab. 2.7: Max. absolutní chyba pro prvních 10 aproximací funkce $cos(x)$ na $\langle 0, 2\pi \rangle$

Obecně se tedy funkce $cos(x)$ nedá dobře aproximovat pomocí Bernsteinova operátoru na celém intervalu $\langle 0, 2\pi \rangle$. Můžeme vyšetřit absolutní chybu (tab. 2.10), ale také můžeme

[1] při použití funkce maximize(...) vychází pro n-tou aproximaci na intervalu $\langle 0, 2\pi \rangle$ odhad max. rel. chyby ∞/π^n

zkusit vyšetřit aproximace alespoň na intervalu $\langle \pi/2+0.01,\ 3/2\pi - 0.01\rangle$[2]. Získané výsledky jsou uvedeny v tabulce 2.11.

	vyšetřováno na $\langle 0, \pi)$		vyšetřováno na $\langle \pi, 2\pi\rangle$	
n	max. abs. chyba	bod jejího nabývání	max. abs. chyba	bod jejího nabývání
1	$0.4868073645 \cdot 10^{10}$	1.570796327	$0.1627232755 \cdot 10^{10}$	4.712388981
2	338.7186976	1.571535891	$0.4079342792 \cdot 10^{9}$	4.712388981
3	347.6029880	1.571246666	$0.2555904914 \cdot 10^{9}$	4.712388981
4	451.7411935	1.570554509	$0.1792297255 \cdot 10^{9}$	4.712388981
5	182.4839184	1.571239245	$0.1322817983 \cdot 10^{9}$	4.712388981
6	106.1747778	1.570216971	$0.1015411779 \cdot 10^{9}$	4.712388981
7	105.0728401	1.571262506	$0.8035586486 \cdot 10^{8}$	4.712388981
8	70.91669689	1.571356227	$0.6510517659 \cdot 10^{8}$	4.712388981
9	62.50211241	1.571321075	$0.5390279247 \cdot 10^{8}$	4.712388981
10	54.05564493	1.5702923620	$0.4530647131 \cdot 10^{8}$	4.712388981

Tab. 2.8: Max. rel. chyba pro prvních 10 aproximací funkce $cos(x)$ na $\langle 0, 2\pi\rangle$ šetřená na oddělených intervalech

n	max. rel. chyba	bod jejího nabývání
1	$0.4859637446 \cdot 10^{10}$	1.570796327
2	206.4746504	4.711174166
3	151.8316897	4.711355510
4	96.43697871	4.713516568
5	75.77440764	4.713445854
6	50.26567339	4.713607154
7	410710.3609	4.712389099
8	$0.1700517320 \cdot 10^{7}$	4.712389004
9	$0.1273527223 \cdot 10^{7}$	4.712389006
10	$0.1565604671 \cdot 10^{7}$	4.712388963

Tab. 2.9: Max. rel. chyba pro prvních 10 aproximací funkce $cos(x)$ na $\langle 0, 2\pi\rangle$ vyšetřovaná na $\langle 0, 2\pi\rangle$

[2]Při kontrolách bylo ověřeno, že rel. chyba na tomto intervalu byla vždy větší než na intervalech $\langle 0, \pi/2 - 0.01\rangle$ a $\langle 3/2\pi + 0.01, 2\pi\rangle$

ε	0.1	0.09	0.08	0.07	0.06	0.05	0.04	0.03	0.02	0.01
n	47	53	60	69	80	97	121	163	245	492

Tab. 2.10: Absolutní chyba: zjištěné velikosti n v závislosti na voleném ε pro $cos(x)$ na $\langle 0, 2\pi \rangle$

ε	0.1	0.09	0.08	0.07	0.06	0.05	0.04	0.03	0.02
n	82	88	95	104	116	131	154	190	259

Tab. 2.11: Zjištěné velikosti n v závislosti na voleném ε pro $cos(x)$ na $\langle 0, 2\pi \rangle$ vyšetřované na $\langle \pi/2+0.01,\ 3/2\pi - 0.01 \rangle$

$ln(x)$ na $\langle 1, 10 \rangle$

Bod, v němž se nabývá maxima absolutní chyby, se při použití operátoru $B_n(x, ln)$ se zvětšujícím n na číselné ose posouvá směrem doleva (viz. tab. 2.12), stačí proto vyšetřovat pouze body na intervalu např. $\langle 1, 2.15 \rangle$.

n	max. abs. chyba	bod jejího nabývání
1	0.6190349202	3.908656547
2	0.3961267139	3.115008296
3	0.2921148855	2.760566830
4	0.2310019972	2.555622501
5	0.1906824494	2.421251989
6	0.1620969734	2.326237196
7	0.1407971586	2.255554367
8	0.1243321682	2.201017445
9	0.1112380434	2.157742095
10	0.1005859159	2.122636051

Tab. 2.12: Max. absolutní chyba pro prvních 10 aproximací funkce $ln(x)$ na $\langle 1, 10 \rangle$

Relativní chyba je ve všech deseti[3] případech největší v bodě 1, kde je funkce ln nulová (viz. tab. 2.13). Stačí tedy zkoumat pouze velikost relativní chyby v tomto bodě.
Pro hledání hodnot n pro zadané ε lze použít pozměněnou verzi algoritmu, v níž se bude vyšetřovat přímo limita relativní chyby v bodě 1 (obr. 2.2).

[3] Zkoumáno bylo prvních sto případů, ve všech byla relativní chyba největší v bodě 1

n	max. rel. chyba v bodě 1
1	0.7441572119
2	0.6211670906
3	0.5379018796
4	0.4761533350
5	0.4279892127
6	0.3891395121
7	0.3570277764
8	0.3299806201
9	0.3068528194
10	0.2868290154

Tab. 2.13: Relativní chyba v bodě 1 pro prvních 10 aproximací funkce $ln(x)$ na $\langle 1, 10 \rangle$

```
k1:=100: l:=1: ad:=1: eps:=0.1:
while k1>=1 do
  n:=l:
  while
   limit(evalf((f(x)-Bnf(n,x,a,b))/f(x)),x=1,right)*ad > eps*ad
  do n:=n+(ad*k1) end do;
  if k1>=10
   then k1:=k1/10;
        l:=n-(5*k1*ad);
        if limit(evalf((f(x)-Bnf(l,x,a,b))/f(x)),x=1,right)>eps
          then ad:=1; l:=l+k1
          else ad:=-1; l:l-k1 fi
   else k1:=0 fi;
end do; if ad=-1 then n:=n+1 fi;
```

Obr. 2.2: Algoritmus pro zjištění nejmenšího n takového, že relativní chyba n-té aproximace je menší nebo rovna epsilon

ε	0.1	0.09	0.08	0.07	0.06	0.05	0.04	0.03	0.02	0.01
n	40	45	51	59	70	85	107	145	220	445

Tab. 2.14: Zjištěné velikosti n v závislosti na voleném ε pro funkci $ln(x)$ na $\langle 1, 10 \rangle$

$exp(x)$ **na** $\langle 0, 10\rangle$

Bod nabývání maxima absolutní chyby operátoru se pro vyšší aproximace na číselné ose posouvá od bodu 7.69 směrem k pravé hranici intervalu (viz. tab. 2.15).

n	max. abs. chyba	bod jejího nabývání
1	14752.26830	7.697356318
2	11213.84523	8.185009384
3	8877.818364	8.431751980
4	7274.865029	8.578641476
5	6132.582059	8.674532134
6	5287.107004	8.741419568
7	4640.031230	8.790510698
8	4130.632846	8.827965728
9	3720.065587	8.857428722
10	3382.566722	8.881178270

Tab. 2.15: Max. absolutní chyba pro prvních 10 aproximací funkce $exp(x)$ na $\langle 0, 10\rangle$

Relativní chyba je nejprve největší v bodě 1, postupně je ale jejího maxima nabýváno v intervalu (4.5, 5) [4] (viz. tab. 2.16).

n	max. rel. chyba	bod jejího nabývání	n	max. rel. chyba	bod jejího nabývání
1	809.6395673	0.9995791256	11	2.075768696	4.252660378
2	124.8938668	1.932177746	12	1.806034343	4.313464253
3	37.43778929	2.630074043	13	1.595394994	4.365209144
4	16.93026444	3.105748921	14	1.426866866	4.409765119
5	9.722809863	3.434825581	15	1.289285058	4.448518680
6	6.445488977	3.671440026	16	1.175041832	4.482527958
7	4.681906170	3.848148379	17	1.078792832	4.512609356
8	3.616912787	3.984490459	18	0.9966840713	4.539403000
9	2.918497977	4.092585744	19	0.9258724221	4.563416298
10	2.431562219	4.180236259	20	0.8642183412	4.585059621

Tab. 2.16: Max. relativní chyba pro prvních 20 aproximací funkce $exp(x)$ na $\langle 0, 10\rangle$

[4] Při nejvyšší prováděné aproximaci byla rel. chyba největší v bodě 4.98681

Pro hledání hodnot n pro zadané ε je vhodné použít stejný algoritmus, jako u funkce $sin(x)$ (obr. 2.1), pouze s obměnou hodnot proměnných určujících hranice intervalu, na němž stačí relativní chybu vyšetřovat (v tomhle případě stačil interval $\langle 4.9, 5\rangle$[5]).

ε	0.1	0.09	0.08	0.07	0.06	0.05	0.04	0.03	0.02
n	132	146	163	185	215	257	319	423	632

Tab. 2.17: Zjištěné velikosti n v závislosti na voleném ε pro $exp(x)$ na $\langle 0, 10\rangle$

$exp(x)$ **na** $\langle 0, 1\rangle$

Protože funkce $exp(x)$ nabývá na intervalu $\langle 0, 10\rangle$ hodnot ve velkém rozmezí, je zapotřebí řádově více aproximací pro dosažení stejné maximální relativní chyby než u ostatních vyšetřovaných funkcí (vyjma $cos(x)$ na intervalu $\langle 0, 2\pi\rangle$ a charakteristické funkce $\chi\langle -1, 1\rangle$ na $\langle -2, 2\rangle$). Zmenšíme-li pro tuto funkci zkoumaný interval, aproximační vlastnosti operátoru budou lepší – pouze ale ve smyslu velikosti rel. chyby. Množství aproximací, které půjdou provést, bude jen nepatrně vyšší.

n	max. abs. chyba	bod jejího nabývání
1	0.2118668325	0.5413247407
2	0.1080486739	0.5795524863
3	0.07240643266	0.5923957617
4	0.05443045137	0.5988175669
5	0.04360082224	0.6026684772
6	0.03636403515	0.6052340725
7	0.03118697897	0.6070656868
8	0.02730001684	0.6084391129
9	0.02427442482	0.6095068355
10	0.02185247478	0.6103605582

Tab. 2.18: Max. absolutní chyba pro prvních 10 aproximací funkce $exp(x)$ na $\langle 0, 1\rangle$

Funkce $exp(x)$ i její operátor nabývají na $\langle 0, 1\rangle$ pouze malých hodnot a žádná z nich není rovna nule, proto maximální relativní chyba s přibývajícími aproximacemi velmi rychle klesá (viz tabulka 2.19). Už v první desítce aproximací lze získat odhady stupňů n

[5] Pro všechna vyšetřovaná ε jsou body nabývání max. rel. chyby větší než 4.9

pro všechna ε, která byla vyšetřována pro stejnou funkci na intervalu $\langle 0, 10\rangle$.

n	max. rel. chyba	bod jejího nabývání	n	max. rel. chyba	bod jejího nabývání
1	0.1312255035	0.4180236259	11	0.01142712871	0.4924252995
2	0.06426474932	0.4585059621	12	0.01047009395	0.4930563867
3	0.04248003621	0.4722736129	13	0.009660963200	0.4935903884
4	0.03171545886	0.4791884102	14	0.008967911722	0.4940481488
5	0.02530089278	0.4833444768	15	0.008367633550	0.4944448650
6	0.02104366048	0.4861175901	16	0.007842670064	0.4947920238
7	0.01801238452	0.4880993315	17	0.007379684476	0.4950983408
8	0.01574426554	0.4895860652	18	0.006968313271	0.4953706193
9	0.01398337345	0.4907426750	19	0.006600381410	0.4956142472
10	0.01257669398	0.4916680775	20	0.006269353641	0.4958335221

Tab. 2.19: Max. relativní chyba pro prvních 20 aproximací funkce $exp(x)$ na $\langle 0, 1\rangle$

ε	0.1	0.09	0.08	0.07	0.06	0.05	0.04	0.03	0.02
n	2	2	2	2	3	3	4	5	7
ε	0.01	0.009	0.008	0.007	0.006	0.005	0.004	0.003	0.002
n	13	14	16	18	21	26	32	42	63
ε	0.001	0.0009	0.0008	0.0007	0.0006	0.0005	0.0004	0.0003	0.0002
n	126	132	157	179	209	256	313	417	626

Tab. 2.20: Zjištěné velikosti n v závislosti na voleném ε pro $exp(x)$ na $\langle 0, 1\rangle$

$\chi\langle -1, 1\rangle$ na $\langle -2, 2\rangle$

Charakteristickou funkci intervalu $\langle -1, 1\rangle$ v *maple* definujeme pomocí

```
f:=x->piecewise( x>=-1 and x<=1 , 1 ):
```

Absolutní chyba je v případě Bernsteinova operátoru prvního stupně největší na celém intervalu $\langle -1, 1\rangle$, u dalších operátorů se její maximum pohybuje na nejbližším okolí bodů -1 a 1. Maximum chyby se s rostoucím stupněm operátoru pozvolna zmenšuje (dochází ale ke skokům, kdy max. chyba vzroste), až začne po zhruba stovce aproximací dosahovat hodnot pouze o málo větších než 0.5 a pokles přestane. Chyba je největší

n	vyšetřováno na $\langle -2, 0)$		vyšetřováno na $\langle 0, 2\rangle$	
	max. abs. chyba	bod jejího nabývání	max. abs. chyba	bod jejího nabývání
1	1	-0.9990000000	1	0
2	0.6247511190	-0.9990039801	0.6242521190	0.9970039880
3	0.5613778395	-1.002987964	0.5621292680	1.000988130
4	0.6784684895	-1.002995463	0.6792828485	1.000995493
5	0.6479717683	-0.9990062741	0.6470349119	0.9970063094
6	0.5380194880	-0.9990287541	0.5368784809	0.9970295772
7	0.5518773638	-1.002977041	0.5531092766	1.000977588
8	0.6306797346	-1.002990610	0.6319229271	1.000990716
9	0.6013374128	-0.9990133861	0.5999534520	0.9970135658
10	0.5253016139	-0.9990543545	0.5238094626	0.9970574389

Tab. 2.21: Max. absolutní chyba pro prvních 10 aproximací funkce $\chi\langle -1, 1\rangle$ na $\langle -2, 2\rangle$

v bodech "skoku" funkce, kde se musí operátor v jednom místě přibližovat nule, vzápětí už ale musí nabývat hodnoty 1.
U operátoru prvního stupně má max. relativní chyba velikost 1, ve všech ostatních případech nemá cenu ji vyšetřovat. Jak již bylo řečeno, operátor na okolí bodů "skoku" nabývá nenulových hodnot a relativní chyba je proto v těchto místech nekonečně velká.

2.3 Závěr

Je-li funkce na uzavřeném intervalu spojitá, Bernsteinovy polynomiální operátory konvergují k této funkci ve smyslu absolutní chyby stejnoměrně. Avšak tato aproximace je obecně velmi pomalá (uvažujeme-li funkce, které nejsou konstantní ani lineární), jelikož je třeba polynomů vysokého stupně, aby chyba (absolutní i relativní) byla malá. To je ale výpočetně náročné. V případě, že je určující relativní chyba, nemusí u některých funkcí při praktickém řešení k vhodné aproximaci vůbec docházet (když se nulové body funkce a jejího operátoru liší i pro velmi velké stupně polynomů).
V případě nespojitých funkcí není aproximace pomocí těchto operátorů ve smyslu relativní chyby vůbec vhodná. Dalo by se uvažovat o případech, kdy by byly aproximovány jednotlivé spojité části funkce na odpovídajících intervalech, v této práci jsme ale zkoumali aproximaci funkce na "celém" intervalu, tedy včetně bodů nespojitosti.

Literatura

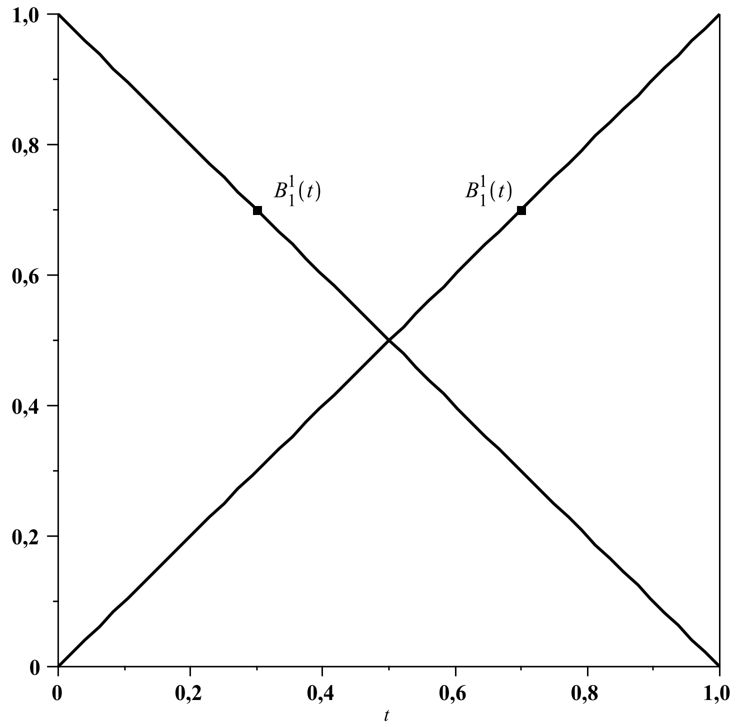
[1] Cohen E., Riesenfeld R. F., Elber G.: *Geometric modeling with splines*, A K Peters, Ltd., Natick, 2001.

[2] Lorentz G. G.: *Bernstein polynomials*, Chelsea publishing Company, New York, 1986.

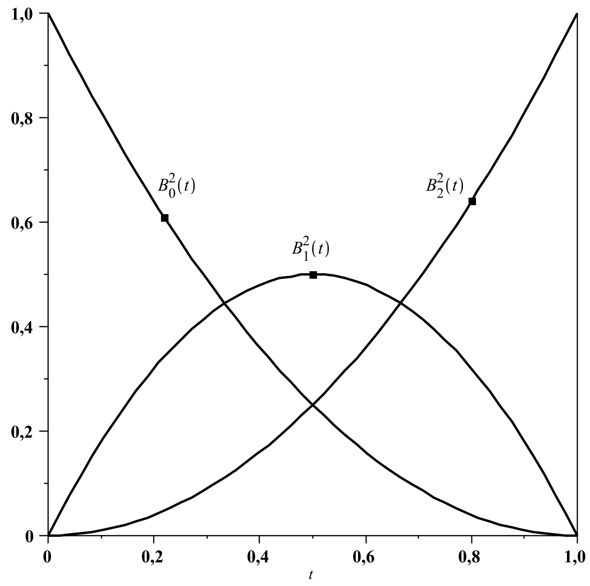
[3] Najzar K.: *Základy teorie splinů*, Nakladatelství Karolinum, Praha (2006) 146–147, 160–161.

Příloha

Bernsteinovy polynomy 1., 2. a 3. stupně

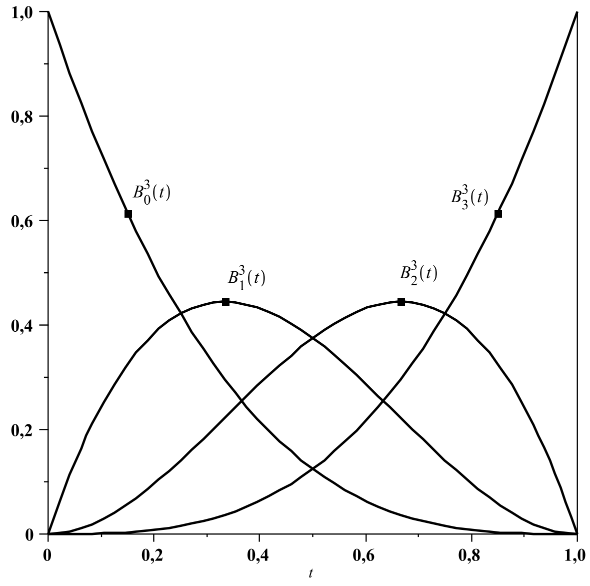


Bernsteinovy polynomy 1. stupně
$B_0^1(t) = 1 - t, \quad B_1^1(t) = t$



Bernsteinovy polynomy 2. stupně

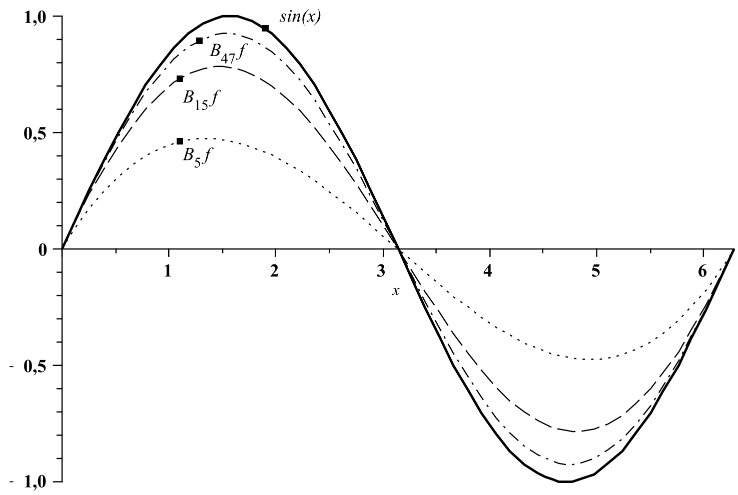
$$B_0^2(t) = (1-t)^2, \quad B_1^2(t) = 2t(1-t), \quad B_2^2(t) = t^2$$



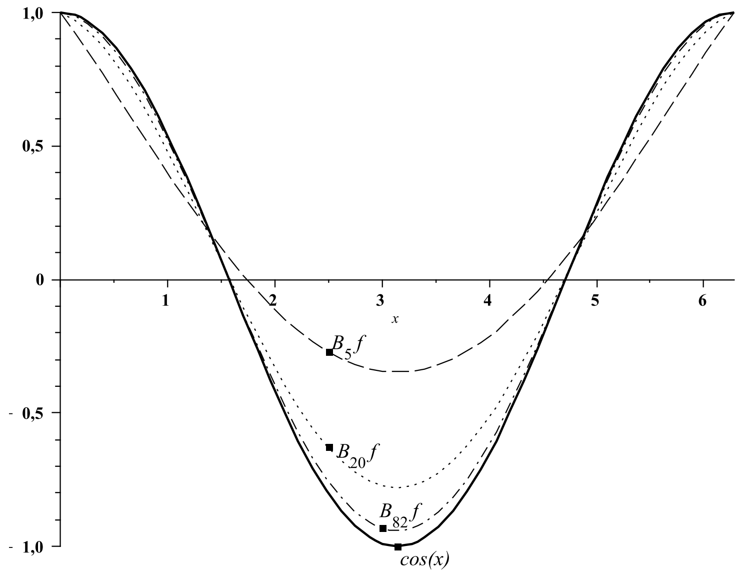
Bernsteinovy polynomy 3. stupně

$$B_0^3(t) = (1-t)^3, \quad B_1^3(t) = 3t(1-t)^2, \quad B_2^3(t) = 3t^2(1-t), \quad B_3^3(t) = t^3$$

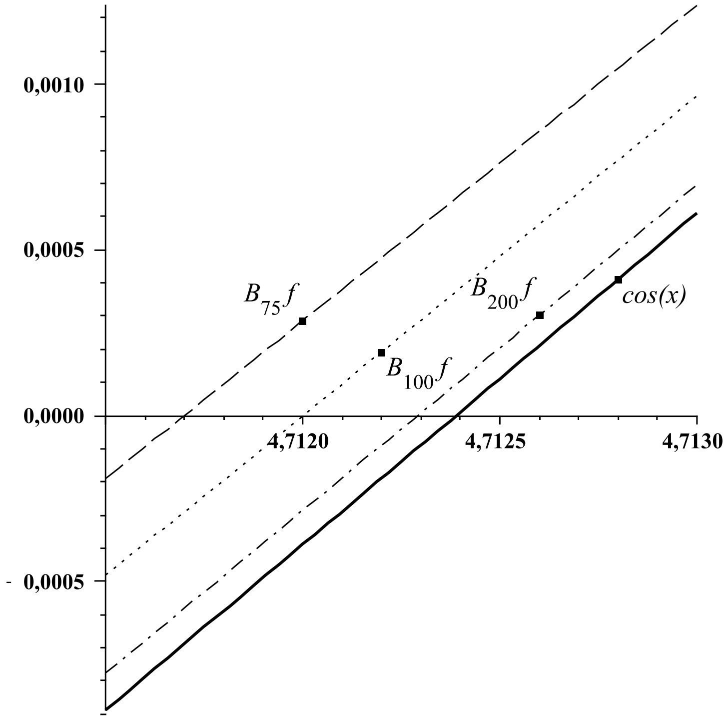
Grafy funkcí a některých jejich operátorů



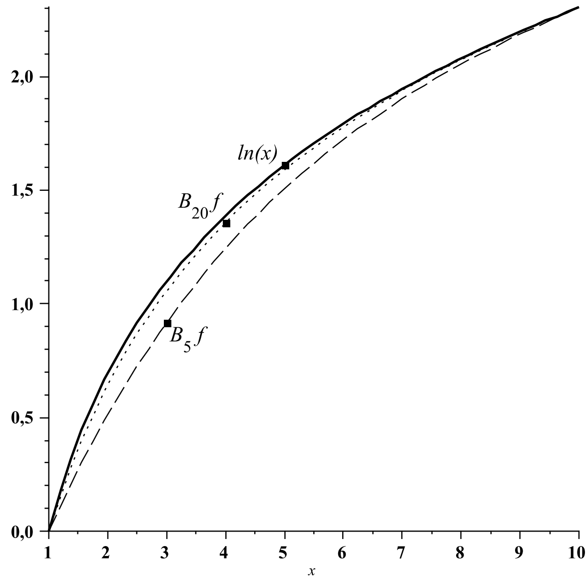
Funkce $sin(x)$ a její 5., 15. a 47. operátor na $\langle 0, 2\pi \rangle$



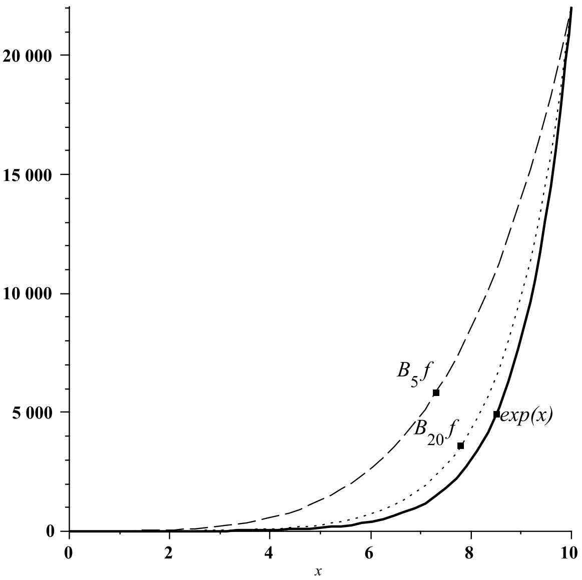
Funkce $cos(x)$ a její 5., 20. a 82. operátor na $\langle 0, 2\pi \rangle$



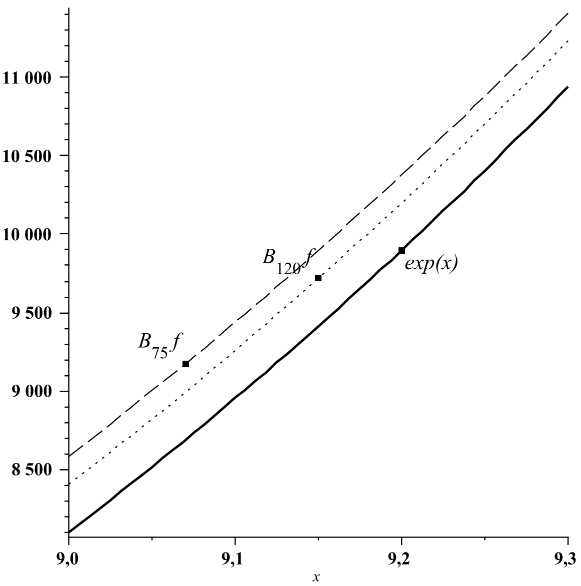
Funkce $cos(x)$ a její 75., 100. a 200. operátor na $\langle 0, 2\pi \rangle$
na okolí bodu $3/2\pi$



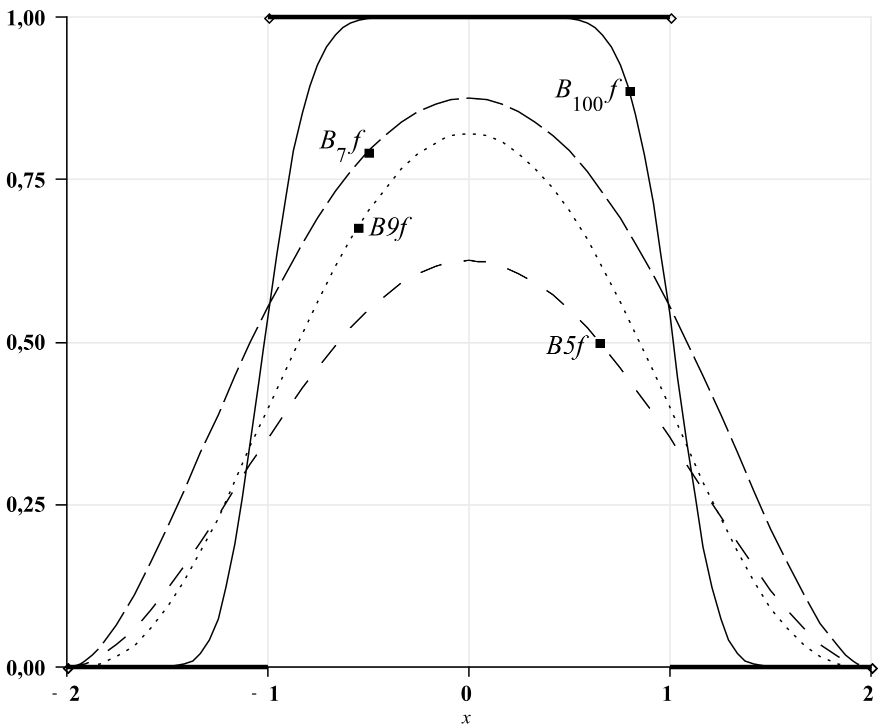
Funkce $ln(x)$ a její 5. a 20. operátor na $\langle 1, 10 \rangle$



Funkce $exp(x)$ a její 5. a 20. operátor na $\langle 0, 10 \rangle$



Funkce $exp(x)$ a její 75. a 120. operátor na $\langle 0, 10 \rangle$
na intervalu nabývání jejich maximální abs. chyby



Funkce $\chi\langle -1, 1\rangle$ a její 5., 7., 9. a 100. operátor na $\langle -2, 2\rangle$:
zde je na 7. a 9. operátoru vidět příklad *skoku* chyby,
kdy se max. abs. chyba zvětší