

Univerzita Karlova v Praze  
Matematicko-fyzikální fakulta

## BAKALÁŘSKÁ PRÁCE



Hana Matoušová

### Klasické a slabé řešení Burgersovy rovnice

Katedra numerické matematiky

Vedoucí bakalářské práce: Doc. RNDr. Jiří Felcman, CSc.

Studijní program: Obecná matematika

2007

Prohlašuji, že jsem svou bakalářskou práci napsala samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů. Souhlasím se zapůjčováním práce a jejím zveřejňováním.

V Praze dne 10.8.2007

Hana Matoušová

*Matoušová*

# Obsah

<b>1 Burgersova rovnice</b>	<b>5</b>
1.1 Úvod . . . . .	5
1.2 Odvození I . . . . .	5
1.3 Odvození II . . . . .	6
1.4 Klasické řešení . . . . .	7
1.5 Zobecněné řešení . . . . .	8
1.6 Příklady . . . . .	9
<b>2 Program na výpočet řešení Burgersovy rovnice</b>	<b>14</b>
2.1 Úvod . . . . .	14
2.2 Burgersa.m . . . . .	15
2.3 Burgersb.m . . . . .	19
2.4 Burgersc.m . . . . .	21
2.5 Popis programu . . . . .	22
2.6 Testy . . . . .	24
<b>3 Závěr</b>	<b>25</b>
<b>Literatura</b>	<b>26</b>

Název práce: Klasické a slabé řešení Burgersovy rovnice  
Autor: Hana Matoušová  
Katedra (ústav): Katedra numerické matematiky  
Vedoucí bakalářské práce: Doc. RNDr. Jiří Felcman, CSc.  
e-mail vedoucího: felcman@karlin.mff.cuni.cz

Abstrakt: Popsat význam Burgersovy rovnice jako nejjednodušší nelineární hyperbolické rovnice používané jako testovací příklad pro řadu numerických metod (metoda konečných objemů, nespojitá Galerkinova metoda, metody typu moving mesh). Napsat programový modul umožňující vizualizaci řešení v čase a vytvoření výstupních datových souborů obsahujících hodnoty po částech hladkého slabého řešení v daných diskrétních bodech pro danou počáteční podmínku a daný čas.

Klíčová slova: Burgersova rovnice, metoda charakteristik, klasické řešení, zobecněné řešení, Matlab

Title: Classical and weak solution of Burgers equation  
Author: Hana Matoušová  
Department: Department of Numerical Mathematics  
Supervisor: Doc. RNDr. Jiří Felcman, CSc.  
Supervisor's e-mail address: felcman@karlin.mff.cuni.cz

Abstract: In the present work we study Burgers equation as a simplest non-linear hyperbolic equation which is used for testing of numerical methods (finite volume method, discontinuous Galerkin method, moving mesh methods). It was written a Matlab programme for visualization of solution. It produces a graph and output files with a values of classical solution and weak solution for required values of time, space and initial condition.

Keywords: Burgers equation, method of characteristics, classical solution, weak solution, Matlab

# Kapitola 1

## Burgersova rovnice

### 1.1 Úvod

Burgersova rovnice je základní parciální diferenciální rovnice tvaru:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = v \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (1.1)$$

Neznámá  $u(x, t)$  má fyzikální význam rychlosti,  $v$  je viskozita. Pokud  $v = 0$ , pak mluvíme o nevazké Burgersově rovnici. Jde o nelineární hyperbolickou rovnici, která vznikne zjednodušením Eulerových rovnic proudění v jedno-rozměrném případě.

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (1.2)$$

Jméno nese po Johannesu Martinusovi Burgersovi (1895-1981), který uveřejnil rovnici tohoto tvaru ve svém článku v roce 1948, jenž byl věnován modelování turbulentních jevů. Rovnice se používá jako modelová rovnice v řadě oblastí fyziky a v dopravě.

Dále se rovnice používá v numerické matematice jako testovací příklad pro řadu numerických metod. Jde totiž o poměrně jednoduchou rovnici, jejíž řešení ale pro spojitě počáteční podmínky vykazuje nespojitost řešení.

### 1.2 Odvození I

Jako řadu jiných parciálních diferenciálních rovnic lze i Burgersovu rovnici odvodit z úvahy o zachování veličiny.

Mějme veličinu  $u(x, t)$ . Jako  $U(t) = \int_b^a u(x, t) dx$  si označíme celkovou hodnotu této veličiny na intervalu  $x \in (a, b)$  v čase  $t > 0$ . Úvaha v tomto případě zní, že časová změna  $U(t)$  na intervalu  $(a, b)$  je rovna toku veličiny  $f(u)$  skrze hranici, tedy body  $a$  a  $b$ :

$$\frac{dU}{dt}(t) = -f(u(b, t)) + f(u(a, t)). \quad (1.3)$$

Předpokládáme-li, že  $f$  a  $u$  jsou dostatečně hladké funkce, dostaneme vztah

$$\int_a^b \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) + \frac{\partial f(u)}{\partial x}(x, t) dx = 0. \quad (1.4)$$

Přidáme-li navíc předpoklad o spojitosti integrandu, dostáváme

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u)}{\partial x} = 0. \quad (1.5)$$

Položíme-li  $f(u) = \frac{u^2}{2}$  ( $\frac{df}{du}(u) = u$ ), získáváme Burgersovu rovnici (1.2).

### 1.3 Odvození II

Burgersovu rovnici lze též odvodit zjednodušením Eulerových rovnic popisujících dynamiku plynu. Budeme uvažovat nevazké proudění dokonalého plynu a předpokládat, že nedochází k žádnému vedení tepla (adiabatické proudění). V 1D mají rovnice tři složky a lze je zapsat ve tvaru

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ E \end{pmatrix} + \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ (E + p)u \end{pmatrix} = 0,$$

kde  $\rho = \rho(x, t)$  je hustota plynu,  $u = u(x, t)$  je rychlost toku plynu,  $E = E(x, t)$  je energie a  $p = p(x, t)$  je tlak plynu. Vzhledem k tomu, že uvažujeme izotermální procesy, můžeme psát  $p = a^2 \rho$ , kde  $a$  je konstanta.

První řádek odpovídá rovnici kontinuity, vyjadřující zákon zachování hmotnosti

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} = 0$$

Druhý je momentová věta

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} + \underbrace{u \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho u \frac{\partial u}{\partial x}}_{=0 \quad (RK)} + \rho u \frac{\partial u}{\partial x} + a^2 \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0,$$

kde druhý a třetí člen vypadne díky rovnici kontinuity a prostorovou derivaci hustoty neuvažujeme. Vydělením rovnice  $\rho$  dostáváme

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$

Tutéž rovnici můžeme zapsat i jako

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial(\frac{1}{2}u^2)}{\partial x} = 0.$$

## 1.4 Klasické řešení

Řešme Cauchyovu úlohu pro rovnici (1.2) s počáteční podmínkou

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad \varphi \in C^1. \quad (1.6)$$

Rovnice (1.2) je kvazilineární rovnice 1.řádu. Klasické řešení je takové řešení, které splňuje rovnici (1.2) bodově. Předpokládejme, že takové řešení  $u(x, t)$  existuje a je třídy  $C^1$ . Dospějeme k němu linearizací rovnice a metodou charakteristik.

Řešme soustavu obyčejných diferenciálních rovnic, tzv. charakteristický systém. Jeho řešením získáme charakteristiky, tj. křivky, podél níž je řešení konstantní.

$$\frac{dt}{ds} = 1, \quad \frac{dx}{ds} = u, \quad \frac{du}{ds} = 0$$

Charakteristikami jsou přímky tvaru

$$\{[x(t), t]; \quad x(t) = u \cdot t + x_0\}$$

kde  $t \in \mathbf{R}$  a  $x_0$  je konstanta.

Jejich směrnici je hodnota řešení  $u$ , které se podél této přímky šíří.

Geometrickou interpretací klasického řešení je, že bodem  $[x_0, 0]$  vedeme přímku  $x = \varphi(x_0) \cdot t + x_0$  a pro body ležící na této přímce položíme  $u(x, t) = \varphi(x_0)$ . To ale můžeme udělat pro ty body  $[x, t]$ , jimiž prochází pouze jedna charakteristika. V bodech, ve kterých se kříží charakteristiky, klasické řešení takto definovat nelze.

Na řešení se můžeme podívat ještě analyticky. Teorie řešení kvazilineárních rovnic nám řešení dává implicitně ve tvaru formule

$$F(x, t, u) = u - \varphi(x - u \cdot t) = 0 \quad (1.7)$$

Věta o implicitní funkci nám říká, že můžeme  $u = u(x, t)$  vyjádřit lokálně v okolí bodu  $[x_0, 0]$ , pokud jsou splněny tyto podmínky:

$$F(x, 0, \varphi(x)) = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial u}(x, 0, \varphi(x)) = 1.$$

Takto určené řešení splňuje rovnici (1.2) s podmínkou (1.6) v klasickém smyslu. Máme-li určit ty body, pro které lze řešení  $u = u(x, t)$  vyjádřit, podívejme se na derivaci (1.7)

$$\frac{\partial F}{\partial u}(x, t, u) = 1 + \varphi'(x - u \cdot t) \cdot t.$$

Vidíme, že je-li  $\varphi' \geq 0$  na celém  $\mathbf{R}$ , pak jsou splněny předpoklady věty o implicitní funkci a lze určit  $u = u(x, t)$  ze vztahu (1.7) v libovolném bodě  $[x, t]$ ,  $t > 0$ . V každém takovém bodě je totiž výraz  $1 + \varphi' \cdot t$  kladný.

Nastane-li však v nějakém bodě  $x_0$ , že  $\varphi'(x_0) < 0$ , pak výraz  $1 + \varphi'(x_0) \cdot t$  bude pro nějaké  $t = T$  roven 0 a nelze tedy větu použít. V tomto případě řešení opět nelze touto cestou definovat.

Platí, že pokud počáteční funkce  $\varphi(x)$  je klesající, neexistuje klasické řešení pro rovnici (1.2) a počáteční podmínkou (1.6) na celé polorovině  $t > 0$ .

## 1.5 Zobecněné řešení

Z předchozího víme, že v jistém čase  $T$  dojde ke křížení charakteristik. Klasické řešení tady nelze určit, proto je nutné definovat v jistém smyslu obecnější řešení. Musíme opustit myšlenku spojitosti řešení a vrátit se k výchozí formulaci úlohy.

Funkci nazveme zobecněným řešením, jestliže splňuje vztah (1.3).

Nepředpokládáme již spojitě řešení. Uvažujme tedy hladkou křivku  $x = s(t)$ ,  $t \geq T$ , v jejíž bodech má řešení  $u(x, t)$  skok. Napravo i nalevo od křivky funkce  $u(x, t)$  splňuje rovnici (1.2) v klasickém smyslu. Zobecněná řešení tedy budou hladká po částech. Tomuto jevu říkáme rázová vlna.

Vezměme  $a$  a  $b$  taková dvě čísla, že interval  $(a, b)$  obsahuje  $x = s(t)$  a opět si definujme celkovou hodnotu veličiny  $u(x, t)$  na  $(a, b)$

$$U(t) = \int_a^{s(t)} u(x, t) dx + \int_{s(t)}^b u(x, t) dx, \quad t > T.$$



Derivací  $U(x, t)$  a použitím vztahu (1.2) dojdeme k rovnici

$$-f(u(b, t)) + f(u(a, t)) = \int_a^{s(t)} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) dx + u_l(t) \frac{ds}{dt} + \int_{s(t)}^b \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) dx - u_r(t) \frac{ds}{dt}(t)$$

Neboť  $u(x, t)$  nalevo i napravo od křivky  $s(t)$  splňuje rovnici (1.2), můžeme tento vztah využít a dospějeme k formuli

$$f_r(t) - f_l(t) = (u_r(t) - u_l(t)) \cdot \frac{ds}{dt}(t),$$

kde  $u_r(t) = \lim_{x \rightarrow s(t)^+} u(x, t)$ ,  $u_l(t) = \lim_{x \rightarrow s(t)^-} u(x, t)$ ,  $f_r(t) = \lim_{x \rightarrow s(t)^+} f(u(x, t))$ ,  $f_l(t) = \lim_{x \rightarrow s(t)^-} f(u(x, t))$ . Skok v řešení  $u_r(t) - u_l(t)$  označíme jako  $[u(t)]$ , analogicky  $[f(t)]$ .

Právě odvozenou podmínku pro zobecněné řešení v bodě nespojitosti můžeme zapsat ve tvaru

$$\frac{[f(t)]}{[u(t)]} = \frac{ds}{dt}(t), \quad t > T. \quad (1.8)$$

To je takzvaná Rankin-Hugoniotova podmínka. Vyjadřuje závislost mezi velikostí skoku řešení a rychlostí jeho šíření v čase.

Zavedení pojmu zobecněného řešení umožňuje řešit některé počáteční úlohy, které nelze globálně řešit klasicky. Na druhou stranu zobecněná řešení jsou obecně nejednoznačná.

## 1.6 Příklady

Ukážeme si řešení pro tři konkrétní počáteční podmínky. Tyto příklady jsou trochu umělé kvůli nespojitosti počáteční podmínky, avšak často uváděné.

1) Mějme počáteční funkci

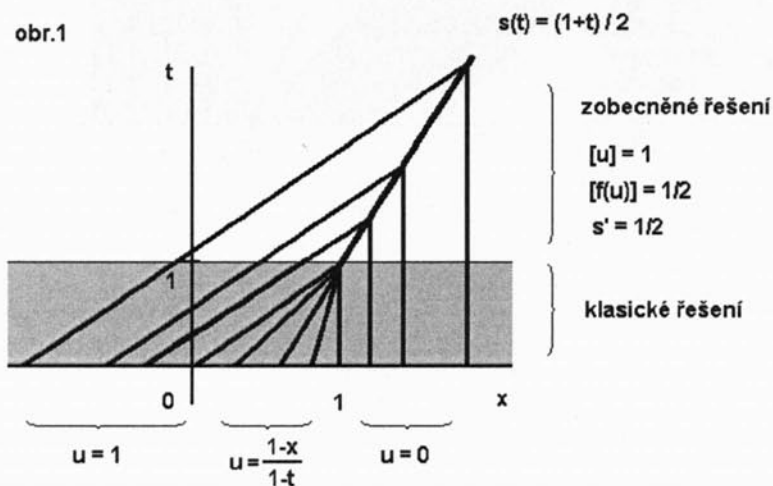
$$\varphi(x) = \begin{cases} 1, & x < 0 \\ 1 - x, & 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & x > 1. \end{cases} \quad (1.9)$$

Klasické řešení existuje pouze v pásu  $\{[x, t]; x \in \mathbf{R}, t \in \langle 0, 1 \rangle\}$ .

Pro  $t > 1$  položíme

$$u(x, t) = \begin{cases} 1, & x < \frac{1+t}{2} \\ 0, & x > \frac{1+t}{2} \end{cases}$$

Dodefinujeme-li touto funkcí klasické řešení, dostaneme zobecnění řešení Cauchyovy úlohy (1.9) na celé polorovině  $t \geq 0$ . Nespojitosť začíná v bodě  $[1, 1]$  a šíří se podél přímky  $s(t) = \frac{1+t}{2}$ ,  $t > 1$ . Rankin-Hugoniotova podmínka (1.8) je v tomto případě splněna:  $[u] = 1$ ,  $[f] = \frac{1}{2}$ ,  $s' = \frac{1}{2}$ .



2) Mějme jinou počáteční úlohu

$$\varphi(x_0) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$$

Metoda charakteristik neurčuje hodnoty řešení v úhlu

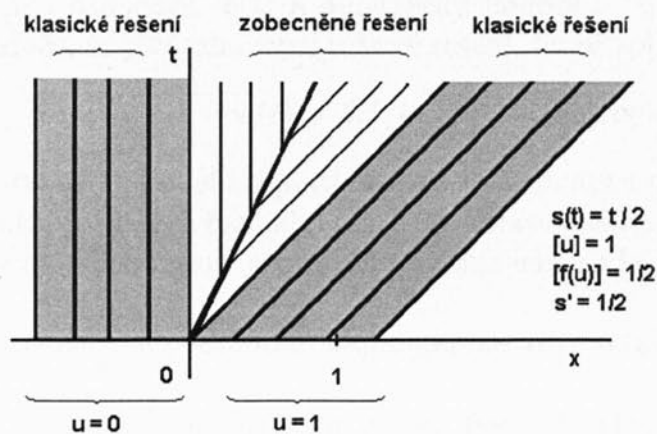
$$\{[x, t]; 0 < x < t, t > 0\}.$$

Dodefinujeme tedy

$$u_1(x, t) = \begin{cases} 0, & x < \frac{t}{2} \\ 1, & x > \frac{t}{2} \end{cases} \quad (1.10)$$

Toto dodefinování  $u_1(x, t)$  je zobecněním řešením, neboť  $u_1$  splňuje Rankin-Hugoniotovu podmínku (1.8):  $[u] = 1$ ,  $[f] = \frac{1}{2}$ ,  $s' = \frac{1}{2}$ .

obr.2

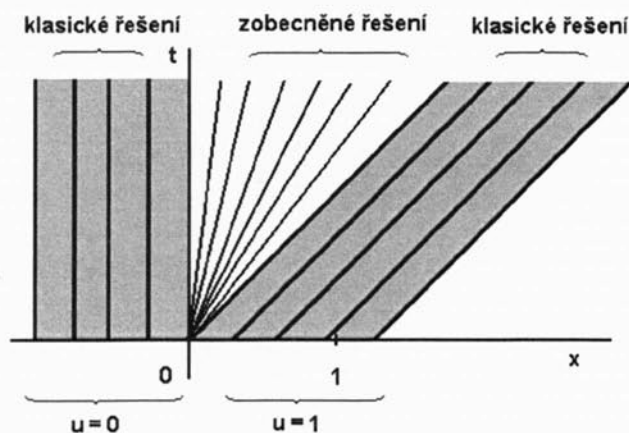


Můžeme ale dodefinovat i takto:

$$u_2(x, t) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{x}{t}, & 0 \leq x \leq t \\ 1, & t < x. \end{cases} \quad (1.11)$$

Jde rovněž o zobecněné řešení, neboť  $u_2(x, t)$  splňuje vztah (1.3).

obr.3



Chceme-li ze dvou řešení (1.10) a (1.11) vybrat takové, které má fyzikální smysl, musíme přidat nějakou doplňující podmínku. Vezměme bod ležící na

křivce nespojitosti. Hodnotu, která do tohoto bodu byla přinesena charakteristikou "zleva", označíme  $u_l(t)$  a analogicky hodnotu "zprava"  $u_r(t)$ . Z fyzikálního hlediska se jeví jako lepší takové řešení, které splňuje

$$u_l(t) > u_r(t). \quad (\text{entropická podmínka})$$

Křivka nespojitosti  $s(t)$ , podél níž platí Rankin-Hugoniotova podmínka i entropická podmínka, se nazývá fyzikální ráz. Toto zobecněné řešení je spojitým prodloužením klasického řešení, a proto ho považujeme za lepšího kandidáta na řešení.

Řešení (1.10) entropickou podmínku nespĺňuje, mluvíme o tzv. nefyzikálním rázu.

Entropická podmínka tedy jako vhodnější vidí řešení (1.11).

3) Nyní uvažujme tuto počáteční úlohu

$$\varphi(x_0) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & x > 1. \end{cases}$$

Řešení, které splňuje obě uvedené podmínky:

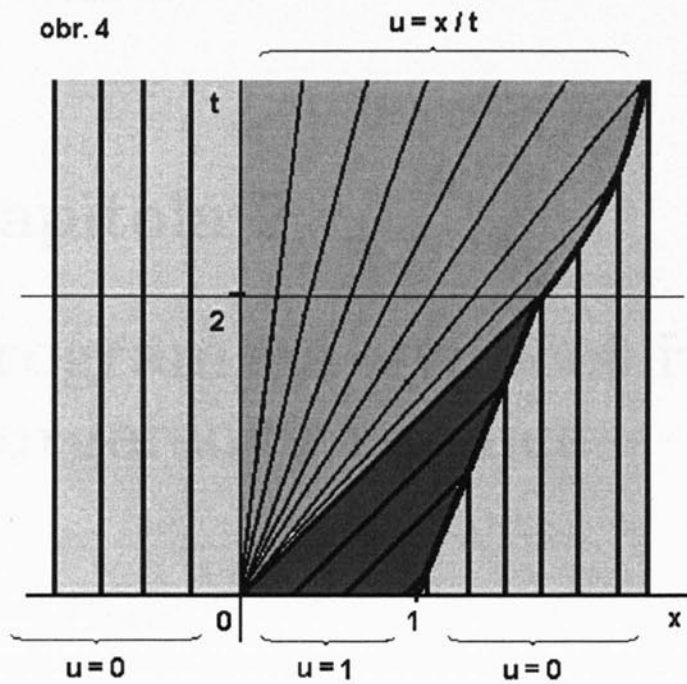
pro  $0 \leq t < 2$

$$u(x, t) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{x}{t}, & 0 < x < t \\ 1, & t < x < 1 + \frac{t}{2} \\ 0, & x > 1 + \frac{t}{2} \end{cases}$$

pro  $t \geq 2$

$$u(x, t) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{x}{t}, & 0 < x < \sqrt{2t} \\ 0, & x > \sqrt{2t}. \end{cases}$$

obr. 4



$$\left. \begin{aligned} s &= \sqrt{2t} \\ [u] &= s(t)/t \\ [f(u)] &= \frac{1}{2} \left( \frac{s(t)}{t} \right)^2 \\ s' &= 1/\sqrt{2t} \\ u_l &= x/t \\ u_r &= 0 \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} s &= 1 + t/2 \\ [u] &= 1 \\ [f(u)] &= 1/2 \\ s' &= 1/2 \\ u_l &= 1 \\ u_r &= 0 \end{aligned} \right\}$$

## Kapitola 2

# Program na výpočet řešení Burgersovy rovnice

### 2.1 Úvod

Program na výpočet přesného řešení Burgersovy rovnice je napsán v Matlabu. Po zadání vstupních parametrů vykreslí graf řešení pro zvolenou počáteční podmínku a vytvoří datový soubor s hodnotami řešení v zadaných bodech z intervalu  $(0, 2\pi)$  a pro zadané časy.

Řešení rovnice závisí na počáteční podmínce. Tu je třeba zadat v *f.m.* Zároveň s ní je ale nutné uvést i tvar rázové přímky v *raz.m.* Další vstupní parametry závisí na zvoleném režimu.

Burgersa.m vypíše hodnoty řešení v předem neznámých bodech a na jejich základě pak vykreslí graf řešení. Řešení se vypisují do souboru *resenia.txt*. Výběr bodů je dán počáteční podmínkou, resp. charakteristikami. V souboru *skokya.txt* lze najít body, ve kterých došlo ke skoku v řešení.

Burgersb.m vypíše řešení v předem zadaných bodech do *resenib.txt*. Tyto body jsou pro všechny časy stejné. Pro názornost vykreslí graf.

Burgersc.m vypíše řešení v předem zadaných bodech do *resenic.txt*. Tyto body mohou být v každém čase jiné. Opět vykreslí graf.

Vstupní data budou tvořit souřadnice, ve kterých jsme řešení spočetli pomocí nějaké numerické metody. Porovnáním výsledků spočtených metodou a přesného řešení získaného programem můžeme experimentálně ověřit přesnost metody.

Program není ošetřen co se týče formátu dat, nehlídá jejich správné zadání. Předpokládá rozumná data.

## 2.2 Burgersa.m

Tato verze programu slouží hlavně k vykreslení grafu řešení  $u$  v závislosti na prostorové souřadnici  $x$ , a to pro různé časy. Je zde graficky zpracován i skok v řešení.

Na začátku souboru *Burgersa.m* je nutné zadat tři parametry:

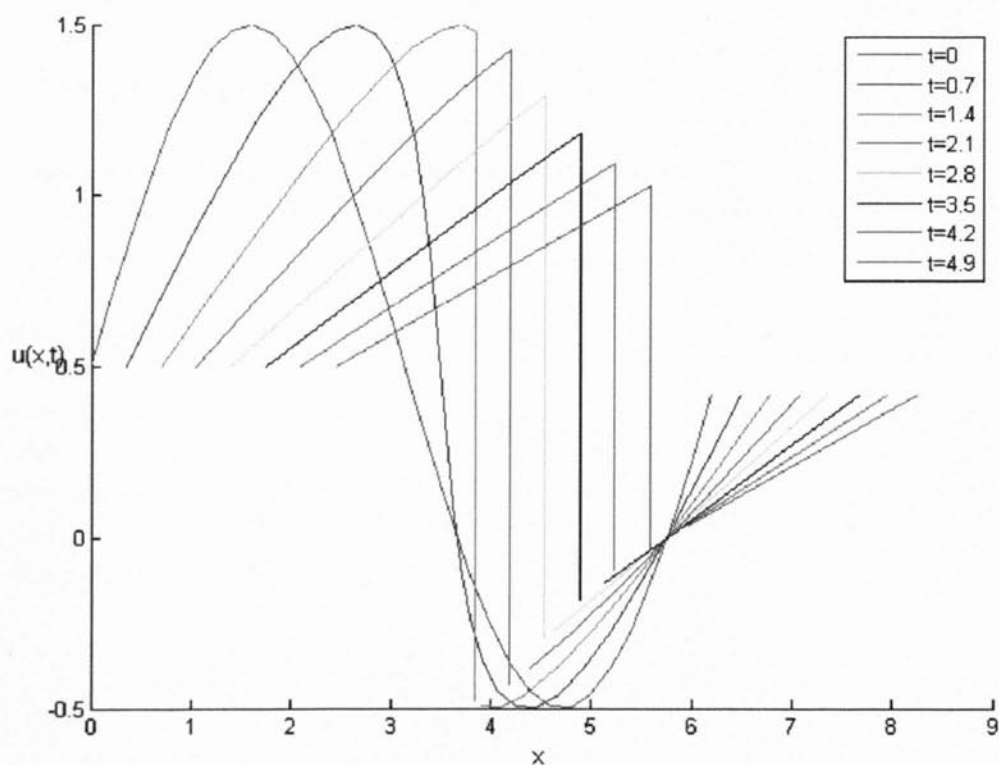
$t_2$  - určuje velikost intervalu  $(0, t_2)$ , na jakém se má řešení počítat,

$\tau$  - určuje časový krok; v jakých časových intervalech se má řešení počítat,

$h$  - prostorový krok; jak vzdalené od sebe mají být výchozí body charakteristik (fakticky určuje přesnost výpočtu; čím více charakteristik, tím přesnější bude graf).

Předpokládáme rovnoměrné dělení intervalu  $(0, 2\pi)$ .

Např. zadáním  $t_2 = 5$ ,  $\tau = 0.7$ ,  $h = 0.2$  při počáteční podmínce  $y = \sin(x) + \frac{1}{2}$  a rázové přímce  $y = \pi + \frac{1}{2}t$  získáme graf řešení a hodnoty řešení v časech  $t = 0, t = 0.7, \dots, t = 4.9$  (obr.1).



obr.1

### Výstup *resenia.txt*:

Reseni Burgersovy rovnice na intervalu  $(0, 2\pi) \times (0, 5)$ :

=====  
casovy krok=0.7, prostorovy krok=0.2

t = 0 :  
x        u  
0.0000  0.5000  
0.2000  0.6987  
0.4000  0.8894  
0.6000  1.0646

...  
...  
...

5.6000 -0.1313  
5.8000  0.0354  
6.0000  0.2206  
6.2000  0.4169

t = 0.7 :

x        u  
0.3500  0.5000  
0.6891  0.6987  
1.0226  0.8894  
1.3452  1.0646

...  
...

### Výstup *skokya.txt*:

Skoky v reseni Burgersovy rovnice na intervalu  $(0, 2\pi) \times (0, 5)$ :

=====  
x        u  
t = 1.4  
3.8416  1.4804

t = 1.4  
3.8416 -0.4804

t = 2.1  
4.1916  1.4288

t = 2.1  
4.1916 -0.4288

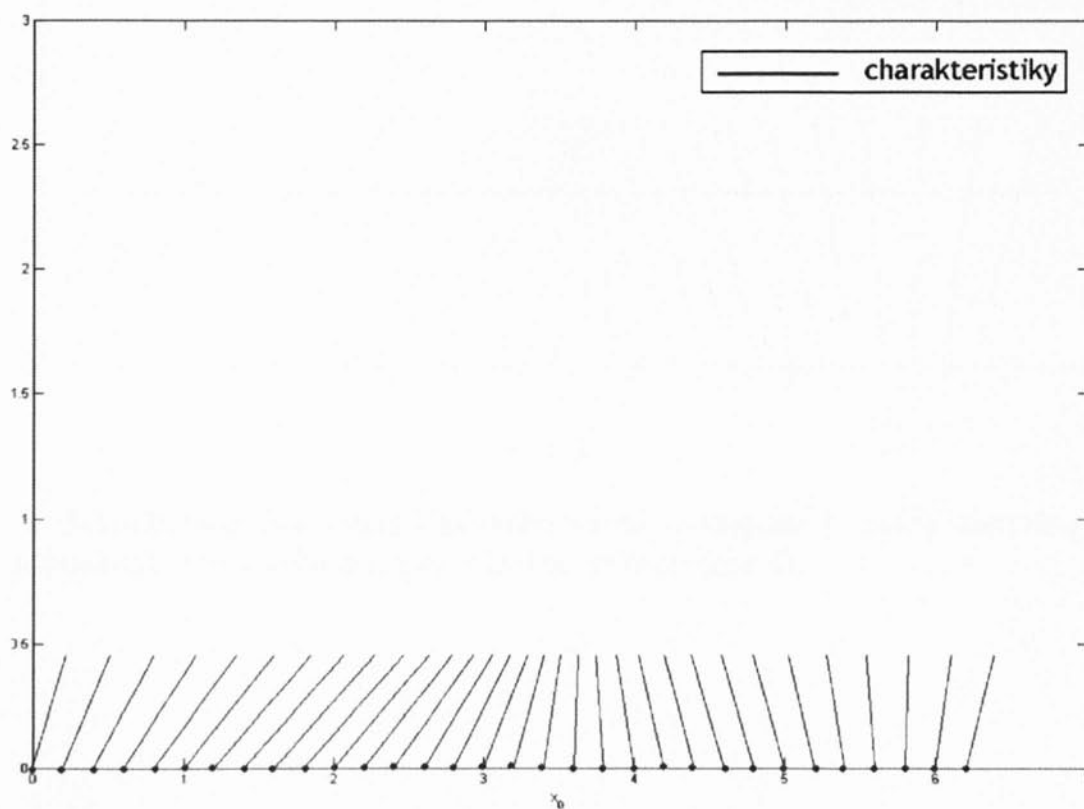
...  
...  
...

t = 4.9  
5.5916  1.0277

t = 4.9  
5.5916 -0.0277

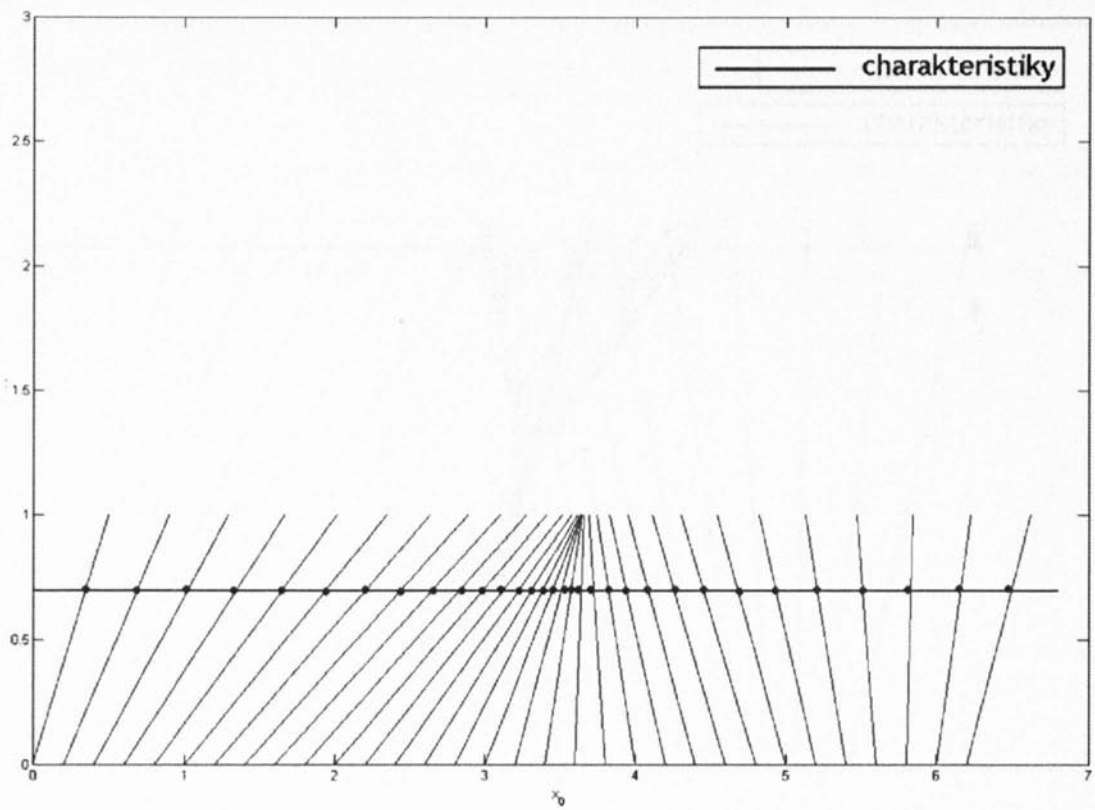


Výpočet probíhá tak, že uvažujeme jistý počet charakteristik (daný parametrem  $h$ ). Každá charakteristika je reprezentována svým výchozím bodem  $x_0$  a řešením  $u$ , které se podél ní šíří. V čase  $t = 0$  uvažujeme výchozí body  $x_0 = 0, h, 2h, \dots$  a řešení dané vztahem  $u = f(x_0)$ , kde  $f$  je počáteční funkce. V našem případě jako výchozí body bereme  $x_0 = 0, 0.2, 0.4, \dots, 6.2$ . Řešení na jednotlivých charakteristikách je dáno vztahem  $u = f(x_0) = \sin(x_0) + \frac{1}{2}$ . Na obr.2 jsou v čase  $t = 0$  vyznačeny výchozí body charakteristik.



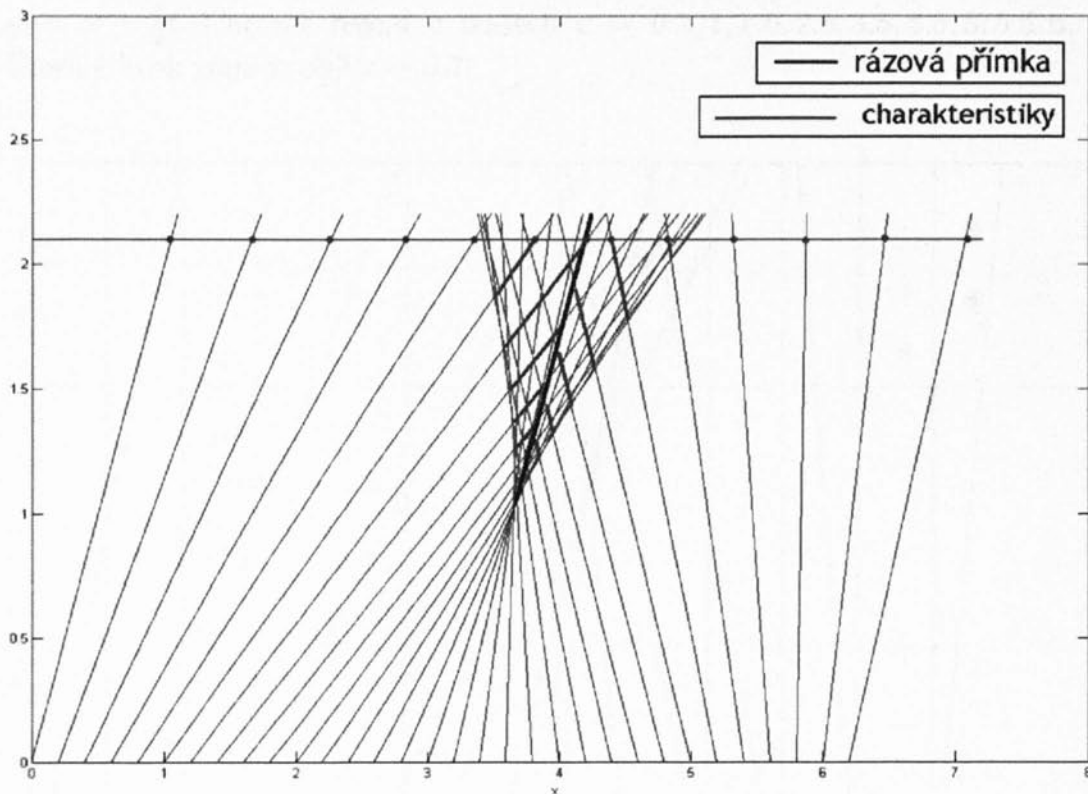
obr.2

Na charakteristikách se z výchozích bodů posuneme v čase o časový krok  $\tau$ . Získáme tím několik bodů (obr.3), u nichž si zaznamenáme souřadnici  $x$  a příslušnou hodnotu řešení  $u$ .



obr.3

Jakmile opustíme oblast klasického řešení, uvažujeme pouze ty části charakteristik, které ještě neprotly rázovou přímkou (obr.4).



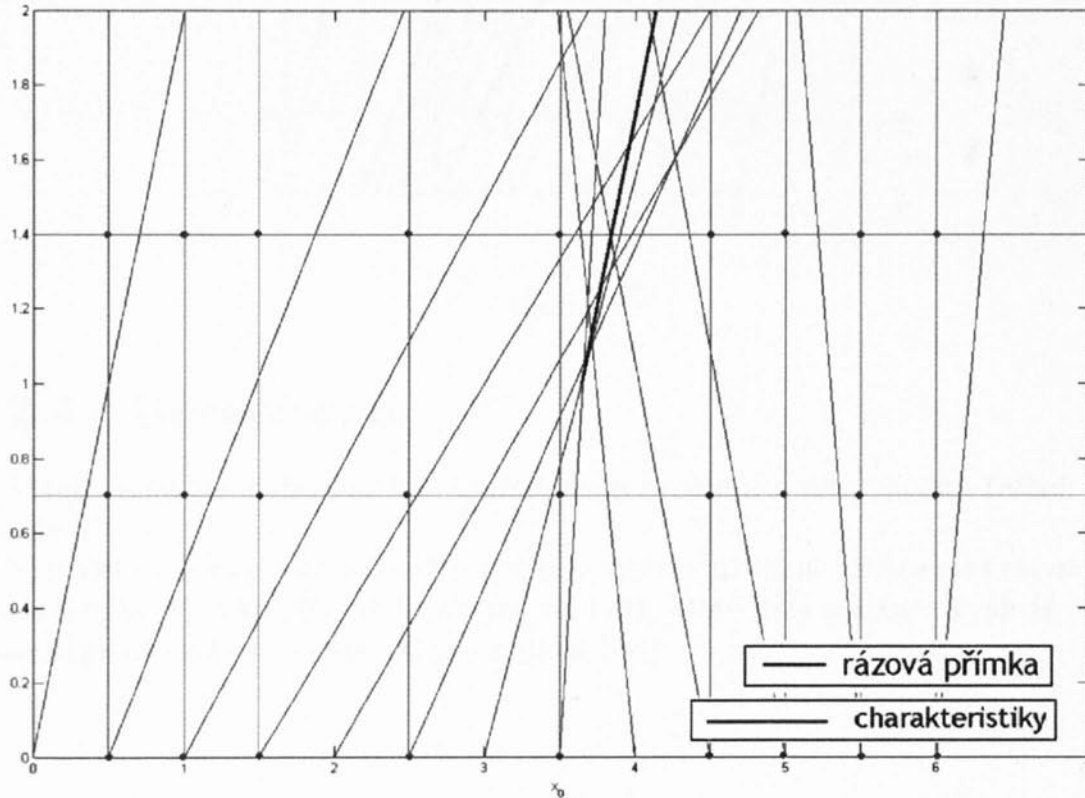
obr.4

Tímto způsobem v každém čase získáme sadu výsledků, na jejichž základě pak vykreslíme graf. Data průběžně zapisujeme do souboru *resenia.txt*, jsou zde rozdělena podle času. V prvním sloupci je hodnota  $x$  a v druhém příslušné řešení  $u$  pro dané  $x$  a  $t$ . Vstupními hodnotami volby  $x$  přímo neovlivňujeme, jsou dány počáteční podmínkou, resp. tvarem charakteristik. V souboru *skokya.txt* jsou zvlášť uvedeny ty body, ve kterých došlo ke skoku v řešení.

## 2.3 Burgersb.m

Od Burgersa.m se liší v tom, že dělení intervalu  $(0, 2\pi)$  nemusí být rovnoměrné, ale lze zadat jakékoli body z intervalu. V každém čase pak program vypíše hodnoty řešení právě pro tyto body. Výstupem je graf řešení v časech zadaných pomocí parametru  $\tau$ . Není zde graficky zpracován skok v řešení, graf slouží spíše pro kontrolu výsledků.

Např. mějme opět počáteční funkci  $y = \sin(x) + \frac{1}{2}$  s rázovou přímkou  $y = \pi + \frac{1}{2}t$ . Chceme řešení v bodech  $x = 0.5, 1, 1.5, 2.5, 3.5, 4.5, 5, 5.5, 6$ . Časový krok jsme zvolili  $\tau = 0.7$ .

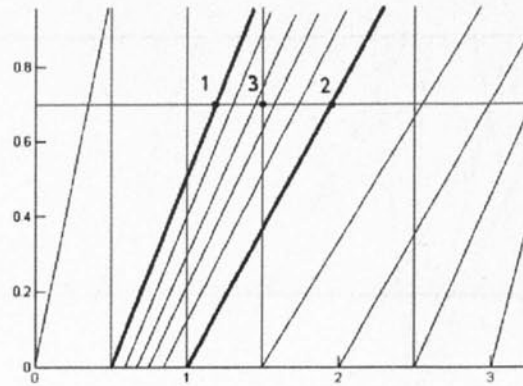


obr.5

Na obr.5 jsou vyznačeny modře body, ve kterých se má počítat řešení. Vidíme, že stávající počet charakteristik nám na určení řešení už v čase  $t=0.7$  nestačí.

Výpočet začíná stejně jako u Burgersa.m. Spočteme řešení v nějakých bodech  $x$  a spočtené hodnoty si uložíme do matice. Navíc ale používáme funkce *zpresneni* a *zpresneni1* (obr.6). Ty na základě znalosti charakteristik procházejících body 1 a 2 postupně zjemňují síť charakteristik, dokud nenaleznou charakteristiku procházející zvoleným bodem  $x$  (3). Z nalezené charakteristiky pak již lehce určíme řešení ve zvoleném bodě  $x$ .

Výsledky se vypisují do souboru *resenib.txt*.

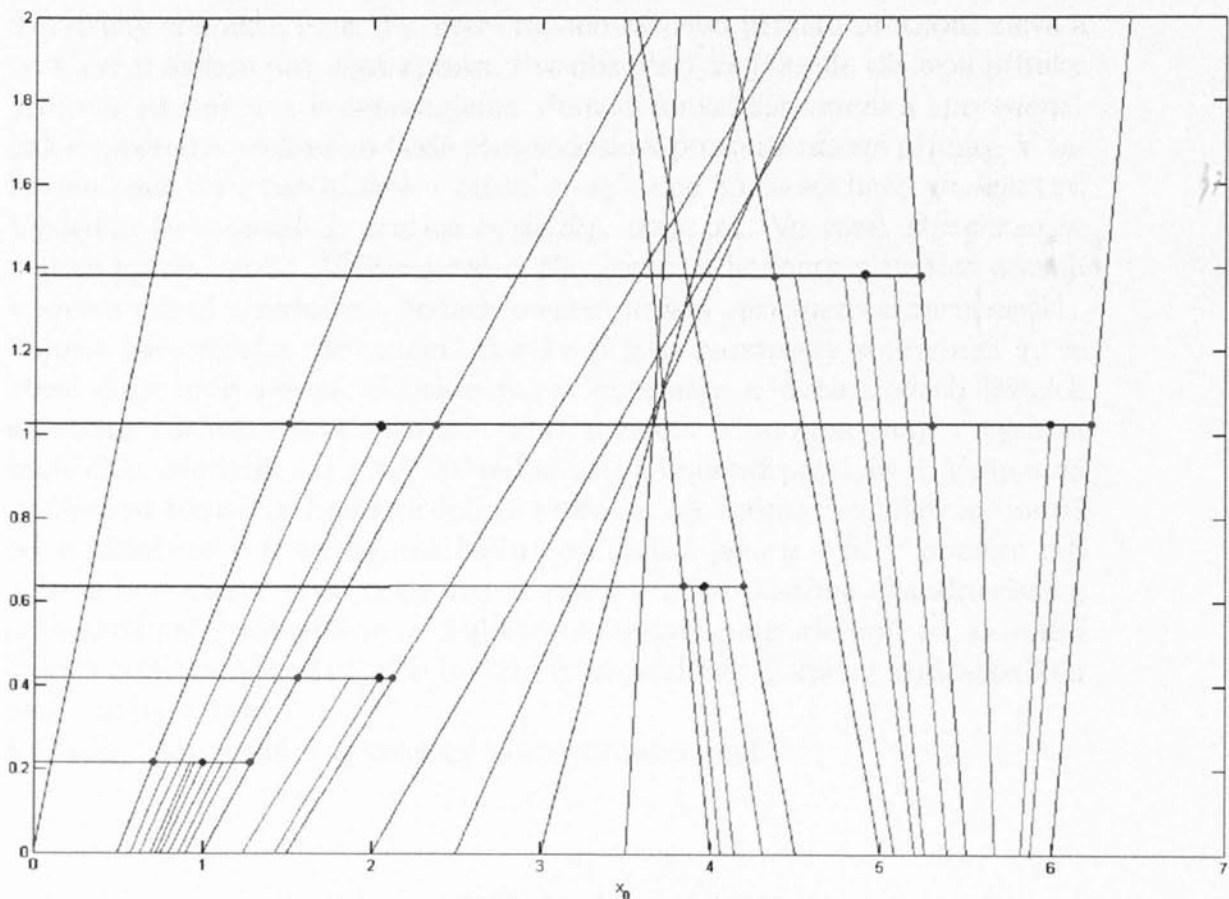


obr.6

## 2.4 Burgersc.m

V této verzi lze zadat jakékoli souřadnice a program v nich spočítá řešení. (obr.7)

Výpočet probíhá stejně jako u Burgersb.m, opět používáme funkce *zpresneni* a *zpresneni1*. Omezujeme se ale jen na časy, které byly zadány. Výsledky se vypisují do *resenic.txt* jen pro zadané body.



obr.7

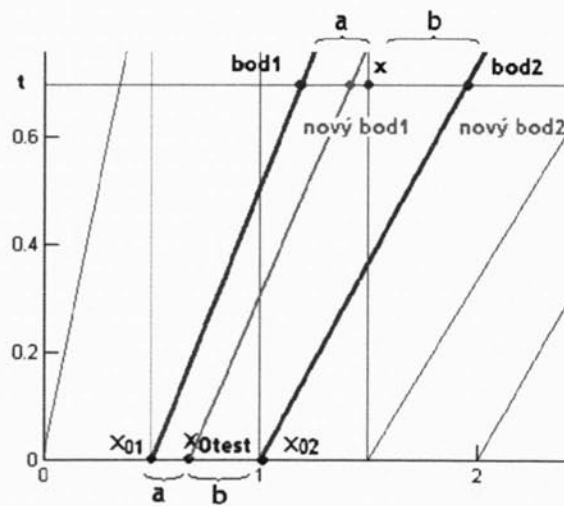
## 2.5 Popis programu

Program tvoří dva vnořené for-cykly. Vnější je časový. Výpočet se provede tolikrát, kolik je zadaných časů. Vnitřní cyklus je prostorový. Provede se tolikrát, kolik výchozích charakteristik uvažujeme. U Burgersa.m rozhoduje o počtu výchozích charakteristik parametr  $h$ , u zbývajících jde o dvojnásobný počet než kolik bodů bylo zadáno na vstupu. Vzhledem k tomu, že dělení intervalu  $(0, 2\pi)$  může být značně nerovnoměrné, zdvojnásobením počtu charakteristik zajistíme rychlejší výpočet.

Na základě aktuálního času  $t$  (vnější cyklus) a aktuální charakteristiky  $x_0$  (vnitřní cyklus) se spočte aktuálně počítaná souřadnice  $x = t \cdot (f(x_0)) + x_0$ ,

ve které je řešení rovno  $u = f(x_0)$ , kde  $f$  je počáteční funkce. Rozlišujeme dva druhy charakteristik. Ty, které mohou rázovou přímku protnout zleva a ty, které ji mohou protnout zprava. Pro obě platí, že jakmile rázovou přímku protnou, již s nimi dále nepracujeme. Pomocí funkcí *zpresneni* a *zpresneni1* pak dopočteme, ve kterém bodě přesně došlo k protnutí rázové přímky. V takovém bodě totiž nastal skok v řešení a zapíšeme ho do souboru *skokya.txt*. Výsledky se zapisují do matice *vysledky*, resp. *xx*. Ve verzi *Burgersa* se matice pouze vypíše. V *Burgersb* a *Burgersc* se hodnoty z matice použijí k určení řešení v zadaných bodech pomocí funkcí *zpresneni* a *zpresneni1*. Funkce *zpresneni* a *zpresneni1* dostávají jako parametry souřadnici  $x$ , ve které mají určit řešení, aktuální čas a informace o dvou bodech ležících na stejné časové vrstvě jako  $x$  - bod1 a bod2. Mimo jiné znají i výchozí body charakteristik  $x_{01}$  a  $x_{02}$ , které bodem1 a bodem2 procházejí. Vzájemná vzdálenost těchto tří bodů na časové vrstvě je též známá. Vzdálenost bodu1 od  $x$  označíme  $a$  a vzdálenost bodu1 od bodu2 jako  $a + b$ . V poměru  $a:b$  určíme bod  $x_{0test}$  mezi body  $x_{01}$  a  $x_{02}$  a z něho pustíme charakteristiku a zkoumáme, jestli protne  $x$ . Pakliže ne, vytyčí nám alespoň na aktuální časové vrstvě nový bod1 (nebo bod2). To provádíme, dokud charakteristikou neprotneme  $x$  (obr.8).

Výsledky jsou posléze vykresleny pomocí funkce *plot*.



obr.8

## 2.6 Testy

Program je otestován pouze pro dvě počáteční podmínky:

1)  $u = \sin(x)$ , pro kterou má rázová přímka tvar  $y = \pi$ ,

2)  $u = \sin(x) + \frac{1}{2}$ , pro kterou má rázová přímka tvar  $y = \pi + \frac{1}{2}t$ .

Program by mohl fungovat i pro jiné počáteční podmínky, které vedou na podobný charakter řešení.

Oba příklady jsou uvedeny v [2].



# Kapitola 3

## Závěr

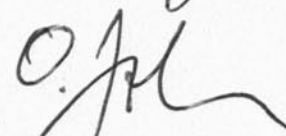
V první kapitole jsem nastínila základní pojmy týkající se klasického a zobecněného řešení parciální diferenciální rovnice. Jako jednoduchý příklad parciální diferenciální rovnice jsem uvedla Burgersovu rovnici. Na ní jsem popsala jednu z metod řešení, tzv. metodu charakteristik. Uvedla jsem též dvojí odvození B.rovnice. Pro názornost jsem přidala řešení pro tři počáteční podmínky. Fakta zde uvedená víceméně vycházejí z přednášky Parciální diferenciální rovnice I, absolvované na MFF v zimním semestru 06/07. Text je z velké části převzat z [3].

Program napsaný v Matlabu určuje přesné řešení Burgersovy rovnice pro zadané hodnoty  $x$  a  $t$ . To vypisuje do datového souboru. Do jiného souboru pak vypíše zvlášť body, ve kterých došlo ke skoku v řešení. Výstupem je též graf řešení  $u(x, t)$ .

Slabým místem programu je, že umí řešení počítat pouze pro dvě počáteční podmínky a že s každou počáteční podmínkou je třeba zadat i tvar rázové přímky. Vylepšením programu by jistě bylo, kdyby nebylo nutné rázovou přímku zadávat, ale kdyby se průběžně počítala na základě Runkin-Hugoniotovy podmínky.

PŘIJATO K OBHAJOBĚ

10.8.04



PŘEDSEDA KOMISE PRO BSZZ  
STUDIJNÍ PROGRAM MATEMATIKA

## Literatura

- [1] Feistauer M., Felcman J., Straškraba I.: *Mathematical and Computational Methods for Compressible Flow*, Oxford University Press, 2003, 57–76.
- [2] Felcman J.: *Numerical methods for compressible flow*, Seminar of KNM, 2005, 1–16.
- [3] Lax Peter D.: *The Formation and Decay of Shock Waves*, The American Mathematical Monthly, Vol.79, No.3.(Mar.,1972), 227-241.