Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Jan Bártek

Alternativní matematické základy pravděpodobnosti

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí bakalářské práce: RNDr. Bohdan Maslowski, DrSc.,
Matematický ústav AV ČR

Studijní program: Obecná matematika

2007

Děkuji vedoucímu práce RNDr. Bohdanu Maslowskému, DrSc. za cenné rady a návrhy na vylepšení práce.

Prohlašuji, že jsem svou bakalářskou práci napsal samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů. Souhlasím se zapůjčováním práce a jejím zveřejňováním.

V Praze dne 2. 8. 2007 Jan Bártek

Obsah

Název práce: Alternativní matematické základy pravděpodobnosti
Autor: Jan Bártek
Katedra: Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky
Vedoucí bakalářské práce: RNDr. Bohdan Maslowski, DrSc., Matematický ústav AV ČR
e-mail vedoucího: maslow@math.cas.cz

Abstrakt: Tato práce si dává za úkol porovnat základy teorie pravděpodobnosti – pojmy pravděpodobnostního rozdělení a střední hodnoty – vybudované klasicky pomocí teorie míry a Lebesgueova integrálu s ekvivalentními pojmy vybudovanými s použitím relativně novějšího a méně popsaného Henstockova–Kurzweilova integrálu. Tento přístup, založený na méně abstraktním integrálu riemannovského typu, je možný díky ztotožnění abstraktního prostoru jevů Ω s prostorem reálných čísel $\mathbb{R}$, resp. součinem těchto prostorů. Na tomto prostoru je vybudována struktura dělitelného prostoru, jejímž základním prvkem je interval, a pojem míry nahrazuje konečně aditivní distribuční funkce definovaná na intervalech.

Klíčová slova: Henstockův–Kurzweilův integrál, dělitelný prostor, distribuční funkce, střední hodnota.

Title: Alternative mathematical foundations of probability
Author: Jan Bártek
Department: Department of Probability and Mathematical Statistics,
Supervisor: RNDr. Bohdan Maslowski, DrSc.
Supervisor's e-mail address: maslow@math.cas.cz

Abstract: The present work is aimed at comparison of fundamentals of the probability theory – the notions of probability distribution and the mathematical expectation – built upon either the measure theory and Lebesgue integral or on the Henstock–Kurzweil integral that is relatively new and has been studied much less extensively. Tha latter approach, based on an less abstract integral of the Riemann type, is possible if the abstract space of elementary event Ω is identified with the space of reals, or a product of such spaces. On this space, a structure of the division space is constructed, the basic element of which is an interval, and the concept of measure is replaced by a finitely additive function of intervals.

Keywords: Henstock–Kurzweil integral, division space, distribution function, mathematical expectation.

Úvod

Studium teorie pravděpodobnosti je podmíněno znalostí teorie míry a Lebesgueova integrálu. Tato teorie dává mocné nástroje, je však dosti abstraktní a náročná a přitom v praxi je často výsledný model matematicky vcelku jednoduchý. Chtěli bychom tedy mít teorii, která je v základních situacích poměrně jednoduchá a intuitivní a přitom je dostatečně silná, abychom s ní mohli popisovat situace složitější. A právě popsat teorii založenou na této myšlence je naším cílem.

Základním pilířem této práce je relativně nový článek [5], ve kterém je popsána možnost využití jednoduššího integrálu riemannovského typu k počítání středních hodnot a pravděpodobnosti. Autor zde zdůrazňuje relativní jednoduchost a intuitivnost takového přístupu, který nevyžaduje znalosti na vyšší úrovni, než je Riemannův integrál, a který přesto dává výsledky srovnatelné s klasickou teorií používající abstraktní Lebesgueův integrál. V naší práci se ukáže, že jednoduchost tohoto přístupu se zachovává opravdu jen v jednoduchých situacích. Budou zde popsány ekvivalenty pojmů střední hodnota a pravděpodobnostní rozdělení a už tyto základní pojmy vyžadují v případě náhodných procesů, vzhledem k nutnosti integrovat přes nekonečně rozměrné prostory, složitý matematický aparát.

Základním zdrojem informací je pro nás kniha [6], zabývající se integrací v nekonečné dimenzi, spolu s článkem [2], který obsahuje některé novější výsledky na stejné téma. Teorie integrace riemannovského typu v konečné dimenzi je čerpána také z knihy [7], která se věnuje mj. teorii Henstockova–Kurzweilova integrálu. Pro připomenutí a srovnání jsou v práci uvedeny také základy klasické teorie, čerpány jsou ze skript [3] a [4].

Práce je členěna do tří kapitol. V první je popsána klasická teorie – konstrukce míry a Lebesgueova integrálu, jeho základní vlastnosti, definice pravděpodobnostního prostoru a náhodné veličiny, jejího rozdělení a střední hodnoty. Druhá kapitola obsahuje hlavní myšlenky a motivaci nového přístupu a také alternativní teorii vybudovanou v konečné dimenzi pomocí Henstockova–Kurzweilova integrálu (Definice 2.2, Definice 2.3). Třetí kapitola popisuje obecnou teorii integrace v prostoru $\mathbb{R}^B$, kde B je obecně nespočetná množina (Věta 3.1 a Věta 3.2, konstruující dělitelný prostor, Věty 3.5, 3.6, 3.7, popisující základní vlastnosti integrálu), a aplikaci této teorie na náhodné procesy (Definice 3.4, 3.5, Věta 3.9).

Kapitola 1

Klasická teorie pravděpodobnosti

1.1 Připomenutí pojmů

Chceme-li se věnovat studiu teorie pravděpodobnosti, musíme se nejdříve seznámit s některými pojmy z teorie míry a Lebesgueova integrálu. Uveďme alespoň několik základních definic a tvrzení. Lze je najít i s podrobnostmi v [4].

Definice 1.1. Nechť X je množina a $\mathcal{S}$ systém jejích podmnožin. Řekneme, že $\mathcal{S}$ je *σ-algebra*, je-li splněno:

(i) $\emptyset \in \mathcal{S}$,

(ii) $A \in \mathcal{S} \Rightarrow X \setminus A \in \mathcal{S}$,

(iii) $A_j \in \mathcal{S},\ j = 1, 2, \ldots \Rightarrow \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{S}$.

V tom případě se dvojice $(X, \mathcal{S})$ nazývá *měřitelný prostor* a množiny $A \in \mathcal{S}$ se nazývají *měřitelné množiny* (přesněji *$\mathcal{S}$-měřitelné*).

Uveďme několik příkladů σ-algeber:

- $\{\emptyset, X\}$ je σ-algebra,
- Systém 2^X všech podmnožin množiny X tvoří σ-algebru,
- *Borelovské množiny* $\mathcal{B}(X)$: Nechť X je metrický prostor a $\mathcal{G}$ je systém všech jeho otevřených podmnožin. Potom definujeme $\mathcal{B}(X)$ jako nejmenší σ-algebru obsahující $\mathcal{G}$.

Definice 1.2. Nechť $(X, \mathcal{S})$ je měřitelný prostor. Množinová funkce $\mu : \mathcal{S} \to [0, \infty]$ se nazývá *míra*, jestliže splňuje:

(i) $\mu(\emptyset) = 0$,

(ii) (*σ-aditivita*)
Jestliže $A_j \in \mathcal{S}$, $j = 1, 2, \ldots$, jsou po dvou disjunktní, potom
$\mu(\bigcup\limits_{j=1}^{\infty} A_j) = \sum\limits_{j=1}^{\infty} \mu(A_j)$.

Trojice $(X, \mathcal{S}, \mu)$ se nazývá *prostor s mírou*. Dále řekneme, že míra μ je:

- *konečná*, jestliže $\mu(X) < \infty$,
- *σ-konečná*, jestliže existují $X_1, X_2, \ldots \in \mathcal{S}$ tak, že $\mu(X_j) < \infty$ a $X = \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} X_j$,
- *pravděpodobnostní*, jestliže $\mu(X) = 1$,
- *úplná*, jestliže každá podmnožina množiny míry nula je měřitelná.

Pojem míry je pro klasickou teorii pravděpodobnosti klíčový. Existenci míry zaručuje následující konstrukce:

Definice 1.3. Nechť X je množina. Množinová funkce $\gamma : 2^X \to [0, \infty]$ je *vnější míra* na X, jestliže splňuje:

(i) $\gamma(\emptyset) = 0$,

(ii) $A \subset B \Rightarrow \gamma(A) \leq \gamma(B)$,

(iii) $\gamma(\bigcup\limits_{j=1}^{\infty} A_j) \leq \sum\limits_{j=1}^{\infty} \gamma(A_j)$ pro $A_j \subset X$, $j = 1, 2, \ldots$

Věta 1.1. *Nechť $\mathcal{G} \subset 2^X$ a $\tau : 2^X \to [0, \infty]$ je množinová funkce na $\mathcal{G}$ splňující $\emptyset \subset \mathcal{G}$, $\tau(\emptyset) = 0$. Pro $A \subset X$ položme*

$$\tau^*(A) = \inf\{\sum_{j=1}^{\infty} \tau(G_j) : G_j \in \mathcal{G}, \bigcup_{j=1}^{\infty} G_j \supset A\}.$$

Potom τ^* je vnější míra.

Důkaz. Je uveden např. v [4], věta 2.3.

Máme-li vnější míru, definujme k ní měřitelné množiny.

Definice 1.4. Nechť γ je vnější míra na X. Množinu $M \subset X$ nazveme *γ-měřitelnou*, jestliže pro každou množinu $T \subset X$ platí

$$\gamma(T) = \gamma(T \cap M) + \gamma(T \setminus M).$$

Systém všech γ-měřitelných množin označme $\mathfrak{M}(\gamma)$ a množinovou funkci $\gamma \restriction \mathfrak{M}(\gamma)$ značíme γ°.

Věta 1.2 (Carathéodory). *Nechť γ je vnější míra na X. Pak systém $\mathfrak{M}(\gamma)$ tvoří σ-algebru a γ° je úplná míra.*

Důkaz. Lze nalézt v [4], věta 2.7.

Tím je konstrukce míry ukončena. Dále připomeňme konstrukci Lebesgueova integrálu měřitelné funkce. Označme $\overline{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty]$, $f^+ = \max\{f, 0\}$, $f^- = \max\{-f, 0\}$.

Definice 1.5. Nechť $(X, \mathcal{S})$, $(Y, \mathcal{T})$ jsou měřitelné prostory a $D \in \mathcal{S}$. Řekneme, že $F : D \to Y$ je *měřitelné zobrazení*, přesněji měřitelné zobrazení $(D \subset X) \to (Y, \mathcal{T})$, jestliže pro každou $E \in \mathcal{T}$ je $f^{-1}(E) \in \mathcal{S}$. Měřitelná zobrazení $(D \subset X) \to (\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$ se nazývají *$\mathcal{S}$-měřitelné funkce.*

Definice 1.6. Nechť $(X, \mathcal{S})$ je měřitelný prostor.

- Funkci f na $D \in \mathcal{S}$ nazveme *$\mathcal{S}$-jednoduchou*, jestliže f je lineární kombinací charakteristických funkcí množin z $\mathcal{S}$, tj. existují-li množiny $A_j \in \mathcal{S}$ a $\alpha_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, \ldots, m$, tak, že $f = \sum\limits_{j=1}^{m} \alpha_j \chi_{A_j}$.
- Konečný soubor množin $\{A_1, \ldots, A_m\} \subset \mathcal{S}$ nazveme *L-dělením* množiny $D \in \mathcal{S}$, jestliže množiny A_j jsou po dvou disjunktní a $\bigcup\limits_{j=1}^{m} A_j = D$.

Definice 1.7 (Lebesgueův integrál). Nechť $(X, \mathcal{S}, \mu)$ je prostor s mírou a f je měřitelná funkce na $D \in \mathcal{S}$. Integrál $\int_D f d\mu$ vybudujeme ve třech krocích:

1.) Je-li f nezáporná měřitelná funkce, definujeme

$$\int_D f d\mu = \sup\{\sum_{j=1}^{m} \alpha_j \mu(A_j) : \{A_j\} \text{ je L-dělení } D, \\ 0 \le \alpha_j \le f \text{ na } A_j, j = 1, \ldots, m\}. \tag{1.1}$$

Součty vyskytující se v (1.1) nazýváme *dolními součty* k funkci f. Integrál z nezáporné měřitelné funkce je definován vždy, může ovšem nabývat nekonečné hodnoty.

2.) V obecném případě, kdy f je měřitelná funkce na D, definujeme

$$\int_D f d\mu = \int_D f^+ d\mu - \int_D f^- d\mu, \tag{1.2}$$

pokud má rozdíl v (1.2) smysl. Pokud

$$\int_D f^+ d\mu = \int_D f^- d\mu = \infty,$$

zůstává integrál nedefinován.

3.) Je-li f měřitelná funkce na $D' \subset D$ a $\mu(D \setminus D') = 0$, definujme

$$\int_D f d\mu = \int_{D'} f d\mu,$$

Smysl a výsledek v tomto případě nezávisí na volbě D'.

Je-li integrál $\int_D f d\mu < \infty$, potom říkáme, že f je integrovatelná.
Je-li integrál $\int_D f d\mu = \infty$, potom říkáme, že f má integrál.

Věta 1.3 (Vlastnosti Lebesgueova integrálu)**.** *Nechť $D \in \mathcal{S}$ a f, g jsou měřitelné funkce na D.*

(a) Je-li $f \geq 0, D_1, D_2 \in \mathcal{S}$ a $D_1 \subset D_2 \subset D$, pak

$$\int_{D_1} f d\mu \leq \int_{D_2} f d\mu.$$

(b) Jestliže $D_1, D_2 \in \mathcal{S}, D_1 \cap D_2 = \emptyset$ a $D_1 \cup D_2 = D$, pak

$$\int_{D_1} f d\mu + \int_{D_2} f d\mu = \int_D f d\mu.$$

(c) Je-li $\int_D |f| d\mu < \infty$, pak $|f| < \infty$ skoro všude.

(d) Je-li $\int_D |f| d\mu = 0$, pak $f = 0$ skoro všude.

(e) Jestliže f, g mají integrál a $f \leq g$ skoro všude, pak

$$\int_D f d\mu \leq \int_D g d\mu.$$

(f) Je-li $\int_D g d\mu < \infty$ a $|f| \leq g$ skoro všude, f pak je integrovatelná.

(g) (linearita integrálu)
Nechť $a \in \mathbb{R}$, potom

$$\int_D (af + g) d\mu = a \int_D f d\mu + \int_D g d\mu,$$

má-li pravá strana smysl.

(h) (Leviho věta)
Nechť $\{f_j\}$ je posloupnost měřitelných funkcí na D, $0 \leq f_1 \leq f_2 \leq \ \ldots$, $f = \lim\limits_{j \to \infty} f_j$. Potom

$$\int_D f d\mu = \lim_{j \to \infty} \int_D f_j d\mu.$$

(i) (Fatouovo lemma)
Nechť $\{f_j\}$ *je posloupnost nezáporných měřitelných funkcí na* D*. Potom*

$$\int_D \liminf_{j\to\infty} f_j d\mu \le \liminf_{j\to\infty} \int_D f_j d\mu.$$

(j) (Lebesgueova věta)
Nechť $f_j, j = 1, 2, \ldots,$ *jsou měřitelné funkce na* D*. Nechť posloupnost* f_j *konverguje skoro všude k* f*. Nechť existuje integrovatelná funkce* g *tak, že*

$$|f(x)| \le g(x), j = 1, 2, \ldots x \in D.$$

Potom

$$\int_D f d\mu = \lim_{j\to\infty} \int_D f_j d\mu.$$

Teorie vyložená v následujících dvou sekcích pochází ze skript [3].

1.2 Pravděpodobnostní prostor

Abychom mohli matematicky popisovat náhodné jevy a jejich chování, zavedl v roce 1933 A. N. Kolmogorov následující definici pravděpodobnostního prostoru.

Definice 1.8. Nechť Ω je neprázdná množina, $\mathcal{A} \subset 2^\Omega$ je σ-algebra a P je pravděpodobnostní míra na $\mathcal{A}$. Potom trojici $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ nazveme *pravděpodobnostní prostor*.

Množina Ω nemá v konkrétních případech přesnou interpretaci, prvky $\omega \in \Omega$ můžeme považovat za jakési "stavy světa". Používá se následující standardní terminologie: $\omega \in \Omega$ – elementární jev, $A \in \mathcal{A}$ – náhodný jev, $P(A)$ – pravděpodobnost náhodného jevu A, $\emptyset$ – jev nemožný, Ω – jistý jev. Dále řekneme, že dva náhodné jevy A, B jsou neslučitelné, jestliže $A \cap B = \emptyset$. Uveďme základní typy pravděpodobnostních prostorů:

1.) Nechť Ω je nejvýše spočetná. Potom $\mathcal{A} = 2^\Omega$ a P je určena pravděpodobnostmi elementárních jevů, tj.

$$P(A) = \sum_{\omega \in A} P(\{\omega\}) \text{ pro každou } A \in \mathcal{A},$$

kde $0 \le P(\{\omega\}) \le 1$ pro $\omega \in \Omega$ a $\sum_{\omega\in\Omega} P(\{\omega\}) = 1$.
Tento pravděpodobnostní prostor nazýváme *diskrétní pravděpodobnostní prostor*. Speciálně je-li Ω konečná a $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$, mluvíme o *klasickém pravděpodobnostním prostoru.*

2.) Nechť $\Omega \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), n \in \mathbb{N}, \mathcal{A} = \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \cap \Omega$. Pravděpodobnostní míra P je generována *hustotou* pravděpodobnosti $f : \Omega \to \mathbb{R}$, pokud $f \geq 0$ je lebesgueovsky integrovatelná funkce a $\int_\Omega f(\omega)d\omega = 1$ a platí

$$P(A) = \int_A f(\omega)d\omega \text{ pro každou } A \in \mathcal{A}.$$

Takový pravděpodobnostní prostor nazýváme *spojitý pravděpodobnostní prostor*.

1.3 Náhodné veličiny

Pravděpodobnostní prostor je pomocný, abstraktní pojem. Naše znalosti o něm modelujeme pomocí náhodných veličin.

Definice 1.9. Nechť $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ je pravděpodobnostní prostor a $(E, \mathcal{E})$ je měřitelný prostor. Řekneme, že zobrazení $X : \Omega \to E$ je *náhodná veličina* s hodnotami v $(E, \mathcal{E})$, jestliže je měřitelné, tj.

$$[X \in B] := \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\} = X^{-1}B \in \mathcal{A} \text{ pro každé } B \in \mathcal{E}.$$

Zapisujeme to $X : (\Omega, \mathcal{A}) \to (E, \mathcal{E})$.

Definice 1.10. Je-li X náhodná veličina s hodnotami v $(E, \mathcal{E})$, pak zavádíme pojem *rozdělení* (pravděpodobnosti) náhodné veličiny X jako pravděpodobnostní míru P_X definovanou $\mathcal{E}$ na předpisem $P_X(B) = P(X \in B) := P([X \in B])$ pro $B \in \mathcal{E}$.

Skutečnost, že P_X je opravdu pravděpodobnostní míra a předchozí definice je tedy korektní, zachycuje následující lemma.

Lemma 1.1. *Ať X je náhodná veličina s hodnotami v $(E, \mathcal{E})$, pak $(E, \mathcal{E}, P_X)$ je pravděpodobnostní prostor.*

Důkaz. Stačí ukázat, že P_X je pravděpodobnostní míra na $\mathcal{E}$.

- $P_X(\emptyset) = P(X \in \emptyset) = P(\emptyset) = 0$,
- $P_X(E) = P(X \in E) = P(\Omega) = 1$,
- Nechť $B_j \in \mathcal{E}, j = 1, 2, \ldots$ po dvou disjunktní. Potom

$$P_X(\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j) = P(X \in \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j) = P(\bigcup_{j=1}^{\infty}(X \in B_j)) =$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty} P(X \in B_j) = \sum_{j=1}^{\infty} P_X(B_j).$$

Nezápornost P_X je zřejmá a definiční obor $\mathcal{E}$ je σ-algebra. Tímto jsme ověřili podmínky z definice pravděpodobnostní míry.

$\square$

Jednu z nejdůležitějších charakteristik náhodných veličin zavádí následující definice.

Definice 1.11. *Střední hodnota* náhodné veličiny X definované na pravděpodobnostním prostoru $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ je číslo $\mathbf{E}[X] = \int_\Omega X dP$, pokud integrál existuje. Jinak říkáme, že X nemá střední hodnotu.

Protože je střední hodnota náhodné veličiny Lebesgueův integrál, její základní vlastnosti plynou bezprostředně z věty 1.3. Navíc zřejmě pro každou množinu $A \in \mathcal{A}$ platí $P(A) = \mathbf{E}[\mathbb{I}_A]$, kde $\mathbb{I}_A$ je indikátor množiny A.

Kapitola 2

Alternativa: riemannovský přístup

V této kapitole se seznámíme s přístupem k pravděpodobnostnímu počítání založeným na zobecněném Riemannově integrálu, který je matematicky jednodušší než Lebesgueův. Následující výklad je založen na článku [5].

2.1 Základní princip nového přístupu

Motivací k hledání alternativní teorie nám může být následující příklad prostého výpočtu aritmetického průměru, tedy odhadu střední hodnoty. Mějme proměnnou, která nabývá hodnot v nějaké podmnožině reálných čísel. Tudíž jednotlivý výsledek pokusu nebo měření je reálné číslo x. Zatímco x je náhodné, nás často zajímá nějaká deterministická funkce f proměnné x. Potom $f(x)$ je náhodná, protože x je náhodná.

Máme-li dostatek naměřených hodnot x, můžeme je rozdělit do vhodného počtu tříd. Potom vybereme reprezentanta z každé třídy, vynásobíme ho relativní četností dané třídy a tyto součiny sečteme. Tento postup nám dá odhad střední hodnoty x.

Podobně můžeme odhadnout střední hodnotu náhodné veličiny $f(x)$. Následující schéma (2.1) ilustruje náš postup. Obor hodnot měření x je rozdělen na intervaly $I^{(j)}$, náhodná veličina je $f(x)$ a relativní četnost třídy $I^{(j)}$ je $F(I^{(j)})$:

třídy dat	hodnota $f(x)$	relativní frekvence F tříd dat
$I^{(1)}$	$f(x^{(1)})$	$F(I^{(1)})$
$I^{(2)}$	$f(x^{(2)})$	$F(I^{(2)})$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$I^{(m)}$	$f(x^{(m)})$	$F(I^{(m)})$

(2.1)

Pro každé j, naměřená hodnota $x^{(j)}$ je reprezentant vybraný z třídy $I^{(j)}$

(nebo uzávěru $I^{(j)}$). Výsledný odhad střední hodnoty náhodné veličiny $f(x)$ je

$$\sum_{j=1}^{m} f(x^{(j)})F(I^{(j)}).$$

Považujeme-li za náhodnou veličinu přímo výsledky měření x, je odhad její střední hodnoty

$$\sum_{j=1}^{m} x^{(j)}F(I^{(j)}).$$

Přístup k pravděpodobnostním výpočtům, který zde popíšeme, je založen na formalizaci této relativně jednoduché technice riemannovských sum. Jak se ukáže, dá nám to dobré výsledky, jako např. limitní věty pro posloupnosti náhodných veličin nebo možnost integrovat funkce od náhodných procesů.

Na druhou stranu Kolmogorovův přístup k situaci popsané schématem (2.1) vyžaduje jako předpoklad existenci abstraktních měřitelných podmnožin A_j prostoru jevů:

klasifikace proměnné x	hodnota funkce $f(x)$	pravděpodobnostní míra P
A^1	y^1	$P(A^1)$
A^2	y^2	$P(A^2)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
A^m	y^m	$P(A^m)$

(2.2)

Nyní je x reprezentant prostoru jevů Ω, který představuje možné stavy "reálného světa", ve kterém se měření nebo pozorování odehrává prostřednictvím $f(x)$, jejíž hodnoty jsou náhodné a mohou být odhadnuty jen s určitou přesností. (V praxi se často Ω ztotožňuje s reálnými čísly nebo jejich podmnožinou; nebo s kartézským součinem těchto množin, konečným nebo nekonečným). Řídíme-li se schématem (2.2), čísla y^j jsou vybrána z oboru hodnot náhodné veličiny $f(x)$ a $A^1 = f^{-1}([y^{j-1}, y^j))$. Výsledná suma

$$\sum_{j=1}^{m} y^j P(A^j).$$

je odhad střední hodnoty náhodné veličiny $f(x)$. Přestože množiny A^j jsou obvykle intervaly nebo sjednocení intervalů, obecně jsou to P-měřitelné množiny. Takové množiny jsou matematicky složité a kladou velké požadavky na naši intuici.

Naproti tomu třídy dat $I^{(j)}$ ze schématu (2.1) jsou snadno pochopitelné jako intervaly, jedno nebo vícerozměrné, a objevují se skutečně při měření a tvoří základ riemannovského přístupu k teorii pravděpodobnosti.

Podívejme se nyní na některé další aspekty Lebesgueova–Kolmogorovova přístupu a porovnejme je s riemannovským přístupem. Přestože je prostor jevů Ω abstraktní množina s minimální matematickou strukturou, je často ztotožňována (jak je zmíněno výše) s konečným nebo nekonečným kartézským součinem reálných čísel nebo jejich podmnožin. Pravděpodobnostní míra je pak v praxi často míra generovaná pravděpodobnostní distribuční funkcí F_X příslušné náhodné veličiny X.

Pro ilustraci předpokládejme, že X je náhodná veličina s normovaným normálním rozdělením na Ω. Potom Ω reprezentujeme jako reálná čísla $\mathbb{R}$ a X je identické zobrazení $X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, X(x) = x$. Distribuční funkce F_X je definována takto:

$$F_X : \mathbb{R} \to [0,1], F_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}s^2} ds.$$

Následně, v Lebegueově-Kolmogorovově přístupu, vytvoříme z intervalové funkce F_X pravděpodobnostní míru $P_X : \mathcal{A}_{\mathbb{R}} \to [0,1]$ na σ-algebře Lebesgueovsky měřitelných podmnožin $\Omega = \mathbb{R}$. Tedy střední hodnota $\mathbf{E}f(X)$ libovolné P_X-měřitelné funkce $f(x)$ je Lebesgueův integrál
$\int_\Omega f(x)dP_X$, pokud existuje. Po ztotožnění Ω s $\mathbb{R}$ je to Lebesgueův-Stieltjesův integrál $\int_\mathbb{R} f(x)dF_X$.

Tedy přestože výsledek je matematicky relativně jednoduchý, museli jsme se k němu propracovat od původní distribuční funkce skrz konstrukci míry a abstraktní Lebesgueův integrál. Jsou to právě tyto kroky, které přestávají být nutné v riemannovském přístupu.

Protože riemannovský přístup nepoužívá abstraktní měřitelný prostor Ω jako prostor jevů, budeme nadále prostor jevů Ω ztotožňovat s $\mathbb{R}$ nebo podmnožinou $\mathbb{R}$ nebo kartézským součinem těchto množin. Elementární jev bude prvek x (nyní kartézského) prostoru jevů Ω. Náhodná veličina bude deterministická funkce f (náhodné) proměnné x. Příslušné pravděpodobnosti budou dány distribuční funkcí F definované na intervalech (viz. níže, Definice 2.3).

2.2 Střední hodnota v konečné dimenzi

V této sekci se pokusíme dát předchozím úvahám přesnou matematickou formu. Abychom mohli matematicky přesně zavést střední hodnotu náhodné veličiny, musíme mít vhodnou teorii integrace. Zde si popíšeme zobecněný Riemannův integrál v konečně rozměrném prostoru. Situace v jednorozměrném případě je podobná situaci v n-rozměrném případě, uvedeme je tedy dohromady.

Definice 2.1 (K-dělení)**.** Nechť $E \subset \mathbb{R}$ je konečným sjednocením intervalů I typu $[u, v), (-\infty, w), [z, +\infty)$ a $(-\infty, +\infty)$, kde $u, v, w, z \in \mathbb{R}$.

- *Dělení* E je konečný soubor navzájem disjunktních intervalů $I^{(1)}, I^{(2)} \dots I^{(k)}$ takových, že $E = \bigcup_{j=1}^{k} I^{(j)}$.

- Nechť $x \in \mathbb{R}$. *Asociovaný* interval prvku x je interval typu $[u, x)$ nebo $[x, v)$. Pokud $x = -\infty$, resp. $x = \infty$, je asociovaný interval x tvaru $(-\infty, w)$, resp. $[z, +\infty)$.

- Funkce $\delta : E \subset \overline{\mathbb{R}} \to (0, +\infty)$ se nazývá *kalibr*. Pokud $x \in \mathbb{R}$, pak interval $I \subset E$ vyhovuje δ, nebo I je δ-jemný, pokud $x - u < \delta$ resp. $v - x < \delta$, kde $I = [u, x)$ resp. $I = [x, v)$. V tom případě také říkáme, že asociovaná dvojice (I, x) je δ-jemná. Je-li $x = -\infty$ a $\delta(x) = A$, kde A je (velké) kladné číslo, potom asociovaný interval $(-\infty, w)$ prvku x je δ-jemný, pokud $w < -A$. Podobně, pokud $x = +\infty$ a $\delta(x) = A$, kde A je (velké) kladné číslo, potom asociovaný interval $(z, +\infty)$ prvku x je δ-jemný, pokud $z > A$.

- Pokud $\{I^{(1)}, I^{(2)}, \dots, I^{(k)}\}$ je dělení E a $x^{(j)}$ jsou asociované body $I^{(j)}$, $1 \leq j \leq k$, potom *K-dělení* je množina
$$\mathcal{E} = \{(I^{(1)}, x^{(1)}), (I^{(2)}, x^{(2)}), \dots, (I^{(k)}, x^{(k)})\}.$$
Řekneme, že $\mathcal{E}$ je δ-jemné, jestliže každá dvojice $(I, x) \in \mathcal{E}$ je δ-jemná.

Situace v $\mathbb{R}^n$ je obdobná. Označme $\overline{\mathbb{R}}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) : x_i \in \overline{\mathbb{R}}\}$. Interval $I \subset \overline{\mathbb{R}}^n$ je součin $I_1 \times I_2 \times \ldots \times I_n$ jednorozměrných intervalů typů jako výše a $\mathcal{I}_E$ je systém všech těchto intervalů v $E \subset \overline{\mathbb{R}}^n$. Kalibr $\delta > 0$ je definován na $E \subset \overline{\mathbb{R}}^n$ a bod $x \in E$ je asociován s $I \subset E$, jestliže x_i je asociován s $I_i, 1 \leq i \leq n$. Asociovaná dvojice (I, x) je δ-jemná, pokud všechny I_i jsou δ-jemné, $1 \leq i \leq n$. Množina E je konečné sjednocení n-rozměrných intervalů I a K-dělení množiny E je množina $\mathcal{E} = \{(I^{(1)}, x^{(1)}), (I^{(2)}, x^{(2)}), \dots, (I^{(k)}, x^{(k)})\}$ asociovaných dvojic. K-dělení $\mathcal{E}$ je δ-jemné, jestliže každá dvojice $(I, x) \in \mathcal{E}$ je δ-jemná.

Nechť $h : \mathcal{I}_E \times \overline{E} \to \mathbb{R}$(příp.$\mathbb{C}$) je taková funkce, že $h(I, x) = 0$, pokud x je bod v nekonečnu. Je-li $\mathcal{E} = \{(I^{(1)}, x^{(1)}), (I^{(2)}, x^{(2)}), \dots, (I^{(k)}, x^{(k)})\}$ K-dělení E, potom definujeme riemannovský součet

$$(\mathcal{E}) \sum h(I, x) := \sum_{j=1}^{k} h(I^{(j)}, x^{(j)}).$$

Speciálně, jsme-li v situaci ze sekce 2.1 (dodefinováváme $f(-\infty) = 0$ a $f(+\infty) = 0$) a $h(I, x) = f(x)F(I)$, má riemannovský součet tvar

$$(\mathcal{E}) \sum f(x)F(I) := \sum_{j=1}^{k} f(x^{(j)})F(I^{(j)}).$$

Definice 2.2 (Henstockův–Kurzweilův integrál)**.** Nechť $h : \mathcal{I}_E \times \overline{E} \to \mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{C}$) je reálná (resp. komplexní) funkce. Řekneme, že h je integrovatelná v E, jestliže

$$\exists \alpha \in \mathbb{R} \text{ (resp. } \alpha \in \mathbb{C}) \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists \text{ kalibr } \delta \ \forall \text{ K-dělení } \mathcal{E} :$$

$$\mathcal{E} \text{ je } \delta\text{-jemné} \Rightarrow |(\mathcal{E}) \textstyle\sum h(I, x) - \alpha| < \varepsilon.$$

Je-li h integrovatelná, píšeme $\int_E h(I, x) = \alpha$ a α označujeme jako Henstockův–Kurzweilův integrál z h.

Speciálně pro $h(I, x) = f(x)F(I)$ máme

$$\int_E f(x)F(I) = \alpha \Leftrightarrow$$

$$\Big[\forall \varepsilon > 0 \ \exists \text{ kalibr } \delta \ \forall \text{ K-dělení } \mathcal{E} : \mathcal{E} \text{ je } \delta\text{-jemné} \Rightarrow$$

$$\left|(\mathcal{E}) \sum f(x)F(I) - \alpha\right| < \varepsilon\Big].$$

Je-li $D \subset E$, potom definujeme

$$\int_D h(I, x) = \int_E h(I, x)\mathbb{I}_D(x),$$

kde $\mathbb{I}_D(x)$ je indikátor množiny D.

Takto definovaný integrál je neabsolutně konvergentní a podrobnější popis některých jeho vlastností lze nalézt např. v [7], kapitola 3. My se k nim dostaneme jinou cestou. Chceme umět integrovat i přes nekonečně dimenzionální prostor, tomu se budeme věnovat v následující kapitole a integrál z definice 2.2 a jeho vlastnosti dostaneme jako speciální případ obecnějšího integrálu riemannovského typu. Na závěr této kapitoly ještě můžeme definovat střední hodnotu funkce od náhodné veličiny nebo náhodného vektoru.

Definice 2.3. Funkce $F : \mathcal{I}_{\overline{\mathbb{R}}^n} \to [0, 1]$ je *distribuční funkcí* nějaké náhodné veličiny, jestliže F je konečně aditivní a $F(\overline{\mathbb{R}}^n) = 1$. *Střední hodnota* náhodné veličiny $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ($\mathbb{C}$) s distribuční funkcí F je číslo

$$\mathbf{E}^F(f) := \int_\Omega f(x)F(I),$$

pokud integrál existuje.

Kapitola 3

Obecná teorie integrace

Chceme-li získat teorii pravděpodobnosti srovnatelnou s klasickou lebesgueovskou, potřebujeme lepší integrál než Riemannův. V této kapitole popíšeme konstrukci tohoto lepšího integrálu. Podrobnější postup a popis vlastností pak lze nalézt v [6], odkud je většina následující teorie převzata.

3.1 Dělitelný prostor

Analogický pojem k pojmu měřitelného prostoru, který je zásadní pro klasickou teorii, zavádí následující definice.

Definice 3.1 (Dělitelný prostor)**.** Nechť T je abstraktní množina a $\mathscr{T}$ systém jejích podmnožin.

- Prvky $I \in \mathscr{T}$ nazýváme *intervaly* T.
- Množina $E \subset T$ se nazývá *elementární* množina, jestliže E je interval nebo E je konečné sjednocení navzájem disjunktních intervalů.
- Konečný soubor intervalů $\{I_1, \ldots, I_m\} \subset \mathscr{T}$ nazveme *dělením* množiny $E \subset T$, jestliže intervaly I_j jsou po dvou disjunktní a $\bigcup_{j=1}^{m} I_j = E$.
- Systém $S = \{(I, x) : I \in \mathscr{T}, x \in T\}$ se nazývá *dělící soubor*. Body x z definice S se nazývají *značky*.
- Nechť $\mathcal{E} \subset S$ je konečná, nechť intervaly $\{I \in \mathscr{T} : (I, x) \in \mathcal{E}\}$ tvoří dělení E. Potom řekneme, že S *dělí* E a $\mathcal{E}$ je *označené dělení* E z S.
- Nechť $\mathcal{E} \subset S$ je označené dělení E a $\mathcal{P} \subset \mathcal{E}$. $\mathcal{P}$ se nazývá *částečné* označené dělení a $P = \bigcup\{I \in \mathscr{T} : (I, x) \in \mathcal{P}\}$ se nazývá *částečná množina* E.

Nechť $\mathcal{A}$ je systém dělících souborů splňující následující podmínky:

(i) Pro každou elementární množinu $E \subset T$ existuje $S \in \mathcal{A}$ tak, že S dělí E.

(ii) Jestliže $S^{(1)}$,$S^{(2)} \in \mathcal{A}$ oba dělí elementární množinu E, potom existuje $S^{(3)} \in \mathcal{A}$ dělící E tak, že $S^{(3)} \subset S^{(1)} \cap S^{(2)}$.

(iii) Pro každou dvojici elementárních množin $E^{(1)}, E^{(2)}$ a každou $S \in \mathcal{A}$, která dělí $E^{(1)} \cup E^{(2)}$, systém $S^{(1)} = \{(I, x) \in S : I \subset E^{(1)}\} \in \mathcal{A}$ a $S^{(1)}$ dělí $E^{(1)}$. $S^{(1)}$ se nazývá *restrikce* S na $E^{(1)}$.

(iv) Jestliže $E^{(1)}, E^{(2)}$ jsou disjunktní elementární množiny, $S^{(j)} \in \mathcal{A}$ dělí $E^{(j)}$ a $I \in E^{(j)}$ pro každou $(I, x) \in S^{(j)}, j = 1, 2$, potom existuje $S \in \mathcal{A}$ dělící $E^{(1)} \cup E^{(2)}$ tak, že $S \subset S^{(1)} \cup S^{(2)}$.

Trojice $(T, \mathscr{T}, \mathcal{A})$ splňující (i), (ii), (iii) a (iv) se nazývá *dělitelný prostor.*

Jako konkrétní příklad dělitelného prostoru uveďme systém intervalů a K-dělení z definice Henstockova–Kurzweilova integrálu. Přesně to popisuje následující věta.

Věta 3.1. *Nechť $T = \overline{\mathbb{R}}^n$ a $\mathscr{T}$ je systém všech n-rozměrných intervalů $I \subset \overline{\mathbb{R}}^n$ vzniklých jako součin n jednorozměrných intervalů typů $[u, v), (-\infty, w), [z, +\infty)$ a $(-\infty, +\infty)$, kde $u, v, w, z \in \mathbb{R}$. Nechť pro daný kalibr $\delta : E \to (0, +\infty)$, kde $E \subset \overline{\mathbb{R}}^n$ je elementární množina, je S_δ množina všech δ-jemných asociovaných dvojic (I, x), tj.*

$$S_\delta = \{(I, x) : I \in \mathscr{T}, I \subset E, x \textit{ je asociovaný s } I, (I, x) \textit{ je } \delta\textit{-jemná}\},$$

a nechť $\mathcal{A}$ je systém množin S vzniklý volbou všech kalibrů δ, tj

$$\mathcal{A} = \{S_\delta : \delta \textit{ je kalibr}\}.$$

Potom trojice $(T, \mathscr{T}, \mathcal{A})$ je dělitelný prostor.

Důkaz.
Musíme ověřit čtyři vlastnosti z definice dělitelného prostoru.
Vlastnost (i):
Musíme ukázat, že pro každou elementární množinu $E \subset \overline{\mathbb{R}}^n$ existuje δ-jemné K-dělení E pro nějaký kalibr δ. Platnost této podmínky plyne z Cousinova lemmatu, které tvrdí, že δ-jemné dělení existuje pro každý kalibr δ (viz. např. [1]).
Vlastnost (ii):
Nejprve si uvědomme, že pokud S_δ dělí E a $\delta : D \to (0, +\infty)$, potom $E \subset D$, a že platí $\delta_1 \leq \delta_2 \Rightarrow S_{\delta_1} \subset S_{\delta_2}$ a pro každou elementární množinu $E \subset \overline{\mathbb{R}}^n$ platí $[(\delta_2 \text{ dělí } E) \wedge \delta_1 \leq \delta_2] \Rightarrow \delta_1$ dělí E. Pak, máme-li S_{δ_1} a S_{δ_2} dělící E a definujeme-li $\delta_3 : E \to (0, +\infty)$ předpisem $\delta_3(x) :=$

$\min(\delta_1(x), \delta_2(x)), x \in E$, platí $S_{\delta_3} \subset (S_{\delta_1} \cap S_{\delta_2})$ a S_{δ_3} dělí E.
Vlastnost (iii):
Nechť $S, S^{(1)}, E^{(1)}$ splňují předpoklady bodu (iii) a nechť $S = S_\delta$. Definujeme-li $\delta_1 := \delta|_{E^{(1)}}$ jako restrikci δ na $E^{(1)}$. Potom $S^{(1)} = S_{\delta_1} \in \mathcal{A}$.
Vlastnost (iv):
Nechť $S^{(1)}, S^{(2)}, E^{(1)}, E^{(2)}$ splňují předpoklady bodu (iv) a nechť $S^{(1)} = S_{\delta_1}, S^{(1)} = S_{\delta_1}$. Definujeme-li kalibr δ následovně:

$$\delta(x) = \begin{cases} \min(\delta_1(x),\ \mathrm{dist}(\partial E, x)) & \text{pro } x \in E^{(1)}, \\ \min(\delta_2(x),\ \mathrm{dist}(\partial E, x)) & \text{pro } x \in E^{(2)}, \end{cases}$$

Potom $S_\delta \in \mathcal{A}$ a $S_\delta \subset S^{(1)} \cup S^{(2)}$.

□

Uvažujeme-li ve Větě 3.1 místo všech kalibrů δ jen konstantní funkce, dostaneme systém klasických riemannovských dělení. Ty také tvoří dělitelný prostor, důkaz je obdobný. Klasický Riemannův integrál ale nemá dostatečně dobré vlastnosti. Potřebujeme proto další vlastnost dělitelného prostoru, která nám dobré vlastnosti následného integrálu zaručí. Tato vlastnost se nazývá rozložitelnost a je obsahem Definice 3.2. Zaveďme ještě následující značení. Je-li $S \in \mathcal{A}$ dělící soubor T, potom pro $X \subset T$ je $S[X] := \{(I, x) : (I, x) \in S, x \in X\}$.

Definice 3.2. Řekneme, že dělitelný prostor $(T, \mathscr{T}, \mathcal{A})$ je *rozložitelný*, jestliže platí:

(v) Nechť $E \subset T$ je elementární množina, $S^{(j)} \in \mathcal{A}$ dělí E, $X^{(j)} \subset T$ jsou vzájemně disjunktní, $j = 1, 2, 3, \ldots$ a $E \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} X^{(j)}$. Potom existuje $S \in \mathcal{A}$ dělící E tak, že $S[X^{(j)}] \subset S^{(j)}$, $j = 1, 2, 3, \ldots$

Věta 3.2. *Nechť dělitelný prostor $(T, \mathscr{T}, \mathcal{A})$ je jako ve Větě 3.1. Potom je rozložitelný.*

Důkaz.
Nechť dělícímu souboru $S^{(j)}$ odpovídá kalibr $\delta_j, j = 1, 2, \ldots$ Definujeme-li kalibr $\delta := \delta_j$, pro $x \in X^{(j)}$, potom $S[X^{(j)}] \subset S^{(j)}$ a S dělí E, neboť $\delta : D \supset E \to (0, \infty)$ a δ-jemné dělení E existuje podle Cousinova lemmatu (viz. také [7], Lemma 3.1.1).

□

Poznamenejme, že systém $\mathcal{A}$ klasických riemannovských dělení vzniklý volbou konstantních kalibrů δ podmínku Definice 3.2 nesplňuje, a tudíž není rozložitelný. Jako protipříklad může posloužit následující situace. Nechť $E \subset T$ je elementární množina, $X^{(j)} \subset T$ jsou vzájemně disjunktní, $j = 1, 2, \ldots$, $E \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} X^{(j)}$, $X^{(j)} \cap E \neq \emptyset$ a $\delta_j = 1/j$, $j = 1, 2, \ldots$

3.2 Součin dělitelných prostorů

Situaci, kdy $T = \mathbb{R}$ nebo $T = \mathbb{R}^n$, máme již popsánu a mohli bychom zde definovat integrál. Náš cíl je ale umět integrovat i přes nekonečně rozměrný prostor. To nám umožní následující konstrukce. Uveďme nejprve dodatečné předpoklady a zaveďme značení:

- Nechť $B \subset \mathbb{R}$ je nekonečná indexová množina, typicky bude $B = (a, b), a, b \in \mathbb{R}$.
- Nechť pro každé $t \in B$ je $(T(t), \mathscr{T}(t), \mathcal{A}(t))$ rozložitelný dělitelný prostor zavedený ve větě (3.1) pro volbu $T = \mathbb{R}$.
- Nechť $T = \bigotimes_{t \in B} T(t)$ je množina všech reálných funkcí x,
  $x : (a, b) \to \mathbb{R}$, $t \mapsto x(t)$.
- N značí konečnou podmnožinu B.
  B' značí libovolnou podmnožinu B.
  $\mathcal{F}(B) = \{N \subset B : N \text{ je konečná}\}$
  Nechť $N = \{t_1, \ldots, t_n\}$, potom značíme:

$$\begin{aligned}
x_j &= x(t_j), \quad 1 \le j \le n, \\
x(N) &= (x_1, \ldots, x_n), \\
I_j &= I(t_j), \quad 1 \le j \le n, \\
I(N) &= I_1 \times \ldots \times I_n, \\
I[N] &= \{x : x(t) \in I(t), \ t \in N\}, \\
T(N) &= T_1 \times \ldots \times T_n = \mathbb{R}^n, \\
T(B') &= \bigotimes_{t \in B'} T(t).
\end{aligned}$$

- *Dimenzní množina* je libovolná množina $M \subset B$.

K součinovému prostoru T potřebujeme definovat systém intervalů. Interval $I \in \mathscr{T}$ je množina

$$I = I[N] = \bigotimes_{t \in N} I(t) \times \bigotimes_{t \in B \setminus N} T(t),$$

kde $I(t) \in \mathscr{T}(t)$ a N je konečná podmnožina B. Množina N se nazývá *dimenzní množina intervalu* I. Potom

$$\mathscr{T} = \{I : I(t) \in \mathscr{T}(t), \ t \in N, \ I = I[N], \ N \subset B\}.$$

Řekneme, že $I \in \mathscr{T}$ a $N \subset B$ jsou asociovány s $x \in T$, jestliže $I(N)$ je asociován s $x(N)$ v $T(N)$. Potom (I, x, N) je asociovaná trojice. Zbývá ještě definovat dělící soubory v součinovém prostoru T. Za tímto účelem definujme zobrazení L na $\overline{\mathbb{R}}^B$ a zobrazení δ na $\overline{\mathbb{R}}^B \times \mathcal{F}(B)$, které nám dají vhodnou třídu kalibrů. Nechť

$$\begin{array}{lrll} L: & \overline{\mathbb{R}}^B \to \mathcal{F}(B), & \textit{tedy} & L(x) \in \mathcal{F}(B); \\ \delta: & \overline{\mathbb{R}}^B \times \mathcal{F}(B) \to (0,+\infty), & \textit{tedy} & 0 < \delta(x,N) < +\infty. \end{array}$$

Volba L a δ nám dá reprezentanta této třídy kalibrů:

$$\gamma := (L, \delta)$$

Řekneme, že asociovaná trojice (I, x, N) je γ-jemná, jestliže:

$$N \supset L(x) \text{ a } (x(N), I(N)) \text{ je } \delta\text{-jemná v } \mathbb{R}^N.$$

Řekneme, že dělení $\mathcal{E}_\gamma$ je γ-jemné, jestliže každá trojice $(I, x, N) \in \mathcal{E}_\gamma$ je γ-jemná. Definujme nyní dělící soubor S_γ pro daný kalibr γ:

$$S_\gamma = \{(I, x, N) : (I, x, N) \text{ je } \gamma\text{-jemná}\},$$

a systém dělících souborů $\mathcal{A}$:

$$\mathcal{A} = \{S_\gamma : \gamma \text{ je kalibr}\}.$$

Poznamenejme, že motivace k takovéto volbě kalibrů je následující: V klasické kurzweilovské integraci v konečné dimenzi tvoříme riemannovské sumy pomocí dělení, jejichž intervaly mají strany omezené kladnou funkcí $\delta(x)$. Potom vhodným způsobem δ zmenšíme a intervaly se "scvrknou". V nekonečně rozměrném případě také potřebujeme intervaly $I[N]$ nějak "scvrknout". Máme na to dva různé způsoby. Jednak můžeme volbou $\delta_1 \leq \delta$ zmenšit strany intervalu $I[N]$ v dimenzích $N = \{t_1, \ldots, t_n\}$, ve kterých jsou omezeny, ale navíc můžeme beze změny δ zmenšit interval $I[N]$ volbou $L_1(x) \supset L(x)$, tj. přidáním dalších dimenzí, ve kterých musí být interval $I[N]$ omezený.

Věta 3.3. *Trojice $(T, \mathscr{T}, \mathcal{A})$ z předcházející konstrukce je dělitelný prostor.*

Důkaz.
Důkaz je podobný jako u Věty 3.1. Nejtěžší je ukázat první vlastnost dělitelného prostoru, tedy existenci γ-jemného dělení pro daný kalibr γ v $\mathbb{R}^B$, důkaz toho lze najít v článku [2], str. 795-803, Theorem 1. Druhá vlastnost se ukazuje analogicky jako u věty 3.1 s tím, že položíme navíc $L(x) = L^{(1)}(x) \cup L^{(2)}(x)$. Třetí, resp. čtvrtá vlastnost pro kalibr $\gamma = (\delta, L)$ platí stejně jako ve Větě 3.1 pro kalibr δ, uvažujeme-li příslušnou restrikci $\gamma_1 = \gamma|_{E^{(1)} \times E^{(1)} \times \mathcal{F}(B)}$, resp. spojení dvou kalibrů, tedy $\delta(x, N) = \min(\delta_j(x, N), \operatorname{dist}(\partial E^{(j)}, x))$, $j = 1, 2$ a $L(x) \supset L_1(x) \cup L_2(x)$.

□

Věta 3.4. *Dělitelný prostor* $(T, \mathscr{T}, \mathcal{A})$ *je rozložitelný.*

Důkaz.
Nechť $X^{(j)} \subset T$ jsou vzájemně disjunkní množiny, $\gamma_j = (L_j, \delta_j)$ jsou kalibry a $S_j = S_{\gamma_j}$ příslušné dělící soubory, $j = 1, 2, \dots$ Nechť $X = \bigcup_{j=1}^{\infty} X^{(j)}$. Definujme

$$L(x) = \begin{cases} L_j(x) & \text{pro } x \in X^{(j)}, j = 1, 2, \dots \\ N_x & \text{kde } N_x \subset B \text{ je konečná, pro } x \in T \setminus X, \end{cases}$$

$$\delta(x) = \begin{cases} \delta_j(x, N) & \text{pro } x \in X^{(j)}, j = 1, 2, \dots, N \in \mathcal{F}(B), \\ \delta_x & \text{kde } 0 < \delta_x < \infty, \text{ pro } x \in T \setminus X \end{cases}$$

a

$$\gamma := (L, \delta)$$

Potom pro $S = S_\gamma$ platí $S[X^{(j)}] = S^{(j)}$.

□

3.3 Definice a vlastnosti integrálu

V této sekci budeme stále uvažovat dělitelný prostor z Věty 3.3 a integrál definujeme pro něj. Definice v případě obecného dělitelného prostoru by byla podobná.

Definice 3.3. Nechť $h(I, x, N)$ je funkce na $\mathbb{R}^B$. Funkce h je integrovatelná s integrálem rovným α, jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ existuje kalibr γ tak, že

$$\left| \sum_{(I,x,N) \in \mathcal{E}_\gamma} h(I, x, N) - \alpha \right| < \varepsilon$$

pro každé γ-jemné dělení $\mathcal{E}_\gamma$ prostoru $\mathbb{R}^B$.

Takto definovaný integrál má vlastnosti potřebné pro použití v aplikacích. Uveďme alespoň některé z nich. Další pak lze najít v knize [6].

Věta 3.5 (základní vlastnosti)**.**
1.) Nechť funkce $h(I, x, N)$ *a* $k(I, x, N)$ *jsou integrovatelné v* $E \subset T$ *a* $a \in \mathbb{R}$*. Potom funkce* $(ah + k)$ *je integrovatelná v* E *a platí:*

$$\int_E (ah + k) = a \int_E h + \int_E k$$

2.) Nechť h *a* k *jsou reálné a* $h(I, x, N) \leq k(I, x, N)$ *pro všechny* $(I[N], x) \in S$*, kde* S *je libovolný dělící soubor, který dělí* E*, potom:*

$$\int_E h \leq \int_E k$$

Důkaz.
Lze nalézt v [6].

$\square$

Věta 3.6 (konečná aditivita). *Jestliže integrál $\int_E h(I,x,N)$ existuje a $P \subset E$ je částečná množina, potom $\int_P h(I,x,N)$ existuje a funkce $H : P \mapsto \int_P h(I,x,N)$ je konečně aditivní funkce částečných množin P množiny E.*

Důkaz.
Důkaz lze opět nalézt v publikaci [6], zde jej uvedeme pro ilustraci způsobu, jakým se vlastnosti integrálu na dělitelném prostoru ukazují.
Nechť P je částečná množina E. Zvolme dělící soubor S tak, že

$$\Big| \sum_{(I,x,N)\in D} h(I,x,N) - H(E)\Big| < \varepsilon$$

pro všechna dělení D z S množiny E. Pak S dělí P a $E \setminus P$. Označme α a β dva součty přes nějaká dělení P z S. Je-li nyní γ součet přes dvě dělení $E \setminus P$ z S, jsou $\alpha + \gamma$ a $\beta + \gamma$ součty přes dvě dělení E z S. Máme tedy

$$|\alpha + \gamma - H(E)| < \varepsilon, |\beta + \gamma - H(E)| < \varepsilon,$$

a tudíž $|\alpha - \beta| < 2\varepsilon$. Zvolme $\varepsilon = 1/j$, $S = S^{(j)}$, $j = 1, 2, 3, \ldots$ tak, že $S^{(1)} \supset S^{(2)} \supset S^{(3)} \supset \ldots$ Nechť α_j je součet přes P z $S^{(j)}$, $j = 1, 2, 3, \ldots$ Potom $|\alpha_r - \alpha_q| < 2/j$ pro $r > q \geq j$. Posloupnost α_j je cauchyovská, označme její limitu H_1. Limitním přechodem pro $q \to \infty$ dostáváme $|\alpha_r - H_1| \leq 2/j$. Nechť β_j je součet přes nějaké dělení P z $S^{(j)}$. Potom $|\beta_j - \alpha_r| < 2/j$ a $|\beta_j - H_1| < 4/j$. Tedy h je integrovatelná v P s integrálem H_1 a můžeme psát

$$H(P) = H_1 = \int_P h.$$

Nechť $P^{(1)}$, $P^{(2)}$ jsou disjunktní částečné množiny E. Potom $P^{(1)} \cup P^{(2)}$ je částečná množina E a integrály $H(P^{(1)})$, $H(P^{(2)})$, $H(P^{(1)} \cup P^{(2)})$ existují. Zvolme opět $\varepsilon = 1/j$ a $S^{(j)} = S^{(j)}_{P^{(1)}} \cap S^{(j)}_{P^{(2)}} \cap S^{(j)}_{P^{(1)} \cup P^{(2)}}$, $j = 1, 2, 3, \ldots$ Nechť $D^{(1)}_j$ je dělení $P^{(1)}$ z $S^{(j)}$ a $D^{(2)}_j$ je dělení $P^{(2)}$ z $S^{(j)}$. Potom $D^{(j)} = D^{(1)}_j \cup D^{(2)}_j$ je dělení $P^{(1)} \cup P^{(2)}$ z $S^{(j)}$ a platí

$$\Big| \sum_{(I,x,N)\in D^{(1)}_j} h(I,x,N) - H(P^{(1)})\Big| < \frac{1}{j},$$

$$\Big| \sum_{(I,x,N)\in D^{(2)}_j} h(I,x,N) - H(P^{(2)})\Big| < \frac{1}{j},$$

$$\Big| \sum_{(I,x,N)\in D_j} h(I,x,N) - H(P^{(1)} \cup P^{(2)})\Big| < \frac{1}{j}.$$

Protože

$$\sum_{(I,x,N)\in D_j} h(I,x,N) = \sum_{(I,x,N)\in D_j^{(1)}} h(I,x,N) + \sum_{(I,x,N)\in D_j^{(2)}} h(I,x,N),$$

platí

$$\left|\Big(\sum_{(I,x,N)\in D_j^{(1)}} h(I,x,N) + \sum_{(I,x,N)\in D_j^{(2)}} h(I,x,N)\Big) - H(P^{(1)} \cup P^{(2)})\right| < \frac{1}{j},$$

a tedy

$$\left|\Big(H(P^{(1)}) + H(P^{(2)})\Big) - H(P^{(1)} \cup P^{(2)})\right| < \frac{3}{j},$$

a protože to platí pro všechna j, dostáváme

$$H(P^{(1)}) + H(P^{(2)}) = H(P^{(1)} \cup P^{(2)}).$$

□

Pro náš integrál platí různé limitní věty umožňující záměnu limity a integrálu. Uveďme alespoň obdobu Leviho věty z teorie Lebesgueova integrálu.

Věta 3.7 (věta o monotónní konvergenci). *Nechť pro každou asociovanou trojici (I,x,N) a $j = 1,2,3,\ldots$ platí $h_j(I,x,N) \leq h_{j+1}(I,x,N)$, $h_j(I,x,N)$ jsou shora omezené se supremem $h(I,x,N)$, $h_j(I,x,N)$ jsou integrovatelné v E s integrálem $H_j(E)$ a $H_j(E)$ jsou shora omezené se supremem $H(E)$. Jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $S^{(0)} \in \mathcal{A}$ a pro každé $x \in E$ existuje j_0 tak, že je-li $j > j_0$ a $(I[N],x) \in S^{(0)}$, potom*

$$h(I,x,N) - h_j(I,x,N) < \varepsilon g_0(I,x,N),$$

kde $g_0(I,x,N)$ je integrovatelná v E, potom h je integrovatelná v E a

$$H(E) = \int_E h(I,x,N).$$

Důkaz.
Je uveden v [6]. Pro platnost věty je zásadní skutečnost, že dělitelný prostor $(T, \mathscr{T}, \mathcal{A})$ je rozložitelný.

□

Speciálně v teorii pravděpodobnosti, kdy chceme počítat střední hodnotu náhodné veličiny f s distribuční funkcí F, se nám bude hodit následující tvar předchozí věty.

Věta 3.8. *Nechť $F(I[N])$ je integrovatelná v E a pro $j = 1, 2, 3, \dots$ platí $f_j(x, N) \leq f_{j+1}(x, N)$ a $f_j(x, N)$ jsou shora omezené se supremem $f(x, N)$ a nechť $f_j(x, N)F(I[N])$ jsou integrovatelné v E a jejich integrály jsou shora omezené. Jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ a každé $x \in E$ existují j_0 a M tak, že pro $j > j_0$ a $N \supset M$ platí*

$$f(x, N) - f_j(x, N) < \varepsilon$$

potom $f(x, N)F(I[N])$ je integrovatelná v E a

$$\int_E f(x, N)F(I[N]) = \lim_{j\to\infty} \int_E f_j(x, N)F(I[N]).$$

Důkaz.
Lze nalézt např. v [6], je obdobný jako u Věty 3.6.

□

Popis dalších vlastností integrálu jako např. větu o dominované konvergenci, větu o stejnoměrné konvergenci nebo možnosti záměny derivace a integrálu lze najít v [6]. Uvědomme si dále, že pokud je množina dimenzí B konečná, nemůžeme při zjemňování dělení zvětšovat $L(x)$ bez omezení a nakonec se dostaneme do situace, že $L(x) = B$ pro všechna $x \in \overline{\mathbb{R}}^B$ a dostaneme klasická dělení určená kalibry z kapitoly 2, sekce 2. Z toho plyne, že tento integrál rozšiřuje klasický Henstockův–Kurzweilův integrál v $\mathbb{R}^n$.

3.4 Aplikace v teorii pravděpodobnosti

Využijme nyní v předchozí kapitole definovaný integrál k vytvoření základů teorie pravděpodobnosti, jak bylo naznačeno v kapitole 2.

Definice 3.4. Nechť prostor jevů je $\Omega = \mathbb{R}^B$. Nechť f je náhodná veličina na Ω s distribuční funkcí F, tj. $f : \mathbb{R}^B \to \mathbb{R}$ ($\mathbb{C}$) a $F : \mathscr{T} \to [0, 1]$ je konečně aditivní a $F(\Omega) = 1$, kde $\mathscr{T}$ je množina všech konečně rozměrných válců $I[N]$ v $\mathbb{R}^B$ definovaná v sekci 3.2. Potom *střední hodnota* náhodné veličiny f je číslo

$$\mathbf{E}^F(f) := \int_\Omega f(x)F(I[N]),$$

pokud integrál existuje.

Kromě počítání středních hodnot náhodných veličin potřebujeme umět také určit pravděpodobnosti množin.

Definice 3.5. Nechť $A \subset \Omega$. *Pravděpodobnost množiny* A je číslo

$$P(A) := \mathbf{E}^F(\mathbb{I}_A),$$

pokud střední hodnota existuje, $\mathbb{I}_A$ je indikátorová funkce množiny A.

Už tedy umíme určit pravděpodobnosti některých množin, zatím ale nevíme, které to jsou. Analogicky jako v teorii míry označme $\mathfrak{M}$ systém množin, jejichž pravděpodobnost existuje. Budeme jim opět říkat měřitelné množiny. Tedy $\mathfrak{M} = \{A \subset \Omega : \mathbf{E}^F(\mathbb{I}_A) \text{ existuje}\}$. Následující věta ukazuje, že třída měřitelných množin je dostatečně bohatá.

Věta 3.9. *Nechť* $\Omega = \mathbb{R}^B$ *a* F *jsou jako výše. Potom* $\mathfrak{M} \supset \sigma(\mathscr{T})$, *kde* $\mathscr{T}$ *je množina všech konečně rozměrných válců.*

Důkaz.

- $\mathbf{E}^F(\mathbb{I}_\Omega) = \int_\Omega 1 \cdot F(I[N]) = F(\Omega) = 1$. Tedy $\Omega \in \mathfrak{M}$.
- $\mathbf{E}^F(\mathbb{I}_\emptyset) = \int_\Omega 0 \cdot F(I[N]) = 0$. Tedy $\emptyset \in \mathfrak{M}$.
- Je-li $J \subset \Omega$ interval, potom $\mathbf{E}^F(\mathbb{I}_J)$ existuje podle věty 3.6. Tedy $J \in \mathfrak{M}$.
- Je-li $A \in \mathfrak{M}$, pak $\mathbf{E}^F(\mathbb{I}_A)$ je integrovatelná a $\mathbf{E}^F(\mathbb{I}_{\Omega \setminus A}) = \mathbf{E}^F(\mathbb{I}_\Omega) - \mathbf{E}^F(\mathbb{I}_A)$ je integrovatelná podle Věty 3.5 a tedy $\Omega \setminus A \in \mathfrak{M}$.
- Jsou-li $A_n \in \mathfrak{M}$, $n = 1, 2, \dots$ po dvou disjunktní, potom $\mathbb{I}_{A_1 \cup \dots \cup A_n} = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{I}_{A_i}$ je integrovatelná pro každé $n \in \mathbb{N}$ a $\sum_{i=1}^{n} \mathbb{I}_{A_i} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{I}_{A_i} = \mathbb{I}_{\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i}$ monotónně a tedy podle Věty 3.8 platí $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathfrak{M}$.

$\square$

Na závěr uveďme pro ilustraci dva příklady jak v závislosti na distribuční funkci F vhodně zvolit kalibr, integrujeme-li indikátor intervalu, a tím ukázat rovnost $\int_\Omega \mathbb{I}_J(x) F(I) = F(J)$, kde $J \subset \Omega$ je interval.

Příklad 3.1. Zabývejme se nejprve situací, kdy $J \subset \mathbb{R}^n$ pro n přirozené a pro F platí

$$\lim_{\lambda_n(I) \to 0} F(I) = 0, \tag{3.1}$$

kde λ_n je n-rozměrná Lebesgueova míra. Tato situace odpovídá náhodné veličině s hustotou vzhledem k Lebesgueově míře v klasické teorii. Nechť

$J \subset \mathbb{R}^n$ je interval. Zvolme $\varepsilon > 0$ libovolně a hledejme kalibr δ tak, aby pro každé δ-jemné dělení D prostoru $\mathbb{R}^n$ platilo

$$\Big| \sum_{(I,x)\in D} \mathbb{I}(x)F(I) - F(J)\Big| < \varepsilon.$$

Protože platí (3.1), existuje interval $K \subset J^\circ$ tak, že $F(J) - F(K) < \varepsilon$ (kde J° značí vnitřek intervalu J). Dále existuje interval H tak, že $J \subset H^\circ$ a $F(H) - F(J) < \varepsilon$. Zvolíme kalibr δ roven konstantě d, kde $d = \min\{\operatorname{dist}(\partial K, \partial J),\ \operatorname{dist}(\partial J, \partial H)\}$, přičemž pro výpočet vzdálenosti uvažujeme maximovou normu v $\mathbb{R}^n$. Potom pro každé δ-jemné dělení D je sjednocením intervalů příslušejících nenulovým sčítancům v riemannovském součtu $\sum\limits_{(I,x)\in D} \mathbb{I}_J(x)F(I)$ množina G taková, že $K \subset G \subset H$ a

$$\Big| \sum_{(I,x)\in D} \mathbb{I}_J(x)F(I) - F(J)\Big| < \varepsilon.$$

Tedy $(P(J) =)\ \mathbf{E}(\mathbb{I}_j) = F(J)$.

Jsme-li obecně v $\mathbb{R}^B$ a F je taková, že pro každý konečně rozměrný válec $J[N] = I_{i_1} \times \ldots \times I_{i_n} \times \mathbb{R}^{B\setminus N}$, $N = \{i_1, \ldots, i_n\}$, platí

$$\lim_{\lambda_n(I(N))\to 0} F(J[N]) = 0,$$

kde $I(N) = I_{i_1} \times \ldots \times I_{i_n}$,potom F odpovídá v náhodnému procesu, jehož všechna konečně rozměrná rozdělení jsou spojitá. Postup při určení kalibru téměř stejný jako v konečné dimenzi. Zde pro dané $\varepsilon > 0$ zvolíme kalibr $\gamma = (L, \delta)$ následovně: $L(x) = N,\ x \in \mathbb{R}^B$ a $\delta(x, N) = d$, přičemž najdeme konečně rozměrné válce $K[N] \subset J[N] \subset H[N]$ a určíme d analogicky jako v konečné dimenzi.

Příklad 3.2. Nechť nyní existuje nejvýše spočetná množina $H \subset \mathbb{R}^n$ a pro každé $h \in H$ existuje číslo (pravděpodobnost, jak se ukáže) $p_h > 0$ tak, že

$$\sum_{h\in H} p_h = 1 \text{ a } F(J) = \sum_{h\in J} p_h$$

pro každý interval $J \subset \mathbb{R}^n$. Takováto distribuční funkce F odpovídá náhodné veličině, jejíž rozdělení je diskrétní.

Zde si už nevystačíme s konstantním kalibrem. Je-li $H = \{h_1, \ldots, h_m\}$ konečná, definujme množiny $H_1 = H \cap \partial J$ a $H_2 = H \cap (\mathbb{R}^n \setminus \partial J)$. Nyní ke každému h_i definujme funkci $\delta_i : \mathbb{R}^n \to (0, \infty)$ takto:

$$\delta_i(x) \quad = \quad \begin{cases} \min\{\operatorname{dist}(x, h),\ h \in H,\ x \neq h\} & \text{pro } x = h_i, \\ \operatorname{dist}(x, \partial J) & \text{pro } h_i \in H_1,\ x \notin H, \\ \operatorname{dist}(h_i, \partial J) & \text{pro } h_i \in H_2,\ x \notin H, \end{cases}$$

přičemž v obou případech uvažujeme v $\mathbb{R}^n$ maximovou normu. Nyní stačí položit

$$\delta(x) = \min_{i=1,\dots,m}\{\delta_i(x)\}$$

a máme kalibr takový, že pro každé δ-jemné dělení D prostoru $\mathbb{R}^n$ platí

$$\sum_{(I,x)\in D} \mathbb{I}_J(x)F(I) = F(J). \tag{3.2}$$

Je-li H nekonečná, tj. $H = \{h_i\}_{i=1}^{\infty}$, pak pro dané $\varepsilon > 0$ najdeme i_0 tak, že $\sum\limits_{i=i_0+1}^{\infty} p_{h_i} < \frac{\varepsilon}{2^n}$, tím dostaneme množinu $H^{i_0} = \{h_1,\dots,h_{i_0}\}$ a pro ni najdeme kalibr δ postupem z předchozího odstavce, potom pro δ-jemné dělení sice neplatí rovnost (3.2), ale chyba, které jsme se dopustili, je maximálně ε, neboť každá značka z označeného dělení se může vyskytnout v maximálně 2^n sčítancích.

Nechť obor integrace je $\mathbb{R}^B$, kde B je nespočetná, a F je definována následovně. Množina H je nespočetná a její prvky jsou afinní podprostory v $\mathbb{R}^B$. Nechť platí $H = \bigcup\limits_{N\in\mathcal{F}(B)} H_N$, kde

$$H_N = \{h_N^i\}_{i=1}^{\infty} \text{ a } h_N^i = \{(r_{t_1}^i,\dots,r_{t_n}^i)\} \times \mathbb{R}^{B\setminus N},$$

kde $r_{t_1}^i,\dots,r_{t_n}^i \in \mathbb{R}$ a $N = \{t_1,\dots,t_n\}$, $n\in\mathbb{N}$, $i = 1,2,3,\dots$ a množina pravděpodobností je

$$P = \bigcup_{N\in\mathcal{F}(B)} P_N,\ P_N = \{p_N^i\}_{i=1}^{\infty}$$

a pro každou $N\in\mathcal{F}(B)$ platí

$$\sum_{i=1}^{\infty} p_N^i = 1 \text{ a } p_N^i > 0.$$

a pro každý konečně rozměrný válec $J[N]$ platí

$$F(J[N]) = \sum_{\{i:h_N^i\subset J[N]\}} p_N^i.$$

Tato volba F odpovídá náhodnému procesu, jehož všechna konečně rozměrná rozdělení jsou diskrétní.

Kalibr $\gamma = (L,\delta)$ určíme kombinací postupů pro spojité rozdělení v nekonečné dimenzi a pro diskrétní rozdělení v $\mathbb{R}^n$. Tedy pro konečně rozměrný válec $J[N]$ definujeme funkci $L(x) = N$, $x\in\mathbb{R}^B$ a kalibr $\delta(x,N)$ určíme pro projekci $J(N)$ intervalu $J[N]$ do podprostoru $\mathbb{R}^N$ a pro projekci množiny H_N do podprostoru $\mathbb{R}^N$, tedy uvažujeme body $h_N^i(N) = \{(r_{t_1}^i,\dots,r_{t_n}^i)\}$, postupem popsaným výše pro konečně rozměrný případ.

Závěr

Tato práce nám ukazuje, že alternativní přístup, využívající zobecněnou Riemannovu integraci, dává přinejmenším v základních situacích výsledky srovnatelné s klasickým přístupem. Jeho výhody, jak již bylo zmíněno v kapitole 2, sekci 2, jsou intuitivnost a jednoduchost v některých situacích (integrujeme-li na přímce nebo v $\mathbb{R}^n$). Na druhou stranu ve složitějších situacích se tento přístup komplikuje, už pro popis jednoduchých náhodných procesů potřebujeme vybudovat teorii integrace v nekonečně rozměrném prostoru $\mathbb{R}^B$, která, dle mého názoru, není jednodušší ani intuitivnější než klasická teorie vyžadující znalosti teorie míry a Lebesgueova integrálu. Dále je vidět, že struktura dělitelného prostoru, nutná pro vybudování integrálu, vyžaduje, aby prostor, přes nějž chceme integrovat, byl kartézský, a tudíž zde není velký prostor pro zobecňování na situace, kdy náhodná veličina (v klasickém smyslu) má hodnoty v nějakém abstraktním prostoru.

Literatura

[1] Henstock, R.: *The General Theory of Integration*, Clarendon Press, Oxford, 1991.

[2] Henstock, R., Muldowney, P., Skvorstov, V.A.: *Partitioning infinitedimensional spaces for generalized Riemann integration*, Bulletin of London Mathematical Society, 795-803, London, 2006.

[3] Lachout P.: *Teorie pravděpodobnosti*, Karolinum, Praha, 2004.

[4] Malý J.: *Teorie míry a integrálu*, učební text pro MAA068.

[5] Muldowney P.: *A Riemann aproach to radndom variation*, Mathematica Bohemica, 167-188, Praha, 2006.

[6] Muldowney P.: *A general theory of integration in function spaces*, Longman Scientific & Technical, Harlow, 1987.

[7] Schwabik Š., Ye G.: *Topics in Banach Space Integration*, World Scientific, Singapore, 2005.