Oponentský posudek bakalářské práce

Alternativní matematické základy pravděpodobnosti

Jan Bártek

Práce se zabývá možností vybudovat pravděpodobnost pomocí zobecněného Riemannova integrálu tak, aby nebylo nutné používat teorii míry a Lebesgueův integrál. Je členěna do tří kapitol, z nichž první obsahuje základní pojmy z klasické Kolmogorovovy axiomatiky teorie pravěpodobnosti, ve druhé je použit zobecněný Riemannův integrál v případě reálných náhodných veličin a ve třetí kapitole je tento přístup zobecňován pro mnohorozměrné a nekonečně rozměrné případy. Práce je inspirována článkem P. Muldowneye *A Riemann approach to random variation*.

Zatímco v jednorozměrném případě lze říci, že Riemannův integrál je trochu intuitivnější než Lebesgueův a nevyžaduje budování míry a měřitelných funkcí, pak zobecněný Riemannův (Kurzweilův) integrál již tak intuitivní není a jeho přenesení na mnohorozměrné prostory je, dá se říci, velmi složité. To ostatně uznává i autor práce v závěru. Místo poměrně snadného pojmu σ-algeber se zavádějí dělitelné prostory, které musí navíc být rozložitelné, což jsou pojmy, jejichž definice zabírá mnoho stran. Připočteme-li nutnost zabývat se kalibrační funkcí, mohu se ztotožnit s autorovým závěrem, že se nejedná ani o snazší, ani o intuitivnější přístup než nabízí teorie míry. Troufnu si dokonce říci, že naopak Kolmogorovova definice pravděpodobnosti je v tomto případě jednodušším a mocnějším nástrojem.

Práce je místy psaná jen stručně a nezabývá se příliš detaily. Například v druhé a třetí kapitole se nediskutuje třída funkcí, které mohou být použity jako náhodné veličiny (což jsou v případě klasické pravděpodobnosti měřitelné funkce). Autor zavádí některé pojmy dost nestandardně (distribuční funkce v definicích 2.3 a 3.4), pojednává jen základní charakteristiky náhodných veličin (střední hodnota). Nenašel jsem také porovnání klasického mírově teoretického přístupu s alternativním riemannovským.

Přístup popsaný v části 2.1 mi poněkud připomíná četnostní přístup k pravděpodobnosti (viz např. Popper *Logika vědeckého zkoumání*). Zde bychom mohli dlouze diskutovat o tom, co je to vlastně pravděpodobnost, ale to jistě není účelem předložené práce.

K práci mám následující otázky a výtky:

- Na straně 17 je zavedena kalibrace a K-dělení. Ve třetím bodě definice 2.1 se za δ-jemný interval I označuje interval $[u, x)$, případně $[x, v)$, kde $x - u < \delta$, případně $v - x < \delta$. Pominu-li, že má být $\delta(x)$, nacházíme v definici Kurzweilova integrálu dělení takové, že $u < v$, $u \leq x \leq v$ a $[u, v] \subset (x - \delta(x), x + \delta(x))$, tedy asociovaný bod může být kdekoliv uvnitř intervalu (viz například Schwabik *Integrace v* $\mathbb{R}$ *(Kurzweilova teorie)*). Jak je toto v souladu?
- V definici 3.1 se zavádí dělící soubor $S = \{(I, x) : I \in \mathcal{T}, x \in T\}$. V jakém vztahu jsou x a I?
- Na straně 20 nahoře bod (iii) není srozumitelný. Nejspíš chybí slovo *existuje*.
- V důkazu věty 3.1 dole na straně 20 se píše, že „δ dělí E". Ve skutečnosti δ je kalibr a nic nedělí, dělí S_δ. Na tomtéž místě se hovoří o tom, že pokud S_{δ_2} dělí E a $\delta_1 \leq \delta_2$, pak i S_{δ_1} dělí E. Na první pohled mi není zřejmé, proč by to měla být pravda– jde zejména o existenci konečného pokrytí množiny E.

- Na straně 22 se vyskytuje nedefinované značení $I(t_j)$, případně T_1. Je-li, jak je uvedeno, $T(N) = T_1 \times \cdots \times T_n = \mathbb{R}^n$, proč pak není $T(B) = \bigotimes_{t \in B} T(t)$ rovno $\mathbb{R}^B$?
- Jak je na straně 23 dole definována vzdálenost $\mathrm{dist}(E, x)$?
- V části 3.3 by mohlo být řečeno, které funkce jsou integrovatelné.
- V definici 3.4 se za náhodné veličiny uvažují všechny funkce $f : \mathbb{R}^B \to \mathbb{R}$. Je opravdu možné uvažovat *libovolnou* funkci jako náhodnou veličinu?

Mohu konstatovat, že práce má drobné nedostatky v matematickém formalismu, objevuje se například nedefinované značení. Rovněž některé formulace vět a definic nejsou úplně srozumitelné. Práce však bezesporu splňuje požadavky kladené na bakalářskou práci a proto *doporučuji předloženou práci uznat jako bakalářskou.*

RNDr. Daniel Hlubinka, PhD
8. září 2006