Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

# BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Miroslav Stacho

# Viskózní řešení diferenciálních rovnic a aplikace ve financích

Katedra pravdepodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí bakalářské práce: Mgr. Petr Dostál, Ph.D.
Studijní program: Matematika

2007

Na tomto mieste by som sa rád poďakoval vedúcemu práce Mgr. Petrovi Dostálovi, PhD. za pomoc, trpezlivosť a množstvo cenných rád, ktoré mi poskytol pri písaní tejto práce.

Prehlasujem, že som svoju bakalársku prácu napísal samostatne a výhradne s použitím citovaných prameňov. Súhlasím so zapožičiavaním práce a jej zverejňovaním.

V Prahe dňa 9.8.2007 Miroslav Stacho

# Obsah

Názov práce: Viskózní řešení diferenciálních rovnic a aplikace ve financích
Autor: Miroslav Stacho
Katedra (ústav): Katedra pravdepodobnosti a matematické statistiky
Vedúci bakalárskej práce: Mgr. Petr Dostál, Ph.D.
e-mail vedúceho: dostal@karlin.mff.cuni.cz

Abstrakt: V predloženej práci sa venujeme teórii optimálneho riadenia. Zavedieme pojmy riadenie, nákladová funkcia, hodnotová funkcia. Pre deterministický prípad odvodíme princíp dynamického programovania, parciálnu diferenciálnu rovnicu dynamického programovania a dokážeme tzv. overovaciu vetu. Keďže hodnotová funkcia často nespĺňa podmienky, aby mohla byť klasickým riešením rovnice dynamického programovania, zadefinujeme pojem viskózneho riešenia, ukážeme niektoré jeho vlastnosti a uvedieme príklad, kedy hodnotová funkcia je viskóznym riešením rovnice dynamického programovania, ale nie riešením chápaným v klasickom zmysle. Obdobné postupy ako v deterministickom prípade aplikujeme na problém optimálneho riadenia portfólia v prípade nulových aj nenulových transakčných nákladov, ak tržná cena akcie je modelovaná pomocou geometrického Brownovho pohybu. Výsledkom je heuristické odvodenie optimálnej obchodnej stratégie založenej na symbolickom prístupe k stochastickému diferenciálu.
Kľúčové slová: viskózne riešenie, dynamické programovanie, optimálne riadenie portfólia

Title: Viscosity solution of differiential equation and application in finance
Author: Miroslav Stacho
Department: Department of Probability and Mathematical Statistics
Supervisor: Mgr. Petr Dostál, Ph.D.
Supervisor's e-mail address: dostal@karlin.mff.cuni.cz

Abstract: In the present work we study theory of optimal control. We define notions of control, cost function and value function. We derive the dynamic programming principle, the dynamic programming equation and prove so called verification theorem in deterministic case. However, the value function is not often smooth enough to be a solution of programming equation in classical sense. That is why we define viscosity solution, we also show its properties and bring an example, in which the value function is viscosity solution of dynamic programming equation, but is not solution in classical sense. We apply the basic methods of this theory to the problem of optimal control of portfolio in both cases with or without transaction costs, in order to obtain a candidate for optimal investment strategy.
Keywords: viscosity solution, dynamic programming, optimal control of portfolio

# Kapitola 1

# Úvod

Táto práca sa v prvom rade zaoberá úvodom do teórie nelineárneho riadenia v deterministickom prípade založenom na pojmoch viskózneho riešenia a hodnotovej funkcie. Táto časť je aj s potrebnými dôkazmi rozvinútá v kapitole 2, ktorá čerpá z knihy [1].

Ďalšia kapitola je venovaná zavedeniu pojmu Wienerovho procesu a Itôovej formule a slúži ako úvod ku kapitole 4. Táto kapitola spolu s úvodmi v nasledujúcej kapitole čerpá z práce [2].

Štvrtá kapitola je venovaná problému optimálneho riadenia portfólia pre prípad nulových aj nenulových proporcionálnych transakčných nákladov. Je založená na formálnom (myslené symbolickom) prístupe k stochastickému diferenciálu. Tento prístup nám umožňuje názorne ukázať, ako myšlienky obsiahnuté v druhej kapitole môžu viesť k heuristickému (myslené rýdzo intuitívnemu) odvodeniu optimálnej obchonej stratégie. Formálne (rigorózne) overenie je nad rámec tohto textu, pretože ho svojou technickou náročnosťou zásadne presahuje.

Záverečnú kapitolu tvoria dodatky k predchádzajúcim kapitolám a sú v nej odvodené potrebné vlastnosti študovaných objektov.

# Kapitola 2

# Optimálne riadenie a viskózne riešenia

Cieľom tejto kapitoly je uviesť teóriu optimálneho riadenia a zadefinovať pojem viskózneho riešenia v najjednoduchšom deterministickom prípade. Všeobecná teória je popísaná v [1].

## 2.1 Voľné riadnie s pevným horizontom

Nech je daný konečný fixný čas $T > 0$ a uzavretá množina $U \subseteq \mathbf{R}^m$, ktorej prvky budeme nazývať *rozhodnutia*. Uvažujme ďalej čas $t \in [0, T)$. Potom každú ohraničenú lebesgueovsky merateľnú funkciu $u$ na [t,T] s hodnotami v $U$, tj. každý prvok množiny (2.1), nazveme *riadením*, kde

$$\mathcal{U}(t) := L^\infty([t, T], U). \tag{2.1}$$

Predpokladajme, že stav systému v čase $s$ je popísaný hodnotou $y_s \in O \subseteq \mathbf{R}^n$ , kde $O$ je otvorená *množina všetkých prípustných stavov*, a že príslušná infinitezimálna zmena tohoto stavu je daná integrálnou rovnicou zapísanou v diferenciálnom tvare

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} y_s = f(s, y_s, u_s), \quad t \leq s \leq T,$$

tj.

$$y_r = y_t + \int_t^r f(s, y_s, u_s)\, \mathrm{d}s, \quad t \leq r \leq T, \tag{2.2}$$

kde $f \in C(\bar{Q} \times U, \mathbf{R}^n)$ splňuje podmienku (2.3), $Q := [t,T) \times O$ a $\bar{Q} = [0,T] \times \bar{O}$ značí uzáver $Q$ v $\mathbf{R}^{n+1}$ a $\bar{O}$ uzáver $O$ v $\mathbf{R}^n$ a kde $C(\bar{Q} \times U, \mathbf{R}^n)$ je množina všetkých spojitých zobrazení z $\bar{Q} \times U$ do $\mathbf{R}^n$. Podľa vety 5.1 podmienka

$$\forall N \in \mathbf{N}\ \exists K_N \in \mathbf{R}\ \ [||v|| \le N \Rightarrow ||f(t,y,v) - f(t,z,v)|| \le K_N ||y-z||] \tag{2.3}$$

zaručuje, že pre každé $u \in \mathcal{U}(t)$ existuje práve jedno $(y_s, s \in [t,T])$ riešenie rovnice (2.2) vyhovujúce počiatočnej podmienke

$$y_t = x \in \mathbf{R}^n, \tag{2.4}$$

ktoré budeme ďalej označovať
$$y = \mathcal{R}_t(u,x).$$

Slovami budeme hovoriť, že stav systému $y_s$ v čase $s \ge t$ odpovedá riadeniu $u$ a počiatočnej podmienke $x$ v čase $t$. Vo vzťahu (2.3) $||\cdot||$ označuje napr. euklidovskú normu v $\mathbf{R}^n$. Symbolom $\tau := \inf\{r \ge t;\ y_r \notin O\}$ budeme označovať okamih prvého výstupu $y$ z množiny prípustných stavov $O$, čo budeme skrátene zapisovať $\tau = \pi_y(O)$. Uvažujeme úlohu nájsť riadenie $u \in \mathcal{U}(t)$ minimalizujúce

$$J(t,x;u) := \int_t^{T\wedge\tau} L(s, y_s, u_s)\,\mathrm{d}s + \Psi(T\wedge\tau, y_{T\wedge\tau});\ \ y = \mathcal{R}_t(u,x),\ \ \tau = \pi_y(O), \tag{2.5}$$

kde $L \in C(\bar{Q} \times U)$ predstavuje infinitezimálnu stratu v čase $s$ zodpovedajúcu stavu $y_s$ a rozhodnutiu $u_s$ a $\Psi(r,y)$ označuje absolútnu stratu zodpovedajúcu opusteniu množiny $Q$ v čase $r$, ak $(r,y) \in \bar{Q} \backslash Q$. Vo poslednej rovnosti sme použili označenie $T \wedge \tau := \min\{T, \tau\}$.

## 2.2 Princíp dynamického programovania

Odteraz budeme uvažovať problém riadenia na intervale $[0,T]$ tak, aby sme mohli premennú $t \in [0,T]$ používať pre čas. Pod pojmom *hodnotová funkcia* budeme rozumiet funkciu

$$V(t,x) := \inf\{J(t,x;u);\ u \in \mathcal{U}(t)\} \tag{2.6}$$

pre $(t,x) \in \bar{Q}$. Ak $(t,x) \in \bar{Q} \setminus Q$ a $y = \mathcal{R}_t(u,x)$, potom $t = \pi_y(O)$ platí pre každé $u \in \mathcal{U}(t)$. Odtiaľ ihneď dostávame, že $J(t,x;u) = \Psi(t,x)$ a prechodom k infimu rovnosť $V(t,x) = \Psi(t,x)$. Skrátene

$$(t,x) \in \bar{Q} \setminus Q \Rightarrow V(t,x) = \Psi(t,x). \tag{2.7}$$

Riadenie $u \in \mathcal{U}(t)$, pre ktoré platí rovnosť

$$V(t,x) = J(t,x;u),$$

budeme nazývať *optimálne riadenie*. Budeme predpokladať, že $V(t,x) > -\infty$ platí pre každé $(t,x) \in \bar{Q}$. Tento predpoklad je splnený napríklad v prípade, ak stratové funkcie $L$ a $\Psi$ sú zdola ohraničné.

**Lemma 2.1.** *Pre každú počiatočnú podmienku* $(t,x) \in \bar{Q},\ r \in [t,T]$ *a riadenie* $u \in \mathcal{U}(t)$ *platí*

$$V(t,x) \le \int_t^{r\wedge\tau} L(s,y_s,u_s)\,ds + V(r\wedge\tau, y_{r\wedge\tau}), \tag{2.8}$$

*kde* $\tau = \pi_y(O)$ *a* $y = \mathcal{R}_t(u,x)$.

*Dôkaz.* Z definície $V$ a predpokladu $V(t,x) > -\infty$ dostávame, že pre každé $\delta > 0$ existuje $\hat{u} \in \mathcal{U}(r)$ také, že

$$\int_r^{\hat{\tau}\wedge T} L(s,\hat{y}_s,\hat{u}_s)\,\mathrm{d}s + \Psi(\hat{\tau}\wedge T, y_{\hat{\tau}\wedge T}) = J(r,y_r;\hat{u}) < V(r,y_r) + \delta,$$

kde $\hat{\tau} = \pi_{\hat{y}}(O) \ge r$ a $\hat{y} = \mathcal{R}_r(\hat{u},y_r)$. Definujme $\tilde{u}$ nasledujúcim prepisom

$$\tilde{u} = \begin{cases} u_s, & s \le r \\ \hat{u}_s, & s > r. \end{cases}$$

Buď $\tilde{y} = \mathcal{R}_t(\tilde{u},x)$, tj. $\tilde{y}_s = y_s$ pre $s \le r$, $\tilde{y}_s = \hat{y}_s$ pre $s \ge r$. Potom

$$\begin{aligned} V(t,x) &\le J(t,x;\tilde{u}) \\ &= \int_t^{\tilde{\tau}\wedge T} L(s,\tilde{y}_s,\tilde{u}_s)\,\mathrm{d}s + \Psi(\tilde{\tau}\wedge T, \tilde{y}_{\tilde{\tau}\wedge T}) \\ &= \int_t^{r\wedge\tilde{\tau}} L(s,y_s,u_s)\,\mathrm{d}s + \int_{r\wedge\tilde{\tau}}^{T\wedge\tilde{\tau}} L(s,\hat{y}_s,\hat{u}_s)\,\mathrm{d}s + \Psi(\tilde{\tau}\wedge T, \hat{y}_{\tilde{\tau}\wedge T}) \\ &< \int_t^{r\wedge\tilde{\tau}} L(s,y_s,u_s)\,\mathrm{d}s + V(r\wedge\tilde{\tau}, y_{r\wedge\tilde{\tau}}) + \delta \\ &= \int_t^{r\wedge\tau} L(s,y_s,u_s)\,\mathrm{d}s + V(r\wedge\tau, y_{r\wedge\tau}) + \delta, \end{aligned}$$

pretože

$$V(r\wedge\tilde{\tau}, y_{r\wedge\tilde{\tau}}) = V(r,y_r),$$

ak $r \leq \tilde{\tau}$,

$$V(r \wedge \tilde{\tau}, y_{r\wedge\tilde{\tau}}) = V(\tilde{\tau}, y_{\tilde{\tau}}) = \Psi(\tilde{\tau}, y_{\tilde{\tau}}) = \Psi(\tilde{\tau} \wedge T, \hat{y}_{\tilde{\tau}\wedge T}),$$

ak $r > \tilde{\tau}$, kde $\tilde{\tau} := \pi_{\tilde{y}}(O)$ spĺňa $\tilde{\tau} \wedge r = \tau \wedge r$. $\square$

**Lemma 2.2** (Princíp dynamického programovania)**.** *Nech* $(t, x) \in \bar{Q}$, $r \in [t, T]$. *Potom platí*

(2.9)

$$V(t,x) = \inf_{u\in\mathcal{U}(t)} \left\{ \int_t^{r\wedge\tau} L(s, y_s, u_s)\, ds + V(r \wedge \tau, y_{r\wedge\tau});\ \tau = \pi_y(O),\ y = \mathcal{R}_t(u, x) \right\}.$$

*Ak* $u$ *je optimálne riadenie, tj.* $V(t,x) = J(t,x;u)$, *potom platí*

$$V(t,x) = \int_t^{r\wedge\tau} L(s, y_s, u_s)\, ds + V(r \wedge \tau, y_{r\wedge\tau}), \tag{2.10}$$

*kde* $\tau = \pi_y(O)$ *a* $y = \mathcal{R}_t(u, x)$.

*Dôkaz.* Nerovnosť "$\leq$" vo vzťahu (2.9) plynie z lemma 2.1. Pre obrátenú nerovnosť uvažujme ľubovoľné $\delta > 0$. Potom existuje tzv. $\delta$-optimálne riadenie $u \in \mathcal{U}(t)$ splňujúce

$$\begin{aligned}
\delta + V(t,x) &\geq J(t,x;u) \\
&= \int_t^{\tau\wedge T} L(s, y_s, u_s)\, \mathrm{d}s + \Psi(\tau \wedge T, y_{\tau\wedge T}) \\
&= \int_t^{r\wedge\tau} L(s, y_s, u_s)\, \mathrm{d}s + J(r \wedge \tau, y_{r\wedge\tau}; u) \\
&\geq \int_t^{r\wedge\tau} L(s, y_s, u_s)\, \mathrm{d}s + V(r \wedge \tau, y_{r\wedge\tau}),
\end{aligned}$$

kde $\tau = \pi_y(O)$ a $y = \mathcal{R}_t(u, x)$. Dokázali sme tak prvé tvrdenie lemma. Ak $u$ je optimálne riadenie, tj. $V(t,x) = J(t,x;u)$, dostávame podobne ako v prvej časti

$$V(t,x) - \int_t^{r\wedge\tau} L(s, y_s, u_s)\, \mathrm{d}s = J(r \wedge \tau, y_{r\wedge\tau}; u) \geq V(r \wedge \tau, x_{r\wedge\tau}),$$

čo spolu s (2.9) dáva (2.10). $\square$

## 2.3 Rovnica dynamického programovania

Hovoríme, že funcia je v nejakom bode *diferencovateľná*, ak má táto funkcia v danom bode totálny diferenciál. Na chvíľu budeme predpokladať, že hodnotová funkcia $V(t, x)$

je spojito diferencovateľná. Formálne odvodíme rovnicu dynamického programovania a dokážeme tzv. overovaciu vetu. Predpoklad diferencovateľnosti hodnotovej funkcie však vo všeobecnosti neplatí. V tomto prípade je nutné zaviest pojem "slabé" riešenie, čomu sa ale budeme venovať neskôr. Množinu všetkých $k$-krát spojito diferencovateľných funkcií na množine $A \subseteq \mathbf{R}^k$ pre $k \in \mathbf{N}$ budeme označovať symbolom $C^k(A)$. Z princípu dynamického programovania pre $(t,x) \in Q$ a $r = t+h$, kde $0 < h \leq T - t$, pri označení $y = \mathcal{R}_t(u,x)$ a $\tau = \pi_y(O)$, dostávame

$$\inf_{u \in \mathcal{U}(t)} \left\{ \frac{1}{h} \int_t^{(t+h)\wedge\tau} L(s, y_s, u_s)\, \mathrm{d}s + \frac{V((t+h)\wedge\tau) y_{(t+h)\wedge\tau}) - V(t,x)}{h} \right\} = 0.$$

Ak $u_s \to u_t$ pre $s \downarrow t$, dostaneme z predpokladu $L \in C(\bar{Q} \times U)$ formálnym zamenením limity $s \downarrow t$ a infima *rovnicu dynamického prgramovania*

$$\frac{\partial}{\partial t} V(t,x) + \inf_{v \in U} \{L(t,x,v) + f(t,x,v) \cdot \mathrm{D}_x V(t,x)\} = 0, \tag{2.11}$$

kde $\mathrm{D}_x$ označuje operátor derivovania podľa $x \in \mathbf{R}^n$, ktorého výsledkom je stĺpcový vektor derivácií podľa zložiek priestorovej premennej $x$, a "$\cdot$" označuje kanonický skalárny súčin v $\mathbf{R}^n$. Rovnica (2.11) sa nazýva *Hamilton-Jacobi-Bellman PDE* a dá sa prepísať do tvaru

$$\frac{\partial V}{\partial t}(t,x) = \mathbf{H}(t,x,\mathrm{D}_x V(t,x)), \tag{2.12}$$

kde funkcia

$$\mathbf{H}(t,x,p) := -\inf_{v \in U} \{L(t,x,v) + p \cdot f(t,x,v)\}$$

sa nazýva *Hamiltonián.*

**Veta 2.1** (overovacia)**.** *Nech $W \in C^1(Q)$ vyhovuje rovnici dynamického programovania* (2.11) *a okrajovej podmienke* (2.7)*, potom*

$$W(t,x) \leq V(t,x) \quad \forall (t,x) \in \bar{Q}. \tag{2.13}$$

*Ak naviac existuje $\hat{u} \in \mathcal{U}(t)$ také, že*

$$L(s,\hat{y}_s,\hat{u}_s) + f(s,\hat{y}_s,\hat{u}_s) \cdot D_x W(s,\hat{y}_s) + \mathbf{H}(s,\hat{y}_s,D_x W(s,\hat{y}_s)) = 0 \tag{2.14}$$

*platí pre každé $s \in [t, \hat{\tau} \wedge T]$, kde $\hat{\tau} = \pi_{\hat{y}}(O)$ a $\hat{y} = \mathcal{R}_t(\hat{u},x)$, potom $W(t,x) = V(t,x)$ a $\hat{u}$ je optimálne riadenie príslušné počiatočnej podmienke $(t,x)$.*

*Dôkaz.* Nech $(t, x) \in \bar{Q}$, $u \in \mathcal{U}(t)$ je ľubovoľné riadenie, $y = \mathcal{R}_t(u, x)$ a $\tau = \pi_y(O)$. Podľa retiazkového pravidla, (2.2) a rovnice dynamického programovania (2.11) pre $W$ dostávame

$$\begin{aligned} W(\tau \wedge T, y_{\tau\wedge T}) &= W(t, x) + \int_t^{\tau\wedge T} \left[\frac{\partial W}{\partial t}(s, y_s) + f(s, y_s, u_s) \cdot \mathrm{D}_x W(s, y_s)\right] \mathrm{d}s \\ &\geq W(t, x) - \int_t^{\tau\wedge T} L(s, y_s, u_s)\, \mathrm{d}s, \end{aligned}$$

pretože funkcia $W(s, y_s)$ je na $[t, \tau \wedge T]$ absolútne spojitá. Podľa predpokladu (2.7) $W(\tau \wedge T, x_{\tau\wedge T}) = \Psi(\tau \wedge T, x_{\tau\wedge T})$ a platí teda

$$W(t, x) \leq \int_t^{\tau\wedge T} L(s, y_s, u_s)\, \mathrm{d}s + \Psi(\tau \wedge T, x_{\tau\wedge T}) = J(t, x; u).$$

Prechodom k infimu cez $u \in \mathcal{U}(t)$ dostávame požadovanú nerovnosť (2.13).

Nech teraz $\hat{u} \in \mathcal{U}(t)$ spĺňa (2.14). Pretože funkcia $W$ podľa prepokladu spĺňa (2.11), platí pre ňu (2.12) a my tak dostávame

$$\begin{aligned} W(\hat{\tau} \wedge T, \hat{y}_{\hat{\tau}\wedge T}) &= W(t, x) + \int_t^{\hat{\tau}\wedge T} [f(s, \hat{y}_s, \hat{u}_s) \cdot \mathrm{D}_x W(s, \hat{y}_s) + \mathbf{H}(s, \hat{y}_s, \mathrm{D}_x W(s, \hat{y}_s))]\, \mathrm{d}s \\ &= W(t, x) - \int_t^{\hat{\tau}\wedge T} L(s, \hat{y}_s, \hat{u}_s)\, \mathrm{d}s, \end{aligned}$$

kde $\hat{\tau} = \pi_{\hat{y}}(O)$ a $\hat{y} = \mathcal{R}_t(\hat{u}, x)$. Z podmienky $W(\hat{\tau} \wedge T, \hat{y}_{\hat{\tau}\wedge T}) = \Psi(\hat{\tau} \wedge T, \hat{y}_{\hat{\tau}\wedge T})$ dostaneme

$$W(t, x) = \int_t^{\hat{\tau}\wedge T} L(s, \hat{y}_s, \hat{u}_s) + \Psi(\hat{\tau} \wedge T, \hat{y}_{\hat{\tau}\wedge T}) = J(t, x; \hat{u}) \geq V(t, x).$$

□

**Veta 2.2.** *Nech funcia $V$ je diferencovateľná v bode $(t, x) \in Q = [t, T) \times O$. Potom pre každé $v \in U$ platí*

$$\frac{\partial}{\partial t} V(t, x) + L(t, x, v) + f(t, x, v) \cdot D_x V(t, x) \geq 0. \tag{2.15}$$

*Ak naviac pre počiatočnú podmienku $y_t = x$ existuje optimálne riadenie $u^*$ také, že existuje limita $v^* := u^*(t_+)$, potom v (2.15) nastáva rovnosť pre $v := v^*$ a v bode $(t, x)$ tak platí rovnica dynamického programovania (2.12).*

*Dôkaz.* Pre $v \in U$ budeme uvažovať riadenie $u_s = v$ pre $s \in [t, T]$. Podľa lemma 2.1 pre $r \in (t, T)$ platí

$$V(t,x) \leq \int_t^{r\wedge\tau} L(s, y_s, u_s)\, ds + V(r\wedge\tau, y_{r\wedge\tau}),$$

kde $\tau = \pi_y(O)$ a $y = \mathcal{R}_t(u, x)$. Potom z predpokladu $f \in C(\bar{Q} \times U)$, $y_{t_+} = x$ a z $u_{t_+} = v$ plynie

$$\frac{x_r - x_t}{r - t} = \frac{1}{r-t} \int_t^r f(s, y_s, u_s)\, \mathrm{d}s \to f(t, x, v) \tag{2.16}$$

a z diferencovateľnosti funkcie $V$ v bode $(t, x)$ dostávame

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} V(t,x) \quad &+ \quad f(t,x,v) \cdot \mathrm{D}_x V(t,x) = \lim_{r \downarrow t} \frac{V(r, y_r) - V(t, y_t)}{r - t} \\
&= \quad \lim_{r\downarrow t} \frac{V(r\wedge\tau, y_{r\wedge\tau}) - V(t,x)}{r-t} \geq \limsup_{r\downarrow t} \int_t^{r\wedge\tau} \frac{-L(s, y_s, u_s)}{r-t}\, ds \\
&= \quad -\lim_{r\downarrow t} \int_t^r \frac{L(s, y_s, u_s)}{r-t}\, ds = -L(t,x,v), \qquad (2.17)
\end{aligned}$$

pretože $L \in C(\bar{Q} \times U)$ podľa predpokladu.

Buď $u^*$ také riadenie, že $v^* = u^*(t_+)$ a $V(t, x) = J(t, x; u^*)$, potom rovnosť v (2.15) pri zámene $v^*$ za $v$ dostaneme tak, že v predchádzajúcej nerovnosti a v (2.17) nahradíme $u$ riadením $u^*$, $v$ hodnotou $v^*$, $\tau$ časom $\tau^* = \pi_{y^*}(O)$, $y$ zobrazením $y^* = \mathcal{R}_t(u^*, x)$ a konečne podľa vzťahu (2.10) v lemma 2.2 nerovnosť "$\geq$" rovnosťou "$=$". $\square$

## 2.4 Viskózne riešenia - definícia a príklad

Na začiatku tejto časti uvedieme príklad, na ktorom ukážeme, že hodnotová funkcia nemusí byť všade diferencovateľná.

**Príklad.** Uvažujme $Q = [0, 1) \times (-1, 1)$ a nákladové funkcie $\Psi \equiv 0$ a

$$L(s, x, v) = 1 + \frac{v^2}{4} = \left(1 \mp \frac{v}{2}\right)^2 \pm v \geq \max\{1, v, -v\} = 1 \vee |v|.$$

Potom $L \in C(\bar{Q} \times U)$, kde $U := \mathbf{R}$. Predpokladajme, že dynamika systému je ovplyvňovaná riadením $u$ v tvare $u = \dot{x}$, tj. $f(t, x, v) = v$ je spojitá funkcia na $\bar{Q} \times U$ taká, že $|f(t, x, v) - f(t, z, v)| = |v - v| = 0$.

Najprv ukážeme, že pre $(t,x) \in \bar{Q}$ platí

$$V(t,x) \geq 1 - \max\{t, |x|\}. \tag{2.18}$$

Ak $\tau \geq 1$, potom z nerovnosti $L \geq 1$ obdržíme

$$J(t,x;u) = \int_t^1 L(s, y_s, \dot{y}_s)\, ds \geq \int_t^1 1\, \mathrm{d}s = 1 - t.$$

Ak naopak $\tau < 1$, potom z nerovnosti $L(s,x,v) \geq |v|$ dostaneme

$$J(t,x;u) = \int_t^\tau L(s, y_s, \dot{y}_s)\, ds \geq \int_t^\tau |\dot{y}_s|\, \mathrm{d}s \geq |y_\tau| - |y_t| = 1 - |x|.$$

Pre každé $u \in \mathcal{U}(t)$ tak platí $J(t,x;u) \geq 1 - \max\{t, |x|\}$, čo dáva (2.18).

Teraz ukážeme, že v (2.18) nastáva rovnosť, tj. aj opačná nerovnosť. Pre $|x| \leq t$ volíme $u^* \equiv 0$ a dostávame $\tau^* := \pi_{\mathcal{R}_t(u^*,x)}(O) \geq 1$. Potom

$$J(t,x;u^*) = \int_t^1 1\, \mathrm{d}s = 1 - t.$$

Ak $|x| > t$, volíme $u^* \equiv 2\mathrm{sign}(x)$ a dostávame, že $y^* := \mathcal{R}_t(u^*, x)$ je v tvare

$$y_s^* = x + \int_t^s \dot{y}_r\, \mathrm{d}r = x + 2\mathrm{sign}(x)(s-t) = \mathrm{sign}(x)[|x| + 2(s-t)]$$

a

$$\tau^* := \pi_{y^*}(O) = t + \frac{1 - |x|}{2} < 1,$$

a tak

$$J(t,x;u^*) = \int_t^{\tau^*} |\dot{y}_s|\, \mathrm{d}s = 2(\tau^* - t) = 1 - |x|.$$

Dostali sme teda, že pre $(t,x) \in \bar{Q}$

$$V(t,x) = 1 - \max\{t, |x|\}. \tag{2.19}$$

**Záver.** Ukázali sme, že v tomto príklade je pre $|x| \leq t$ optimálne riadenie $u^* \equiv 0$, pre $|x| > t$ je optimálne $u^* \equiv 2\mathrm{sign}(x)$ a hodnotová funkcia je tak v tvare (2.19).

**Poznámka.** Poznamenajme, že v tomto príklade

$$H(t,x,p) = -\inf_{v \in \mathbf{R}} \left\{ 1 + \frac{v^2}{4} + pv \right\} = p^2 - 1$$

a príslušná rovnica dynamického programovania $\frac{\partial V}{\partial t}(t,x) = H(t,x,\mathrm{D}_x V(t,x))$ je tak v tvare (2.23).

Predtým, než prejdeme k samotnej definícii viskózneho riešenia, zmienime sa o tzv. eliptickej podmienke. Budeme predpokladať, že je daná spojitá funkcia $F : [t,T] \times O \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^{n\times n} \to \mathbf{R}$, do ktorej postupne budeme dosadzovať časový parameter $s \in [t,T]$, stavovú premennú $x \in \mathbf{R}^n$, hodnotu uvažovanej funkcie $\Phi$, jej gradient a maticu druhých derivácií.

O funkcii $F$ hovoríme, že spĺňa eliptickú podmienku, ak pre každé

$$s \in [t,T),\ x \in O,\ w \in \mathbf{R},\ W \in \mathbf{R}^n,\ \mathbf{V},\mathbf{W} \in \mathbf{R}^{n\times n}$$

také, že $\mathbf{V},\mathbf{W}$ sú symetrické matice a $\mathbf{V} \geq 0$, platí

$$F(s,x,w,W,\mathbf{W}+\mathbf{V}) \leq F(s,x,w,W,\mathbf{W}).$$

**Poznámka** Nech funkcia $F$ spĺňa eliptickú podmienku na $Q = [t,T) \times O$, nech $\Phi, \Psi \in C^2(O)$ sú také, že ich rozdiel $\Phi - \Psi$ nadobúda lokálne maximum v bode $x \in O$ a že $\Phi(x) = \Psi(x)$, potom $\mathrm{D}\,\Phi(x) = \mathrm{D}\,\Psi(x)$ a $\mathrm{D}^2\Phi(x) \leq \mathrm{D}^2\Psi(x)$ a preto pre každé $s \in [t,T)$ dostávame

$$F(s,x,\Psi(x),\mathrm{D}\Psi(x),\mathrm{D}^2\Psi(x)) \leq F(s,x,\Phi(x),\mathrm{D}\Phi(x),\mathrm{D}^2\Phi(x)).$$

**Definícia.** Nech je daná otvorená množina $O \subseteq \mathbf{R}^n$, položme $Q := [t,T) \times O$ a predpokladajme, že W je spojitá funkcia na uzávere množiny $Q$. Nech F je spojitá funkcia splňujúca eliptickú podmienku.

Hovoríme, že funkcia W je *viskóznym podriešením* rovnice (2.22) na množine $Q$, ak pre každé $w \in C^2(\bar{Q})$ platí

$$F(t,x,w(t,x),\mathrm{D}w(t,x),\mathrm{D}^2 w(t,x)) \leq \frac{\partial w}{\partial t}(t,x) \tag{2.20}$$

v každom bode $(t,x) \in Q$, v ktorom funckia $W - w$ nadobúda lokálne maximum.

Hovoríme, že funkcia W je *viskóznym nadriešením* rovnice (2.22) na množine $Q$, ak pre každé $w \in C^2(\bar{Q})$ platí

$$F(t,x,w(t,x),\mathrm{D}w(t,x),\mathrm{D}^2 w(t,x)) \geq \frac{\partial w}{\partial t}(t,x) \tag{2.21}$$

v každom bode $(t,x) \in Q$, v ktorom funkcia $W - w$ nadobúda lokálne minimum.

Funkcia $W$ sa nazýva *viskóznym riešením* rovnice

$$F(t,x,W(t,x),\mathrm{D}W(t,x),\mathrm{D}^2W(t,x)) = \frac{\partial W}{\partial t}(t,x), \tag{2.22}$$

ak W je viskóznym podriešením aj viskóznym nadriešením tejto rovnice na $Q$.

**Poznámka.** V našom deterministickom prípade dosadzujeme za $F$ z predchádzajúcej definície Hamiltonián, tj. $F(t,x,w,W,\mathbf{W}) = \mathbf{H}(t,x,W)$, a ten spĺňa eliptickú podmienku.

**Príklad (pokračovanie).** Najprv ukážeme, že $V(t,x) = 1 - \max\{|x|,t\}$ je viskóznym nadriešením rovnice dynamického programovania

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x}(t,x)\right)^2 - 1 = \frac{\partial V}{\partial t}(t,x) \tag{2.23}$$

na $[0,1) \times (-1,1)$. Poznamenajme, že funkcia $V(t,x)$ spĺňa rovnicu (2.23) v každom bode, v ktorom je diferencovateľná, tj. ak $t \neq |x|$. Nech funkcia $V - w$ nadobúda lokálne minimum v bode $(t,x)$. Pretože funkcia $V$ je konkávna a $w$ je diferencovateľná, musí byť funkcia V diferencovateľná v $(t,x)$ podľa tvrdenia 5.1 a nasledujúcej poznámky z dodatku 2. Potom

$$\frac{\partial V}{\partial x}(t,x) = \frac{\partial w}{\partial x}(t,x).$$

Pretože $t$ môže byť rovné 0, dostávame pre každé $(t,x) \in [0,1) \times (-1,1)$ len nerovnosť

$$\frac{\partial V}{\partial t}(t,x) \geq \frac{\partial w}{\partial t}(t,x).$$

Preto

$$\frac{\partial w}{\partial t}(t,x) \leq \frac{\partial V}{\partial t}(t,x) = \left(\frac{\partial V}{\partial x}(t,x)\right)^2 - 1 = \left(\frac{\partial w}{\partial x}(t,x)\right)^2 - 1.$$

Funkcia $V$ je tak viskóznym nadriešením rovnice (2.23). Zostáva teda dokázať, že $V$ je viskóznym podriešením rovnice (2.23). Nech funkcia $V - w$ nadobúda lokálne maximum v bode $(t,x)$. Ak je funkcia $V$ v bode $(t,x)$ diferencovateľná, tj. $t \neq |x|$, potom podobne ako v predchádzajúcom prípade dostaneme

$$\frac{\partial V}{\partial x}(t,x) = \frac{\partial w}{\partial x}(t,x), \quad \frac{\partial V}{\partial t}(t,x) \leq \frac{\partial w}{\partial t}(t,x),$$

a preto

$$\frac{\partial w}{\partial t}(t,x) \geq \frac{\partial V}{\partial t}(t,x) = \left(\frac{\partial V}{\partial x}(t,x)\right)^2 - 1 = \left(\frac{\partial w}{\partial x}(t,x)\right)^2 - 1.$$

Aby sme ukázali, že $V$ je viskóznym podriešením rovnice (2.23), je potrebné uvážiť prípad $t = |x|$. Nech $t = |x| > 0$. Keďže predpokladáme, že funcia $V - w$ nadobúda lokálne maximum v bode $(t, x)$, dostaneme pri uvážení derivácie v smere zlomu rovnosť

$$\frac{\partial w}{\partial t}(t,x) + \operatorname{sign}(x)\frac{\partial w}{\partial x}(t,x) = -1. \tag{2.24}$$

Ďalej požadujeme, aby jednostranná parciálna derivácia $\frac{\partial}{\partial t}(V-w)(t_+, y)$ nebola kladná a obrátenú nerovnosť požadujeme pre jednostrannú parciálnu deriváciu $\frac{\partial}{\partial t}(V-w)(t_-, y)$. Obdržíme tak podmienky

$$\frac{\partial w}{\partial t}(t,x) \geq \frac{\partial V}{\partial t}(t_+,x) = \frac{\partial}{\partial t}(1-t) = -1,$$
$$\frac{\partial w}{\partial t}(t,x) \leq \frac{\partial V}{\partial t}(t_-,x) = \frac{\partial}{\partial t}(1-|x|) = 0.$$

Odtiaľ a z (2.24) dostaneme $\operatorname{sign}(x)\frac{\partial w}{\partial x}(t,x) \in [-1, 0]$, a tak

$$-\operatorname{sign}(x)\frac{\partial w}{\partial x}(t,x) \geq \left[\operatorname{sign}(x)\frac{\partial w}{\partial x}(t,x)\right]^2 = \left[\frac{\partial w}{\partial x}(t,x)\right]^2.$$

Obdržíme tak podmienku

$$\frac{\partial w}{\partial t}(t,x) = -\operatorname{sign}(x)\frac{\partial w}{\partial x}(t,x) - 1 \geq \left[\frac{\partial w}{\partial x}(t,x)\right]^2 - 1.$$

Teraz uvažujme prípad $t = |x| = 0$. Pripomeňme predpoklad, že funkcia $V - w$ nadobúda v bode $(t, x)$ lokálne maximum. Predpokladáme teda, že derivácia funkcie $(V - w)$ v smere $(a, b) \neq 0$ takom, že $a \geq 0$, je nekladná, tj. že smerová derivácia $w$ je väčsia alebo rovná príslušnej smerovej derivácii funkcie $V$. Pre $(a, b) \neq 0$ také, že $a \geq 0$ tak dostávame nerovnosť

$$a\frac{\partial w}{\partial t}(0,0) + b\frac{\partial w}{\partial x}(0,0) \geq -a \vee |b|.$$

Voľbami $(a, b) \in \{(0, 1), (0, -1)\}$ obdržíme, že

$$\left|\frac{\partial w}{\partial x}(0,0)\right| \leq 1,$$

a voľbami $(a, b) \in \{(1, 1), (1, -1)\}$ potom dostaneme nerovnosti

$$\frac{\partial w}{\partial t}(0,0) \geq -1 + \left|\frac{\partial w}{\partial x}(0,0)\right| \geq \left[\frac{\partial w}{\partial x}(0,0)\right]^2 - 1.$$

Pre všetky $(t,x) \in Q$ tak máme overenú podmienku viskózneho riešenia.

**Záver.** V druhej časti príkladu sme overili podmienky (2.20) a (2.21) z definície viskózneho riešenia a ukázali tak, že hodnotová funkcia $V(t,x) = 1 - \max\{t, |x|\}$ je viskóznym nad- a podriešením rovnice dynamického programovania (2.23), a teda viskóznym riešením danej rovnice.

## 2.5 Hodnotová funkcia a viskózne riešenie

Na záver tejto kapitoly uvedieme dve vety, z ktorých prvá udáva vzťah medzi spojitosťou hodnotovej funkcie a jej vlastnosťou viskózneho riešenia a druhá vzťah medzi klasickým a viskóznym riešením diferenciálnych rovníc. Najprv však zaveďme značenie, ktoré nám zjednoduší zápis. Pripomeňme predpoklad, že $L$ je zdola ohraničená. Nech $\Psi$ je zdola ohraničená funkcia, $0 \le t \le r \le T,\ x \in O,\ u \in \mathcal{U}(t)$. Pre hodnotovú funkciu zaveďme obšírnejssie značenie

(2.25)
$$(\mathcal{T}_{t,r}\Psi)(x) := \inf_{u \in \mathcal{U}(t)} \left\{ \int_t^{r\wedge\tau} L(s, y_s, u_s)\, \mathrm{d}s + \Psi(r\wedge\tau, y_{r\wedge\tau});\ \tau = \pi_y(O),\ y = \mathcal{R}_t(u,x) \right\}.$$

Princíp dynamického programovania (2.9) je potom pre $t \le r \le T$ tvaru

$$\begin{aligned}(\mathcal{T}_{t,T}\Psi)(x) &= \inf_{u \in \mathcal{U}(t)} \left\{ \int_t^{r\wedge\tau} L(s, y_s, u_s)\, \mathrm{d}s + (\mathcal{T}_{r\wedge\tau,T}\,\Psi)(y_{r\wedge\tau});\ \tau = \pi_y(O),\ y = \mathcal{R}_t(u,x) \right\} \\ &= (\mathcal{T}_{t,r}(\mathcal{T}_{r,T}\Psi))(x).\end{aligned}$$

Túto vlastnosť budeme skrátene zapisovať v tvare $\mathcal{T}_{t,T} = \mathcal{T}_{t,r} \circ \mathcal{T}_{r,T}$ a budeme o nej hovoriť ako o *semigrupovej vlastnosti.* Poznamenajme, že o funkcii $L$ predpokladáme, že je zdola ohraničená. Tým dostávame ohraničenosť zdola funkcie $\mathcal{T}_{r,T}\Psi$, čo je potrebné k tomu, aby sme mohli uvažovať $\mathcal{T}_{t,r}(\mathcal{T}_{r,T}\Psi)$. Z definície (2.25) tiež plynie tzv. *vlastnosť monotónie.* Ak sú $\Phi \le \Psi$ zdola ohraničené funkcie, potom platí $\mathcal{T}_{t,T}\Phi \le \mathcal{T}_{t,T}\Psi$. Semigrupová vlastnosť spolu s monotóniou a ďalšími predpokladmi na $(\mathcal{T}_{t,T};\ 0 \le t \le T < \infty)$ sú základom pre abstraktnú teóriu dynamického programovania, ktorú môžme nájsť v [1].

**Poznámka.** Ak množina $U$ je ohraničená a existuje reálne $K$ také, že

$$\forall (t,x) \in \bar{Q}, \quad v \in U \qquad |f(t,x,v)| \le K(1 + |x|),$$

potom dôkaz vety 7.1 v [1], ktorý z dôvodu technickej náročnosti neuvádzame, vedie k záveru, že

$$\lim_{r\downarrow t} \frac{1}{r-t}\,[(\mathcal{T}_{t,r}w(r,\cdot))(x) - w(t,x)] = \frac{\partial w}{\partial t}\,(t,x) - \mathbf{H}(t,x,\mathrm{D}_x(w(t,x)) \tag{2.26}$$

platí pre každé $(t,x) \in Q$. Uvedieme len názorný dôkaz jednej časti

$$\limsup_{r\downarrow t} \frac{1}{r-t}\,[(\mathcal{T}_{t,r}w(r,\cdot))(x) - w(t,x)] \leq \frac{\partial w}{\partial t}\,(t,x) - \mathbf{H}(t,x,\mathrm{D}_x(w(t,x)).$$

*Dôkaz.* Nech $(t,x) \in Q$ a $v \in U$. Položme $u_s := v$ pre $s \in [t,T]$, $y := R_t(u,x)$, $\tau := \pi_y(O)$ a uvažujme $r \in (t, \tau \wedge T)$. Potom podľa lemma 2.2

$$\begin{aligned}(\mathcal{T}_{t,r}w(r,\cdot))(x) - w(t,x) &\leq \int_t^r L(s,y_s,u_s)\,\mathrm{d}s + w(r,y_r) - w(t,x) \\ &= \int_t^r [L(s,y_s,u_s) + \frac{\partial w}{\partial t}\,(s,y_s) + f(s,y_s,v)\cdot \mathrm{D}_x w(s,y_s)]\,\mathrm{d}s,\end{aligned}$$

a preto

$$\limsup_{r\downarrow t} \frac{1}{r-t}\,[(\mathcal{T}_{t,r}w(r,\cdot))(x) - w(t,x)] \leq \frac{\partial w}{\partial t}\,(t,x) + L(t,x,v) + f(t,x,v)\cdot \mathrm{D}_x w(t,x).$$

Prechodom k infimu cez všetky $v \in U$ dostaneme

$$\limsup_{r\downarrow t} \frac{1}{r-t}\,[(\mathcal{T}_{t,r}w(r,\cdot))(x) - w(t,x)] \leq \frac{\partial w}{\partial t}\,(t,x) - \mathbf{H}(t,x,\mathrm{D}_x w(t,x)).$$

□

**Veta 2.3.** *Nech hodnotová funkcia $V$ je spojitá na uzávere množiny $Q$ a nech platí podmienka* (2.26)*. Potom $V$ je viskóznym riešením rovnice* (2.12) *na $Q$.*

*Dôkaz.* Najprv ukážeme, že funkcia $V$ je viskóznym podriešením rovnice (2.12). Nech $w \in C^2(\bar{Q})$, $(t,x) \in Q$ a predpokladajme, že funkcia $V - w$ nadobúda lokálne maximum v bode $(t,x)$. Uvažujme postupnosť funkcií $\xi_n \in C^2(\mathbf{R}^{n+1},[0,1])$ takých, že

$$\xi_n(z) = \begin{cases} 1 \text{ ak } ||z|| \leq 2^{-n-1} \\ \\ 0 \text{ ak } ||z|| \geq 2^{-n} \end{cases}$$

a položme $z_0 := (t, x)$, $K := 2\sup\{|V(z)|;\ z \in \bar{Q}\} < \infty$. Potom

$$\tilde{w}_n(z) := V(z_0) + \xi_n(z - z_0)[w(z) - w(z_0)] + K[1 - \xi_n(z - z_0)] \in C^2(\bar{Q})$$

je taká, že $\tilde{w}_n(t, x) = V(t, x)$ a

$$\begin{aligned} V(z) - \tilde{w}_n(z) &= V(z) - V(z_0) - \xi_n(z - z_0)[w(z) - w(z_0)] - K[1 - \xi_n(z - z_0)] \\ &= \xi_n(z - z_0)[V(z) - w(z) - (V(z_0) - w(z_0))] \\ &+ [1 - \xi_n(z - z_0)][V(z) - V(z_0) - K] \le 0 \end{aligned}$$

platí pre $n$ dostatočne veľké, pretože podľa predpokladu existuje $n_0 \in \mathbf{N}$, že pre každé $n \ge n_0$ platí $V(z) - w(z) \le V(z_0) - w(z_0)$ pre $z \in \bar{Q}$ také, že $||z - z_0|| < 2^{-n}$. Potom $\hat{w} := \tilde{w}_{n_0}$ je taká, že funkcia $V - \hat{w}$ v bode $(t, x) = z_0$ nadobúda globálne maximum na $\bar{Q}$, tj. $V(z) - \hat{w}(z) \le V(z_0) - \hat{w}(z_0) = 0$. Platí teda, že $V \le \hat{w}$ na $\bar{Q}$. Potom pre každé $r \in [t, T]$ a $\hat{x} \in \bar{O}$ platí

$$(\mathcal{T}_{r,T}\Psi)(\hat{x}) = V(r, \hat{x}) \le \hat{w}(r, \hat{x}),$$

pričom pre $(r, \hat{x}) = (t, x)$ nastáva rovnosť. Z vlastnosti monotónie a semigrupovej vlastnosti tak dostávame

$$\hat{w}(t, x) = V(t, x) = (\mathcal{T}_{t,T}\Psi)(x) = (\mathcal{T}_{t,r}(\mathcal{T}_{r,T}\Psi))(x) \le (\mathcal{T}_{t,r}\hat{w})(x).$$

Voľbou $r = t + h$ pre $0 < h \le T - t$ podľa lemma 2.2 prichádzame k nerovnosti

$$0 \le \frac{(\mathcal{T}_{t,t+h}\hat{w}(t + h, \cdot))(x) - \hat{w}(t, x)}{h}. \tag{2.27}$$

Pri prechode s $h \to 0^+$ za platnosti podmienky (2.26) dostaneme nerovnosť

$$0 \le \frac{\partial \hat{w}}{\partial t}(t, x) - H(t, x, \mathrm{D}_x\hat{w}(t, x)) = \frac{\partial w}{\partial t} - H(t, x, \mathrm{D}_x w(t, x)).$$

Teraz budeme predpokladať, že funkcia $V - w$ má v bode $(t, x)$ lokálne minimum na $\bar{Q}$. Potom

$$\bar{w}_n(z) := V(z_0) + \xi_n(z - z_0)[w(z) - w(z_0)] - K.[1 - \xi_n(z - z_0)] \in C^2(\bar{Q})$$

je taká, že $\bar{w}_n(t, x) = V(t, x)$ a že $V \ge \bar{w}$ platí pre $n$ dostatočne veľké, povedzme pre $n \ge n_1 \in \mathbf{N}$. Opäť položíme $\hat{w} := \bar{w}_{n_1}$ a podobne ako v predchádzajúcej časti dostaneme

$$\hat{w}(t, x) = V(t, x) = (\mathcal{T}_{t,T}\Psi)(x) = (\mathcal{T}_{t,r}(\mathcal{T}_{r,T}\Psi))(x) \ge (\mathcal{T}_{t,r}\hat{w})(x).$$

Podobne ako v prvej časti dôkazu volíme $r = t + h$ a podelením rozdielu oboch strán hodnotou $h \to 0^+$ za predpokladu platnosti podmienky (2.26) dôjdeme k nerovnosti

$$\mathbf{H}(t, x, \mathrm{D}_x w(t, x)) \geq \frac{\partial w}{\partial t}(t, x),$$

a tak k záveru, že $V$ je viskóznym nadriešením rovnice (2.11). $\square$

**Lemma 2.3.** *Predpokladajme, že $W \in C^2(\bar{Q})$ spĺňa $W(T, x) = \Psi(T, x)$ na $\bar{Q} \setminus Q$ a že platí podmienka* (2.26)*. Potom $W$ je viskóznym riešením rovnice* (2.12) *na $\bar{Q}$ práve vtedy, keď je jej klasickým riešením na $Q$.*

*Dôkaz.* Nech $W$ je viskóznym riešením rovnice (2.12) na $\bar{Q}$. Potom pri voľbe $w \equiv W \in C^2(\bar{Q})$ dostávame, že $W - w = 0$ nadobúda v každom bode $(t, x) \in \bar{Q}$ lokálne minimum aj maximum. Pre funkciu $w = W$ tak platia obidve nerovnosti (2.20) a (2.21), kde $F(s, y, a, A, \mathbf{A}) := \mathbf{H}(s, y, A)$, a funkcia $W$ je tak riešením rovnice (2.22), čo je rovnica (2.12).

Nech teraz $W$ je klasické riešenie (2.12) a nech $w \in C^2(\bar{Q})$. Predpokladajme najprv, že funkcia $W - w$ nadobúda v bode $(t, x) \in \bar{Q}$ svoje lokálne maximum. Potom podobne ako v dôkaze vety 2.3 nájdeme $\hat{w} \in C^2(\bar{Q})$ takú, že $W - \hat{w}$ má v bode $(t, x)$ globálne maximum $(W - \hat{w})(t, x) = 0$ a že $\hat{w} - w$ je konštantná na okolí $(t, x)$. Potom za predpokladu $\hat{w}(t, x) = W(t, x)$ platí nerovnosť $\hat{w} \geq W$ na $\bar{Q}$ a $\hat{w}(z) - \hat{w}(t, x) \geq W(z) - W(t, x)$ pre každé $z \in \bar{Q}$, a teda pri platnosti podmienky (2.26)

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \hat{w}}{\partial t}(t, x) \quad &- \quad \mathbf{H}(t, x, \mathrm{D}_x \hat{w}(t, x)) = -\lim_{h \to 0^+} \frac{1}{h}[(\mathcal{T}_{t,t+h} \hat{w}(t + h, \cdot))(x) - w(t, x)] \leq \\
&- \quad \lim_{h \to 0^+} \frac{1}{h}[(\mathcal{T}_{t,t+h} W(t + h, \cdot))(x) - W(t, x)] \\
&= \quad \frac{\partial W}{\partial t}(t, x) - \mathbf{H}(t, x, \mathrm{D}_x W(t, x)) = 0.
\end{aligned}$$

Funkcia $W$ je tak viskóznym nadriešením rovnice (2.12) na $Q$. Dôkaz vlastnosti viskózneho podriešenia by prebiehal analogicky. $\square$

# Kapitola 3

# Itôovo lemma a Brownov pohyb

Kapitola 3 vychádza z bakalárskej práce [2]. Najprv heuristicky odvodíme formulu Itôovho lemma a v ďalšej časti zadefinujeme Brownov pohyb. Výsledky potom využijeme v nasledujúcej kapitole.

## 3.1 Itôovo lemma

Nech $X_0$ je náhodná veličina odpovedajúca pozorovanej hodnote sledovanej veličiny v čase 0, ktorá je nezávislá s n.v. $\varepsilon$ so symetrickým alternatívnym rozdelením

$$P(\varepsilon = 1) = P(\varepsilon = -1) = 1/2 \tag{3.1}$$

a predpokladejme, že hodnota sledovanej veličiny v čase $\Delta t$ je daná nasledujúcou rovnicou

$$X_{\Delta t} = X_0 + \mu \Delta t + \varepsilon \sigma \sqrt{\Delta t}, \tag{3.2}$$

kde $\mu, \sigma \in \mathbf{R}$. Predpokladajme, že je daná dostatočne hladká transformácia $f \in C^2(\mathbf{R})$ a že nás zaujíma vyjadrenie zmeny transformovanej veličiny v závislosti na výslednej hodnote veličiny $\varepsilon$. Budeme predpokladať, že uvažovaný časový interval $\Delta t$ je veľmi malý, čomu podľa (3.2) odpovedá veľmi malá $\Delta X := X_{\Delta t} - X_0$ zmena sledovanej veličiny a tiež veľmi malá $\Delta f(X) := f(X_{\Delta t}) - f(X_0)$ zmena transformovanej hodnoty. Použitím Taylorovho rozvoja druhého rádu funkcie $f$ v bode $X_0$ dostaneme

$$\begin{aligned}
\Delta f(X) &\sim f'(X_0)\,\Delta X + \frac{1}{2}\,f''(X_0)(\Delta X)^2 \\
&\sim f'(X_0)\,(\mu \Delta t + \varepsilon \sigma \sqrt{\Delta t}) + \frac{1}{2}\,f''(X_0)(\mu \Delta t + \varepsilon \sigma \sqrt{\Delta t})^2.
\end{aligned}$$

Ak budeme zanedbávať členy rádovo menšie ako $\Delta t \to 0^+$, dôjdeme k odhadu

$$\begin{aligned}\Delta f(X) &\sim f'(X_0)(\mu\Delta t + \varepsilon\sigma\sqrt{\Delta t}) + \frac{1}{2}\, f''(X_0)\,\varepsilon^2\sigma^2\Delta t \\ &\sim \left(\mu f'(X_0) + \frac{1}{2}\,\sigma^2 f''(X_0)\right)\Delta t + \sigma f'(X_0)\,\varepsilon\sqrt{\Delta t},\end{aligned}$$

pretože $P(\varepsilon^2 = 1) = 1$ podľa (3.1). Túto aproximáciu budeme využívať v nasledujúcej kapitole. V nasledujúcej časti budeme smerovať k jej diferenciálnemu vyjadreniu.

## 3.2 Brownov pohyb

Prejdime teraz od diskrétnych intervalov dĺžky $\Delta t$ k spojitému času. Prírastok času $\Delta t$ je v tomto prípade reprezentovaný ako $\mathrm{d}t$ a kumulatívne súčty nezávislých veličín $\varepsilon$ budú po časovej a priestorovej štandardizácii konvergovať k Wienerovmu procesu.

**Definícia.** Náhodný proces $W(t)$ sa nazýva *Wienerov proces*, ak spĺňa nasledujúce podmienky:

1. $W(0) = 0$ a $(W(t),\ t \geq 0)$ má spojité trajektórie.
2. Prírastky $\Delta W(t_1)$, $\Delta W(t_2), ...,$ $\Delta W(t_n)$ sú nezávislé náhodné veličiny pre ľubovoľné časy $0 \leq t_1 < t_2 < ... < t_n$, kde $\Delta W(t_i) = W(t_i) - W(t_{i-1})$.
3. Pre ľubovoľné časové okamihy majú prírastky $W(t) - W(s)$ normálne rozdelenie $\mathcal{N}(0, t-s)$ pre $t \geq s$.

Dôležitou vlastnosťou Wienerovho procesu (ktorú budeme ďalej využívať) je, že jeho kvadratická variácia na intervale $[0, t]$ je rovná $t$ pre každé $t \geq 0$. Symbolicky túto vlastnosť zapíšeme v diferenciálnej podobe v tvare

$$(\mathrm{d}W(t))^2 = \mathrm{d}t. \tag{3.3}$$

Pre názornosť ukážeme, že

$$\sum_{k=1}^{n}\left[W\left(\frac{k\Delta t}{n}\right) - W\left(\frac{(k-1)\Delta t}{n}\right)\right]^2 \longrightarrow \Delta t \tag{3.4}$$

pre $n \to \infty$ v $L^2$. Zrejme stredná hodnota ľavej strany (3.4) je rovná pravej strane (3.4). Ukážeme teda, že rozptyl ľavej časti sa blíži k 0 pre $n \to \infty$. Označme

$$\Delta W_k := W\left(\frac{k\Delta t}{n}\right) - W\left(\frac{(k-1)\Delta t}{n}\right).$$

Potom

$$\operatorname{var}\left(\sum_{k=1}^{n}(\Delta W_k)^2\right) = \sum_{k=1}^{n}\operatorname{var}(\Delta W_k)^2 = \frac{(\Delta t)^2}{n}\operatorname{var}(N^2) \to 0$$

pre $n \to \infty$, kde $N$ je náhodná veličina s rozdelením $\mathcal{N}(0,1)$.

Prejdime k vyjadreniu prírastkov v spojitom modeli. Nech $\mu_t$ a $\sigma_t$ sú pre jednoduchosť spojité procesy také, že ich histórie do času $t$ $(\mu_s, s \le t)$ a $(\sigma_s, s \le t)$ sú nezávislé s $(W(T) - W(t), T \ge t)$ pre každé $t \ge 0$ a nech infinitezimálny prírastok procesu $X_t$ sa dá zapísať v tvare

$$\mathrm{d}X_t = \mu_t \mathrm{d}t + \sigma_t \mathrm{d}W, \tag{3.5}$$

kde $\mathrm{d}W$ symbolicky označuje infinitezimálny prírastok Wienerovho procesu. Potom proces $X_t$ budeme nazývať *Itôov proces*. $\mu_t$ sa nazýva *drift*, $\sigma_t$ *disperzný koeficient* a $\sigma_t^2$ *difúzny koeficient*. Dosadením špeciálnej voľby

$$\mu_t = \mu X_t, \qquad \sigma_t = \sigma X_t$$

do (3.5) dostaneme rovnicu *geometrického Brownovho pohybu* v tvare

$$\mathrm{d}X_t = \mu X_t \mathrm{d}t + \sigma X_t \mathrm{d}W. \tag{3.6}$$

Pre koeficienty $\mu_t$ resp. $\sigma_t$ budeme v ďalšej kapitole využívať taktiež značenie $\frac{\mathrm{d}X_t}{\mathrm{d}t}$ resp. $\frac{\mathrm{d}X_t}{\mathrm{d}W}$. V časti 4.1.2 budeme formálne (myslené symbolicky) zamieňať strednú hodonotu a diferenciál nasledujúcim spôsobom:

$$\frac{\mathrm{d}EX_t}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=t_0} = E\frac{\mathrm{d}X_t}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=t_0} = \frac{\mathrm{d}X_t}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=t_0},$$

ak je pravá strana deterministickou náhodnou veličinou. To mimo iného znamená, že

$$\frac{dEW_t}{dt} = E\frac{dW_t}{dt} = 0.$$

**Poznámka.** Nech $U_t$ je Itôov proces a $f \in C^2(R)$, potom $f(U_t)$ je tiež Itôov proces a platí Itôova formula

$$\mathrm{d}f(U_t) = f'(U_t)\mathrm{d}U_t + \frac{1}{2}f''(U_t)(\mathrm{d}U_t)^2. \tag{3.7}$$

V ďalšom texte budeme využívať nasledujúce znenie viacrozmernej Itôovej formule bez toho, aby sme uvádzali jej presnú formuláciu.

$$\begin{aligned} \mathrm{d}f(U_t,V_t) &= f_1'(U_t,V_t)\,\mathrm{d}U_t + f_2'(U_t,V_t)\,\mathrm{d}V_t \\ &+ \frac{1}{2}[f_{11}''(U_t,V_t)(\mathrm{d}U_t)^2 + f_{22}''(U_t,V_t)(\mathrm{d}V_t)^2 + 2f_{12}''(U_t,V_t)(\mathrm{d}U_t)(\mathrm{d}V_t)], \end{aligned} \tag{3.8}$$

ak $f \in \mathcal{C}^2(\mathbf{R}^2)$ a $(U_t,V_t)$ je združene Itôov proces. Špeciálne pre funkciu $f(x,y) = xy$ dostaneme *stochastickú verziu Per Partes* v tvare

$$\mathrm{d}(U_tV_t) = U_t\mathrm{d}V_t + V_t\mathrm{d}U_t + (\mathrm{d}U_t)(\mathrm{d}V_t). \tag{3.9}$$

V podkapitole 4.2 budeme využívať vzorce (3.7), (3.8) a (3.9) taktiež pre procesy s diferenciálom $\mathrm{d}Z_t + \sigma_t\mathrm{d}W_t$, ak $Z_t$ je spojitý proces s lokálne konečnou variáciou taký, že $(Z_s, s \le t)$ a $(\sigma_s, s \le t)$ sú nezávislé s $(W(T) - W(t), T \ge t)$ pre každé $t \ge 0$, kde $W$ značí príslušný Wienerov proces.

# Kapitola 4

# Optimálne riadenie portfólia

## 4.1 Nulové transakčné náklady

### 4.1.1 Úvod

Majme investora, ktorý investuje na akciovom a peňažnom trhu. Označme tržnú cenu akcie v čase $t$ ako $X_t$, tržnú cenu portfólia ako $Y_t$, $H_t$ udáva tržnú cenu jednej akcie a nakoniec $G_t$ pozíciu investora. Tá je určená podielom investícií na akciovom trhu v investorovom portfóliu a v prípade nulových transakčných nákladov bude riadením systému. Cenu akciovej časti portfólia môžme teda vyjadriť ako

$$G_t Y_t = H_t X_t.$$

Predpokladajme, že tržnú cenu akcie môžme modelovať pomocou geometrického Brownovho pohybu

$$\mathrm{d}X_t = \mu X_t \,\mathrm{d}t + \sigma X_t \,\mathrm{d}W_t.$$

V prípade nulových transakčných nákladov je prírastok tržnej ceny portfólia spôsobený len zmenou tržnej ceny akcie:

$$\mathrm{d}Y_t = H_t \,\mathrm{d}X_t = H_t X_t(\mu \,\mathrm{d}t + \sigma \,\mathrm{d}W_t) = Y_t G_t(\mu \,\mathrm{d}t + \sigma \,\mathrm{d}W_t),$$

čo môžme prepísať

$$Y_t^{-1} \,\mathrm{d}Y_t = G_t(\mu \,\mathrm{d}t + \sigma \,\mathrm{d}W_t). \tag{4.1}$$

Uvažujme funkciu $\mathcal{F}_\gamma$ definovanú nasledovne

$$\mathcal{F}_\gamma(x) := \frac{x^\gamma}{\gamma}, \tag{4.2}$$

kde $\gamma < 0$. Táto funkcia je zhora ohraničená a býva označovaná názvom mocninná úžitková funkcia HARA (Hyperbolic Absolute Risk Aversion).

Prejdime teraz k problému, ktorý sme riesili v kapitole 1. Našou úlohou bude nájsť riadenie $G_t$ v množine prípustných riadení maximalizujúce

$$J(t_0, y_0; G) = \mathrm{E}\left[\int_{t_0}^{\infty} L(t, Y_t, G_t)\,\mathrm{d}t\right],$$

kde

$$L(t, y, g) = \mathrm{e}^{-\delta t}\mathcal{F}_\gamma(y).$$

### 4.1.2 Zostavenie rovnice dynamického programovania

Cieľom tejto časti je zostavenie rovnice dynamického programovania pre hodnotovú funkciu bez toho, aby sme bližšie určovali množinu prípustných riadení $\mathcal{U}(t)$. Poznamenajme len, že táto množina obsahuje $L^\infty([t,\infty))$. Ak by sme boli nútení z nejakých dôvodov túto množinu určiť, budeme klásť $\mathcal{U}(t) = L^\infty([t,\infty))$. Uvažovať širšiu množinu by bolo nad rámec tejto práce. Označme

$$\mathcal{M}(t_0, y_0) := \sup\left\{\mathrm{E}\int_{t_0}^{\infty} \mathrm{e}^{-\delta t}\mathcal{F}_\gamma(Y_t)\,\mathrm{d}t;\ Y = \mathcal{R}_{t_0}(G, y_0),\ G \in \mathcal{U}(t_0)\right\},$$

kde $Y = \mathcal{R}_{t_0}(G, y_0)$ je skrátený zápis rovnice (4.1) spolu s počiatočnou podmienkou $Y_{t_0} = y_0$. Podobne ako v dôkaze lemma 2.1 by sme obdržali

$$\mathcal{M}(t_0, y_0) \geq \mathrm{E}\int_{t_0}^{t_1} \mathrm{e}^{-\delta t}\mathcal{F}_\gamma(Y_t)\,\mathrm{d}t + \mathrm{E}\,\mathcal{M}(t_1, Y_{t_1}),$$

kedykoľvek $Y_t = \mathcal{R}_{t_0}(G, y_0)$ a $G$ je prípustné riadenie. Podobne z dôkazu lemma 2.2

$$\mathcal{M}(t_0, y_0) := \sup_{G\in\mathcal{U}(t_0)}\left\{\mathrm{E}\int_{t_0}^{t_1} \mathrm{e}^{-\delta t}\mathcal{F}_\gamma(Y_t)\,\mathrm{d}t + \mathrm{E}\,\mathcal{M}(t_1, Y_{t_1});\ Y = \mathcal{R}_{t_0}(G, y_0)\right\}.$$

Postupujme ako v časti 2.3 pri odvodení rovnice dynamického programovania.

$$\begin{aligned} 0 &= \sup_{G\in\mathcal{U}(t_0)}\left\{\frac{1}{h}\mathrm{E}\int_{t_0}^{t_0+h} \mathrm{e}^{-\delta t}\mathcal{F}_\gamma(Y_t)\,\mathrm{d}t + \frac{\mathrm{E}\,\mathcal{M}(t_0+h, Y_{t_0+h}) - \mathcal{M}(t_0, y_0)}{h}\right\} \\ &\overset{h\to 0}{\longrightarrow} \mathrm{e}^{-\delta t_0}\mathcal{F}_\gamma(y_0) + \frac{\mathrm{d}\mathcal{M}(t, Y_t)}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=t_0}, \end{aligned} \tag{4.3}$$

kde $Y$ tu označuje $\mathcal{R}_{t_0}(G, y_0)$. Dostali sme teda obdobu rovnice dynamického programovania v tvare

$$0 = \left[ \mathrm{e}^{-\delta t} \mathcal{F}_\gamma(Y_t) + \frac{\mathrm{d}\mathcal{M}(t, Y_t)}{\mathrm{d}t} \right] \Big|_{t=t_0}, \tag{4.4}$$

kde druhý člen pravej strany prirodzene závisí na rozhodnutí $g \in \mathbf{R}$. Ak je rozhodnutie $g$ optimálne, nastáva v (4.4) rovnosť, všeobecne však nastáva nerovnosť "$\geq$", tj. pravá strana (4.4) je nekladná.

Cieľom nasledujúcej kapitoly bude intuitívnymi prostriedkami dôjsť k pravdepodobnému riešeniu rovnice dynamického programovania. Dovolíme si už teraz hypotézu, že funkcia $\mathcal{M}$ je tvaru

$$\mathcal{M}(t_0, y_0) = \mathrm{e}^{-\delta t_0} \mathcal{M}(0, y_0) = \mathrm{e}^{-\delta t_0} \mathrm{M}(y_0),$$

kde $\mathrm{M}(y) := \mathcal{M}(0, y)$. Potom

$$\begin{aligned} \frac{1}{h}[\mathrm{E}\, \mathcal{M}(t_0 + h, Y_{t_0+h}) - \mathcal{M}(t_0, y_0)] &= \frac{1}{h}[\mathrm{E}\, \mathrm{e}^{-\delta(t_0+h)} \mathrm{M}(Y_{t_0+h}) - \mathrm{e}^{-\delta t_0} \mathrm{M}(y_0)] \\ &= \mathrm{e}^{-\delta t_0} \frac{1}{h}[(\mathrm{e}^{-\delta h} - 1) \mathrm{E}\, \mathrm{M}(Y_{t_0+h}) + \mathrm{E}\, \mathrm{M}(Y_{t_0+h}) - \mathrm{M}(y_0)] \\ &\xrightarrow{h \to 0} \mathrm{e}^{-\delta t_0} \left( -\delta \mathrm{M}(y_0) + \frac{\mathrm{d}\mathrm{M}(Y_t)}{\mathrm{d}t} \Big|_{t=t_0} \right), \end{aligned} \tag{4.5}$$

kde $\frac{\mathrm{dM}(Y_t)}{\mathrm{d}t}$ v poslednom výraze označuje drift $\mathrm{M}(Y_t)$. Ak je M hladká funkcia, môžeme podľa Itôovej formuly (3.7) písať

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{dM}(Y_t)}{\mathrm{d}t} &= \mathrm{M}'(Y_t) \frac{\mathrm{d}Y_t}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{2} \mathrm{M}''(Y_t) \left( \frac{\mathrm{d}Y_t}{\mathrm{d}W} \right)^2 \\ &= M'(Y_t) \mu G_t Y_t + \frac{1}{2} M''(Y_t) \sigma^2 G_t^2 Y_t^2. \end{aligned}$$

Dostávame teda obdobu rovnice dynamického programovania v tvare

$$\mathrm{e}^{-\delta t} \mathcal{F}_\gamma(y) + \mathrm{e}^{-\delta t}[-\delta \mathrm{M}(y) + \mathrm{M}'(y) g\, y\, \mu + \frac{1}{2} \mathrm{M}''(y) \sigma^2 g^2 y^2] = 0,$$

čo môžeme zjednodušiť na tvar

$$\mathcal{F}_\gamma(y) + [-\delta \mathrm{M}(y) + \mathrm{M}'(y) g\, y\, \mu + \frac{1}{2} \mathrm{M}''(y) \sigma^2 g^2 y^2] = 0. \tag{4.6}$$

### 4.1.3 Pravdepodobné riešenie rovnice dynamického programovania

Drvivá väčšina postupov v tejto časti je čisto intuitívna a doplnená minimálnym potrebným odôvodnením. Overenie potrebných vlastností nájdeného riešenia bude nasledovať v ďalšej časti.

Riešenie rovnice (4.6) sa dá uhádnuť v tvare $\mathrm{M}(y) = \frac{ay^\gamma}{\gamma}$. Dosadením do (4.6) dostávame

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{y^\gamma}{\gamma} - \delta\, a\, \frac{y^\gamma}{\gamma} + a y^\gamma g\, \mu + \frac{a}{2}(\gamma-1) y^\gamma \sigma^2 g^2 \\ &= y^\gamma \left( \frac{1}{\gamma} + a\left( \frac{-\delta}{\gamma} + g\,\mu + \frac{(\gamma-1)\sigma^2 g^2}{2} \right)\right). \end{aligned} \tag{4.7}$$

Vhodnou voľbou $a$ sme schopný pre pevné $g$ dosiahnuť rovnosti v (4.7), ak

$$\left( \frac{-\delta}{\gamma} + g\,\mu + \frac{(\gamma-1)\sigma^2 g^2}{2} \right) \neq 0. \tag{4.8}$$

Pre optimálne riadenie v (4.7) by sme mali dosiahnuť rovnosť a pre každé iné prípustné riadenie len nerovnosť. Funkcia

$$g \mapsto \frac{-\delta}{\gamma} + g\mu + \frac{(\gamma-1)\sigma^2 g^2}{2}$$

je kvadratická a extrém nadobúda v bode $g$ takom, že $\mu + (\gamma-1)\sigma^2 g = 0$, tj. $g = \frac{\sigma^{-2}\mu}{1-\gamma}$. Táto hodnota sa nazýva Mertonova proporcia. Hodnota kvadratickej funkcie v tomto bode je

$$\frac{-\delta}{\gamma} + \frac{\sigma^{-2}\mu^2}{1-\gamma} - \frac{1-\gamma}{2}\frac{\sigma^{-2}\mu^2}{(1-\gamma)^2} = \frac{-\delta}{\gamma} + \frac{1-\gamma}{2}\sigma^{-2}\mu^2.$$

Podmienka (4.8) pre $g = \frac{\sigma^{-2}\mu}{1-\gamma}$ je teda tvaru

$$\delta \neq \gamma \frac{1-\gamma}{2}\sigma^{-2}\mu^2.$$

Pretože predpokladáme, že $\delta > 0$ a $\gamma < 0$, je nerovnosť splnená so znamienkom ”>”. V tom prípade

$$a := -\frac{1}{\gamma}\left( -\frac{\delta}{\gamma} + \frac{1-\gamma}{2}\sigma^{-2}\mu^2 \right)^{-1} \in (0, \infty) \tag{4.9}$$

a platí teda nerovnosť

$$y^\gamma\left(\frac{1}{\gamma}+a\left(\frac{-\delta}{\gamma}+g\,\mu+\frac{(\gamma-1)\sigma^2g^2}{2}\right)\right)\leq y^\gamma\left(\frac{1}{\gamma}+a\left(-\frac{\delta}{\gamma}+\frac{1-\gamma}{2}\sigma^{-2}\mu^2\right)\right)=0.$$

Došli sme teda k hypotéze, že v prípade nulových transakčných poplatkov je optimálne udržovať pozíciu na hodnote Mortonovej proporcie $\frac{\sigma^2\mu}{1-\gamma}$, pričom

$$\mathcal{M}(t,y)=\mathrm{e}^{-\delta t}\frac{y^\gamma}{\gamma}a,$$

kde $a$ je definované ako v (4.9).

### 4.1.4 Overovacie podmienky pre rovnicu dynamického programovania

V tejto časti ukážeme, že pre riadenie $G_t\equiv\frac{\sigma^{-2}\mu}{1-\gamma}$ a $\mathcal{M}(t,y):=\frac{a}{\gamma}y^\gamma\mathrm{e}^{-\delta t}$ nastáva v rovnici dynamického programovania (4.4) rovnosť, pričom všeobecne v (4.4) nastáva nerovnosť "$\geq$". Spočítajme $\frac{\mathrm{d}\mathcal{M}(t,Y_t)}{\mathrm{d}t}$. Pretože

$$a\left(\frac{-\delta}{\gamma}+G_t\mu+\frac{\gamma-1}{2}\sigma^2G_t^2\right)\leq\frac{-1}{\gamma},\tag{4.10}$$

dostávame

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{M}(t,Y_t)}{\mathrm{d}t}=\mathrm{e}^{-\delta t}Y_t^\gamma a\left[\frac{-\delta}{\gamma}+G_t\mu+\frac{\gamma-1}{2}\sigma^2G_t^2\right]\leq-\mathrm{e}^{-\delta t}\mathcal{F}_\gamma(Y_t)\tag{4.11}$$

a po pripočítaní pravej strany k obidvom stranám nerovnosti

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{M}(t,Y_t)}{\mathrm{d}t}+\mathrm{e}^{-\delta t}\mathcal{F}_\gamma(Y_t)\leq 0.\tag{4.12}$$

V optimálnom prípade nastáva v (4.12) rovnosť, pretože v (4.10) a v (4.11) nastáva pre $G_t=\frac{\sigma^{-2}\mu}{1-\gamma}=:\Theta$ rovnosť. Od nerovnosti (4.12) sa bude odvíjať postup v nasledujúcej podkapitole.

## 4.2 Nenulové transakčné náklady

Súčasnú kapitolu je treba vnímať ako ukážku toho, kam sa až dá dôjsť s minimom technických znalostí. Výhodou tohto prístupu by mala byť príležitosť pre čitateľov bez potrebného technického zázemia zoznámiť sa s problémami, s ktorými by sa inak mohli stretnúť až po relatívne náročnom štúdiu.

### 4.2.1 Úvod

Pokračujme v úvahách zo začiatku predchádzajúcej podkapitoly. Ak neobchodujeme, je $H_t$ konštantné a podľa stochastickej verzie Per Partes (3.9) dostávame

$$\begin{aligned} \mathrm{d}G_t &= H_tY_t^{-1}\mathrm{d}X_t + H_tX_tY_t^{-1}Y_t\mathrm{d}Y_t^{-1} + H_t(\mathrm{d}X_t)(\mathrm{d}Y_t^{-1}) \\ &= G_t(1-G_t)[(\mu-\sigma^2G_t)\mathrm{d}t + \sigma\mathrm{d}W_t]. \end{aligned}$$

Pre zjednodušenie zápisu zaveďme vzťahy pre drift $B(x)$ a difúziu $S^2(x)$

$$B(x) = x(1-x)(\mu-\sigma^2x), \qquad S(x) = \sigma x(1-x).$$

Prírastok pozície preto môžme zapísať do tvaru

$$\mathrm{d}G_t = B(G_t)\mathrm{d}t + S(G_t)\mathrm{d}W_t. \tag{4.13}$$

Teraz predpokladajme, že v čase $t$ nakúpime $\Delta H_t \geq 0$ akcií. Potom akciová časť portfólia $H_tX_t = Y_tG_t$ vzrastie o hodnotu $X_t\Delta H_t$. Predpokladajme ďalej, že pri nákupe platíme $(1+b)$-krát tržnú cenu akcie. Predpokladáme tiež, že nákup prebehne v nekonečne krátkom časovom intervale $[t, t+\mathrm{d}t]$, v priebehu ktorého sa cena akcie $X_t$ nezmení. Veľkosť transakčných nákladov je potom rovná

$$b\,X_t\Delta H_t = \Delta(b\,X_tH_t).$$

O túto istú hodnotu musí poklesnúť tržná cena portfólia. Preto hodnota

$$Y_t + b\,H_tX_t = Y_t(1+b\,G_t)$$

zostáva počas nákupu konštantná. V diferenciálnej podobe môžme písať

$$\mathrm{d}^+\ln Y_t = -\mathrm{d}^+\ln(1+b\,G_t) = \vartheta_+(G_t)\mathrm{d}^+G_t = \vartheta_+(G_t)\mathrm{d}G_t^+,$$

kde $\mathrm{d}^+$ reprezentuje infinitezimálnu zmenu spôsobenú nákupom akcie odpovedajúcu infinitezimálnej zmene pozície $\mathrm{d}^+G_t =: \mathrm{d}G_t^+$ a kde

$$\vartheta_+(x) = \frac{b}{1+b\,x}. \tag{4.14}$$

Pri predaji predpokladáme, že obdržíme $(1-c)$-násobok tržnej ceny akcie. Podobne ako pri nákupe hodnota

$$Y_t - c\,H_tX_t = Y_t(1-c\,G_t)$$

zostáva konštantná. V diferenciálnej podobe využijeme $\mathrm{d}^-$, ktoré reprezentuje zmenu spôsobenú predajom akcií odpovedajúcu infinitezimálnej zmene pozície $\mathrm{d}^- G_t =: -\mathrm{d}G_t^-$ a funkciu

$$\vartheta_-(x) = \frac{c}{1 - c\,x}. \tag{4.15}$$

Dostávame teda

$$\mathrm{d}^- \ln Y_t = -\mathrm{d}^- \ln(1 - cG_t) = \vartheta_-(G_t)\mathrm{d}^- G_t = -\vartheta_-(G_t)\mathrm{d}G_t^- .$$

Celkový prírastok pozície tak vo všeobecnosti vyjadruje rovnica

$$\mathrm{d}\,G_t = B(G_t)\mathrm{d}\,t + S(G_t)\mathrm{d}\,W_t + \mathrm{d}G_t^+ - \mathrm{d}G_t^- . \tag{4.16}$$

Celkovú dynamiku tržnej ceny portfólia môžme zapísať rovnicou

$$Y_t^{-1}\mathrm{d}Y_t = G_t(\mu\mathrm{d}\,t + \sigma\mathrm{d}\,W_t) - \vartheta_+(G_t)\mathrm{d}\,G_t^+ - \vartheta_-(G_t)\mathrm{d}\,G_t^- . \tag{4.17}$$

### 4.2.2 Zostavenie rovnice dynamického programovania

Uvažujme podobnú úlohu ako v časti 4.2.1. V tomto prípade budú riadením neklesajúce procesy $G_t^+, G_t^-$. Označme

$$\mathbf{M}(t_0, y_0, g_0) = \sup\left\{ \mathrm{E}\int_{t_0}^{\infty} \mathrm{e}^{-\delta t}\mathcal{F}_\gamma(Y_t)dt;\ (Y,G)^T = \mathcal{R}_{t_0}(G^\pm, y_0, g_0),\ G^\pm \in \mathcal{U}_{t_0}^\pm(y_0, g_0) \right\},$$

kde $\mathcal{U}_{t_0}^\pm(y_0, g_0)$ označuje množinu prípustných riadení $G_t^\pm$ odpovedajúcu počiatočnej podmienke $Y_{t_0} = y_0,\ G_{t_0} = g_0$. Túto množinu nebudeme bližšie určovať, len pre ňu zavedieme označenie a obmedzíme sa na heuristické postupy založené na podstatných myšlienkach, na ktorých je založená kapitola 2. Úlohou tejto časti je ukázať, k čomu takéto heuristické postupy môžu viesť, ak odhliadneme od rigorózneho prístupu, ktorý je pre túto prácu v nedeterministickom prípade nedosiahnuteľný.

V ďalšom texte budeme využívať nasledujúce značenie pre koeficienty stochastického diferenciálu $\mathrm{d}Z_t$

$$\mathrm{d}Z_t = \frac{\mathrm{d}Z_t}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t + \frac{\mathrm{d}Z_t}{\mathrm{d}W}\,\mathrm{d}W_t + \frac{\mathrm{d}Z_t}{\mathrm{d}G_t^+}\,\mathrm{d}G_t^+ + \frac{\mathrm{d}Z_t}{\mathrm{d}G_t^-}\,\mathrm{d}G_t^-$$

a budeme predpokladať jednoznačnosť príslušných koeficientov v symbolickom zmysle stochastického diferenciálu. Zároveň sa budeme obmedzovať len na také riadenie $G_t^\pm$, pri ktorom pozícia $G_t$ neopúšťa množinu $(-\frac{1}{b}, \frac{1}{c})$. Investor totiž pri dosiahnutí krajných pozícií $-\frac{1}{b}, \frac{1}{c}$ krachuje, pretože nie je schopný dosiahnuť pozíciu 0 tak, aby tržná cena portfólia bola kladná.

Podobne ako v prípade nulových transakčných nákladov by sme dospeli k nerovosti

$$\mathbf{M}(t_0, y_0, g_0) \geq \mathrm{E} \int_{t_0}^{t_1} \mathrm{e}^{-\delta t} \mathcal{F}_\gamma(Y_t)\, \mathrm{d}t + \mathrm{E}\mathbf{M}(t_1, Y_{t_1}, G_{t_1}),$$

kedykoľvek $(Y_t, G_t)^T = \mathcal{R}_{t_0}(G^\pm, y_0, g_0),\ G^\pm \in \mathcal{U}^\pm_{t_0}(y_0, g_0)$. Ďalej

$$\mathbf{M}(t_0, y_0, g_0) = \sup_{G^\pm \in \mathcal{U}^\pm_{t_0}(y_0,g_0)} \mathrm{E}\left[\int_{t_0}^{t_1} \mathrm{e}^{-\delta t} \mathcal{F}_\gamma(Y_t)\, \mathrm{d}t + \mathrm{M}(t_1, Y_{t_1}, G_{t_1})\right].$$

Z multiplikatívneho charakteru investovania pri proporcionálnych transakčných nákladoch môžme odvodiť, že

$$\mathbf{M}(t_0, y_0, g_0) = y_0^\gamma \mathbf{M}(t_0, 1, g_0),$$

pretože investovať $y_0$ jednotiek určitým spôsobom dáva $y_0$-násobok výsledku dosiahnutého pri investovaní jednej jednotky tým istým spôsobom (táto vlastnosť vyplýva z predpokladov modelu). Taktiež platí podobne ako v predchádzajúcej časti

$$\mathbf{M}(t_0, y_0, g_0) = \mathrm{e}^{-\delta t} \mathbf{M}(0, y_0, g_0).$$

Potom

$$\mathbf{M}(t_0, y_0, g_0) = \mathrm{e}^{-\delta t} y_0^\gamma \mathbf{M}(0, 1, g_0).$$

Označme teda $\mathrm{m}(g) := \mathbf{M}(0, 1, g)$. Môžme očakávať, že hodnotová funkcia bude v našom prípade záporná, teda aj $m < 0$. Ak by sme sa nechali inšpirovať podmienkou (4.12), dostaneme obdobu rovnice dynamického programovania dosadením $t = t_0$ do rovnice

$$\max\left\{e^{-\delta t}\mathcal{F}_\gamma(Y_t) + \frac{\mathrm{d}M(t, Y_t, G_t)}{\mathrm{d}t},\ \frac{\mathrm{d}M(t, Y_t, G_t)}{\mathrm{d}G_t^+},\ \frac{\mathrm{d}M(t, Y_t, G_t)}{\mathrm{d}G_t^-}\right\} = 0. \tag{4.18}$$

Rovnosť (4.18) by mala platiť pre optimálnu stratégiu, pričom všeobecne by mala nastávať nerovnosť "$\leq$". Zrejme

$$\frac{\mathrm{d}M(t, Y_t, G_t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\, e^{-\delta t} Y_t^\gamma m(G_t)}{\mathrm{d}t} = e^{-\delta t}\left(-\delta Y_t^\gamma m(G_t) + \frac{\mathrm{d}Y_t^\gamma m(G_t)}{\mathrm{d}t}\right).$$

Z Itôovej formule v kapitole 3 dostávame

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}Y_t^\gamma \mathrm{m}(G_t)}{\mathrm{d}t} &= \gamma Y_t^{\gamma-1}\frac{\mathrm{d}Y_t}{\mathrm{d}t}\mathrm{m}(G_t) + \mathrm{m}'(G_t)\frac{\mathrm{d}G_t}{\mathrm{d}t}Y_t^\gamma + \gamma Y_t^{\gamma-1}\mathrm{m}'(G_t)\frac{\mathrm{d}Y_t}{\mathrm{d}W}\frac{\mathrm{d}G_t}{\mathrm{d}W} \\ &+ \frac{1}{2}\gamma(\gamma-1)Y_t^{\gamma-2}\mathrm{m}(G_t)\left(\frac{\mathrm{d}Y_t}{\mathrm{d}W}\right)^2 + \frac{1}{2}\mathrm{m}''(G_t)\left(\frac{\mathrm{d}G_t}{\mathrm{d}W}\right)^2 Y_t^\gamma.\end{aligned}$$

Pre také $g = g_0$, pre ktoré v optimálnom prípade nedochádza k žiadnym obchodom, dostaneme podmienku

$$\begin{aligned}\gamma\, y^\gamma g\,\mu\,\mathrm{m}(g) \;&+\; \mathrm{m}'(g)\,g(1-g)(\mu-\sigma^2 g)y^\gamma + \gamma\, y^\gamma \mathrm{m}'(g)\sigma^2 g^2(1-g)\\ &+\; \frac{1}{2}\gamma(\gamma-1)y^\gamma \mathrm{m}(g)\sigma^2 g^2 + \frac{1}{2}\mathrm{m}''(g)\sigma^2 g^2(1-g)^2 y^\gamma - \delta y^\gamma \mathrm{m}(g) + \mathcal{F}_\gamma(y) = 0,\end{aligned}$$

čo po zjednodušení môžme prepísať do tvaru

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\mathrm{m}''(g)\,\sigma^2 g^2(1-g)^2 \;&+\; \mathrm{m}'(g)g(1-g)(\mu-(1-\gamma)\sigma^2 g)\\ &+\; \mathrm{m}(g)\left[\frac{1}{2}\sigma^2 g^2\gamma(\gamma-1) - \delta + \gamma\, g\,\mu\right] + \frac{1}{\gamma} = 0.\end{aligned} \tag{4.19}$$

Pre všeobecné $g \in (-1/b, 1/c)$ požadujeme podľa (4.18) v (4.19) len nerovnosť "$\leq$". Zrejme $\frac{d\ln Y_t}{dG_t^\pm} = -\vartheta_\pm(G_t)$ a tak

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}G_t^\pm}M(t, Y_t, G_t) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}G_t^\pm}\mathrm{e}^{-\delta t}Y_t^\gamma m(G_t)\\ &= \mathrm{e}^{-\delta t}\left[m(G_t)\gamma Y_t^{\gamma-1}\frac{\mathrm{d}Y_t}{\mathrm{d}G_t^\pm} + Y_t^\gamma m'(G_t)\frac{\mathrm{d}G_t}{\mathrm{d}G_t^\pm}\right]\\ &= \mathrm{e}^{-\delta t}m(G_t)Y_t^\gamma\left[-\gamma\vartheta_\pm(G_t) + \frac{m'(G_t)}{m(G_t)}(\pm 1)\right].\end{aligned}$$

Pretože očakávame, že $m < 0$ na intervale $(-1/b, 1/c)$, požadujeme podľa (4.18) aby

$$\frac{m'(x)}{m(x)} \in [\gamma\vartheta_+(x), -\gamma\vartheta_-(x)] \tag{4.20}$$

platilo pre $x \in (-1/b, 1/c)$, pričom ak je pre nejaké $G_t = x$ optimálne rozhodnutie nakupovať (v zmysle, že optimálna stratégia hovorí nakupovať), potom by malo platiť

$$\gamma(-\vartheta_+(x)) + \frac{m'(x)}{m(x)} = 0, \quad tj. \quad \frac{m'(x)}{m(x)} = \gamma\vartheta_+(x). \tag{4.21}$$

Ak je naopak optimálne rozhodnutie pre $G_t = x$ predávať, malo by platiť

$$\gamma(-\vartheta_-(x)) - \frac{m'(x)}{m(x)} = 0, \quad tj. \quad \frac{m'(x)}{m(x)} = -\gamma\vartheta_-(x). \tag{4.22}$$

### 4.2.3 Intervalová stratégia

Ďalej budeme vychádzať z toho, že pravdepodobným výsledkom tejto úlohy bude udržiavať pozíciu $G_t$ v medziach nejakého intervalu, ktorý označíme $[\alpha, \beta] \subset (-1/b, 1/c)$, a že nebude dochádzať k nákupu, ak bude pozícia nad $\alpha$, a k predaju, ak bude pozícia pod $\beta$. To znamená, že v optimálnom prípade nenastane $G_t \notin [\alpha, \beta]$ a diferenciály $\mathrm{d}G_t^+$ a $\mathrm{d}G_t^-$ budú po rade sústredené na množinách $(-1/b, \alpha]$ a $[\beta, 1/c)$. Prirodzene teda budeme požadovať, aby diferenciálna rovnica (4.19) platila pre $g \in (\alpha, \beta)$, pretože pre takéto $g$ akcie nenakupujeme ani nepredávame, a aby všeobecne v (4.19) nastávala nerovnosť "$\leq$" na $(-1/b, 1/c)$. Naopak, ak $g \in (-\frac{1}{b}, \alpha]$ alebo $g \in [\beta, \frac{1}{c})$, očakávame, že v takom prípade bude optimálne nakupovať resp. predávať. Požadujeme teda, aby (4.21) platilo na $(-1/b, \alpha]$, (4.22) na $[\beta, 1/c)$ a (4.20) na $(-1/b, 1/c)$.

Ďalej sa budeme zaujímať o to, či je prirodzená požiadavka $C^2$-hladkosti hodnotovej funkcie $M$, čo opdpovedá požiadavke $m \in C^2(-1/b, 1/c)$, v súlade s podmienkami optimality danými rovnicou (4.18). Označme

$$\begin{aligned}(\mathcal{D}m)(x) \;&:=\; \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 (1-x)^2 m''(x) + x(1-x)(1-\gamma)\sigma^2(\Theta - x)m'(x)\\ &-\; \left[\frac{\gamma(1-\gamma)}{2}\sigma^2(x^2 - 2\Theta x) + \delta\right] m(x) + \frac{1}{\gamma},\end{aligned}$$

kde $\Theta := \frac{\sigma^{-2}\mu}{1-\gamma}$ je Mertonova proporcia.

**Tvrdenie 4.1.** *Nech $m \in C^2(-1/b, 1/c)$ nadobúda len záporné hodnoty a nech $-\frac{1}{b} < \alpha < \beta < \frac{1}{c}$ sú také, že platí*

$$\begin{aligned} m'(x) \;&=\; \gamma\,\vartheta_+(x)\,m(x) \qquad \textit{pre} \quad x \in (-1/b, \alpha] \\ m'(x) \;&=\; -\gamma\,\vartheta_-(x)\,m(x) \qquad \textit{pre} \quad x \in [\beta, 1/c)\end{aligned} \tag{4.23}$$

*a $(\mathcal{D}m)(x) = 0$ pre $x \in [\alpha, \beta]$. Predpokladajme ďalej, že $0 < \xi_+(\alpha) < \Theta < \xi_-(\beta) < 1$, kde*

$$\xi_+(x) := x[1 + (1-x)\vartheta_+(x)] \quad \textit{a} \quad \xi_-(x) := x[1 - (1-x)\vartheta_-(x)],$$

*a že $\mathcal{H}'_+(\alpha) < 0 < \mathcal{H}'_-(\beta)$, kde*

$$\mathcal{H}_+(x) := (1+bx)^\gamma \left[(\xi_+(x) - \Theta)^2 - \Theta^2 + \frac{2\sigma^{-2}\delta}{\gamma(1-\gamma)}\right],$$

$$\mathcal{H}_-(x) := (1-cx)^\gamma \left[(\xi_-(x) - \Theta)^2 - \Theta^2 + \frac{2\sigma^{-2}\delta}{\gamma(1-\gamma)}\right].$$

*Potom $(\mathcal{D}m)(x) \le 0$ platí pre každé $x \in (-1/b, 1/c)$.*

*Dôkaz.* Z predpokladu $m \in C^2(-1/b, 1/c)$ a (4.23) plynie, že

$$m''(x) = -\gamma(1-\gamma)m(x)\vartheta_\pm^2(x),$$

a teda aj

$$(\mathcal{D}m)(x) = -\gamma(1-\gamma)\frac{1}{2}\sigma^2\left[(\xi_\pm(x)-\Theta)^2 - \Theta^2 + \frac{2\sigma^{-2}\delta}{\gamma(1-\gamma)}\right]m(x) + \frac{1}{\gamma}$$

platí pre $x \in (-1/b, \alpha]$ v hornom prípade a pre $x \in [\beta, 1/c)$ v dolnom prípade. S využitím (4.23) ďalej dostávame

(4.24)

$$x \in (-1/b,\alpha) \quad\Rightarrow\quad m(x) = m(\alpha)\exp\left\{\gamma\int_\alpha^x \vartheta_+(y)\,\mathrm{d}y\right\} = m(\alpha)\left(\frac{1+bx}{1+b\alpha}\right)^\gamma,$$

$$x \in (\beta,1/c) \quad\Rightarrow\quad m(x) = m(\beta)\exp\left\{-\gamma\int_\beta^x \vartheta_-(y)\,\mathrm{d}y\right\} = m(\beta)\left(\frac{1-cx}{1-c\beta}\right)^\gamma.$$

Pre $x \in (-1/b, \alpha)$ resp. $x \in (\beta, 1/c)$ tak po rade dostávame

$$(1+b\alpha)^\gamma[(\mathcal{D}m)(x) - (\mathcal{D}m)(\alpha)] = -\gamma(1-\gamma)\frac{1}{2}\sigma^2[\mathcal{H}_+(x) - \mathcal{H}_+(\alpha)]m(\alpha), \tag{4.25}$$

$$(1-c\beta)^\gamma[(\mathcal{D}m)(x) - (\mathcal{D}m)(\beta)] = -\gamma(1-\gamma)\frac{1}{2}\sigma^2[\mathcal{H}_-(x) - \mathcal{H}_-(\beta)]m(\beta). \tag{4.26}$$

Zrejme

$$\frac{\mathcal{H}_+'(x)}{(1+bx)^{1-\gamma}} = \gamma b\left[(\xi_+(x)-\Theta)^2 - \Theta^2 + \frac{2\sigma^{-2}\delta}{\gamma(1-\gamma)}\right] + 2(\xi_+(x)-\Theta)\frac{1+b}{1+bx},$$

$$\frac{\mathcal{H}_-'(x)}{(1-cx)^{1-\gamma}} = -\gamma c\left[(\xi_-(x)-\Theta)^2 - \Theta^2 + \frac{2\sigma^{-2}\delta}{\gamma(1-\gamma)}\right] + 2(\xi_-(x)-\Theta)\frac{1-c}{1-cx}$$

sú funkcie rastúce po rade na intervaloch $(-1/b, \xi_+^{-1}(\Theta))$ a $(\xi_-^{-1}(\Theta), 1/c)$. Pretože $\mathcal{H}_+'(\alpha) < 0 < \mathcal{H}_-'(\beta)$, dostávame

$$\mathcal{H}_+(x) - \mathcal{H}_+(\alpha) = \int_\alpha^x \mathcal{H}_+'(y)\,\mathrm{d}y > 0 \qquad \text{pre} \quad x \in (-1/b, \alpha),$$

$$\mathcal{H}_-(x) - \mathcal{H}_-(\beta) = \int_\beta^x \mathcal{H}'_-(y)\,\mathrm{d}y > 0 \qquad \text{pre} \quad x \in (\beta, 1/c),$$

pretože $\xi_+(\alpha) < \Theta < \xi_-(\beta)$ platí podľa predpokladu. Zo vzťahov (4.25) a (4.26) potom dostaneme, že

$$\begin{aligned}(\mathcal{D}m)(x) \le (\mathcal{D}m)(\alpha) &= 0 \quad \text{platí pre} \quad x \in (-1/b, \alpha),\\ (\mathcal{D}m)(x) \le (\mathcal{D}m)(\beta) &= 0 \quad \text{platí pre} \quad x \in (\beta, 1/c).\end{aligned}$$

□

**Poznámka.** Ak $m$ spĺňa predpoklady tvrdenia 4.1 a taktiež podmienku (4.20) na $(-1/b, 1/c)$, je podmienka (4.18) splnená pre intervalovú stratégiu s krajnými hodnotami $\alpha, \beta$ z tvrdenia 4.1. Táto stratégia je potom optimálnou stratégiou, pretože $\mathrm{d}M(t, Y_t, G_t)$ pre voľbu $M(t, y, g) = e^{-\delta t} y^\gamma m(g)$ obsahuje iba zložku odpovedajúcu diferenciálu $\mathrm{d}W_t$, zatiaľčo všeobecne podľa (4.18) diferenciál $\mathrm{d}M(t, Y_t, G_t)$ obsahuje okrem tejto zložky ešte ďalšie, ktoré majú nekladný koeficient pri diferenciáli z neklesajúcich procesov. Z nasledujúcich výpočtov vyplýva, že podmienku (4.20) je potom nutné overovať už len na intervale $(\alpha, \beta)$, pretože ak

$$x \in (-1/b, \alpha], \qquad \text{potom} \quad -\gamma m(x)\vartheta_-(x) - m'(x) = -\gamma m(x)[\vartheta_+(x) + \vartheta_-(x)] < 0,$$

a takisto ak

$$x \in [\beta, 1/c), \qquad \text{potom} \quad -\gamma m(x)\vartheta_+(x) + m'(x) = -\gamma m(x)[\vartheta_+(x) + \vartheta_-(x)] < 0,$$

ak $m(x) < 0$ pre každé $x \in (-1/b, 1/c)$.

### 4.2.4 Numerické výsledky

V tejto časti sa zameriame na špeciálne hodnoty parametrov tak, aby sme obdržali riešenie rovnice (4.19) v elementárnom tvare. Využijeme pri tom poznatky získané v dodatku 3. Volíme teda

$$\mu = \frac{1}{4}, \qquad \sigma = \sqrt{2}, \qquad \delta = 1, \qquad \gamma = -1.$$

Potom

$$\theta = \sigma^{-2}\mu = \frac{1}{2}, \qquad \Theta = \frac{\theta}{1-\gamma} = \frac{1}{4} \qquad a \qquad \rho = \theta - \frac{1}{2} = 0.$$

Dostávame tak podmienky $\omega_0 + \omega_1 = 0$ a $\omega_0\omega_1 = -2\sigma^{-2}\delta = -1$, čo odpovedá napríklad $\omega_0 = 1, \omega_1 = -1$. Potom

$$\mathbf{B}_y(-\gamma - \omega_{1,2}, \omega_{1,2}) = \mathbf{B}_y(1 \mp 1, \pm 1) = \begin{cases} \int x^{-1}\,\mathrm{d}x & = \ln x \\ \int x(1-x)^{-2}\,\mathrm{d}x & = (1-x)^{-1} + \ln(1-x), \end{cases}$$

a tak na základe dodatku 3 dostávame všobecné riešenie rovnice (4.19) v tvare

$$\tilde{m}(x) = k_0\, x^{-1} + k_1\, x(1-x)^{-2} + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{x}\ln(1-x) - (1 - x + x\ln(x))(1-x)^{-2}\right], \tag{4.27}$$

kde $k_0, k_1 \in \mathbf{R}$ sú voliteľné parametre. Numerické (približné) výpočty ukazujú, že existujú hodnoty $k_0, k_1 \in \mathbf{R}$, $\alpha, \beta$ a záporná funkcia $m \in C^2(-1/b, 1/c)$ splňujúca predpoklady tvrdenia 4.1 a rovnajúca sa funkcii $\tilde{m} < 0$ na intervale $(\alpha, \beta)$ pri voľbe $b = c = 0,02$, a taká, že (4.20) platí pre každé $x \in (-1/b, 1/c)$. Približné hodnoty sú uvedené v nasledujúcej tabuľke:

(4.28)

| $k_0$ | $k_1$ | $\alpha$ | $\beta$ |
|---|---|---|---|
| $0,003532$ | $0,04829$ | $0,17$ | $0,34$ |

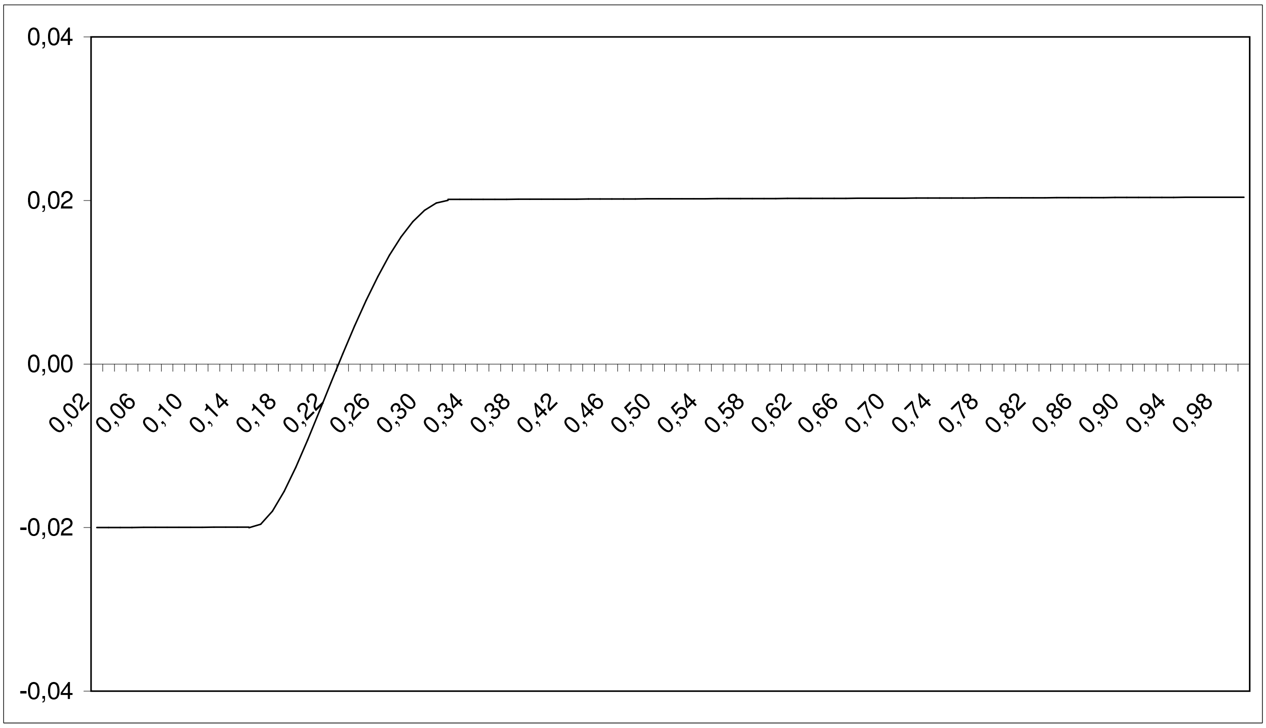
Numerické výpočty ukazujú, že pre zmienené $\alpha, \beta$ platia nerovnosti

$$\mathcal{H}'_+(\alpha) < -0,1 < 0 < 0,1 < \mathcal{H}'_-(\beta),$$

a je teda splnený posledný predpoklad tvrdenia 4.1. Podobne numerické výpočty naznačujú, že pre optimálne hodnoty $(\alpha, \beta)$ je splnená podmienka (4.20).

**Záver.** Pre zvolené hodnoty parametrov je optimálnou stratégiou intervalová stratégia s krajnými hodnotami $\alpha, \beta$, ktorých aproximované hodnoty sú uvedené v tabuľke (4.28). Príslušná hodnotová funkcia je tvaru $M(t, y, g) = e^{-\delta t} y^\gamma m(g)$, kde $m$ je na intervale $[\alpha, \beta]$ daná vzorcom (4.27) a na intervaloch $(-1/b, \alpha)$ a $(\beta, 1/c)$ formulami (4.24), kde približné hodnoty parametrov $k_0, k_1$ sú dané tabuľkou (4.28).

Na koniec uveďme pre názornosť obrázok grafu funkcie $\frac{-1}{\gamma}\frac{m'(x)}{m(x)}$.



# Kapitola 5

# Dodatky

## 5.1 Dodatok 1

**Veta 5.1.** *Nech* $(t, x) \in [t, T] \times O$ *a* $f$ *spĺňa podmienku* (2.3)*, potom pre každé* $u \in \mathcal{U}(t)$ *existuje práve jedna funkcia* $y \in AC([t, T], \mathbf{R}^n)$ *splňujúca* (2.2) *s počiatočnou podmienkou* $y_t = x$.

*Dôkaz.* Pretože $u \in \mathcal{U}(t)$, platí podľa predpokladu, že $N := \max_{r\in[t,T]} ||u_r|| < \infty$. Zrejme z tvrdenia vety pre $[t_i, T_i]$, $i = 1, 2$, miesto $[t, T]$ dostaneme tvrdenie vety pre interval $[t, T]$, ak $t = t_1 < T_1 = t_2 < T_2 = T$. Môžme teda bez ujmy na všeobecnosti predpokladať, že $T - t < K_N$, kde $K_N$ je hodnota z (2.3). Ďalej budeme používať značenie $||h||_t^T := \max_{r\in[t,T]} ||h_r|| < \infty$ pre $h \in C([t, T], \mathbf{R}^n)$. Položme $y_r^{(0)} := x$ pre každé $r \in [t, T]$ a pre každé $m \in \mathbf{N}$

$$y_r^{(m+1)} := x + \int_t^r f(s, y_s^{(m)}, u_s)\,\mathrm{d}s.$$

Potom pre každé $m \in \mathbf{N}$ je $y^{(m-1)} \in C([t, T], \mathbf{R}^n)$ a z (2.3) dostaneme, že

$$\begin{aligned} ||y^{(m+1)} - y^{(m)}||_t^T &\leq \int_t^T ||f(s, y_s^{(m)}, u_s) - f(s, y_s^{(m-1)}, u_s)||\,\mathrm{d}s \\ &\leq K_n(T - t)||y^{(m)} - y^{(m-1)}||_t^T. \end{aligned}$$

Pretože predpokladáme, že $K_N(T - t) < 1$, platí

$$\sum_{m\in\mathbf{N}} ||y^{(m)} - y^{(m-1)}||_t^T \leq \frac{||y^{(1)} - y^{(0)}||_t^T}{1 - K_N(T - t)} < \infty.$$

Postupnosť $y^{(m)}$ je tak Cauchyovská v úplnom priestore $C([t,T],\mathbf{R}^n)$, a teda existuje $y^{(\infty)} \in C([t,T],\mathbf{R}^n)$ taká, že $y^{(m)} \to y^{(\infty)}$ v $C([t,T],\mathbf{R}^n)$. Položme

$$y_r := x + \int_t^r f(s, y_s^{(\infty)}, u_s)\,\mathrm{d}s.$$

Potom $y \in C([t,T],\mathbf{R}^n)$ a platí

$$\begin{aligned} ||y - y^{(\infty)}||_t^T &\leq ||y - y^{(m+1)}||_t^T + ||y^{(m+1)} - y^{(\infty)}||_t^T \leq o(1) \\ &+ \int_t^T ||f(s, y_s^{(\infty)}, u_s) - f(s, y_s^{(m)}, u_s)||\,\mathrm{d}s \\ &\leq o(1) + K_N(T-t)||y^{(\infty)} - y^{(m)}||_t^T = o(1) \end{aligned}$$

pre $m \to \infty$. Teda $||y - y^{(\infty)}||_t^T = 0$ a funkcia $y = y^{(\infty)}$ tak spĺňa (2.2) s $y_t = x$. □

**Poznámka** K predchádzajúcemu dôkazu poznamenajme, že funkcia $s \mapsto f(s, y_s^{(m)}, u_s)$ je merateľná, pretože je zložením spojitého zobrazenia $f$ a merateľnej funkcie $s \mapsto (s, y_s^{(m)}, u_s)$.

## 5.2 Dodatok 2

**Tvrdenie 5.1.** *Nech je daný bod $x \in \mathbf{R}^k$, kde $k \in \mathbf{N}$, jeho okolie $\mathcal{O} \subseteq \mathbf{R}^k$ a funkcie $V, w : \mathcal{O} \to \mathbf{R}$ také, že funkcia $V - w$ nadobúda v bode $x$ minimum na $\mathcal{O}$. Nech pre každé $h$ také, že $x \pm h \in \mathcal{O}$ platí*

$$2V(x) \geq V(x+h) + V(x-h) \tag{5.1}$$

*a nech $w$ má subdiferenciál v bode $z$, tj. že existuje $(a,b) \in \mathbf{R}^k$ také, že*

$$w(x+h) - w(x) \geq \mathcal{D}(h) + o(||h||), \qquad \text{kde} \quad \mathcal{D}(h) = ah_1 + bh_2, \tag{5.2}$$

*platí pre $h \to \mathbf{0} \in \mathbf{R}^k$. Potom funkcia $V$ má v bode $x$ totálny diferenciál $\mathcal{D}$.*

*Dôkaz.* Nech $x \pm h \in \mathcal{O}$, potom podľa predpokladu platí

$$\begin{aligned} V(x+h) - V(x) \geq w(x+h) - w(x) \geq +\mathcal{D}(h) + o(||h||), \\ V(x-h) - V(x) \geq w(x-h) - w(x) \geq -\mathcal{D}(h) + o(||h||). \end{aligned}$$

S využitím (5.1) tak dostávame

$$\mathcal{D}(h) + o(||h||) \geq V(x) - V(x-h) \geq V(x+h) - V(x) \geq \mathcal{D}(h) + o(||h||).$$

Platí teda

$$V(x+h) = V(x) + \mathcal{D}(h) + o(||h||)$$

pre $h \to \mathbf{0}$. $\square$

**Poznámka.** My vyžívame tvrdenie 5.1 pre $k = 1, 2$. Ak $k = 2$, potom tvrdenie aplikujeme v bodoch $(t, x)$ takých, že $t \neq 0$. Ak $k = 1$, potom tvrdenie použijeme na funkcie $V(0, x)$, $w(0, x)$. Ak $V$ je konkávna funkcia a $w$ je diferencovateľná, potom sú splnené predpoklady tvrdenia 5.1.

## 5.3 Dodatok 3 - všeobecné riešenie rovnice (4.19)

Na úvod tejto časti uveďme postup pre nájdenie partikulárneho riešenia diferenciálnej rovnice v tvare (5.3). Tento postup neskôr v tejto podkapitole využijeme.

Uvažujme obyčajnú diferenciálnu rovnicu druhého rádu v tvare

$$a(x)h''(x) + b(x)h'(x) + c(x)h(x) = p(x) \tag{5.3}$$

a predpokladejme, že $h_0(x) > 0$ je riešením príslušnej homogénnej rovnice. Budeme hľadať riešenie rovnice (5.3) v tvare

$$h(x) = d(x)h_0(x).$$

Potom podmienka (5.3) je v tvare

$$a(x)h_0(x)\, d''(x) + [2a(x)h_0'(x) + b(x)h_0(x)]\, d'(x) = p(x). \tag{5.4}$$

Pre prehľadnosť zavedieme nasledujúce značenie pre koeficienty

$$A(x) = a(x)h_0(x), \qquad B(x) = 2a(x)h_0'(x) + b(x)h_0(x).$$

Potom rovnica (5.4) je v tvare

$$A(x)g'(x) + B(x)g(x) = p(x), \qquad g(x) = d'(x). \tag{5.5}$$

Riešenie homogénnej rovnice je tak v tvare

$$g_0(x) = K \exp\{-\textstyle\int \frac{B(x)}{A(x)}\,\mathrm{d}x\}, \qquad \text{kde} \qquad \frac{B(x)}{A(x)} = 2\frac{h_0'(x)}{h_0(x)} + \frac{b(x)}{a(x)} \tag{5.6}$$

a kde $K \in \mathbf{R}$. Potom (5.6) je v tvare

$$g_0(x) = Kh_0(x)^{-2} \exp\{-\textstyle\int \frac{b(x)}{a(x)}\,\mathrm{d}x\}.$$

Metódou variácie konštánt dostaneme riešenie (5.5) v tvare $g(x) = k(x)g_0(x)$, kde

$$k'(x) = \frac{p(x)}{A(x)g_0(x)} = \frac{p(x)}{Ka(x)}\,h_0(x)\exp\left\{\int \frac{b(x)}{a(x)}\,\mathrm{d}x\right\}.$$

Nech $G_0$ je primitívna funkcia k funkcii $g_0$, potom

$$d(x) = \int k(x)g_0(x)\,\mathrm{d}x = k(x)G_0(x) - \int k'(x)G_0(x)\,\mathrm{d}x.$$

Vráťme sa teraz k rovnici (4.19). Budeme požadovať, aby jej riešenie bolo v tvare $m(x) = f(x)|1-x|^{\gamma}$. Rovnicu (4.19) tak dostávame v tvare

$$\frac{1}{2}\sigma^2 x^2(1-x)^2 f''(x) + x(1-x)(\mu - \sigma^2 x)f'(x) - \delta f(x) + \frac{1}{\gamma}|1-x|^{-\gamma} = 0. \tag{5.7}$$

Položme $f(x) = h\left(\frac{1}{x} - 1\right)$, $y = \frac{1}{x} - 1$, tj. $h(y) := f(x) = f\left(\frac{1}{1+y}\right)$. Predchádzajúci tvar rovnice (4.19) tak môžme upraviť na

$$\frac{1}{2}\sigma^2 y^2 h''(y) + h'(y)(\sigma^2 - \mu)y - \delta h(y) + \frac{1}{\gamma}\left(\frac{y}{1+y}\right)^{-\gamma} = 0. \tag{5.8}$$

Dostali sme tak rovnicu (5.3) s koeficientmi

$$\begin{aligned} a(x) &= \frac{1}{2}\,\sigma^2 x^2, \qquad\qquad & p(x) &= -\frac{1}{\gamma}\,x^{-\gamma}(1+x)^{\gamma}, \\ b(x) &= (\sigma^2 - \mu)x = \sigma^2 x(1-\theta), \\ c(x) &= -\delta, \end{aligned}$$

kde $\theta := \sigma^{-2}\mu$. Potom pre $\omega_0$, ktoré je riešením rovnice

$$\frac{1}{2}\,\sigma^2(\omega_0^2 - \rho)^2 = \frac{1}{2}\,\sigma^2\rho^2 + \delta > 0, \qquad \text{kde} \qquad \rho := \sigma^{-2}\mu - \frac{1}{2}, \tag{5.9}$$

dostávame riešenie homogénnej rovnice

$$h_0(x) = |x|^{\omega_0}.$$

Výpočet rovnice (5.9) nám dáva

$$\omega_{0,1} = \rho \pm \sqrt{\rho^2 + 2\sigma^{-2}\delta}.$$

Potom $f_{0,1}(x) = \left|\frac{1}{x} - 1\right|^{\omega_{0,1}}$, $m_{0,1}(x) = \left|\frac{1}{x} - 1\right|^{\omega_{0,1}} |1-x|^{\gamma}$, tj.

$$m_0(x) = |x|^{-\omega_0}|1-x|^{\omega_0+\gamma}, \quad m_1(x) = |x|^{-\omega_1}|1-x|^{\omega_1+\gamma}. \tag{5.10}$$

V ďalšej časti se obmedzíme na interval $(0,1)$, a tak budeme absolútnu hodnotu vynechávať. Zrejme

$$\int \frac{b(x)}{a(x)}\,\mathrm{d}x = \int \frac{2(1-\theta)}{x}\,\mathrm{d}x = 2(1-\theta)\ln x,$$

a tak

$$g_0(x) = Kh_0(x)^{-2}\exp\left\{-\int \frac{b(x)}{a(x)}\,\mathrm{d}x\right\} = Kh_0(x)^{-2}x^{-2(1-\theta)} = Kx^{-2(1-\theta+\omega_0)}.$$

Ďalej

$$G_0(x) = \int g_0(x)\mathrm{d}x = \frac{Kx^{1-2(1-\theta+\omega_0)}}{1-2(1-\theta+\omega_0)} = \frac{Kx^{2(\rho-\omega_0)}}{2(\rho-\omega_0)}.$$

Pri označení

$$\mathcal{B}_x(u,w) = \int x^{u-1}(1+x)^w\,\mathrm{d}x, \qquad \mathbf{B}_x(u,v) = \mathbf{B}(x;u,v) = \int x^{u-1}(1-x)^{v-1}dx$$

tak zo vzťahu $\mathcal{B}_x(u,w) = \mathbf{B}(\frac{x}{1+x}; u, -(u+w))$ dostávame

$$k(x) = \frac{2\sigma^{-2}}{-\gamma K}\int x^{\omega_0-2\theta-\gamma}(1+x)^{\gamma}dx = \frac{2\sigma^{-2}}{-\gamma K}\mathcal{B}_x(-\gamma-\omega_1,\gamma) = \frac{2\sigma^{-2}}{-\gamma K}\mathbf{B}(\tfrac{x}{1+x}; -\gamma-\omega_1,\omega_1),$$

kde $\omega_1 := 2\rho - \omega_0$ je druhý koreň rovnice (5.9). Potom

$$\begin{aligned}
d(x) &= \int k(x)g_0(x)\,\mathrm{d}x = k(x)G_0(x) - \int k'(x)G_0(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{x^{2(\rho-\omega_0)}}{2(\rho-\omega_0)}\cdot\frac{2\sigma^{-2}}{-\gamma}\mathbf{B}(\tfrac{x}{1+x}; -\gamma-\omega_1,\omega_1) + \frac{1}{\gamma\sigma^2(\rho-\omega_0)}\int x^{-\gamma-\omega_0-1}(1+x)^{\gamma}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{x^{2(\rho-\omega_0)}\mathbf{B}(\frac{x}{1+x}; -\gamma-\omega_1,\omega_1) - \mathbf{B}(\frac{x}{1+x}; -\gamma-\omega_0,\omega_0)}{-\gamma\sigma^2(\rho-\omega_0)}.
\end{aligned}$$

Konečne dostávame partikulárne riešenie rovnice (5.8) v tvare

$$h(x) = d(x)h_0(x) = 2\frac{x^{\omega_1}\mathbf{B}(\frac{x}{1+x}; -\gamma-\omega_1,\omega_1) - x^{\omega_0}\mathbf{B}(\frac{x}{1+x}; -\gamma-\omega_0,\omega_0)}{-\gamma\sigma^2(\omega_1-\omega_0)}. \tag{5.11}$$

Potom funkcia

$$m_p(x) = h\left(\frac{1}{x} - 1\right)(1-x)^\gamma$$

je partikulárnym riešením rovnice (4.19) a jej všeobecné riešenie tak môžme písať v tvare

$$m(x) = m_p(x) + k_0 m_0(x) + k_1 m_1(x),$$

kde $m_0,\ m_1$ sú riešenia príslušnej homogénnej rovnice.

# Literatura

[1] Fleming W. H. , Soner H. M.: *Controlled Markov Processes and Viscosity Solutions*, Springer-Verlag, New York, 1993, 1-125

[2] Staníková D.: *Asymptotické řízení portfolia, bakalářská práce*, KPMS MFF UK, Praha 2006.