Univerzita Karlova v Praze

Matematicko-fyzikální fakulta

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Michal Tvrdík

Simulační metody při hodnocení cenných papírů

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí bakalářské práce: Doc. RNDr. Jan Hurt, CSc.

Studijní program: Matematika, Finanční matematika

2007

Chtěl bych tímto poděkovat Doc. RNDr. Janu Hurtovi, CSc. za odborné konzultace, zapůjčení odborné literatury a čas, který mi věnoval. Dále bych chtěl poděkovat svým rodičům, bez jejichž podpory by tato práce nevznikla.

Prohlašuji, že jsem svou bakalářskou práci napsal samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů. Souhlasím se zapůjčováním práce a s jejím zveřejňováním.

V Praze dne *Michal Tvrdík*

Obsah

Název práce: Simulační metody při hodnocení cenných papírů

Autor: Michal Tvrdík

Katedra: Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí bakalářské práce: Doc. RNDr. Jan Hurt, CSc.

e-mailová adresa vedoucího: hurt@karlin.mff.cuni.cz

Abstrakt: Tato práce se zabývá hodnocením cenných papírů s využitím metody Monte Carlo. Ta je založena na simulování náhodného výběru, který představuje možné budoucí ceny cenného papíru. Pro zvýšení přesnosti odhadu této ceny se používá několik technik redukce rozptylu. Ty jsou vysvětleny a použity pro případ evropské call opce. Přílohou této práce je zdrojový kód pro program *Mathematica,* zabývající se právě tímto případem.

Klíčová slova: Monte Carlo, opce, simulace, redukce rozptylu

Title: Simulation methods for pricing securities

Autor: Michal Tvrdík

Department: Department of Probability and Mathematical Statistics

Supervisor: Doc. RNDr. Jan Hurt, CSc.

Supervisor`s e-mail address: hurt@karlin.mff.cuni.cz

Abstract: This thesis deals with security pricing. We use Monte Carlo method for that purpose. This method is based on artificial random samples which may represent the future price of security. To improve the accurancy of the method we use some variance reduction techniques. These are explained and used for the case of European call option. Part of the thesis is a program in *Mathematica*. This program is aplicable for European call option pricing.

Key words: Monte Carlo, options, simulation, variance reduction

Kapitola 1

Metoda Monte Carlo

1.1. Popis metody Monte Carlo

Metody Monte Carlo jsou odvětvím experimentální matematiky, která se zabývá experimenty s náhodnými čísly. Tyto metody jsou používány v mnoha odvětvích pro simulace náhodných veličin. Za simulační metody se považují metody, které modelují reálné jevy stochastické povahy. Simulací se obvykle rozumí numerická technika provádění hromadných experimentů, s použitím těchto modelů, pomocí počítače. V posledních letech, použití numerických výpočtů ve finanční teorii a praxi velmi vzrostlo. Klade se důraz hlavně na rychlost a efektivitu výpočtu. Metoda Monte Carlo je nástroj použitelný pro mnoho takovýchto výpočtů.

V moderním finančnictví jsou ceny základních typů cenných papírů a podkladových stavových veličin modelovány jako v čase probíhající stochastické procesy. Odvozený cenný papír, jako např. call opce, je cenný papír, jehož výplata závisí na jednom či více základních cenných papírů. Při použití předpokladu neexistence arbitráže finanční ekonomové ukázali, že cena takového derivátu může být odvozena jako střední hodnota jeho diskontovaných plateb. Tato střední hodnota se bere s ohledem na míru pravděpodobnosti známé jako rizikově neutrální míra.

Metoda Monte Carlo se přirozeně nabízí k vyhodnocování cen cenných papírů reprezentovaných jako střední hodnoty. Obecně odhad obsahuje následující kroky:

- Simulace výběru trajektorie podkladových stavových veličin (ceny podkladových aktiv a úrokové míry) za příslušné časové období za rizikově neutrální míry.
- Vyhodnocení diskontovaného peněžního toku cenného papíru pro každou vybranou trajektorii, určeného strukturou cenného papíru
- Průměrný diskontovaný peněžní tok z vybraných trajektorií

Metoda Monte Carlo je přizpůsobivá a jednoduchá na implementaci a modifikaci. Kromě toho zvýšené používání počítačů zvýšilo přitažlivost této metody.

Monte Carlo má však i své nevýhody, ale v posledních letech byly úspěšně překonány. Jednou ze stinných stránek této metody je, že pro velmi složité problémy může být požadován velký počet replikací, aby bylo dosaženo dobrého výsledku. Byly vyvinuty rozdílné techniky redukce rozptylu, aby zvýšili přesnost odhadů. Dvě z klasických technik redukce rozptylu jsou metoda řídících proměnných a metoda antitetických proměnných. Nedávno byly zavedeny ve finančních aplikacích další: metoda srovnávání momentů, výběr podle důležitosti a podmíněné metody Monte Carlo.

Jako příklad použití metody Monte Carlo nám poslouží odhad integrálu funkce f na intervalu $[0,1]$. Integrál

$$\alpha = \int_0^1 f(x)dx$$

můžeme reprezentovat jako střední hodnotu $E[f(U)]$, kde U je náhodná veličina rovnoměrně rozdělená na $(0,1)$. Vybereme čísla $U_1, U_2, ..., U_n$ jako nezávislé, stejně rozdělené veličiny z $R(0,1)$ a vypočteme funkci f v těchto n náhodných bodech. Pak průměr těchto n hodnot

$$\hat{\alpha}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(U_i)$$

je odhadem integrálu pomocí metody Monte Carlo.

Pokud je funkce f integrovatelná na intervalu $[0,1]$, pak podle zákona velkých čísel $\hat{\alpha}_n \to \alpha$ s pravděpodobností 1 pro $n \to \infty$.

Pokud je f dvakrát integrovatelná a položíme-li

$$\sigma_f^2 = \int_0^1 \left(f(x) - \alpha\right)^2 dx,$$

pak chyba odhadu $\hat{\alpha}_n - \alpha$ je přibližně normálně rozdělená se střední hodnotou 0 a standardní odchylkou $\sigma_f / \sqrt{n}$. Chyba odhadu konverguje v distribuci k tomuto normálnímu rozdělení. Tedy kvalita odhadu se zlepšuje při zvyšující se velikosti výběru n. Parametr σ_f je ve většině případů neznámý, ale lze ho odhadnout pomocí výběrové směrodatné odchylky

$$s_f = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(f(U_i) - \hat{\alpha}_n\right)^2}\ .$$

Tu pak lze použít při odhadu rozdělení chyby odhadu. Pokud namísto neznámého σ_f použijeme s_f, je asymptotické rozdělení chyby odhadu stejné. To vyplývá z faktu že $s_f / \sigma_f \to 1$ pro $n \to \infty$

1.2. Redukce rozptylu a zlepšení efektivity odhadu

Redukce rozptylu odhadu je nutná pro zvýšení přesnosti. Přesto přesný argument pro její výhody bývá někdy přehlížen. Stručně popíšeme podložené oprávnění pro redukci rozptylu a vyzkoušíme ho pro zvýšení výpočetní efektivity.

Předpokládejme, že chceme spočítat parametr θ – např. cena odvozeného cenného papíru. Dále předpokládejme, že chceme vytvořit pomocí metody Monte Carlo nezávislou stejně rozdělenou posloupnost { θ_i, i = 1, 2, ...}, kde každé θ_i má střední hodnotu θ a rozptyl σ^2. Přirozený odhad θ založený na *n* opakování je pak výběrový průměr

$$\bar{\theta} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\theta_i .$$

Podle centrální limitní věty je tento výběrový průměr pro velká *n* přibližně normálně rozdělený se střední hodnotou θ a rozptylem $\frac{\sigma^2}{n}$. Pravděpodobnostní chybové rozmezí ve formě intervalů spolehlivosti z normálního rozdělení a ukazuje, že chyba v odhadu je přibližně $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

Nyní předpokládejme, že máme výběr mezi dvěma typy odhadů Monte Carlo, které označíme jako { $\theta_i^{(1)}$, i = 1,2, ……} a { $\theta_i^{(2)}$, i = 1,2,……}. Předpokládejme, že jsou oba nestranné, tedy platí E[$\theta_i^{(1)}$] = E[$\theta_i^{(2)}$] = θ, ale $\sigma_1 < \sigma_2$, kde σ_j^2 = Var[$\theta^{(j)}$], j = 1, 2. Z předešlých pozorování vyplývá, že výběrový průměr o *n* opakováních $\theta_i^{(1)}$ dává lepší odhad θ než výběrový průměr o *n* opakování $\theta_i^{(2)}$. Avšak tato analýza příliš zjednodušuje srovnání, protože nezachycuje možné rozdíly ve výpočetní složitosti požadované těmito odhady. Vytvoření *n* opakování $\theta_i^{(1)}$ může být více časově náročné než vytvoření n opakování $\theta_i^{(2)}$; menší rozptyl není dostatečný pro preferování jednoho odhadu před druhým.

Pro srovnání odhadů s různými výpočetními požadavky, stejně tak jako s různými rozptyly, postupujeme následovně. Předpokládejme, že práce potřebná k vytvoření jednoho $\theta^{(j)}$ je b_j, $j=1, 2$. Při výstupním čase t je počet simulovaných hodnot $\theta^{(j)}$, které mohou být vytvořeny, $\left\lfloor \frac{t}{b_j} \right\rfloor$; pro jednoduchost uvažujme,že zlomek je celé číslo. Tyto dva odhady příslušné výstupnímu času t jsou

$$\frac{b_1}{t}\sum_{i=1}^{\frac{t}{b_1}}\theta_i^{(1)} \quad \text{a} \quad \frac{b_2}{t}\sum_{i=1}^{\frac{t}{b_2}}\theta_i^{(2)}.$$

Pro velká t jsou tyto odhady přibližně normálně rozděleny se střední hodnotou θ a směrodatnými odchylkami

$$\sigma_1\sqrt{\frac{b_1}{t}} \quad \text{a} \quad \sigma_2\sqrt{\frac{b_2}{t}}.$$

Tedy pro velká t bude první odhad preferován před druhým pokud

$$\sigma_1^2 b_1 < \sigma_2^2 b_2. \tag{1}$$

Rovnice (1) poskytuje základ pro srovnání rozptylu a výpočetních požadavků. Podle (1) je rozumné brát součin rozptylu a práce pro vytvoření jedné položky výběru jako míru efektivity. Použitím efektivity jako základu pro srovnání, může být preferován odhad s menším rozptylem, jen pokud podíl rozptylů $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ je menší než pracovní poměr $\frac{b_2}{b_1}$. Podle stejného argumentu může být vyšší odhad rozptylu skutečně upřednostněn pokud trvá méně času ho vytvořit.

Kapitola 2

Techniky redukce rozptylu

2. 1. Antitetické proměnné

Tato metoda je jednou z nejjednodušších a nejvíce používanou technikou redukce rozptylu pro problém finančního oceňování. Pro vysvětlení principu této techniky uvažujme veličinu *Y*, kterou chceme odhadnout. Nechť Y_1 je jeden odhad *Y* a Y_2 je druhý odhad *Y*, který je s Y_1 záporně korelován. Pak za odhad *Y* berme

$$Y_A = \frac{1}{2}(Y_1 + Y_2).$$

Potom

$$VarY_A = \frac{1}{4}VarY_1 + \frac{1}{4}VarY_2 + \frac{1}{2}Cov(Y_1, Y_2) < \frac{1}{4}VarY_1 + \frac{1}{4}VarY_2 < \frac{1}{2}\max(VarY_1, VarY_2),$$

čímž můžeme rozptyl podstatně zredukovat.

Jako příklad záporně korelovaných párů náhodných veličin můžeme brát v úvahu náhodné veličiny X_i a $1 - X_i$, kde X_i je z rovnoměrného rozdělení na intervalu $[0,1]$.V tomto případě je $1 - X_i$ také z tohoto rozdělení. Pro funkci *f* monotónní na intervalu, ze které jsou vybrány tyto náhodné veličiny, jsou i $f(X_i)$ a $f(1 - X_i)$ záporně korelované náhodné veličiny.

Ukažme si tuto techniku nejprve na jednoduchém příkladě a pak ji zobecníme. Uvažujme problém výpočtu Black-Scholesovy ceny evropské call opce na bezdividendovou akcii. Samozřejmě, zde není potřeba vyhodnocovat tuto cenu simulací, ale poslouží to jako jednoduchý příklad. V Black-Scholesově modelu má cena akcie logaritmicko-normální rozdělení. Nezávislá opakování konečné ceny akcie za rizikově neutrální míry mohou být vytvořena ze vzorce

$$S_T^{(i)} = S_0 e^{\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)T + \sigma\sqrt{T}Z_i}, \quad i = 1,\ldots,n, \tag{2}$$

kde S_0 je běžná cena akcie, r je bezriziková úroková míra, σ je volatilita ceny akcie, T je maturita opce a $\{Z_i\}$ je náhodný výběr z normovaného normálního rozdělení. Při n opakování je odhad ceny opce s realizační cenou K dán vzorcem

$$\hat{C} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} C_i \equiv \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} e^{-rT} \max\{0, S_T^{(i)} - K\}. \tag{3}$$

V tomto kontextu je metoda antitetických proměnných založena na pozorování, že pokud Z_i má normální normované rozdělení, pak $-Z_i$ ho má také. Cena $\tilde{S}_T^{(i)}$ obdržená ze (2) dosazením $-Z_i$ namísto Z_i je tedy výběr z rozdělení konečné ceny akcie. Podobně každé

$$\tilde{C}_i = e^{-rT} \max\{0, \tilde{S}_T^{(i)} - K\}$$

je nestranný odhad ceny opce a pak označme

$$\hat{C}_{AV} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{C_i + \tilde{C}_i}{2}.$$

Heuristický argument pro preferování $\hat{C}_{AV}$ je, že náhodné vstupy obdržené z náhodného výběru délky *n*, antitetických párů $\{(-Z_i, Z_i)\}$, jsou pravidelněji rozdělené než náhodný výběr délky *2n*. V tomto případě se výběrový průměr antitetických párů vždy rovná 0, kdežto průměr náhodného výběru délky *2n* je téměř jistě různý od 0. Pokud jsou vstupy vytvářeny pravidelněji, můžeme doufat, že výstupy jsou stejně tak více pravidelné. Vskutku velká hodnota $S_T^{(i)}$ vzniklá z velkého Z_i bude spárována s malou hodnotou $\tilde{S}_T^{(i)}$ vzniklé z malého $-Z_i$.

Lepší argument porovnává efektivitu. Protože C_i a $\tilde{C}_i$ mají stejný rozptyl,

$$Var\left[\frac{C_i + \tilde{C}_i}{2}\right] = \frac{1}{2}\left(Var[C_i] + Cov\left[C_i, \tilde{C}_i\right]\right) \tag{4}$$

Tedy dostáváme $Var\left[\hat{C}_{AV}\right] \le Var\left[\hat{C}\right]$, pokud $Cov\left[C_i, \tilde{C}_i\right] \le Var[C_i]$. Avšak $\hat{C}_{AV}$ užívá n dvojic a $\hat{C}$ n opakování, takže musíme počítat s rozdíly ve výpočetní složitosti. Práce vytvořit $\hat{C}_{AV}$ je tedy zhruba dvojnásobná oproti vytvoření $\hat{C}$. To znamená, že neuvažujeme vytvoření druhé složky páru pouhou změnou znaménka, ale uvažujeme její vytvoření novou simulací. Tedy u antitetických proměnných pro zvýšení efektivnosti požadujeme

$$2Var\left[\hat{C}_{AV}\right] \le Var\left[\hat{C}\right],$$

což podle (4) zjednodušuje požadavek tak že $Cov\left[C_i, \tilde{C}_i\right] \le 0$.

To, že tento požadavek je splněn, lze jednoduše demonstrovat. Definujme ϕ tak, že $C_i = \phi(Z_i)$; ϕ je složené zobrazení od Z_i k ceně akcie a od ceny akcie k diskontované výplatě opce. Jelikož ϕ je složením dvou rostoucích funkcí, je monotónní a tedy dle standardní nerovnosti platí

$$E[\phi(Z_i)\phi(-Z_i)] \le E[\phi(Z_i)]E[\phi(-Z_i)], \tag{5}$$

a tedy $Cov\left[C_i, \tilde{C}_i\right] \equiv E[\phi(Z_i)\phi(-Z_i)] - E[\phi(Z_i)]E[\phi(-Z_i)] \le 0$, a můžeme tedy usoudit, že lze použít tuto metodu.

Tento argument může být převeden tak, aby ukázal, že tato metoda zvyšuje efektivitu při oceňování evropské put a dalších opcí, které monotónně závisí na vstupu (např. asijská opce). Důležité odbočení od monotonie u některých bariérových opcí (např. down-and-in-call opce) ukazuje, že použití této metody při oceňování opcí tohoto typu může někdy být méně efektivní.

Při výpočtu intervalů spolehlivosti s pomocí metody antitetických proměnných je nezbytné, že směrodatná odchylka bude odhadována výběrovou směrodatnou odchylkou n zprůměrňovaných dvojic $\frac{\left(C_i + \tilde{C}_i\right)}{2}$ a ne $2n$ jednotlivých pozorování $C_1, \tilde{C}_1, \ldots, C_n, \tilde{C}_n$. Zprůměrňované dvojice jsou nezávislé, ale jednotlivá pozorování nikoli. Toto je případ, ve kterém použití techniky redukce rozptylu ovlivňuje odhadování směrodatné odchylky a zvláště požaduje určité nároky na pozorování tak, aby bylo možno operovat s jejich závislostí.

Dle centrální limitní věty dostáváme

$$\frac{\hat{C}_{AV} - C}{\sigma_{AV} / \sqrt{n}} \Rightarrow N(0,1),$$

kde $C = E\left[\frac{C_i + \tilde{C}_i}{2}\right]$ a $\sigma_{AV}^2 = Var\left[\frac{C_i + \tilde{C}_i}{2}\right]$.

Tato limita v distribuci platí i když nahradíme σ_{AV} standardní výběrovou odchylkou s_{AV} z n zprůměrňovaných dvojic. Asymptotický interval spolehlivosti je

$\hat{C}_{AV} \pm z_{\delta/2} \frac{s_{AV}}{\sqrt{n}}$, kde $1 - \Phi\left(z_{\delta/2}\right) = \delta/2$.

2. 2. Metoda řídících proměnných

Metoda řídících proměnných je mezi nejšíře aplikovatelnými metodami tou nejjednodušší, vzhledem k použití, a nejvíce efektivní technikou redukce rozptylu. Jednoduše vzato princip založený na této technice je "použij co znáš". Pro odhad jedné veličiny se v této metodě použije známá veličina s podobnými vlastnostmi, která se od ní příliš neliší a je s ní kladně korelována. Pro redukci rozptylu za tohoto předpokladu usilujeme o korelaci blízkou 1. Ta pak umožní snížení rozptylu tohoto odhadu.

Pro popsání této metody použijeme výstupy z n replikací simulace $Y_1, Y_2, ..., Y_n$. Předpokládejme, že Y_i jsou nezávislé a stejně rozdělené, a že naším cílem je odhadnout střední hodnotu Y_i. Obvyklým odhadem je výběrový průměr $\overline{Y} = (Y_1 + ... + Y_n)/n$. Tento odhad je nevychýlený a konverguje s pravděpodobností 1 pro $n \to \infty$.

Předpokládejme, že při každé replikaci počítáme další výstup X_i spolu s Y_i. Předpokládejme, že páry (X_i, Y_i), i = 1, …, n jsou nezávislé a stejně rozdělené, a že střední hodnota X je známá. Pak pro nějaké pevné b spočteme

$$Y_i(b) = Y_i - b(X_i - E[X])$$

z i-té replikace a pak spočteme výběrový průměr

$$\overline{Y}(b) = \overline{Y} - b(\overline{X} - E[X]) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(Y_i - b(X_i - E[X])).$$

To je odhad pomocí metody řídících proměnných. Pozorovaná chyba $\overline{X} - E[X]$ nám poslouží jako dohled při odhadování $E[Y]$.

Odhad $E[Y]$ s použitím této metody je nevychýlený protože

$$E[\overline{Y}(b)] = E[\overline{Y} - b(\overline{X} - E[X])] = E[\overline{Y}] = E[Y]$$

a je konzistentní, protože s pravděpodobností 1

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}Y_i(b) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(Y_i - b(X_i - E[X])) = E[Y - b(X - E[X])] = E[Y].$$

Každé $Y_i(b)$ má rozptyl

$$Var[Y_i(b)] = Var[Y_i - b(X_i - E[X])] = \sigma_Y^2 - 2b\sigma_X\sigma_Y\rho_{XY} + b^2\sigma_X^2 \equiv \sigma^2(b),$$

kde $\sigma_X^2 = Var[X], \sigma_Y^2 = Var[Y]$ a ρ_{XY} je korelace mezi X a Y. Odhad $\overline{Y}(b)$ má rozptyl $\sigma^2(b)/n$ a výběrový průměr $\overline{Y}$ má rozptyl σ_Y^2/n. Proto odhad pomocí metody řídící proměnné má menší rozptyl než odhad pomocí výběrového průměru pokud platí

$$b^2\sigma_X^2 < 2b\sigma_X\sigma_Y\rho_{XY} .$$

Optimální koeficient b^* minimalizující rozptyl $Y_i(b)$ je dán jako

$$b^* = \frac{\sigma_Y}{\sigma_X}\rho_{XY} = \frac{Cov[X,Y]}{Var[X]} .$$

V praxi většinou tento koeficient není známý, protože neznáme rozptyl *Y* ani kovarianci *X* a *Y*. Můžeme ho však odhadnout jako

$$\hat{b}_n = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \bar{X}\right)\left(Y_i - \bar{Y}\right)}{\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \bar{X}\right)^2} .$$

Dle zákona velkých čísel a Sluckého věty $\hat{b}_n \to b^*$ s pravděpodobností 1. Nabízí se tedy použít odhad $\bar{Y}\left(\hat{b}_n\right)$.

Podle centrální limitní věty platí,

$$\frac{\bar{Y}\left(\hat{b}_n\right) - E[Y]}{s\left(\hat{b}_n\right)/\sqrt{n}} \Rightarrow N(0,1),$$

kde $s\left(\hat{b}_n\right)$ je výběrová směrodatná odchylka $\left\{Y_1\left(\hat{b}_n\right),\ldots,Y_n\left(\hat{b}_n\right)\right\}$. Asymptotický interval spolehlivosti pro odhad *E[Y]* je $\bar{Y}\left(\hat{b}_n\right) \pm z_{\delta/2}\frac{s\left(\hat{b}_n\right)}{\sqrt{n}}$.

Ukažme si použití této metody na příkladu z praxe. Nechť P_A je cena opce, jejíž výplata závisí na aritmetickém průměru podkladového aktiva. Nechť P_G je cena opce ekvivalentní s P_A v každém ohledu až na to, že aritmetický průměr nahradíme geometrickým. Nejvíce opcí založených na průměrech používá aritmetické průměry, tedy P_A je praktičtější hodnota. Zatímco P_A je analyticky nedostupná, P_G může být často vyhodnocováno v přesné formě. Může být znalost P_G použita pro výpočet P_A ?

Může, např. pomocí metody řídících proměnných. Označme $P_A = E\left[\hat{P}_A\right] = E\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}P_{Ai}\right]$ a $P_G = E\left[\hat{P}_G\right] = E\left[\left(\prod_{i=1}^{n}P_{Gi}\right)^{\frac{1}{n}}\right]$, kde $\hat{P}_A$ a $\hat{P}_G$ jsou diskontované výplaty opce pro samostatně simulovanou trajektorii podkladového aktiva. Pak

$$P_A = P_G + E\left[\hat{P}_A - \hat{P}_G\right].$$

Jinými slovy, P_A může být vyjádřena jako známá cena P_G plus očekávaný rozdíl mezi $\hat{P}_A$ a $\hat{P}_G$. Nestranný odhad P_A je tedy

$$\hat{P}_A^{CV} = \hat{P}_A + \left(P_G - \hat{P}_G\right). \tag{6}$$

Tato reprezentace navrhuje lehce odlišnou interpretaci: $\hat{P}_A^{CV}$ se srovnává s obyčejným odhadem $\hat{P}_A$ podle rozdílu mezi známou hodnotou P_G a předpokládanou hodnotou $\hat{P}_G$. Známá chyba $\left(P_G - \hat{P}_G\right)$ je užita jako řídící při odhadu P_A.

Pokud většina výpočetní složitosti pochází z vytvoření trajektorie podkladového aktiva, pak další práce potřebná k vyhodnocení $\hat{P}_G$ spolu s $\hat{P}_A$ je zanedbatelná. Proto se zdá rozumné srovnávat jen samotné rozptyly. Poněvadž

$$Var\left[\hat{P}_A^{CV}\right] = Var\left[\hat{P}_A\right] + Var\left[\hat{P}_G\right] - 2Cov\left[\hat{P}_A, \hat{P}_G\right],$$

je tato metoda efektivní pokud kovariance mezi $\hat{P}_G$ a $\hat{P}_A$ je velká. Přesnější zkoumání (6) odhaluje, že tento odhad nevytváří optimální využití vztahu mezi těmito dvěma cenami opce. Uvažujme skupinu nestranných odhadů

$$\hat{P}_A^{\beta} = \hat{P}_A + \beta\left(P_G - \hat{P}_G\right) \tag{7}$$

parametrizovaných skalárem β. Máme

$$Var\left[\hat{P}_A^{\beta}\right] = Var\left[\hat{P}_A\right] + \beta^2 Var\left[\hat{P}_G\right] - 2\beta Cov\left[\hat{P}_A, \hat{P}_G\right].$$

Pak β minimalizující rozptyl je

$$\beta^* = \frac{Cov\left[\hat{P}_A, \hat{P}_G\right]}{Var\left[\hat{P}_G\right]}.$$

Při použití odhadu ve formě (6) se vzdáme možnosti větší redukce rozptylu. Zatímco rovnice (6) může zvýšit nebo snížit rozptyl, odhad založený na β^* zaručuje, že se rozptyl nezvýší a jeho výsledkem bude jen snižování rozptylu tak dlouho, dokud $\hat{P}_A$ a $\hat{P}_G$ budou korelované.

Prakticky zřídkakdy známe β^*, protože neznáme $Cov\left[\hat{P}_A, \hat{P}_G\right]$. Avšak pokud je dáno n nezávislých opakování $\left\{\left(P_{Ai}, P_{Gi}\right), i = 1,\dots,n\ \right\}$ dvojic $\left(\hat{P}_A, \hat{P}_G\right)$ můžeme odhadnout β^* pomocí regrese. Použití odhadu $\hat{\beta}$ parametru β^* přináší odhad

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} P_{Ai} + \hat{\beta}\left(P_G - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} P_{Gi} \right).$$

Ponecháním n_1 opakování pro odhadování β^* a zbylých $n - n_1$ opakování pro výběrový průměr P_{Gi} (typicky $n_1 << n$) eliminuje vychýlení, ale může zhoršit odhad β^*. Žádný z těchto dvou problémů významně nevymezuje aplikovatelnost metody, protože možná vychýlení se zmenšují se zvyšujícím se n a protože odhad β^* nemusí být přehnaně přesný abychom dosáhli redukce rozptylu.

Výhoda užití vztahu (7) před (6) vysvitne v případě, kdy jsou uvedena další omezení. Například, když je cena aktiva simulována za rizikově neutrální pravděpodobnosti, současná hodnota $e^{-rT}E[S_T]$ konečné ceny musí být rovna běžné ceně S_0. Poté můžeme formulovat tento odhad jako

$$\hat{P}_A + \beta_1\left(P_G - \hat{P}_G\right) + \beta_2\left(S_0 - e^{-rT}S_T\right).$$

Koeficienty minimalizující rozptyl $\left(\beta_1^*, \beta_2^*\right)$ jednoduše nalezneme pomocí mnohonásobné lineární regrese. Tento optimalizační krok se zdá být v tomto případě rozhodující. Zatímco by se mohlo zdát, že β_1^* je blízko 1, se zdá nepravděpodobné, že β_2^* by bylo také. Optimalizace přes koeficienty beta nám tedy dovoluje využít omezení, které jsou náhodnými veličinami záporně korelovanými s výplatou opce.

2. 3. Metoda momentů

Dále popíšeme techniku redukce rozptylu, která je založena na porovnávání teoretických a výběrových momentů.

Nechť Z_i, i = 1, . . ., n jsou nezávislé náhodné veličiny z normálního rozdělení, které použijeme pro řízení simulace. Myšlenka metody momentů je, převést Z_i pomocí transformace tak, aby se několik prvních momentů shodovalo s teoretickými momenty. Například, první moment normálního rozdělení může být uveden do shody definováním

$$\tilde{Z}_i = Z_i - \bar{Z}, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{8}$$

kde $\overline{Z} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Z_i$ je výběrový průměr ze Z_i. Poznamenejme, že $\widetilde{Z}_i$ jsou normálně rozděleny pokud Z_i jsou normální. Avšak $\widetilde{Z}_i$ nejsou nezávislé.

Jako předtím začneme s jednoduchým příkladem odhadu ceny evropské call opce na jednoduché aktivum a pak tuto metodu zobecníme. Konečné ceny akcií jsou vytvořeny ze vzorce

$$\widetilde{S}_T(i) = S_0 e^{\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)T + \sqrt{T}\widetilde{Z}_i}, \quad i = 1,\ldots,n.$$

Jako odhad ceny call opce se tedy nabízí průměr n hodnot $\widetilde{C}_i = e^{-rT}\max\left(\widetilde{S}_T(i) - K, 0\right)$.

Ve standardní metodě Monte Carlo intervaly spolehlivosti pro cenu opce sestrojíme z výběrového průměru a výběrového rozptylu odhadu. Toto nemůže být použito zde, poněvadž těchto n hodnot $\widetilde{Z}$ není dále nezávislých a proto hodnoty $\widetilde{C}_i$ nejsou nezávislé. Z toho vyplývá jedna nevýhoda metody momentů: není jednoduché získat intervaly spolehlivosti. Vskutku, pro intervaly spolehlivosti je důležité aplikovat shodu momentů nezávislých skupin simulací a odhadu standardní chyby z průměru skupin. Toto redukuje účinnost metody ve srovnání se shodou momentů ve všech postupech.

Rovnice (8) ukázala jeden způsob srovnání prvního momentu rozdělení se střední hodnotou 0. Pokud podkladová skupina nemá nulovou střední hodnotu, transformovaná Z mohou být vytvořena užitím $\widetilde{Z}_i = Z_i - \overline{Z} + \mu_Z$, kde μ_Z je střední hodnota skupiny. Myšlenka může být jednoduše rozšířena pro srovnávání dvou momentů rozdělení. V tomto případě vhodná transformace je

$$\widetilde{Z}_i = \left(Z_i - \overline{Z}\right)\frac{\sigma_Z}{s_Z} + \mu_Z, \qquad i = 1, \ldots, n, \tag{9}$$

kde s_Z je výběrová směrodatná odchylka Z_i a σ_Z je skupinová směrodatná odchylka. Samozřejmě pro normované normální rozdělení platí $\mu_Z = 0$ a $\sigma_Z = 1$. Odhad ceny call opce je průměr n hodnot $\widetilde{C}_i$.

Pokud použijeme transformaci (9), pak $\widetilde{Z}_i$ nejsou normálně rozděleny ani když Z_i jsou normální. Odtud vyplývá, že odpovídající $\widetilde{C}_i$ nejsou nestranné odhady hodnoty opce. Pro mnoho praktických finančních problémů je lepší, aby toto vychýlení bylo malé. Avšak vychýlení může být rozhodně velké za extrémních okolností (jen když je srovnáván pouze první moment rozdělení). Závislost a vychýlení v metodě srovnávání momentů ztěžuje určení zlepšení v obecné analytické formě.

Metoda momentů je dalším příkladem myšlenky „ užij co znáš“. V tomto jednoduchém příkladě pro evropskou call opci jsou tedy střední hodnota a rozptyl konečné ceny akcie S_T známé. Tedy myšlenka metody momentů může být aplikována na simulování konečné hodnoty akcie $S_T(i)$. V tomto případě, srovnání prvního momentu, definujme

$$\tilde{S}_T(i) = S_T(i) - \overline{S}_T + \mu_{S_T} ,$$

kde $\mu_{S_T} = S_0 e^{rT}$ a $\overline{S}_T$ je výběrový průměr $S_T(i)$. Pro srovnání dvou prvních momentů definujme

$$\tilde{S}_T(i) = \left(S_T(i) - \overline{S}_T\right)\frac{\sigma_{S_T}}{s_{S_T}} + \mu_{S_T} ,$$

kde $\sigma_{S_T} = S_0\sqrt{e^{2rT}\left(e^{\sigma^2 T} - 1\right)}$ a s_{S_T} je výběrová standardní odchylka $S_T(i)$.

2. 4. Výběr podle důležitosti

Tato technika je postavena na pozorování, že střední hodnota podle jedné míry pravděpodobnosti může být vyjádřena jako střední hodnota podle jiné míry, použijeme-li Radon-Nikodýmovu derivaci. Tato myšlenka je ve finanční oblasti důvěrně známá díky tomu, že předpokládá reprezentaci cen jako střední hodnotu podle pomocné míry. V Monte Carlo metodě se používá změna míry pro obdržení efektivnějšího odhadu.

Výběr podle důležitosti se pokouší redukovat rozptyl odhadu pomocí změny míry pravděpodobnosti, ze které jsou trajektorie generovány. Změna míry je standardní nástroj ve finanční matematice.

Abychom tuto myšlenku zkonkretizovali, uvažujme problém odhadu střední hodnoty

$$\alpha = E[h(x)] = \int h(x) f(x) dx ,$$

kde f je hustota a h je nějaká funkce. Běžný odhad metodou Monte Carlo je

$$\hat{\alpha} = \hat{\alpha}(n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} h(X_i),$$

kde $X_1,...,X_n$ je náhodný výběr z rozdělení *f*. Nechť g je jiná hustota splňující

$$f(x) > 0 \Rightarrow g(x) > 0$$

pro všechna *x*. Pak můžeme α representovat jako

$$\alpha = \int h(x)\frac{f(x)}{g(x)}g(x)dx.$$

Tento integrál může být interpretován jako střední hodnota s ohledem na hustotu *g*. Můžeme tedy psát

$$\alpha = \tilde{E}\left[h(x)\frac{f(x)}{g(x)}\right], \tag{10}$$

kde $\tilde{E}$ značí, že střední hodnota se bere s *X* rozdělenými podle *g*. Pokud $X_1,...,X_n$ jsou nezávislé výběry z rozdělení s hustotou *g*, pak odhad pomocí výběru podle důležitosti spojený s *g* je

$$\hat{\alpha}_g = \hat{\alpha}_g(n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} h(X_i)\frac{f(X_i)}{g(X_i)}.$$

Váha $\frac{f(X_i)}{g(X_i)}$ je pravděpodobnostní poměr neboli Radon-Nikodýmova derivace vyhodnocená v bodě X_i.

Z rovnice (10) plyne, že $\tilde{E}[\hat{\alpha}_g] = \alpha$ a tedy $\hat{\alpha}_g$ je nevychýlený odhad α. Pro srovnání rozptylů bez a s užitím metody výběru podle důležitosti tedy stačí porovnat jen druhé momenty. Platí

$$\tilde{E}\left[\left(h(X)\frac{f(X)}{g(X)}\right)^2\right] = E\left[h(X)^2\frac{f(X)}{g(X)}\right].$$

Avšak toto může být větší nebo menší než druhý moment $E\left[h(X)^2\right]$ bez užití této metody. Úspěšnost této metody závisí na efektivní volbě hustoty *g*.

Jako jednoduchý příklad nám poslouží vyhodnocení Black-Scholesovy ceny call opce – např. výpočet $e^{-rT}E[\max\{S_T - K, 0\}]$ s S_T podle (2). Přímé přiblížení vytváří výběr konečných cen S_T shodný s geometrickým Brownovým pohybem majícím odchylku *r* a volatilitu σ, stejně jako ve (2). Ve skutečnosti máme volnost vytvářet S_T pomocí jakékoli odchylky μ, které poskytneme váhu výsledku pomocí pravděpodobnostního poměru. Pro důraz jsem použil index parametru odchylky u operátoru střední hodnoty. Pak

$$E_r\left[\max\{S_T - K,0\}\right] = E_\mu\left[\max\{S_T - K,0\}\right]L,$$

kde L je poměr hustoty logaritmicko-normálního rozdělení s parametry r a μ použitých při výpočtu S_T a je dán vzorcem

$$L = \left(\frac{S_T}{S_0}\right)^{\frac{r-\mu}{\sigma^2}} \exp\left(\frac{(\mu^2 - r^2)T}{2\sigma^2}\right).$$

Poznamenejme že, S_T nemusí být ani vybráno z logaritmicko-normálního rozdělení. Jediným požadavkem je, že nosič míry výběru podle důležitosti se rovná nosiči původní míry. V předešlém příkladě to znamená, že každé rozdělení S_T, jehož nosič zahrnuje interval $(0,\infty)$, je přijatelné.

Ideálně bychom rádi vybrali rozdělení výběru podle důležitosti tak, abychom zredukovali rozptyl. V předešlém příkladě obdržíme odhad s nulovým rozptylem, pokud vybereme S_T s hustotou

$$f(x) = c^{-1}\max\{x - K,0\}e^{-rT}g(x),$$

kde g je logaritmicko-normální hustota S_T a c je normalizující konstanta, která zaručí, že integrál z f je roven 1. Problém je však v tom, že c je sama Black-Scholesova cena. Tedy tato metoda požaduje znalost výsledku. Nicméně to ukazuje možné výhody výběru podle důležitosti.

Bylo zjištěno, že použití rozdělení výběru podle důležitosti, které má větší odchylku a volatilitu poskytuje podstatnou redukci rozptylu při oceňování „deep out-of-the-money“ opcí, a že kombinace výběru podle důležitosti s metodou antitetických proměnných a metodou řídících proměnných, a použití put-call parity pro nepřímé odhady redukuje rozptyl.

2. 5. Stratifikovaný výběr

Jako mnoho technik redukce rozptylu, stratifikovaný (též oblastní) výběr usiluje o to, aby vstupy do simulace byly více regulární než náhodné vstupy. V tomto případě usiluje o to, aby určité empirické pravděpodobnosti byly blízko teoretický pravděpodobnostem, právě jako ve srovnávání momentů se usiluje o přiblížení empirických momentů k teoretickým.

Předpokládejme, že naším cílem je odhadnout $E[Y]$, kde Y je reálná náhodná veličina, a nechť $A_1,...,A_K$ jsou disjunktní podmnožiny reálné osy (ozn. strata), pro které $P(Y \in \cup_i A_i) = 1$. Pak platí

$$E[Y] = \sum_{i=1}^{K} P(Y \in A_i) E[Y | Y \in A_i] = \sum_{i=1}^{K} p_i E[Y | Y \in A_i],$$

kde $p_i = P(Y \in A_i)$. Při náhodném výběru vytvoříme nezávislá $Y_1,...,Y_n$ mající stejné rozdělení jako Y. Podíl těchto výběrů spadající do A_i nebude obecně roven p_i. Budou se k němu pouze blížit pro rostoucí velikost výběru n. Dalším úkolem stratifikovaného výběru je rozhodnout o tom, jaká část výběru bude vybrána z každého strata.

Nejjednodušším případem je tzv. proporcionální výběr, který zajišťuje, že část pozorování vybraných ze strata A_i se shoduje s teoretickou pravděpodobností p_i. Pokud n je celková velikost výběru, pak $n_i = np_i$ je počet výběrů ze strata A_i. Pro každé $i = 1,...,K$ nechť Y_{ij}, $j = 1,...,n_i$, jsou nezávislé výběry z podmíněného rozdělení Y za podmínky $Y \in A_i$. Nevychýlený odhad $E[Y | Y \in A_i]$ je dán pomocí výběrového průměru $\frac{1}{n_i}\sum_{j=1}^{n_i} Y_{ij}$, hodnot vybraných v i-tém stratu. Pak tedy nevychýlený odhad $E[Y]$ je dán jako

$$\hat{Y} = \sum_{i=1}^{K} p_i \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} Y_{ij} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{K} \sum_{j=1}^{n_i} Y_{ij} .$$

Pro ilustraci popišme tuto techniku na jednoduchém příkladě. Nechť naším úkolem je vybrat náhodná čísla z intervalu $[0,1]$. Nechť tedy $U \sim R[0,1]$ je rovnoměrně rozdělená náhodná veličina na tomto intervalu. Tento interval můžeme rozdělit na n ekvidistantních intervalů $A_i = \left(\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n} \right]$. Podmíněné rozdělení náhodné veličiny U za podmínky $U \in A_i$ je charakterizováno náhodnou veličinou $V_i = \frac{i-1}{n} + \frac{U_i}{n}$, kde U_i je rovnoměrně rozdělená náhodná veličina na intervalu $[0,1]$. V_i má tedy rovnoměrné rozdělení v intervalu $\left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n} \right]$.

Pokud náhodná veličina Y nemá rovnoměrné rozdělení, ale její distribuční funkce je F, pak postup je následující. Označme její kvantilovou funkci

$$F^{-1}(u) = \inf\{x : F(x) \geq u\},\ 0 < u < 1 .$$

Dále nechť jsou dány pravděpodobnosti $p_1,..., p_K$ jejichž součet je roven 1 a definujme

$$a_0 = -\infty, a_1 = F^{-1}(p_1), a_2 = F^{-1}(p_1 + p_2),..., a_K = F^{-1}(1-).$$

Pak definujme strata $A_1 = (a_0, a_1], ...A_K = (a_{K-1}, a_K]$. Pak pomocí transformace $V = a_{i-1} + U(a_i - a_{i-1})$ je V rovnoměrně rozděleno mezi a_{i-1} a a_i, a tedy $F^{-1}(V)$ má podmíněné rozdělení Y za podmínky $Y \in A_i$

2.6. Regresní modely

Vyjděme z obecného modelu mnohonásobné regrese

$$Y = X\beta + u ,$$

kde X je známá matice konstant *N x m*, Y vektor pozorování *N x 1*, β vektor neznámých parametrů *m x 1* a u náhodný vektor poruch *N x 1*. Předpokládejme, že *r(X) = m, E u = 0, Var u = V, V* je pozitivně definitní. Nejlepším nevychýleným odhadem pro β jest

$$\hat{\beta} = \left(X'V^{-1}X\right)^{-1} X'V^{-1}Y .$$

Tento odhad má kovarianční matici $Var\hat{\beta} = \left(X'V^{-1}X\right)^{-1}$. Poznamenejme, že odhad

$$\tilde{\beta} = \left(X'\tilde{V}^{-1}X\right)^{-1} X'\tilde{V}^{-1}Y , \tag{11}$$

kde $\tilde{V}$ je pozitivně definitní matice konstant, je také nevychýlený. Matice V je v převážné většině statistických úloh neznámá a někdy je jí možné nahradit odhadem. Odhad $\tilde{\beta}$ pak po dosazení odhadnuté matice $\tilde{V}$ již obecně nebude nevychýlený. V teorii lineární regrese se však ukazuje, že má dobré asymptotické vlastnosti.

Máme-li možnost náhodný vektor Y mnohonásobně kopírovat, tj. simulovat nezávislé hodnoty $Y_1,...,Y_n$, můžeme kovarianční matici V odhadnout pomocí

$$\tilde{V} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} \left(Y_i - \bar{Y}\right)\left(Y_i - \bar{Y}\right)' ,$$

kde

$$\bar{Y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i .$$

Za odhad $\tilde{\beta}$ potom vezmeme

$$\tilde{\beta} = \left(X'\tilde{V}^{-1}X\right)^{-1} X'\tilde{V}^{-1}\bar{Y} .$$

Tento odhad je téměř nevychýlený a má přibližně kovarianční matici $\left(X'\tilde{V}^{-1}X\right)^{-1}/n$.

Nejčastější případ je případ, kdy $X = (1,1,...,1)'$ a kdy tedy odhadujeme jediný parametr $\beta_1 = \beta$.

Pro lepší porozumění této technice redukce rozptylu si ji předvedeme na jednoduchém výpočtu integrálu $\beta = \int_0^1 f(x)dx$, kde $f(x) = (e^x - 1)/(e-1)$. Uvažujme dva odhady tohoto integrálu

$$Y_1 = 0{,}5f(x) + 0{,}5f(1-x)$$

$$Y_2 = 0{,}25f(0{,}5x) + 0{,}25f(0{,}5-0{,}5x) + 0{,}25f(0{,}5+0{,}5x) + 0{,}25f(1-0{,}5x),$$

kde *x* je náhodné číslo s rovnoměrným rozdělením na intervalu (0,1). Položíme-li

$$X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, m=1,\ N=2,\ u_1 = 0{,}5f(x) + 0{,}5f(1-x) - \beta ,$$

$$u_2 = 0{,}25f(0{,}5x) + 0{,}25f(0{,}5-0{,}5x) + 0{,}25f(0{,}5+0{,}5x) + 0{,}25f(1-0{,}5x) - \beta ,$$

pak se jistě jedná o model lineární regrese. Provedeme simulace náhodného čísla *x*, z nichž vypočteme hodnoty Y_1 a Y_2 pro každou nasimulovanou hodnotu *x*. Vypočteme průměry $\bar{Y}_1$, $\bar{Y}_2$ a odhadneme kovarianční matici $\tilde{V}$ mezi vektorem hodnot Y_1 a vektorem hodnot Y_2. Odhad $\tilde{\beta}$ vypočteme podle rovnice (11). Přibližný rozptyl tohoto odhadu je $\left(X'\tilde{V}^{-1}X\right)^{-1}/n$.

Pro případ hodnocení evropské call opce lze použít, jako vstupní odhady ceny této opce pro model lineární regrese, odhady získané použitím předchozích technik redukce rozptylu. Lze také použít několik odhadů lišících se pouze parametry (např. metodu stratifikovaného výběru s různým počtem ekvidistantních intervalů).

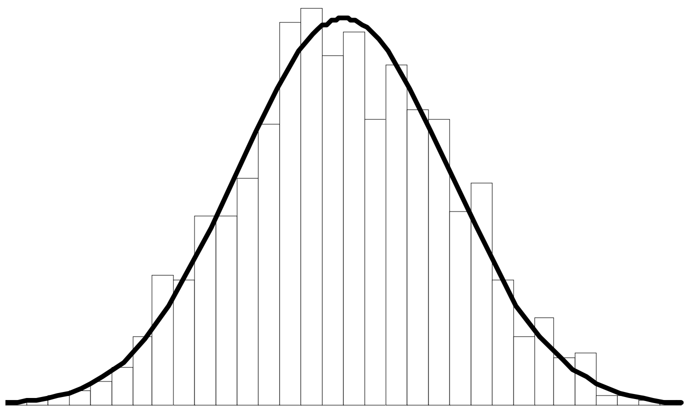
Kapitola 3

Simulace

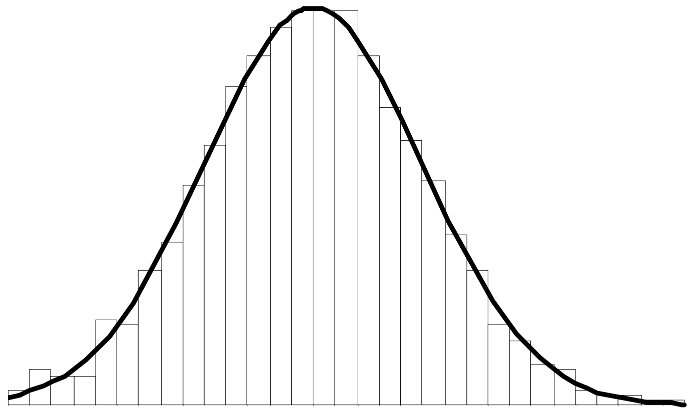
3.1. Rovnoměrnost náhodného výběru

V této podkapitole se budeme zabývat „rovnoměrností“ náhodně vybraných dat. Pojmem rovnoměrnost rozumíme, že náhodný výběr z normálního rozdělení má histogram kopírující graf hustoty tohoto normálního rozdělení.

Na následujících obrázcích si lze prohlédnout histogramy simulace náhodného výběru ve srovnání s grafem hustoty normálního rozdělení. U simulace pro *Obr.2* byla použita metoda stratifikovaného výběru. Oba histogramy vycházejí z náhodných výběrů délky tisíc. Pro metodu stratifikace byla použita metoda inverzní transformace. Interval (0,1) jsem rozdělil na sto ekvidistantních subintervalů a v každém z nich vygeneroval deset náhodných čísel. Tato náhodná čísla jsem pak převedl pomocí inverzní transformace na náhodný výběr z normovaného normálního rozdělení.



Obr.1 - Náhodný výběr



Obr.2 – Náhodný výběr s použitím stratifikovaného výběru

Ve srovnání s náhodným výběrem na *Obr.1*, data získaná pomocí této techniky redukce rozptylu lépe aproximují normální rozdělení.

3.2. Komentáře k simulacím

Kvalitu odhadu s použitím technik redukce rozptylu si předvedeme na příkladu evropské call opce. V příloze na CD jsou naprogramovány v programu *Mathematica* tyto simulace: obyčejná metoda Monte Carlo, metoda antitetických proměnných, metoda shody momentů, metoda stratifikovaného výběru, metoda řídící proměnné a metoda lineární regrese. V této kapitole se budu snažit okomentovat výsledky těchto simulací a objasnit použité postupy.

Všechny metody jsou založeny na sto opakování simulace pomocí příslušné metody. Každá simulace používá deset tisíc náhodných čísel, nezávislých a normálně rozdělených se střední hodnotou nula a rozptylem jedna. Sto opakováními simulace získáme sto odhadů ceny opce. Z těchto odhadů pak vypočítáme průměr, který považujeme za konečný odhad ceny opce. Rozptyl tohoto odhadu získáme jako výběrový rozptyl vypočítaný z této stovky odhadů ceny opce. Pro porovnání přesnosti odhadu ceny opce jsem uvedl i výpočet této ceny pomocí Black-Scholesova modelu.

Velmi důležité je upozornit na problém stratifikace vstupů simulace. Tento problém jsem se snažil vyřešit pomocí metody inverzní transformace. Interval (0,1) jsem rozdělil na *k* ekvidistantních intervalů a v každém intervalu jsem provedl náhodný výběr délky *l/k* z rovnoměrného rozdělení na tomto intervalu. Těchto *l* náhodných čísel jsem pomocí inverzní transformace převedl na náhodný výběr z normovaného normálního rozdělení. Tím se tedy dospělo k rovnoměrnějšímu výběru náhodných čísel (viz. Podkapitola 3.1.). Tento postup má však nevýhodu v podobě dlouhé doby výpočtu.

V případě odhadu pomocí lineární regrese jsem použil odhadů z předešlých simulací jak již bylo zmíněno na konci kapitoly o lineární regresi. Je jasné, že časové nároky takového výpočtu jsou velké, ale konečný výsledek lze považovat za velmi dobrý jak z hlediska přesnosti odhadu tak z hlediska velikosti odhadnutého rozptylu tohoto odhadu.

Závěrem této programové části je přehledné srovnání technik redukce rozptylu v podobě tabulky. V ní jsou zaznamenány odhady pomocí jednotlivých technik, odhadované rozptyly a časové nároky odhadů a efektivnost dané techniky.

Srovnání výsledků simulace						
Metoda	**OMC**	**AP**	**SM**	**SV**	**ŘP**	**RM**
Poměr rozptylů	1	4,043	39,488	266,93	5,312*10^27	5,411*10^27
Poměr času	1	0,488	0,968	0,0156	0,493	0,0143
Relativní eficience	1	1,975	38,239	4,177	2,617*10^25	7,728*10^25
Odhad ceny opce	4,61036	4,60894	4,60979	4,60955	4,60967	4,60967

Tab.1 – Výsledky simulace

Vysvětlivky k *Tab.1*: OMC – obyčejná metoda Monte Carlo, AP – metoda antitetických proměnných, SM – metoda shody momentů, SV – metoda stratifikovaného výběru, ŘP – metoda řídící proměnné, RM – metoda regrese.

Pro porovnání přesnosti odhadů pomocí jednotlivých technik redukce rozptylu použijeme výpočet ceny opce pomocí Black – Scholesova modelu. Pro tento příklad je tato cena 4,60967. Na závěr lze říci, že odhadování cen cenných papírů pomocí metody Monte Carlo nemusí být dostatečně přesné. Přesnost odhadu závisí na řešeném příkladu a použité technice redukce rozptylu.

Dodatek

Dodatkem této bakalářské práce je obsah přiloženého CD s naprogramovanými simulacemi.

Literatura

[1] Dupačová, J., Hurt, J., Štěpán, J.: Stochastic Modeling in Economics and Finance. Kluwer Academic Publishers. Dordrecht, 2002.

[2] Harry M. Markowitz: Portfolio selection: efficient diversification of investments. Blackwell Publishers. Cambridge, GB., 1991.

[3] Harry M. Markowitz: Mean-variance analysis in portfolio choice and capital markets. Blackwell Publishers. Oxford, GB, 1990.

[4] Blake, D.: Analýza finančních trhů. Grada. Praha, 1995.

[5] Cipra, T.: Praktický průvodce finanční a pojistnou matematikou. Ekopress. Praha, 2005.

[6] Cipra, T.: Matematika cenných papírů. HZ Praha. Praha, 2005.

[7] Čámský, F.: Teorie portfolia. Masarykova universita, Ekonomicko-správní fakulta. Brno, 2001.

[8] Sharpe W.F.: Capital Asset Prices: a theory of market equilibrium under conditions of risk. The Journal of Finance, 1964.

[9] Fama, E.F.: Random walks in stock prices. Financial Analysts Journal, 1965.

[10] Glasserman, P.: Monte Carlo Methods in Financial Engineering. Springer. New York, 2004.

[11] Boyle, P. et al.: Monte Carlo Methods for Security Pricing. In:Option Pricing, Interest Rates and Risk Management. Jouni, E. et al., eds. Springer. New York, 2004. 185 - 238.

[12] Hurt, J.: Simulační metody. Univerzita Karlova, Matematicko-fyzikální fakulta. SPN. Praha, 1982.