Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Radka Sabolová

Znaménkový test

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí bakalářské práce: Mgr. Martin Schindler

Studijní program: Matematika, obecná matematika

2007

Ďakujem vedúcemu svojej práce Mgr. Martinovi Schindlerovi za odborné konzultácie a cenné podnety, ktoré mi poskytol pri písaní práce.

Prohlašuji, že jsem svou bakalářskou práci napsala samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů. Souhlasím se zapůjčováním práce a jejím zveřejňováním.

V Praze dne 1.8.2007 Radka Sabolová

Obsah

1 Úvod **6**
1.1 Základné pojmy, testovanie hypotéz 6
1.2 Neparametrické testy 8

2 Znamienkový test ako test symetrie **10**
2.1 Použitie znamienkového testu 10
2.2 Znamienkový test ako test symetrie 11

3 Znamienkový test ako test mediánu **14**
3.1 Jednovýberový znamienkový test 14
Obojstranný jednovýberový znamienkový test 14
Jednostranný jednovýberový znamienkový test 16
3.2 Párový znamienkový test 17
3.3 Tabuľka kritických hodnôt pre obojstranný znamienkový test na hladine $\alpha = 5\%$ 20
3.4 Riešenie zhôd 21
Podmienený znamienkový test 22
Presné rozdelenie zhôd medzi n_+ a n_- 22
Náhodné priradenie zhôd n_+ a n_- 22
Nenáhodný rovnomerne najsilnejší test 23
3.5 Viacvýberový znamienkový test 24

4 Asymptotický znamienkový test **26**
4.1 Asymptotické testy založené na vierohodnostnej funkcii 27
Raov skórový test 29
Waldov test 30
Metóda podielom vierohodností 30
4.2 Asymptotický χ^2 test dobrej zhody v multinomickom rozdelení . . 31
4.3 Porovnanie asymptotického testu a kritických hodnôt na hladine $\alpha = 5\%$ 32

5 Príklady, porovnanie s inými testami **35**
5.1 Popis t-testu 35

Popis jednovýberového t-testu 35
Popis párového t-testu 35
5.2 Popis Wilcoxonovho testu 36
5.3 Príklady 36

Literatúra **42**

Obsah priloženého CD **43**

Název práce: Znaménkový test
Autor: Radka Sabolová
Katedra (ústav): Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky
Vedoucí bakalářské práce: Mgr. Martin Schindler
e-mail vedoucího: martin.schindler@karlin.mff.cuni.cz

Abstrakt: V predloženej práci študujeme znamienkový test a jeho použitie na testovanie hypotéz. Najprv popíšeme znamienkový test ako test symetrie, neskôr ako test mediánu. Okrem jednovýberového a párového znamienkového testu uvedieme aj viacvýberový znamienkový test. Ďalej popíšeme najznámejšie metódy riešenia zhôd. Potom uvedieme rôzne metódy výpočtu, vrátane asymptotického testu, ktorý je v práci odvodený viacerými spôsobmi a porovnáme ho s presným výpočtom pomocou kritických hodnôt z tabuliek. Na záver porovnáme znamienkový test, t-test a Wilcoxonov test na príkladoch.

Klíčová slova: znamienkový test, neparametrické testy, test mediánu, test symetrie

Title: Sign Test
Author: Radka Sabolová
Department: Department of Probability and Mathematical Statistics
Supervisor: Mgr. Martin Schindler
Supervisor's e-mail address: martin.schindler@karlin.mff.cuni.cz

Abstract: In the work presented we study sign test and its usage for testing hypotheses. Firstly we describe the sign test as a test of symmetry, then as a test of median. Apart from presenting one-sample and two-sample paired sign test we also present multivariate sign test. Further some of the most famous methods of handling ties are described. Then various methods of calculations are shown, including asymptotic sign test, which is derived in more ways and it is compared to exact computation by using critical values. In the end there is a comparison of sign test, t-test and Wilcoxon signed-rank test on examples.

Keywords: sign test, nonparametric tests, test of median, test of symmetry

Kapitola 1

Úvod

Aplikácia znamienkového testu na dáta v roku 1710 sa považuje podľa Noether [8] za prvý test štatistickej hypotézy. V roku 1946 Dixon a Mood zhrnuli dovtedajšie poznatky o tomto teste v [4]. Odvtedy záujem o tento test neupadol, autori sa venovali hlavne riešeniu zhôd (napr. Putter [10], Randles [12], Coakley a Heise [3]). Tento test bol popísaný v mnohých učebniciach, pri písaní tejto práce boli využité najmä Lehmann, D'Abrera [7] (použité v 2., 3. kapitole), Jurečková [6] (v 2. kapitole) a Anděl [1] (v 3. a 4. kapitole). Základy testovania hypotéz v tejto kapitole boli prevzaté z Dupač a Hušková [5] a čiastočne aj z Anděl [1]. Príklady uvedené v práci sú z knihy Potocký a kol. [9], okrem príkladu 3, kde boli použité vlastné dáta.

Práca má nasledujúcu štruktúru - v 2. kapitole stručne popíšeme hypotézy, ktoré môže znamienkový test testovať a zároveň popíšeme znamienkový test ako test symetrie. V 3. kapitole sa budeme venovať znamienkovému testu ako testu mediánu, popíšeme jednovýberový, párový a viacvýberový test a riešenie zhôd. Asymptotický znamienkový test odvodíme viacerými spôsobmi vo 4. kapitole: pomocou centrálnej limitnej vety, ako Raov test a ako asymptotický χ^2 test dobrej zhody v multinomickom rozdelení a porovnáme ho s tabuľkami kritických hodnôt. V poslednej - piatej kapitole porovnáme znamienkový test s Wilcoxonovým testom a s t-testom na dátach, u ktorých nezamietame normalitu.

1.1 Základné pojmy, testovanie hypotéz

Predpokladajme, že súbor náhodných veličín $X_1, \ldots, X_n$ je náhodným výberom z rozdelenia, ktoré je prvkom rodiny $\{F_\theta; \theta \in \Theta\}$. Nech o parametri θ existujú dve konkurujúce si hypotézy: nulová a alternatívna. Podľa nulovej hypotézy H_0 je $\theta \in \Theta_0(\subset \Theta)$, podľa alternatívnej hypotézy H_1 je $\theta \in \Theta_1 = \Theta - \Theta_0$. Testovaním hypotézy H_0 rozumieme rozhodovací postup založený na $X_1, \ldots, X_n$, výsledkom ktorého je zamietnutie alebo nezamietnutie platnosti hypotézy H_0. *Chyby prvého druhu* sa dopúšťame, ak hypotéza H_0 platí, ale my ju zamietneme. Túto chybu sa snažíme minimalizovať. *Chyba druhého druhu* (ozn. β) je, ak platí hypotéza H_1, ale my nezamietneme hypotézu H_0.

Test je popísaný *kritickým oborom* $W \subset \mathbb{R}^n$. Ak $(X_1, ...X_n) \in W$, potom hypotézu H_0 zamietneme, v opačnom prípade ju nezamietneme. Kritický obor volíme tak, aby pravdepodobnosť chyby prvého druhu nebola väčšia než vopred dané $\alpha > 0$, teda aby platilo $P_\theta(\mathbf{X} \in \mathrm{W}) \leq \alpha$ pre všetky $\theta \in \Theta$. Hodnotu $sup_{\theta \in \Theta_0} P_\theta(\mathbf{X} \in \mathrm{W})$ nazývame *hladina testu.* Hladinu testu volíme tak, aby bola rovná α, resp. takú, aby bola čo najblizšia k α. Medzi testami na hladine α potom volíme ten, ktorý má najmenšiu pravdepodobnosť chyby druhého druhu. Pre chybu druhého druhu platí

$$\beta = P_{H_1}(\mathbf{X} \notin W).$$

Hodnotu

$$1 - \beta = P_{H_1}(\mathbf{X} \in W),$$

ktorá vyjadruje schopnosť testu odhaliť neplatnosť nulovej hypotézy, nazývame *sila testu.* V prípade zloženej alternatívnej hypotézy (skladá sa z viacerých jednoduchých hypotéz) hovoríme o *silofunkcii* definovanej na elementárnej alternatívnej hypotéze (každej elementárnej hypotéze môže prislúchať iná hodnota β).
Ďalej ešte uvedieme vetu pre prípad $\Theta = \{\theta_0, \theta_1\}$, $H_0 = \theta_0$, $H_1 = \theta_1$, ktorá sa zaoberá testom s najmenšou pravdepodobnosťou chyby druhého druhu medzi testami na hladine α.

Veta 1. (Neyman - Pearsonova lema)[1]
Nech $p_j(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$, *j=0,1, sú nezáporné merateľné funkcie také, že*

$$\int_{\mathbb{R}^n} p_j(\boldsymbol{x}) d\nu_n(\boldsymbol{x}) = 1, \quad j = 0, 1,$$

kde ν_n *je* σ*-konečná miera na* $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^n)$. *Nech pre dané* $\alpha \in (0, 1)$ *existuje také kladné číslo c, že pre množinu*

$$W^* = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n; p_1(\boldsymbol{x}) \geq cp_0(\boldsymbol{x})\}$$

platí

$$\int_{W^*} p_0(\boldsymbol{x}) d\nu_n(\boldsymbol{x}) = \alpha.$$

Potom pre ľubovoľnú množinu $W \in \mathcal{B}^n$ *spĺňajúcu*

$$\int_W p_0(\boldsymbol{x}) d\nu_n(\boldsymbol{x}) \leq \alpha$$

platí

$$\int_{W^*} p_1(\boldsymbol{x}) d\nu_n(\boldsymbol{x}) \geq \int_W p_1(\boldsymbol{x}) d\nu_n(\boldsymbol{x}). \tag{1.1}$$

[1] [5], str. 126, veta 6.1

Teda podľa nerovnosti (1.1) má test s kritickým oborom W^* zo všetkých testov hypotézy H_0 na hladine α najmenšiu pravdepodobnosť chyby druhého druhu.

Nech g je prosté zobrazenie výberového priestoru $\mathcal{X}$ na seba. Hovoríme, že problém testu H_0 proti H_1 je *invariantný vzhľadom ku g*, ak g zachováva hypotézu aj alternatívu.

P-hodnota je najnižšia hladina, na ktorej zamietame nulovú hypotézu H_0. Vypočíta sa ako pravdepodobnosť, že testová štatistika patrí do kritického oboru za podmienky, že platí H_0. Ak je hladina testu α nižšia než p-hodnota, tak nezamietame hypotézu H_0 na hladine α, v opačnom prípade zamietame hypotézu H_0.

Kritická funkcia $h(\boldsymbol{x})$ je merateľná funkcia na $\mathbb{R}^n$, pre ktorú platí $0 \leq h(\boldsymbol{x}) \leq 1$. Ak položíme

$$h(\boldsymbol{x}) = I_W(\boldsymbol{x}),$$

tak dostaneme klasický test nulovej hypotézy. Ak sa realizoval vektor $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{x}$, u znáhodneného testu zamietame H_0 s pravdepodobnosťou $h(\boldsymbol{x})$ a nezamietame s pravdepodobnosťou $1 - h(\boldsymbol{x})$ - po realizácii náhodného pokusu $\boldsymbol{X}$ sa musí uskutočniť ešte jeden náhodný pokus a až ten rozhodne o zamietnutí nulovej hypotézy.

1.2 Neparametrické testy

Štatistické testy hypotéz môžeme podľa podmienok ich použitia rozdeliť na parametrické a neparametrické. Parametrické testy sú väčšinou založené na predpoklade, že je známe rozdelenie výberu (buď úplne alebo až na nejaké parametre) a pracujú s parametrami daného súboru. Až v roku 1942 bol do štatistickej literatúry zavedený termín pre štatistické metódy, ktoré nezávisia na konkrétnom rozdelení náhodnej veličiny - neparametrické testy. Vo väčšine prípadov je jediným predpokladom pre ich použitie iba spojitosť distribučnej funkcie. Neparametrické testy sa niekedy nazývajú aj testy s voľnými rozdeleniami. Obľubu si získali najmä svojím jednoduchým, nenáročným použitím. Najznámejšie sú: znamienkový test, Wilcoxonov test, Kruskalov-Wallisov test, Friedmanov test.

Dôvodom ich obľúbenosti sú aj slabé predpoklady k ich použitiu. Hoci sa sprvu verilo, že sa za ich univerzalitu bude musieť zaplatiť veľká daň vo forme straty účinnosti, prekvapivo sa zistilo, že účinnosť neparametrických metód ostáva vysoká aj pri splnenej normalite dát a sú výhodné a účinné, ak nie je splnená normalita dát.

U väčšiny neparametrických testov je dôležitý pojem poradia - teda každej realizácii náhodnej veličiny $x_1, \ldots, x_n$ sa priradí číslo

$$r_i = 1 + \mathrm{card}\{j : x_j < x_i\} + \frac{1}{2}\mathrm{card}\{j : j \neq i, x_j = x_i\}.$$

Týmto testom hovoríme *poradové testy.*

Znamienkový test je pravdepodobne najstarším a najznámejším neparametrickým testom - Noether v [8] uvádza, že prvýkrát bol použitý už v roku 1710. Škótsky lekár a matematik John Arbuthnot skúmal počty narodených detí v Londýne s cieľom zistiť, či sa s rovnakou pravdepodobnosťou rodia chlapci a dievčatá. Túto nulovú hypotézu zamietol s odôvodnením, že vyšší počet narodených chlapcov zariadila vyššia moc, aby vyvážila ich zvýšenú úmrtnosť. Tieto svoje poznatky zhrnul v práci „An argument for divine providence, taken from the constant regularity observed in the births of both sexes“.

Kapitola 2

Znamienkový test ako test symetrie

2.1 Použitie znamienkového testu

Znamienkový test je jednoduchý a obľúbený test, ktorý si svoju popularitu získal nenáročným použitím, minimom predpokladov potrebných k jeho použitiu a svojou univerzalitou. Možno ho použiť, ak máme k dispozícii n objektov, resp. párov, ktoré sú vopred dané a náhoda sa uplatní iba v prípade párov - k určeniu, ktorý objekt z páru je určený na „ošetrenie“ a ktorý na „kontrolu“. Druhá možnosť je použiť ho na náhodný výber z jednorozmerného rozdelenia $X_1, \ldots, X_n$ s distribučnými funkciami $F_1(x), \ldots, F_n(x)$ ($F_i, i = 1, \ldots, n$, sa môžu a nemusia rovnať) alebo na výber z dvojrozmerného rozdelenia $(Y_1, Z_1), \ldots, (Y_n, Z_n)$ s distribučnými funkciami $G_1(y, z), \ldots, G_n(y, z)$, ktoré nemusia byť rovnaké. V tomto prípade sa znamienkový test podľa Lehmann, D'Abrera [7], str. 163, používa na testovanie troch hypotéz:

(i) Nech $X_1, \ldots, X_n$ sú nezávislé rovnako rozdelené náhodné veličiny s distribučnou funkciou F. V tomto prípade testujeme, či rozdelenie $X_1, \ldots, X_n$ je symetrické okolo 0 proti alternatíve, že je posunuté smerom ku kladným hodnotám. V tomto prípade je znamienkový test použitý ako *test symetrie*. Obecnejšie môžeme predpokladať, že $X_1, \ldots, X_n$ sú nezávislé, so spojitými distribučnými funkciami $F_1, \ldots, F_n$. Testujeme, či rozdelenia náhodných veličín $X_i, i = 1, \ldots, n$, sú symetrické okolo 0, resp. iného daného čísla.

(ii) Ak je známe len znamienko $X_1, \ldots, X_n$, označme $p_+ = P(X_i > 0)$, potom testujeme hypotézu, že $p_+ = \frac{1}{2}$ (resp. ak pripúšťame napr. liečbu, ktorá zhorší stav pacienta, tak testujeme hypotézu $p_+ \leq \frac{1}{2}$) proti alternatíve $p_+ > \frac{1}{2}$. Tento spôsob sa používa, ak máme len kvalitatívne porovnanie napr. dvoch ošetrení.

(iii) Test hypotézy, či medián rozdelenia $X_1, \ldots, X_n$ je rovný danej hodnote.

Hypotézu uvedenú v *(i)*, že rozdelenie $X_1, \ldots, X_n$ je symetrické okolo 0 (resp. inej hodnoty), môžeme chápať ako kombináciu dvoch hypotéz:

(a) rozdelenie náhodných veličín $X_1, \ldots, X_n$ je symetrické,

(b) stred symetrie rozdelenia je nula.

Vynechaním hypotézy *(a)* testujeme už len umiestnenie stredu symetrie. U symetrických rozdelení nenastáva problém s pojmom stredu symetrie, u nesymetrických testujeme umiestnenie mediánu - a to je test popísaný v *(iii)*. Analogické hypotézy môžeme sformulovať pre párový znamienkový test.

Znamienkový test svoje pomenovanie získal z postupu pri testovaní. Na rozdiel od napr. Wilcoxonovho testu sa do úvahy berú len znamienka rozdielov (rozdielov medzi Y_i a Z_i, resp. X_i a danou konštantou). Týmto sa síce jeho sila oproti Wilcoxonovmu testu zmenšila, ale na rozdiel od neho je použiteľný aj v prípadoch, keď máme k dispozícii len kvalitatívne porovnania.

2.2 Znamienkový test ako test symetrie

Nech výsledky ošetreného a kontrolného člena i-tého páru sú Y_i a Z_i. Predpoklad náhodného výberu spôsobuje, že každý pár z $(Y_1, Z_1), \ldots, (Y_n, Z_n)$ má rovnakú distribučnú funkciu, označme

$$P(Y_i \leq y, Z_i \leq z) = G(y, z) \quad \forall i.$$

Predpokladáme, že $G(y, z)$ je spojitá. Je zrejmé, že v tomto prípade nie sú Y_i a Z_i nezávislé. Vytvoríme rozdiely

$$X_i = Y_i - Z_i,$$

ktoré sú podľa predpokladov opäť rovnako rozdelené s distribučnou funkciou

$$P(X_i \leq x) = F(x).$$

Hypotéza nulového efektu ošetrenia je ekvivalentná hypotéze

$$H_0 : G(y, z) = G(z, y) \quad \forall y \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{R}.$$

Za platnosti H_0 je distribučná funkcia $G(y, z)$ symetrická podľa priamky $z = y$. Alternatívna hypotéza H_1 kladného vplyvu ošetrenia znamená, že rozdelenie vektora (Y, Z) je posunuté smerom k polrovine $z > y$ (nepripúšťame záporný efekt ošetrenia).
Za platnosti H_0 distribučné funkcie X_i a $-X_i$ sú rovnaké, čiže platí

$$P_{H_0}(X_i \leq x) = P_{H_0}(-X_i \leq x).$$

Za platnosti H_0 je rozdelenie $X_1, \dots, X_n$ symetrické okolo nuly. Hypotézu H_0 testujeme proti alternatíve H_1, že ošetrenie ma kladný efekt. Teda hodnoty Y_i budú väčšie než hodnoty Z_i (hodnoty X_i sú posunuté smerom ku kladným hodnotám). Sformulujme ekvivalentnú hypotézu

$$H_0' : F(x) + F(-x) = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

ktorú testujeme proti alternatíve

$$H_1' : F(z + \Delta) + F(-z + \Delta) = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}, \Delta > 0,$$

ktorá tvrdí, že F je posunuté smerom ku kladným hodnotám.

Môžeme uvažovať aj model posunutia, ktorý predpokladá, že ošetrenie pridá objektu konštantnú hodnotu δ. Nech $E(x)$ označuje distribučnú funkciu $X_i = Y_i - Z_i$ za platnosti H_0, ktorá je symetrická okolo nuly, a nech efekt ošetrenia je δ. Potom E je distribučná funkcia $(Y_i - \delta) - Z_i$ a teda distribučná funkcia X_i je

$$P(X_i \leq x) = E(x - \delta).$$

Okrem párového znamienkového testu existuje aj jednovýberový test. Majme n nezávislých pozorovaní $X_1', \dots, X_n'$ - sú to merania nejakej veličiny Λ, ktorej hodnotu chceme testovať. Ďalej predpokladáme, že chyby meraní

$$X_1' - \Lambda, \dots, X_n' - \Lambda$$

sú symetricky rozdelené okolo nuly. Testujeme nulovú hypotézu

$$H_0 : \Lambda = \Lambda_0$$

proti jej obojstrannej alternatíve. Tento problém môže byť po substitúcii

$$X_i = X_i' - \Lambda_0$$

prevedený na

$$H_0 : \Lambda = 0.$$

V tomto teste Λ môže byť napr. hodnota nejakej fyzikálnej alebo biologickej konštanty predpokladaná teóriou, ktorú testujeme. Môže to byť aj „normálna“ alebo žiadaná hodnota, s ktorou porovnávame skutočné hodnoty.

V oboch testoch - párovom aj jednovýberovom je testová štatistika N_+ množstvo kladných rozdielov medzi Y_i a Z_i, resp. X_i' a Λ_0. Za platnosti H_0 je rozdelenie X_i symetrické okolo 0, teda pravdepodobnosť kladného alebo záporného znamienka je $\frac{1}{2}$. Pretože X_i sú nezávislé, sú nezávislé aj ich znamienka a $N_+ \sim \mathrm{Bi}(n, \frac{1}{2})$ za platnosti H_0. Za platnosti alternatívy už pravdepodobnosť kladného rozdielu je rôzna od $\frac{1}{2}$ a rovná sa

$$p_+ = 1 - F(0),$$

teda $N_+ \sim \mathrm{Bi}(n, p_+)$.

Na záver ešte uvedieme jedno rozšírenie problému: distribučné funkcie $(Y_1, Z_1), \ldots, (Y_n, Z_n)$ nie sú rovnaké. Označme $G_i(y, z)$ distribučnú funkciu (Y_i, Z_i). Nech $X_i = Y_i - Z_i$, F_i je distribučná funkcia X_i. Teda máme nezávislé náhodné veličiny $X_1, \ldots, X_n$, ktorým prislúchajú distribučné funkcie $F_1, \ldots, F_n$. Testujeme nulovú hypotézu, že rozdelenie X_i je symetrické okolo nuly $\forall i$, teda

$$H_0 : F_i(z) + F_i(-z) = 1, \quad i = 1, \ldots, n,$$

proti alternatíve, že rozdelenia sú posunuté smerom ku kladným hodnotám. Tento problém je invariantný ku všetkým transformáciám typu

$$x_i' = t_i(x_i), \quad i = 1, \ldots, n,$$

kde t_i je spojitá rastúca nepárna funkcia. Maximálna invarianta je počet kladných pozorovaní n_+. Znamienkový test je rovnomerne najsilnejší medzi všetkými invariantnými testami. Dôkaz možno nájsť v Jurečková [6], str. 77–78.
Kritická funkcia testu má tvar

$$h(k) = \begin{cases} 1 & k > c, \\ \gamma & k = c, \\ 0 & k < c, \end{cases} \tag{2.1}$$

kde c je určené vzťahom

$$\sum_{\substack{k>c \\ k \le n}} \binom{n}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^n + \gamma \binom{n}{c} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \alpha.$$

Znamienkový test je aj lokálne najsilnejší poradový test pre

$$H_0' : F(x) + F(-x) = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

proti

$$H_1' : F_1 = \ldots = F_n = F, F(x + \Delta) + F(-x + \Delta) = 1, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \Delta > 0,$$

ak je F distribučná funkcia dvojite exponenciálneho typu s hustotou

$$f(x) = \frac{1}{2} e^{-|x-\Delta|}.$$

Vyplýva to z vety uvedenej v Jurečková [6], str.114.

Postup pri testovaní je zhodný ako pri testovaní hodnoty mediánu a bude uvedený neskôr.

Kapitola 3

Znamienkový test ako test mediánu

3.1 Jednovýberový znamienkový test

Nech $X_1, \ldots, X_n$ je náhodný výber z rozdelenia s jediným mediánom $\tilde{x}$ (teda platí $P(X_i < \tilde{x}) = \frac{1}{2}$, $P(X_i > \tilde{x}) = \frac{1}{2}$) a s distribučnou funkciou, ktorá je spojitá v bode mediánu. Ak nie je splnený predpoklad spojitosti distribučnej funkcie v bode mediánu, znamená to, že dochádza ku zhodám (pravdepodobnosť zhody je rovná „veľkosti skoku“ v tomto bode).

Ak by sme vedeli, že rozdelenie náhodných veličín $X_1, \ldots, X_n$ je symetrické okolo mediánu, potom je medián rovný strednej hodnote X_i (ak stredná hodnota existuje).

Jednovýberový znamienkový test bol opísaný napr. v Anděl [1], str. 233–235.

Obojstranný jednovýberový znamienkový test

Testujeme hypotézu

$$H_0 : \tilde{x} = x_0$$

proti obojstrannej alternatívnej hypotéze

$$H_1 : \tilde{x} \neq x_0,$$

kde x_0 je vopred dané pevné číslo.
Vypočítame rozdiely:

$$X_1 - x_0, \ldots, X_n - x_0.$$

Pretože veličiny $X_1, \ldots, X_n$ sú nezávislé, tak aj tieto rozdiely sú nezávislé.
Za testovú štatistiku berieme N_+, kde

$$N_+ = \sum_{i=1}^{n} I_{[X_i - x_0 > 0]},$$

teda N_+ je náhodná veličina označujúca počet kladných rozdielov $X_i - x_0$, $i = 1, \dots, n$.
Platí:

$$N_+ \sim Bi(n, p_+).$$

Hypotézy môžeme preformulovať na:

$$H_0 : p_+ = \frac{1}{2} \quad \text{proti} \quad H_1 : p_+ \neq \frac{1}{2}.$$

Za platnosti hypotézy H_0 má náhodná veličina N_+ binomické rozdelenie s parametrom $p_+ = \frac{1}{2}$, pretože každý rozdiel $X_i - x_0$ môže byť s pravdepodobnosťou $\frac{1}{2}$ kladný alebo záporný. Teda platí

$$P(N_+ = k) = \binom{n}{k}\frac{1}{2^n}.$$

Označme $p_k = P(N_+ = k)$. Keďže ide o obojstranný test, ak platí hypotéza H_0 na hladine α, pre $p_k, k = 0, \dots, n$, musí platiť:

$$\sum_{k=0}^{k_1} p_k \leq \frac{\alpha}{2}, \qquad \sum_{k=0}^{k_1+1} p_k > \frac{\alpha}{2} \tag{3.1}$$

a

$$\sum_{k=k_2}^{n} p_k \leq \frac{\alpha}{2}, \qquad \sum_{k=k_2-1}^{n} p_k > \frac{\alpha}{2}. \tag{3.2}$$

Čísla k_1, k_2 nazývame kritické hodnoty (pre obojstranný test na hladine $\alpha = 5\%$ budú uvedené neskôr v tabuľke).
Nech n_+ je realizácia náhodnej veličiny N_+, teda $N_+ = n_+$. Hypotézu H_0 zamietame, ak $n_+ \leq k_1$ alebo $n_+ \geq k_2$.
V programe R [11] môžeme použiť príkaz

$$\texttt{binom.test(n}_+\texttt{, n, }\tfrac{1}{2}\texttt{)}.$$

Potom porovnáme programom vypočítanú p-hodnotu s hladinou α: ak je p-hodnota vyššia nez α, tak hypotézu H_0 nezamietame, inak H_0 zamietame.

Príklad 1. [2]
Je potrebné otestovať, či liečebný preparát nemení zloženie krvi (počet leukocytov). Preparát bol odskúšaný na 10 osobách. Výsledky (dané pomerom leukocytov k ich počtu podľa normy) sú nasledovné: 0,97; 1,05; 1,09; 0,88; 1,01; 1,14; 1,03; 1,07; 0,94; 1,02. (α=5%)

[2] [9], str. 186, príklad 52

Riešenie:
Testujeme hypotézu
$$H_0 : \tilde{x} = x_0,$$
kde $x_0 = 1$, proti obojstrannej alternatíve
$$H_1 : \tilde{x} \neq x_0.$$
Najprv vypočítame rozdiely $X_i - x_0$ a dostaneme:
-0,03; 0,05; 0,09; -0,12; 0,01; 0,14; 0,03, 0,07, -0,06; 0,02.
Počet kladných rozdielov $X_i - x_0$ je 7, počet záporných rozdielov je 3, počet pozorovaní n=10. Podľa tabuľky kritických hodnôt pre n=10 je $k_1 = 1$
a $k_2 = 9$. Keďže $7 \in (1, 9)$, nezamietame hypotézu H_0, tzn. nezamietame hypotézu, že preparát nemení zloženie krvi.
V programe R [11] zadáme príkaz `binom.test(7, 10,` $\frac{1}{2}$`)` a výsledná p-hodnota je 0,3438. Keďže testujeme na hladine $\alpha = 5\%$ a $\alpha < p - hodnota$, nezamietame hypotézu H_0.

Jednostranný jednovýberový znamienkový test

Testujeme hypotézu
$$H_0 : \tilde{x} \leq x_0$$
proti jednostrannej alternatívnej hypotéze - pravostrannej
$$H_1 : \tilde{x} > x_0,$$
resp.
$$H_0' : \tilde{x} \geq x_0$$
proti ľavostrannej alternatíve
$$H_2 : \tilde{x} < x_0,$$
kde x_0 je vopred dané pevné číslo.
Rovnako ako v prípade obojstranného jednovýberového znamienkového testu vytvoríme rozdiely
$$X_1 - x_0, \ldots, X_n - x_0,$$
za testovú štatistiku berieme N_+ (počet kladných rozdielov) a označíme $p_k = P(N_+ = k)$. Vieme, že N_+ má binomické rozdelenie s parametrom p_+. Takisto môžeme preformulovať hypotézy, potom testujeme hypotézu
$$H_0 : p_+ \leq \tfrac{1}{2} \text{ proti alternatívnej hypotéze } H_1 : p_+ \geq \tfrac{1}{2},$$
$$\text{resp. } H_0' : p_+ \geq \tfrac{1}{2} \text{ proti } H_2 : p_+ < \tfrac{1}{2}.$$

Na hladine α pre test proti ľavostrannej alternatíve za platnosti H_0 musí platiť:

$$\sum_{k=0}^{k_3} p_k \leq \alpha, \qquad \sum_{k=0}^{k_3+1} p_k > \alpha, \tag{3.3}$$

pre test proti pravostrannej alternatíve za platnosti H_0 zas musí platiť:

$$\sum_{k=k_4}^{n} p_k \leq \alpha, \qquad \sum_{k=k_4-1}^{n} p_k > \alpha. \tag{3.4}$$

Hypotézu H_0 na hladine α v prípade ľavostrannej alternatívy zamietame, ak $n_+ \leq k_3$, v prípade pravostrannej alternatívy, ak $n_+ \geq k_4$.
V programe R [11] na test proti pravostrannej alternatíve použijeme príkaz

binom.test(n_+, n, $\frac{1}{2}$, alternative=''greater''),

na test proti ľavostrannej alternatíve príkaz

binom.test(n_+, n, $\frac{1}{2}$, alternative=''less'').

3.2 Párový znamienkový test

Nech

$$\begin{pmatrix} Y_1 \\ Z_1 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} Y_n \\ Z_n \end{pmatrix}$$

je výber z dvojrozmerného rozdelenia. Zložky vektora, teda Y_i a Z_i, $i = 1, \dots, n$, môžu byť na sebe závislé, ale vektory

$$\begin{pmatrix} Y_i \\ Z_i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} Y_j \\ Z_j \end{pmatrix} \quad i \neq j$$

sú na sebe nezávislé.
Tieto predpoklady sú splnené, ak máme n štatistických jednotiek a na každej zisťujeme 2 znaky. Na i-tej štatistickej jednotke zistíme Y_i a Z_i - tie môžu byť na sebe závislé.
Označme $p_+ = P(Y_i > Z_i)$. V prípade obojstranného testu testujeme hypotézu

$$H_0 : p_+ = \tfrac{1}{2} \text{ proti alternatíve } H_1 : p_+ \neq \tfrac{1}{2},$$

v prípade obojstranného testu testujeme

$$H_0' : p_+ \geq \tfrac{1}{2} \text{ proti alternatíve } H_2 : p_+ < \tfrac{1}{2},$$

resp.

$$H_0'' : p_+ \leq \tfrac{1}{2} \text{ proti altenratíve } H_3 : p_+ > \tfrac{1}{2}.$$

Párový znamienkový test sa dá jednoducho previesť na jednovýberový znamienkový test (jednostranný alebo obojstranný) - budeme testovať hypotézy o umiestnení mediánu rozdielu. Označíme

$$X_i = Y_i - Z_i \quad i = 1, \ldots, n.$$

Dostali sme jednovýberový znamienkový test, kde $X_1, \ldots, X_n$ sú nezávislé náhodné veličiny s mediánom $\tilde{x}$. Hodnota x_0 je v tomto prípade pevná: $x_0 = 0$. Ďalej pokračujeme ako pri použití jednovýberového znamienkového testu na $X_1, \ldots, X_n$. Dixon a Mood v [4] uviedli, že párový znamienkový test je najužitočnejší, ak:

(a) máme k dispozícii páry pozorovaní - sú to pozorovania dvoch hodnôt, ktoré porovnávame,

(b) každé pozorovanie daného páru vzniklo za podobných podmienok ako to druhé,

(c) rôzne páry boli pozorované za rôznych podmienok (táto podmienka znevýhodňu je t-test - nie je možné ho použiť).

Príklad 2. [3]
Skúmali sme vplyv dvoch typov pôdy na úrodu raže. Pokus trval 6 rokov. Počítali sme váhu 1000 zŕn v gramoch. Výsledky sú zaznamenané v tabuľke.

Rok	1	2	3	4	5	6
1. typ (Y_i)	31,1	24,0	24,6	28,6	29,1	30,1
2. typ (Z_i)	31,6	24,2	24,8	29,1	29,9	31,0

Možno tvrdiť, že úroda raže je vyššia pri druhom type pôdy? (α=5%)

Riešenie:
Testujeme hypotézu

$$H_0 : \textit{úroda raže je rovnaká alebo vyššia pri prvom type pôdy}$$

proti hypotéze

$$H_1 : \textit{úroda raže je vyššia pri druhom type pôdy.}$$

Vypočítame rozdiely $Y_i - Z_i$, pre i=1, …,6:
-0,5; -0,2; -0,2; -0,5; -0,8; -0,9.
Počet kladných rozdielov je 0, kritická hodnoty pre n=6 pri jednostrannej alternatíve je: $k_3 = 0$. Teda zamietame hypotézu, že úroda raže je rovnaká alebo vyššia

[3] [9], str. 185, príklad 49

pri prvom type pôdy.
Ešte v programe R vypočítame p-hodnotu:

```
> binom.test(0,6, alternative=,,less‘‘)

Exact binomial test

data: 0 and 6
number of successes = 0, number of trials = 6, p-value = 0.01563
alternative hypothesis: true probability of success is less than 0.5
95 percent confidence interval:
0.0000000 0.3930378
sample estimates:
probability of success
0
```

Teda p-hodnota = 0,01563 - je nižšia než hladina testu.

3.3 Tabuľka kritických hodnôt pre obojstranný znamienkový test na hladine $\alpha = 5\%$

n	k_1	k_2	n	k_1	k_2
6	0	6	46	15	31
7	0	7	47	16	31
8	0	8	48	16	32
9	1	8	49	17	32
10	1	9	50	17	33
11	1	10	51	18	33
12	2	10	52	18	34
13	2	11	53	18	35
14	2	11	54	19	35
15	3	12	55	19	36
16	3	13	56	20	36
17	4	13	57	20	37
18	4	14	58	21	37
19	4	15	59	21	38
20	5	15	60	21	39
21	5	16	61	22	39
22	5	17	62	22	40
23	6	17	63	23	40
24	6	18	64	23	41
25	7	18	65	24	41
26	7	19	66	24	42
27	7	20	67	25	42
28	8	20	68	25	43
29	8	21	69	25	44
30	9	21	70	26	44
31	9	22	71	26	45
32	9	23	72	27	45
33	10	23	73	27	46
34	10	24	74	28	46
35	11	24	75	28	47
36	11	25	76	28	48
37	12	25	77	29	48
38	12	26	78	29	49
39	12	27	79	30	49
40	13	27	80	30	50
41	13	28	85	32	53
42	14	28	90	35	55
43	14	29	95	37	58
44	15	29	100	39	61
45	15	30			

3.4 Riešenie zhôd

Nech $X_1, \ldots, X_n$ sú nezávislé náhodné veličiny s mediánom $\tilde{x}$ a nech $x_0 = 0$. Takisto môžeme uvažovať párový znamienkový test, teda

$$X_i = Y_i - Z_i, \quad i = 1, \ldots, n,$$

kde

$$\begin{pmatrix} Y_1 \\ Z_1 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} Y_n \\ Z_n \end{pmatrix}$$

je výber z dvojrozmerného rozdelenia.
Označme:

$$p_+ = P(X_i > 0), \quad p_- = P(X_i < 0), \quad p_0 = P(X_i = 0).$$

Ďalej nech N_+ označuje počet kladných X_i, N_- počet záporných a N_0 počet X_i rovných nule.
Prípad $p_0 = 0$ vedie k už popísanému testovaniu: testujeme nulovú hypotézu

$$H_0 : \ p_+ \ \leq \ \frac{1}{2}$$

proti jej jednostrannej alternatíve

$$H_1 : p_+ > \frac{1}{2}.$$

Za platnosti hypotézy H_0 platí

$$N_+ \sim Bi\left(n, \frac{1}{2}\right).$$

Teda p-hodnota by sa rovnala nasledujúcemu výrazu

$$P[B \geq n_+ | \ B \sim Bi(n, \tfrac{1}{2})]. \tag{3.5}$$

Ak by sme nulovú hypotézu $H_0' : p_+ \geq \frac{1}{2}$ testovali proti alternatíve $H_2 : p < \frac{1}{2}$, tak by p-hodnota bola určená výrazom

$$P[B \leq n_+ | \ B \sim Bi(n, \tfrac{1}{2})]. \tag{3.6}$$

V prípade obojstranného znamienkového testu, by sa p-hodnota rovnala dvojnásobku nižšej z hodnôt (3.6) a (3.5).

Zaujímavejší je prípad, kedy $p_0 > 0$. Hoci za splnených predpokladov uvedených na začiatku kapitoly k tejto situácii nedôjde, zaokúhľovaním dát alebo nesplnením predpokladu spojitosti distribučnej funkcie v bode mediánu táto situácia môže nastať. V literatúre bolo uvedených viacero spôsobov riešenia zhôd, tu uvedieme spôsoby riešenia zhôd z Randles [12].

Podmienený znamienkový test

V tomto prípade sa vynechajú nulové pozorovania a počet pozorovaní n sa zníži o počet nulových pozorovaní, teda p-hodnota sa vypočíta takto:

$$P[B \geq n_+ |\ B \sim Bi(n - n_0, \tfrac{1}{2})]. \tag{3.7}$$

Tento spôsob riešenia zhôd je jednoduchý na výpočet - postačí nám tabuľka alebo software, ktoré nám poskytnú k výpočtu potrebné hodnoty pravdepodobností. Je zaujímavé, že pri pevných hodnotách n_+ a n_- je p-hodnota stále rovnaká pre všetky n_0. Podmienený znamienkový test odporúča napr. Anděl [1], str. 234.

Presné rozdelenie zhôd medzi n_+ a n_-

Tento spôsob navrhli už Dixon a Mood v [4]. Polovica zhôd sa pridelí k n_+ a druhá polovica k n_-. Je nutné rozlíšiť prípady pre párne a pre nepárne hodnoty n_0.
Ak je n_0 párne, p-hodnota sa vypočíta takto:

$$P[B \geq n_+ + \tfrac{n_0}{2} | B \sim Bi(n, \tfrac{1}{2})], \tag{3.8}$$

pre nepárne n_0 bude p-hodnota aritmetickým priemerom z

$$P[B \geq n_+ + \tfrac{n_0 - 1}{2} |\ B \sim Bi(n, \tfrac{1}{2})] \tag{3.9}$$

a

$$P[B \geq n_+ + \tfrac{n_0 + 1}{2} |\ B \sim Bi(n, \tfrac{1}{2})]. \tag{3.10}$$

Pre pevné $n_+ > n_-$ sa s rastúcim počtom zhôd táto p-hodnota zvyšuje.
Pre $n_+ > n_-$ a $n_0 > 0$ platí, že p-hodnota z podmieneného znamienkového testu je ostro menšia než p-hodnota z tohto testu. Teda podmienený znamienkový test je pri teste vyššie spomenutej hypotézy silnejší než test navrhnutý Dixonom a Moodym.

Náhodné priradenie zhôd n_+ a n_-

V tomto prípade má p-hodnota tvar

$$P[B \geq n_+ + n_0^* |\ B \sim Bi(n, \tfrac{1}{2})], \tag{3.11}$$

kde n_0^* je výsledok nezávislého výberu z $Bi(n_0, 1/2)$. O tomto spôsobe riešenia zhôd bolo dokázané, že nie je dostatočne silný, napr. Putter [10].

Nenáhodný rovnomerne najsilnejší test

Tento spôsob odporúčajú viacerí autori (napr. Putter v [10] alebo Coakley a Heise v [3]), p-hodnota je uvádzaná týmto vzorcom:

$$\Phi\left(-\frac{n_+ - n_-}{\sqrt{n_+ + n_-}}\right), \tag{3.12}$$

kde Φ je distribučná funkcia N(0,1). Hoci sa môže zdať, že tento test je asymptotická verzia podmieneného znamienkového testu, je to samostatný postup na získanie p-hodnoty.Táto metóda je účinna aj pre veľmi malé n, napr. n=10. Avšak stráca silu pre vysoké hodnoty p_0. Aj tento test ignoruje počet pozorovaných zhôd, teda pre pevné n_+ a n_- je p-hodnota rovnaká pre všetky n_0.

Príklad 3.
U 23 osôb nosiacich okuliare sa zistili dioptrie. Zistené dáta sú zapísané v tabuľke, kde P označuje pravé oko, Ľ ľavé oko a Δ rozdiel absolútnej hodnoty dioptrie na pravom oku a na ľavom oku (teda $\Delta = |\text{P}| - |\text{Ľ}|$) :

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
P	0,00	3,25	2,50	3,25	1,50	-5.50	-2,00	-0,50	-2,50	-0,25	-1,00	1,50
Ľ	-0.25	2,75	2,50	2,25	1,50	-4,75	-1,50	-4,00	-2,50	0,00	-1,50	1,50
Δ	-0,25	0,50	0,00	1,00	0,00	0,75	0,50	-3,50	0,00	0,25	-0,50	0,00

n	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
P	1,50	1,50	0,75	1,75	1,50	-3,00	3,50	-4,75	-2,75	-5,00	-1,25
Ľ	1,50	1,50	1,00	0,75	1,75	-3,00	-3,00	-3,75	-2,25	-4,75	-1,5
Δ	0,00	0,00	-0,25	1,00	-0,25	0,00	0,50	1,00	0,50	0,25	-0,25

Možno tvrdiť, že zrak sa menej zhoršuje na ľavom oku?

Riešenie:
Testujeme

$$H_0 : \Delta \geq 0,$$

že zrak je rovnaký alebo horší na pravom oku proti

$$H_1 : \Delta < 0,$$

že zrak je horší na ľavom oku. Vidíme, že $n = 23$, $n_+ = 10$, $n_- = 6$ a $n_0 = 7$.

Ak vynecháme zhody a o ich počet znížime počet pozorovaní, tak p-hodnota je rovná

$$P\left[B \geq 10 |\ B \sim Bi\left(16, \frac{1}{2}\right)\right] = 0,2272.$$

Ak by sme rozdelili zhody rovnako medzi n_+ a n_-, potom by p-hodnota bola aritmetickým priemerom z hodnôt

$$P\left[B \geq 13 |\ B \sim Bi\left(23, \frac{1}{2}\right)\right] = 0,3388$$

a

$$P\left[B \geq 14 |\ B \sim Bi\left(23, \frac{1}{2}\right)\right] = 0,2024,$$

teda

$$p - hodnota = 0,2706.$$

V prípade výpočtu pomocou náhodného priradenia zhôd by bola p-hodnota v intervale

$$[0,0173; 0,7976],$$

kde ľavá medza odpovedá $n_0^* = 7$ a pravá $n_0^* = 0$. Tento test sa ukázal ako nespoľahlivý, pretože p-hodnoty sa pri rôznych hodnotách n_0^* veľmi líšia.

Posledný spôsob je nenáhodný rovnomerne najsilnejší test. P-hodnota je rovná

$$\Phi(-1) = 0,1586553.$$

Z týchto štyroch spôsobov sa ako najmenej spoľahlivý javí náhodné priradenie zhôd, pretože jeho výsledok závisí na ďalšom nezávislom výbere.
Podľa ostatných troch testov nezamietame H_0 na hladine $\alpha = 5\%$, líšia sa len p - hodnoty: najnižšia je p-hodnota vypočítaná nenáhodným rovnomerne najsilnejším testom, väčšia je p-hodnota určená pri rozdelení zhôd rovnako medzi n_+ a n_- a ešte trochu väčšia je pri podmienenom znamienkovom teste.

3.5 Viacvýberový znamienkový test

Viacvýberový znamienkový test popísal napr. Bennett v [2]. Predpokladá, že máme dva výbery z viacrozmerného normálneho rozdelenia - teda matice $\boldsymbol{Y}$ a $\boldsymbol{Z}$ s rozmermi $p \times n$, kde p označuje počet veličín meraných na danom objekte a n počet objektov (napr. pri teste účinnosti lieku môžeme merať krvný tlak a cukor, v matici $\boldsymbol{Y}$ budú dáta pred podaním lieku a v matici $\boldsymbol{Z}$ po podaní lieku). Nech

$$\mathsf{E}\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \ldots, \xi_p)$$

a

$$\mathsf{E}\boldsymbol{Z} = \boldsymbol{\eta} = (\eta_1, \ldots, \eta_p).$$

Vytvoríme maticu rozdielov $\boldsymbol{X}$, kde

$$x_{ij} = y_{ij} - z_{ij}, i = 1, \dots, p, j = 1, \dots, n.$$

Ďalej vytvoríme maticu $\boldsymbol{W}$, kde

$$w_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{ak } x_{ij} > 0, \\ 0 & \text{ak } z_{ij} < 0. \end{cases} \tag{3.13}$$

V článku [2] sa uvažuje náhodné rozdelenie zhôd. Prvky matice $\boldsymbol{W}$ vytvárajú vzájomne jednoznačné obrazy postupností p korelovaných veličín. Počet týchto vzorov je $s = 2^p$, i-tý vzor má početnosť n_i, $n = \sum n_i$, a pravdepodobnosť p_i, kde $\sum p_i = 1$. Nulovú hypotézu $H_0 : \boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\eta}$ testujeme pomocou χ^2 testu dobrej zhody v multinomickom rozdelení. Testová štatistika má tvar

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{s} \frac{(n_i - np_i)^2}{np_i}.$$

H_0 zamietame, ak χ^2 je väčšia než kritická hodnota χ^2 rozdelenia o $s-1$ stupňoch voľnosti na danej hladine.
Bennett sa v [2] ďalej venuje odhadom p_i (a teda aj χ^2) pre rôzne hodnoty p.

Kapitola 4

Asymptotický znamienkový test

Nech $X_1, \dots, X_n$ je výber z jednorozmerného rozdelenia so spojitou hustotou, x_0 je vopred dané číslo. Aplikovať jednovýberový znamienkový test na získané dáta (realizácie náhodných veličín $X_1, \dots, X_n$) znamená testovať, či počet kladných rozdielov $X_i - x_0$ má binomické rozdelenie s pravdepodobnosťou úspechu $p_+ = \frac{1}{2}$. Pripomeňme ešte označenie:

(i) Φ označujeme distribučnú funkciu normovaného normálneho rozdelenia, $u(\beta)$ označujeme jeho β-kvantil, platí $u(\beta) = \Phi^{-1}(\beta)$, teda ak X $\sim \mathsf{N}(0,1)$, potom $P(|X| \geq u(1-\frac{\alpha}{2})) = \alpha$,

(ii) $\mathcal{L} = \{X : (\Omega, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B})\}$ (množina náhodných veličín), $\mathcal{L}_p = \{X \in \mathcal{L} : \mathsf{E}|X|^p < \infty\}$.

Vety a definície uvedené v tejto kapitole sú prevzaté z Anděl [1] a Dupač, Hušková [5].

Definícia 2.
Nech náhodný vektor $\mathbf{X}$=$(X_1, \dots, X_k)'$ má hustotu $f(\boldsymbol{x}, \theta)$, kde $\theta \in \Omega$. Pri pevnej hodnote $\boldsymbol{x}$ sa funkcia $f(\boldsymbol{x}, \theta)$ ako funkcia θ nazýva *vierohodnostná funkcia.*
Hodnota $\hat{\theta}$ parametru θ, ktorá maximalizuje vierohodnostnú funkciu $f(\boldsymbol{x}, \theta)$ pre dané $\boldsymbol{X}$=$\boldsymbol{x}$, sa nazýva *maximálne vierohodný odhad parametru* θ.
Funkcia $L(\theta) = \log f(\boldsymbol{x}, \theta)$ sa nazýva *vierohodnostná logaritmická funkcia.*

Veta 3. (CLV pre nezávislé rovnako rozdelené náh. veličiny) [4]
Nech $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ *je postupnosť nezávislých rovnako rozdelených náhodných veličín. Nech* $X_1 \in \mathcal{L}_3$ *a* $\mathsf{var} X_1 > 0$. *Potom*

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}\left(\frac{\sum_{k=1}^{n} X_k - n\mathsf{E}X_1}{\sqrt{n \ \mathsf{var} X_1}} \geq x \right) = \Phi(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

[4] [5], str. 86–87, veta 4.12

Definujme náhodné veličiny $N_{+1}, ..., N_{+n}$ tak, že $N_{+i} = 1$ v prípade $X_i - x_0 > 0$ a $N_{+i} = 0$ v prípade $X_i - x_0 \leq 0$. Platí $N_+ = N_{+1} + ... + N_{+n}$. Keďže $\mathsf{E}N_{+i} = \frac{1}{2}$, $\mathsf{var}N_{+i} = \frac{1}{4}$, potom náhodná veličina

$$\frac{N_+ - \frac{n}{2}}{\sqrt{n}}$$

má asymptoticky rozdelenie $\mathsf{N}\left(0, \frac{1}{4}\right)$. Po úprave dostaneme, že náhodná veličina

$$V = \frac{2N_+ - n}{\sqrt{n}}$$

má asymptoticky rozdelenie $\mathsf{N}(0, 1)$. Označme $\tilde{x}$ medián rozdelenia X_i. Hypotézu $H_0 : \tilde{x} = x_0$ (resp. $p = \frac{1}{2}$),ktorú testujeme proti obojstrannej alternatíve $H_1 : \tilde{x} \neq x_0$, zamietame na hladine α, ak $|V| \geq u(1-\frac{\alpha}{2})$. Využíva sa aj modifikácia, kedy V^2 má asymptoticky rozdelenie χ_1^2 a hypotézu H_0 zamietame v prípade, ak $V^2 \geq \chi_1^2(1 - \alpha)$.

4.1 Asymptotické testy založené na vierohodnostnej funkcii

Definícia 4. [5]
Hovoríme, že *systém hustôt* $\{f(\boldsymbol{x}, \theta), \theta \in \Omega\}$ *je regulárny*, ak sú splnené tieto podmienky:

(a) Množina Ω je neprázdna a otvorená.

(b) Množina $M = \{\boldsymbol{x} : f(\boldsymbol{x}, \theta) > 0\}$ nezávisí na θ.

(c) Pre skoro všetky $\boldsymbol{x} \in$ M (vzhľadom k μ) existuje konečná parciálna derivácia $f'(\boldsymbol{x}, \theta) = \frac{\partial f(\boldsymbol{x},\theta)}{\partial \theta}$.

(d) Pre všetky $\theta \in \Omega$ platí $\int_M f'(\boldsymbol{x}, \theta) d\mu(x) = 0$.

(e) Integrál

$$J_n(\theta) = \int_M \left[\frac{f'(\boldsymbol{x}, \theta)}{f(\boldsymbol{x}, \theta)}\right]^2 f(\boldsymbol{x}, \theta) d\mu(x)$$

je konečný a kladný.

Veta 5. [6]
Nech $\{f(x, \theta), \theta \in \Omega\}$ *je regulárny systém hustôt s Fisherovou mierou informácie* $J(\theta)$ *a nech sú splnené nasledujúce predpoklady:*

[5] [1], str.104, definícia 7.8
[6] [1], str. 177–178, veta 8.16

(a) *Ω je parametrický priestor, ktorý obsahuje taký neprázdny otvorený interval ω, že skutočná hodnota parametru θ_0 patrí do ω.*

(b) *Nech $\boldsymbol{X}$=$(X_1, \ldots, X_k)'$, kde X_i sú nezávislé rovnako rozdelené náhodné veličiny s hustotou $f(x, \theta)$ vzhľadom k nejakej σ-konečnej miere μ.*

(c) *Nech M=$\{x : f(x, \theta) > 0\}$ nezávisí na θ.*

(d) *Nech $\theta_1, \theta_2 \in \Omega$. Potom $f(x, \theta_1) = f(x, \theta_2)[\mu]$ platí práve vtedy, keď $\theta_1 = \theta_2$.*

(e) *Pre všetky $\theta \in \omega$ a skoro všetky $x \in M$ existuje derivácia $f'''(x, \theta) = \frac{\partial^3 f(x,\theta)}{\partial\theta^3}$.*

(f) *Pre všetky $\theta \in \omega$ platí*

$$\int_M f''(x, \theta) d\mu(x) = 0.$$

(g) *Existuje taká nezáporná merateľná funkcia H(x), že $\mathsf{E}_{\theta_0} H(X) < \infty$ a pritom pre skoro všetky $x \in M$ a pre všetky θ také, že $|\theta - \theta_0| < \varepsilon$ pre nejaké dostatočne malé $\varepsilon > 0$ platí*

$$\left| \frac{\partial^3 \log f(x, \theta)}{\partial \theta^3} \right| \leq H(x).$$

Označme

$$LM(\theta_0) = \frac{[L'(\theta_0)]^2}{nJ(\theta_0)}, \qquad U_{LM} = \frac{L'(\theta_0)}{\sqrt{nJ(\theta_0)}},$$

$$W(\theta_0) = n(\hat{\theta_n} - \theta_0)^2 J(\hat{\theta_n}) \qquad U_W = \sqrt{nJ(\hat{\theta_n})}(\hat{\theta_n} - \theta_0)$$

$$LR(\theta_0) = 2[L(\hat{\theta_n}) - L(\theta_0)].$$

Potom U_{LM} má asymptoticky rozdelenie $\mathsf{N}(0, 1)$ a $LM(\theta_0)$ má asymptoticky χ_1^2 rozdelenie. Ak je funkcia $J(\theta)$ spojitá v bode θ_0, potom U_W má asymptoticky rozdelenie $\mathsf{N}(0, 1)$ a $W(\theta_0)$ aj $LR(\theta_0)$ majú asymptoticky χ_1^2 rozdelenie.
Test založený na:

(i) *$LM(\theta_0)$ sa nazýva skórový test alebo Raov test (v minulosti tiež test založený na Lagrangeových multiplikátoroch),*

(ii) *$W(\theta_0)$ sa nazýva Waldov test,*

(iii) *$LR(\theta_0)$ sa nazýva test založený na vierohodnostnom pomere.*

Túto vetu aplikujeme na náhodnú veličinu $N_+ \sim Bi(n, p_+)$, ktorá označuje počet kladných rozdielov $X_i - x_0$. Pre N_+ sú splnené všetky predpoklady vety 5.

Budeme odhadovať hodnotu jednorozmerného parametru p_+.
Hustota N_+ je

$$f(n_+, p_+) = P(N_+ = n_+) = \binom{n}{n_+} {p_+}^{n_+}(1-p_+)^{n-n_+} \tag{4.1}$$

a platí: $\mathsf{E}N_+ = np_+$, $\mathsf{var}N_+ = np_+(1-p_+)$, teda $\mathsf{E}N_+^2 = np_+(1-p_+ + np_+)$.

Raov skórový test

Podľa vety 5 platí

$$LM(\theta_0) = \frac{[L'(\theta_0)]^2}{nJ(\theta_0)} \sim \chi_1^2. \tag{4.2}$$

Testujeme

$$H_0 : \theta = \theta_0 \quad \text{proti} \quad H_1 : \theta \neq \theta_0.$$

Test založený na $LM(\theta_0)$ zamieta H_0 na hladine α, ak $LM(\theta_0) \geq \chi_1^2(\alpha)$.
Testujeme hypotézu $H_0 : p_+ = \frac{1}{2}$ proti obojstrannej alternatíve $H_1 : p_+ \neq \frac{1}{2}$.
Vierohodnostná logaritmická funkcia má tvar

$$L(p_+) = L(n_+, p_+) = \log f(n_+, p_+) = \log \left[\binom{n}{n_+} {p_+}^{n_+}(1-p_+)^{n-n_+}\right]. \tag{4.3}$$

Jej derivácia je

$$L'(p_+) = \frac{n_+}{p_+} - \frac{n-n_+}{1-p_+}.$$

Dosadíme $p_+ = \frac{1}{2}$ a dostaneme

$$L'\left(\frac{1}{2}\right) = 4n_+ - 2n.$$

Budeme potrebovať deriváciu hustoty N_+

$$f'(n_+, p_+) = \binom{n}{n_+} {p_+}^{n_+}(1-p_+)^{n-n_+} \left(\frac{n_+}{p_+} - \frac{n-n_+}{1-p_+}\right).$$

Deriváciu hustoty N_+ vydelíme hustotou N_+

$$\frac{f'(n_+, p_+)}{f(n_+, p_+)} = \left(\frac{n_+}{p_+} - \frac{n-n_+}{1-p_+}\right).$$

Ďalej potrebujeme vypočítať Fisherovu mieru informácie

$$J_n(p_+) = \mathsf{E}\left[\frac{f'(n_+, p_+)}{f(n_+, p_+)}\right]^2.$$

Úpravami získame

$$\begin{aligned} J_n(p_+) &= np_+(1-p_+ + np_+)\left(\frac{1}{p_+} + \frac{1}{1-p_+}\right)^2 - \\ &+ 2n^2 p_+ \left(\frac{1}{1-p_+}\right)\left(\frac{1}{p_+} + \frac{1}{1-p_+}\right) + \frac{n^2}{(1-p_+)^2}. \end{aligned} \tag{4.4}$$

Po dosadení $p_+ = \frac{1}{2}$ do (4.4) dostaneme

$$J_n\left(\frac{1}{2}\right) = 4n.$$

Následným dosadením do (4.2), pretože platí

$$nJ(p_+) = J_n(p_+),$$

vyjde asymptotický znamienkový test

$$LM\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{(N_+ - \frac{n}{2})^2}{\frac{n}{4}} \sim \chi_1^2.$$

Waldov test

Platí

$$W(\theta_0) = n(\hat{\theta}_n - \theta_0)^2 J(\hat{\theta}_n) \sim \chi_1^2, \tag{4.5}$$

hypotéza H_0 sa zamieta, ak $W(\theta_0) \geq \chi_1^2$. V prípade binomického rozdelenia maximálne vierohodným odhadom p_+ je $\frac{N_+}{n}$. Tento odhad dosadíme do rovnice (4.4) a dostaneme

$$J_n(\hat{\theta}_n) = J_n\left(\frac{n_+}{n}\right) = \frac{n^3}{n_+(n-n_+)}.$$

Dosadíme do (4.5) a máme

$$W\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{(N_+ - \frac{n}{2})^2}{\frac{N_+(n-N_+)}{n}}.$$

Metóda podielom vierohodností

Platí

$$LR(\theta_0) = 2[L(\hat{\theta}_n) - L(\theta_0)] \sim \chi_1^2 \tag{4.6}$$

a H_0 zamietame, ak $LR(\theta_0) \geq \chi_1^2$. Dosadením do (4.3) dostaneme

$$L(\hat{\theta}_n) = L\left(\frac{n_+}{n}\right) = \log\binom{n}{n_+} + n_+\left[\log\left(\frac{n_+}{n}\right)\right] + (n-n_+)\left[\log\left(1 - \frac{n_+}{n}\right)\right].$$

a

$$L\left(\frac{1}{2}\right) = \log\binom{n}{n_+} + n_+\left(\log\frac{1}{2}\right) + (n - n_+)\left(\log\frac{1}{2}\right).$$

Dosadením do (4.6) dostávame

$$LR\left(\frac{1}{2}\right) = 2\left[\log(n - n_+)^{n-n_+}\left(\frac{2}{n}\right)^n {n_+}^{n_+}\right]$$

Príklad 1 - výpočet pomocou Raovho, Waldovho testu a testu podielom vierohodností

Test prevedieme na hladine $\alpha = 5\%$, kritická hodnota χ^2_1 je teda rovná $3,842$. Vieme, že $n_+ = 7$, $n = 10$ a $\theta_0 = p_+ = \frac{1}{2}$. Pre výpočet pomocou Raovho skórového testu dosadíme do vzorca (4.2) a dostaneme

$$LM\left(\frac{1}{2}\right) = 1,6,$$

čo je menej než $3,842$, teda nezamietame H_0 na hladine $\alpha = 5\%$.

Ďalej skúsime na použité dáta aplikovať Waldov test - použijeme vzorec (4.5) a dostávame

$$W\left(\frac{1}{2}\right) = 1,905.$$

Aj hodnota $W(\frac{1}{2})$ je menšia ako kritická hodnota $\chi^2_1(1-\alpha)$, teda opäť nezamietame H_0.

Nakoniec ešte použijeme metódu podielom vierohodností - dosadíme do vzorca (4.6):

$$LR\left(\frac{1}{2}\right) \doteq 0,715.$$

Takisto ani na základe tohto testu nezamietame nulovú hypotézu.

Výsledok Raovho skórového testu, ktorý je asymptotickou verziou znamienkového testu, sa zhoduje s výsledkom podľa tabuliek kritických hodnôt. Teda pre tieto konkrétne dáta vyjde asymptotický test rovnako ako presný test. Zvyšné testy, ktoré nie sú asymptotickými verziami znamienkového testu, takisto nezamietli H_0.

4.2 Asymptotický χ^2 test dobrej zhody v multinomickom rozdelení

Veta 6. [7]

Ak $\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_k)' \sim \mathsf{M}(n; p_1, \ldots, p_k)$, *potom náhodná veličina*

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(X_i - np_i)^2}{np_i} \tag{4.7}$$

[7] [1], str. 272, veta 12.5

má pri $n \to \infty$ asymptoticky rozdelenie χ^2_{k-1}.

Binomické rozdelenie je zvláštny prípad multinomického rozdelenia, pre k=2. Teda veličinu $\chi^2 \sim \chi^2_{k-1}$ môžeme zapísať v tvare

$$\chi^2 = \frac{N_+ - np_+}{np_+} + \frac{n - N_+ - n(1-p_+)}{n(1-p_+)}.$$

Dosadíme $p_+ = \frac{1}{2}$ a opäť dostaneme asymptotický znamienkový test

$$\chi^2 = \frac{(N_+ - \frac{n}{2})^2}{\frac{n}{4}} \sim \chi^2_1.$$

Teda asymptotický χ^2 test dobrej zhody a Raov skórový test vyjdú rovnako ako znamienkový test založený na CLV proti obojstrannej alternatíve.

4.3 Porovnanie asymptotického testu a kritických hodnôt na hladine $\alpha = 5\%$

h výpočtov p-hodnoty Pri použití asymptotického znamienkového testu využijeme, že platí

$$V = \frac{2N_+ - n}{\sqrt{n}} \sim \mathsf{N}(0,1)$$

a nulovú hypotézu zamietame, ak

$$|V| \geq u(0,975),$$

kde $u(0,975) = 1,959964$. Dosadením a následným výpočtom dostaneme, že H_0 zamietame, keď

$$N+ \geq u(0,975)\sqrt{\frac{n}{4}} + \frac{n}{2}$$

alebo

$$N_+ \leq -u(0,975)\sqrt{\frac{n}{4}} + \frac{n}{2}.$$

Kritické hodnoty, ktoré sa nenachádzajú v tabuľke, sa vypočítaju podľa vzorcov (3.1) a (3.2). Kritické hodnoty asymptotického testu sú zaokrúhlené, aby platilo, že H_0 zamietame, keď $n_+ \geq k'_1$ alebo $n_+ \leq k'_2$.

Presné kritické hodnoty

n	k_1	k_2
6	0	6
10	1	9
15	3	12
20	5	15
25	7	18
30	9	21
40	13	27
50	17	33
75	28	47
100	39	61
200	85	115
300	132	168
400	179	221
500	227	273
750	347	403
1000	468	532

Kritické hodnoty - asymptotický test

n	k_1'	k_2'
6	0	6
10	1	9
15	3	12
20	5	15
25	7	18
30	9	21
40	13	27
50	18	32
75	29	46
100	40	60
200	86	114
300	133	167
400	180	220
500	228	272
750	348	402
1000	469	531

Z týchto tabuliek vyplýva, že asymptotický znamienkový test veľmi dobre aproximuje znamienkový test, dokonca aj pre malé hodnoty n. Kritické hodnoty získané z tabuliek, napr. Potocký a kol. [9], str. 376, resp. presným výpočtom podľa vzorcov (3.2) a (3.1) a kritické hodnoty asymptotického znamienkového testu sa líšia len minimálne.

Avšak po použití korekcie na spojitosť (continuity correction) popísanej v Lehmann, D'Abrera [7], str. 15–16, sa tabuľky kritických hodnôt a hodnoty vypočítané pomocou asymptotického testu (po zaokrúhlení) zhodujú. Platí

$$P(N_+ \leq k_1) \approx \Phi\left[\frac{k_1 - \mathsf{E}N_+ + \frac{1}{2}}{\sqrt{\mathsf{var}N_+}}\right]$$

a

$$P(N_+ \geq k_2) \approx \Phi\left[\frac{-k_2 + \mathsf{E}N_+ + \frac{1}{2}}{\sqrt{\mathsf{var}N_+}}\right].$$

Pre veľké n je taktiež vhodné použiť príkaz `binom.test(`n_+`, n, `$\frac{1}{2}$`)` v R, ktorý vypočíta presnú p-hodnotu nulovej hypotézy proti obojstrannej alternatíve. Na základe porovnania p-hodnoty s hladinou testu α zamietneme alebo nezamietneme H_0. Výsledky získané týmto spôsobom sa zhodujú s tabuľkou presných kritických hodnôt.

Pre malé n možno určiť kritický obor aj podľa presného rozdelenia testovej štatistiky N_+. Označme

$$p'(x) = P(N_+ \geq x) = \sum_{k=x}^{n} P(N_+ = k) = \frac{1}{2^n}\sum_{k=x}^{n}\binom{n}{k},$$

$$p''(x) = P(N_+ \leq x) = \sum_{k=1}^{x} P(N_+ = k) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=1}^{x} \binom{n}{k},$$

platí

$$p'(x) = p''(n - x).$$

Hodnoty $p'(x)$ nájdeme aj v tabuľkách, napr. Lehmann, D'Abrera[7], str. 416 – 417. Pri jednostrannom teste zamietame H_0, ak $p'(x) \leq \alpha$, resp. $p''(x) \leq \alpha$ a pri obojstrannej altenratíve, ak $p'(x) \leq \frac{\alpha}{2}$ alebo $p''(x) \leq \frac{\alpha}{2}$, kde α je vopred zvolená hladina testu. Tento postup je zhodný s postupom zostrojovania tabuliek kritických hodnôt.

Kapitola 5

Príklady, porovnanie s inými testami

5.1 Popis t-testu

Popis jednovýberového t-testu

Nech $X_1, \dots, X_n$ je náhodný výber z $\mathsf{N}(\mu, \sigma^2)$, kde $n \geq 2$, $\sigma^2 > 0$. Testujeme hypotézu

$$H_0 : \mu = \mu_0 \quad \text{proti} \quad H_1 : \mu \neq \mu_0,$$

kde μ_0 je dané. Nulovú hypotézu H_0 zamietame na hladine α, ak

$$\frac{|\bar{X} - \mu_0|\sqrt{n}}{S} \geq t_{n-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right),$$

kde $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_n$, $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} X_i - \bar{X}$ je nestranný odhad σ^2 a t_{n-1} je hustota Studentovho rozdelenia a platí

$$T = \frac{\bar{X} - \mu}{S}\sqrt{n} \sim t_{n-1}. \tag{5.1}$$

Popis párového t-testu

Nech $(Y_1, Z_1), \dots, (Y_n, Z_n)$ je výber z nejakého dvojrozmerného rozdelenia s vektorom stredných hodnôt (μ_1, μ_2). Tomuto odpovedá situácia, že máme n nezávislých objektov a na každom meráme 2 veličiny - merania na jednom objekte už nie sú nezávislé.
Testujeme hypotézu

$$H_0 : \mu_1 - \mu_2 = \Delta \quad \text{proti} \quad H_1 : \mu_1 - \mu_2 \neq \Delta,$$

kde Δ je dané (najčastejšie $\Delta = 0$). Položíme $X_i = Y_i - Z_i$, $i = 1, \dots, n$. $X_1, \dots, X_n$ sú nezávislé rovnako rozdelené. Ďalej predpokladáme, že $X_i \sim \mathsf{N}(\mu, \sigma^2)$, $\mu = \mu_1 - \mu_2$.

Teda ide o test

$$H_0' : \mu = \Delta \quad \text{proti} \quad H_1' : \mu \neq \Delta.$$

Ďalej postupujeme ako v prípade jednovýberového t-testu s $\mu_0 = \Delta$.

5.2 Popis Wilcoxonovho testu

Nech $X_1, \ldots, X_n$ je náhodný výber zo spojitého rozdelenia s hustotou f, ktorá je symetrická okolo bodu a, teda platí, že a sa rovná mediánu $\tilde{x}$. Za predpokladu konečnosti strednej hodnoty tohto rozdelenia musí platiť $\mathsf{E}X_i = a \; \forall i$.
Testujeme hypotézu

$$H_0 : \tilde{x} = x_0 \quad \text{proti obojstrannej alternatíve} \quad H_1 : \tilde{x} \neq x_0,$$

kde x_0 je vopred dané číslo. Aby sme sa vyhli prípadným zhodám, predpokladajme, že žiadna z veličín X_i nie je rovná x_0.

Položme $W_i = X_i - x_0$, W_i sú nezávislé rovnako rozdelené náhodné veličiny s rozdelením symetrickým okolo 0. Realizácie náhodných veličín $W_1, \ldots, W_n$ zoradíme podľa veľkosti ich absolútnych hodnôt a označíme R_i^+ poradie hodnoty $|W_i|$ v tejto postupnosti.
Ďalej označíme

$$S^+ = \sum_{Y_i > 0} R_i^+, \qquad S^- = \sum_{Y_i < 0} R_i^+.$$

Za testovú štatistiku berieme $min(S^+, S^-)$ a toto číslo porovnávame s tabuľkou kritických hodnôt. Ak je menšie alebo rovné tabelovanej kritickej hodnote, H_0 zamietame. Rýchlejší spôsob je použiť program R, príkaz

`wilcox.test`,

ktorý vypočíta aj p-hodnotu.

Jednovýberový Wilcoxonov test je neparametrickou analógiou jednovýberového t-testu a aplikuje sa tiež ako párový test na hodnoty rozdielov $X_i = Y_i - Z_i$, kde $(Y_i, Z_i), i = 1, \ldots, n$ je náhodný výber z dvojrozmerného rozdelenia.

5.3 Príklady

Príklad 1 - pokračovanie

Riešenie pomocou Wilcoxonovho testu
Použijeme program R:

```
> x=c(-0.03, 0.05, 0.09, -0.12, 0.01, 0.14, 0.03, 0.07, -0.06, 0.02)
```

```
> wilcox.test(x, alternative=,,two.sided‘‘, mu=0, conf.level=0.95).
```

Výstup je:

```
Wilcoxon signed rank test with continuity correction

data: x
V = 36.5, p-value = 0.386
alternative hypothesis: true location is not equal to 0

Warning message:
cannot compute exact p-value with ties in: wilcox.test.default(x,
alternative = ,,two.sided‘‘, mu = 0, conf.level = 0.95)
```

Teda nezamietame hypotézu H_0, pretože p-hodnota (0,386) je vyššia než zvolená hladina testu (5 %).

Riešenie pomocou t-testu
Najprv v R overíme normalitu dát:

```
> shapiro.test(x)

Shapiro-Wilk normality test

data: x
W = 0.9872, p-value = 0.992
```

Keďže na hladine $\alpha = 5\%$ nezamietame hypotézu, že ide o výber z normálneho rozdelenie, môžeme použiť t-test:

```
> t.test(x,alternative = ,,two.sided‘‘, mu = 0, paired = FALSE, conf.level
= 0.95)
One Sample t-test

data: x
t = 0.8369, df = 9, p-value = 0.4243
alternative hypothesis: true mean is not equal to 0
95 percent confidence interval:
-0.03406088 0.07406088
sample estimates:
mean of x
0.02
```

P-hodnota je rovná 0,4243, čo je viac než $\alpha = 5\%$, teda nezamietame H_0.

P-hodnota pri použití znamienkového testu je 0,3438.
V tomto príklade ani jeden z troch testov nezamietol nulovú hypotézu, líšia sa len p-hodnoty.

Príklad 2 - pokračovanie

Riešenie pomocou Wilcoxonovho testu
Opäť použijeme program R:

```
> y=c(-0.5, -0.2, -0.2, -0.5, -0.8, -0.9)

> wilcox.test(y, alternative=,,less‘‘, mu=0, conf.level=0.95)

Wilcoxon signed rank test with continuity correction

data: y
V = 0, p-value = 0.01751
alternative hypothesis: true location is less than 0

Warning message:
cannot compute exact p-value with ties in: wilcox.test.default(y,
alternative = ,,less‘‘, mu = 0, conf.level = 0.95)
```

Na základe výsledku Wilcoxonovho testu zamietame hypotézu H_0 na hladine $\alpha = 5\%$ (p-hodnota = 0,01751).

Riešenie pomocou t-testu
Najprv overíme normalitu dát:

```
> shapiro.test(y)

Shapiro-Wilk normality test

data: y
W = 0.8931, p-value = 0.3348
```

Na hladine $\alpha = 5\%$ nezamietame hypotézu, že ide o výber z normálneho rozdelenia, teda použijeme t-test:

```
> t.test(y, alternative=,,less‘‘, mu=0, conf.level=0.95)
```

```
One Sample t-test

data: y
t = -4.3239, df = 5, p-value = 0.003771
alternative hypothesis: true mean is less than 0
95 percent confidence interval:
-Inf -0.2758892
sample estimates:
mean of x
-0.5166667
```

Aj na základe t-testu zamietame nulovú hypotézu. Najmenšia je p-hodnota v prípade t-testu (0,003771), vyššia je u znamienkového testu (0,01563)a najvyššia je v prípade Wilcoxonovho testu (0,01751).

Uvedieme ešte jeden príklad, v ktorom sa na rozdiel od predchádzajúcich príkladov výsledky líšia.

Príklad 4. [8]
8 vzoriek chemickej látky sme analyzovali titračnou metódou aj polygraficky. Výsledky analýz sú v tabuľke. Zistite, či medzi výsledkami uvedených metód je podstatný rozdiel.

i (číslo vzorky)	1	2	3	4	5	6	7	8
Y_i (pol. met.)	18,6	27,6	27,5	25,0	24,5	26,8	29,7	26,5
Z_i (tit. met.)	18,58	27,37	27,27	24,64	24,10	26,33	29,33	26,63

Riešenie pomocou t-testu:
Najprv prevedieme výpočet podľa postupu uvedeného na začiatku tejto kapitoly, neskôr kvôli výpočtu presnej p-hodnoty použijeme aj program R.
Označme μ_1 strednú hodnotu $(Y_1, \ldots, Y_n)$ a μ_2 strednú hodnotu $(Z_1, \ldots, Z_n)$. Vytvoríme rozdiely

$$X_i = Y_i - Z_i,$$

označíme μ strednú hodnotu a zapíšeme do tabuľky:

i	1	2	3	4	5	6	7	8
X_i	0,02	0,23	0,23	0,36	0,40	0,47	0,37	-0,13
signX_i	+	+	+	+	+	+	+	-

Testujeme hypotézu

$$H_0 : \mu = 0$$

[8] [9], str. 179, príklad 18

proti alternatíve

$$H_1 : \mu \neq 0.$$

Vypočítame

$$\overline{X} = \frac{1}{8}\sum_{i=1}^{8} X_i = 0,24375$$

a

$$S^2 = \frac{1}{7}\sum_{i=1}^{8} (X_i - \overline{X})^2 = 0,0327986.$$

Dosadením dostaneme testovú štatistiku T

$$T = \frac{\bar{X} - \mu}{S}\sqrt{n} = 3,56,$$

ktorú porovnáme s kritickou hodnotou obojstranného t-testu na hladine $\alpha = 5\%$:

$$t_7(0,975) = 2,365.$$

Pretože

$$|T| \geq t_{n-1}(1 - \frac{\alpha}{2}),$$

zamietame H_0 na hladine $\alpha = 5\%$, teda medzi výsledkami metód je podstatný rozdiel.
Výpočet v programe R - najprv overíme normalitu dát, potom prevedieme t-test:

```
> a=c(0.02, 0.23, 0.23, 0.36, 0.40, 0.47, 0.37, -0.13)

> shapiro.test(a)

Shapiro-Wilk normality test

data: a
W = 0.8988, p-value = 0.2819
```

Normalita dát je na hladine $\alpha = 5\%$ splnená.

```
> t.test(a, alternative=,,two.sided‘‘, mu=0)

One Sample t-test

data: a
t = 3.3573, df = 7, p-value = 0.01213
alternative hypothesis: true mean is not equal to 0
95 percent confidence interval:
0.07207103 0.41542897
sample estimates:
```

```
mean of x
0.24375
```

Riešenie pomocou Wilcoxonovho testu
V R:

```
> wilcox.test(a, alternative="two.sided", mu=0)

Wilcoxon signed rank test with continuity correction

data: a
V = 34, p-value = 0.02977
alternative hypothesis: true location is not equal to 0

Warning message:
cannot compute exact p-value with ties in: wilcox.test.default(a,
alternative = "two.sided", mu = 0)
```

Aj Wilcoxonov test zamieta H_0.

Riešenie pomocou znamienkového testu
Spočítame počet kladných znamienok X_i a máme $n_+ = 7$. Podľa tabuľky kritických hodnôt sú kritické hodnoty pre $n = 8$ na hladine $\alpha = 5\%$

$$k_1 = 0, \quad k_2 = 8.$$

Keďže n_+ sa nachádza ostro medzi týmito dvoma hodnotami, nezamietame hypotézu H_0 na hladine $\alpha = 5\%$.
Vypočítame ešte p-hodnotu - pomocou tabuliek, napr. v Lehmann, D'Abrera [7], str. 416–417. P - hodnota je rovná $0,0704$.
Jediný znamienkový test nezamieta nulovú hypotézu na hladine $\alpha = 5\%$.

Podľa Lehmann, D'Abrera [7], str. 172–174, je pri splnenej normalite dát sila Wilcoxonovho testu len o málo nižšia než sila t-testu, oba testy sú ale výrazne silnejšie než znamienkový test, dokonca aj pre malé hodnoty n. Avšak aby sme mohli použiť t- test alebo Wilcoxonov test, potrebujem kvantitatívne porovnania, pričom k použitiu znamienkového testu nám stačia len kvalitatívne porovnania. Práve použiteľnosť znamienkového testu, ked máme k dispozícii len "znamienka", je pravdepodobne jeho najväčšou prednosťou.

Literatura

[1] Anděl J.: *Základy matematické statistiky*, Preprint, Matematicko - fyzikální fakulta Univerzity Karlovy, Praha, 2002.

[2] Bennett B. M. (1962): *On Multivariate Sign Tests*, Journal of the Royal Statistical Society, **24** (1962), 159 –161.

[3] Coakley C. W., Heise M. A. (1996): *Versions of the Sign Test in the Presence of Ties*, Biometrics, **41** (1996), 1242 – 1251.

[4] Dixon W. J., Mood A. M. (1946): *The Statistical Sign Test*, Journal of the American Statistical Association, **41** (1946), 557 – 566.

[5] Dupač V., Hušková M.: *Pravděpodobnost a matematická statistika*, Karolinum, 2003.

[6] Jurečková J.: *Pořadové testy*, Státní pedagogické nakladatelství, Praha, 1981.

[7] Lehmann E. L., D'Abrera H. J. M.: *Nonparametrics: Statistical methods based on ranks*, Holden-Day Inc., San Francisco, 1975.

[8] Noether G. E.: *Nonparametrics: The Early Years - Impressions and Recollections*, The American Statistician, **38** (1984), 173–178.

[9] Potocký R., Kalas J., Komorník J., Lamoš F.: *Zbierka úloh z pravdepodobnosti a matematickej štatistiky*, Alfa, Bratislava, 1986.

[10] Putter J. (1955): *The Treatment of Ties in Some Nonparametric Tests*, Annals of Mathematical Statistics, **26** (1955), 368 – 386.

[11] R: www.r-project.org.

[12] Randles R. H. (2001): *On Neutral Responses (Zeros) in the Sign Test and Ties in the Wilcoxon - Mann - Whitney test*, The American Statistician **55** (2001), 96–101.

Obsah priloženého CD

bc_praca.pdf